Линейная алгебра
1 курс

Теория для экзамена 4 модуля

1. Дайте определение линейного функционала.

Отображение $f : V \to \mathbb{F}$ (где V – линейной пространство, $\mathbb{F}$ – поле, над которым рассматривается V) называется линейной формой (линейным функционалом), если $\forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{F}$:
1) $f(x + y) = f(x) + f(y)$;
2) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

2. Дайте определение сопряжённого пространства.

Пространством, сопряжённым (двойственным) к линейному пространству L, называется множество всех линейных функционалов на L с операциями сложения и умножения на число: $\forall x \in L, \forall \lambda \in \mathbb{F}$:
1) $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$;
2) $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$.
Обозначение: L^*.

3. Выпишите формулу для преобразования координат ковектора при переходе к другому базису.

Если координаты ковектора записаны в столбец:

$$[f]_{\mathbf{g}} = T^T_{\mathbf{e}\to\mathbf{g}} \cdot [f]_{\mathbf{e}}$$

4. Дайте определение взаимных базисов.

Базис $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ в линейном пространстве L и базис $f = (f^1, \dots, f^n)$ в сопряжённом пространстве L^* называются взаимными, если $f^i(e_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

5. Дайте определение биортогонального базиса.

Если отождествить евклидово пространство $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}^*$, то базис, взаимный к данному, называется биортогональным.

6. Дайте определение сопряжённого оператора в произвольном (не обязательно евклидовом) пространстве.

Любому линейному отображению $A : V_1 \to V_2$ (V_1, V_2 – линейные пространства) можно сопоставить сопряжённый оператор $A^* : V_2^* \to V_1^*$ по правилу $\forall v_1 \in V_1, \forall f_2 \in V_2^*$:

$$(A^* f_2)(v_1) = f_2(Av_1)$$

7. Сформулируйте определение алгебры над полем. Приведите два примера.

Пусть A – это векторное пространство над полем $\mathbb{F}$, снабжённое дополнительной операцией умножения $A \times A \to A$. Тогда A называется алгеброй над полем $\mathbb{F}$, если $\forall x, y, z \in A, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ выполнены следующие условия:
1) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$;
2) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$;
3) $(\alpha \cdot x) \cdot (\beta \cdot y) = (\alpha \cdot \beta) \cdot (x \cdot y)$.
Примеры: $\mathbb{C}$ – двумерная алгебра над $\mathbb{R}$; алгебра многочленов $\mathbb{F}[x]$.

8. Сформулируйте определение тензора. Приведите два примера.

Пусть есть поле $\mathbb{F}$ и векторное пространство V над этим полем, а так же V^*, сопряженное к V и

числа $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
$f : \underbrace{V\times, \ldots, \times V}_{p} \times \underbrace{V^*\times, \ldots, \times V^*}_{q} \to F$
Называется тензором на V типа (p, q) и валентности $p + q$.
Примеры: тензор типа (1, 0) - линейные функции на V, то есть элементы V^*; тензор типа (2, 0) - билинецная форма; тензор типа (1, 1) можно интерпретировать как линейный оператор.

9. Дайте определение эллипса как геометрического места точек. Выпишите его каноническое уравнение. Что такое эксцентриситет эллипса? В каких пределах он может меняться?
Эллипсом называют геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, постоянна.
Каноническое уравнение: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Эксцентриситет: $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}$, a - большая полуось, а b - малая. Служит мерой "сплюснутости"эллипса.
Причём $\varepsilon \in [0, 1)$. При $\varepsilon = 0$ эллипс превращается в окружность.

10. Дайте определение гиперболы как геометрического места точек. Выпишите её каноническое уравнение. Что такое эксцентриситет гиперболы? В каких пределах он может меняться?
Гиперболой называют геометрическое место точек, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, постоянен.
Каноническое уравнение: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Эксцентриситет: $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}$; характеризует угол между асимптотами.
Причём $\varepsilon \in (1, +\infty)$. При $\varepsilon \to 1$ гипербола вырождается в 2 луча.

11. Дайте определение параболы как геометрического места точек. Выпишите её каноническое уравнение.
Параболой называют геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки (фокуса) и от данной прямой (директрисы).
Каноническое уравнение: $y^2 = 2px$

12. Сформулируйте теорему о классификации кривых второго порядка.
$\forall$ кривой второго порядка $\exists$ прямоугольная декартова система координат Oxy, в которой уравнение этой кривой имеет один из следующих видов:

Эллиптический тип:

1	2	3
эллипс	пустое множество	точка
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a \geq b > 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$

Гиперболический тип:

4	5
гипербола	пара пересекающихся прямых
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a > 0, b > 0$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$

Параболический тип:

6	7	8	9
парабола	пара $\parallel$ прямых	пустое множество	прямая
$y^2 = 2px$	$y^2 = d, d > 0$	$y^2 = -d, d > 0$	$y^2 = 0$

13. Дайте определение цилиндрической поверхности.
Рассмотрим кривую γ, лежащую в некоторой плоскости P, и прямую L, не лежащую в P. Цилиндрической поверхностью называют множество всех прямых, параллельных L и пересекающих γ.

14. Дайте определение линейчатой поверхности. Приведите три примера.
Линейчатой называют поверхность, образованную движением прямой линии.
Любой цилиндр является линейчатой поверхностью.
Примеры: эллиптический цилиндр, гиперболический цилиндр, параболический цилиндр.

15. Запишите канонические уравнения эллиптического, гиперболического и параболического цилиндров.
Эллиптический цилиндр: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Гиперболический цилиндр: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Параболический цилиндр: $y^2 = 2px$

16. Запишите канонические уравнения эллипсоида, однополостного гиперболоида, двуполостного гиперболоида.
Эллипсоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
Однополостный гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
Двуполостный гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$

17. Запишите канонические уравнения эллиптического параболоида, гиперболического параболоида.
Эллиптический параболоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$
Гиперболический параболоид: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$