

Линейная алгебра

1 курс

Теория для экзамена 4 модуля

1. Дайте определение линейного функционала.

Отображение $f : V \rightarrow \mathbb{F}$ (где V – линейное пространство, а \mathbb{F} – поле, над которым рассматривается V) называется линейной формой (линейным функционалом), если $\forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{F}$:

- 1) $f(x + y) = f(x) + f(y)$;
- 2) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

2. Дайте определение сопряжённого пространства.

Пространством, сопряжённым (двойственным) к линейному пространству L , называется множество всех линейных функционалов на L с операциями сложения и умножения на число: $\forall x \in L, \forall \lambda \in \mathbb{F}$:

- 1) $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$;
- 2) $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$.

Обозначение: L^* .

3. Выпишите формулу для преобразования координат ковектора при переходе к другому базису.

Пусть \mathbf{e} и \mathbf{g} – два базиса в V . Тогда $[f]_{\mathbf{g}} = [f]_{\mathbf{e}} \cdot T_{\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{g}}$ (если записать координаты по строкам). (Если записать координаты по столбцам, то формула принимает вид $[f]_{\mathbf{g}} = T_{\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{g}}^T \cdot [f]_{\mathbf{e}}$.)

4. Дайте определение взаимных базисов.

Базис $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ в линейном пространстве L и базис $\mathbf{f} = (f^1, \dots, f^n)$ в сопряжённом пространстве L^* называются взаимными, если $f^i(e_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$.

5. Дайте определение биортогонального базиса.

Если отождествить евклидово пространство \mathcal{E} и \mathcal{E}^* , то базис, взаимный к данному, называется биортогональным.

6. Дайте определение сопряжённого оператора в произвольном (не обязательно евклидовом) пространстве.

Любому линейному отображению $A : V_1 \rightarrow V_2$ (V_1, V_2 – линейные пространства) можно сопоставить сопряжённый оператор $A^* : V_2^* \rightarrow V_1^*$ по правилу $\forall v_1 \in V_1, \forall f_2 \in V_2^*$:

$$(A^* f_2)(v_1) = f_2(A v_1)$$

7. Сформулируйте определение алгебры над полем. Приведите два примера.

Пусть A – это векторное пространство над полем \mathbb{F} , снабжённое дополнительной операцией умножения $A \times A \rightarrow A$. Тогда A называется алгеброй над полем \mathbb{F} , если $\forall x, y, z \in A, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ выполнены следующие условия:

- 1) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$;
- 2) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$;
- 3) $(\alpha \cdot x) \cdot (\beta \cdot y) = (\alpha \cdot \beta) \cdot (x \cdot y)$.

Примеры: \mathbb{C} – двумерная алгебра над \mathbb{R} ; алгебра многочленов $\mathbb{F}[x]$; кватернионы \mathbb{H} .

8. Сформулируйте определение тензора. Приведите два примера.

Пусть \mathbb{F} – поле, V – векторное пространство над этим полем, а V^* – пространство, сопряжённое к V ; $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда любое полилинейное отображение $f : \underbrace{V \times \dots \times V}_p \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_q \rightarrow \mathbb{F}$

называется тензором на V типа (p, q) и валентности $p + q$.

Примеры: тензор типа $(1, 0)$ – линейные функции на V , т.е. элементы V^* , т.е. коверкторы;

тензор типа $(0, 1)$ – линейная функция на V^* , но между V и $(V^*)^*$ существует изоморфизм \Rightarrow это вектор;

тензор типа $(2, 0)$ – билинейная форма на V ;

тензор типа $(1, 1)$ – можно интерпретировать как линейный оператор.

9. Дайте определение эллипса как геометрического места точек. Выпишите его каноническое уравнение. Что такое эксцентриситет эллипса? В каких пределах он может меняться?

Эллипсом называют геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, постоянна.

Каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Эксцентриситет: $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$. Здесь a – большая полуось, b – малая полуось. Эксцентриситет служит мерой «сплюснутости» эллипса.

Эксцентриситет ε лежит в интервале $[0, 1)$. При $\varepsilon = 0$ эллипс превращается в окружность.

10. Дайте определение гиперболы как геометрического места точек. Выпишите её каноническое уравнение. Что такое эксцентриситет гиперболы? В каких пределах он может меняться?

Гиперболой называют геометрическое место точек, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, постоянен.

Каноническое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Эксцентриситет: $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$. Здесь a – действительная полуось, b – мнимая полуось. Эксцентриситет характеризует угол между асимптотами.

Эксцентриситет ε лежит в интервале $(1, +\infty)$. При $\varepsilon \rightarrow 1$ гипербола вырождается в два луча.

11. Дайте определение параболы как геометрического места точек. Выпишите её каноническое уравнение.

Параболой называют геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от данной точки (фокуса) и от данной прямой (директрисы).

Каноническое уравнение параболы: $y^2 = 2px$.

12. Сформулируйте теорему о классификации кривых второго порядка.

Для любой кривой второго порядка существует прямоугольная декартова система координат Oxy , в которой уравнение этой кривой имеет один из следующих видов:

Эллиптический тип		
1	2	3
эллипс	пустое множество	точка
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a \geq b > 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$

Гиперболический тип	
4	5
гипербола	пара пересекающихся прямых
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a > 0, b > 0$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$

Параболический тип			
6	7	8	9
парабола	пара параллельных прямых	пустое множество	прямая
$y^2 = 2px$	$y^2 = d, d > 0$	$y^2 = -d, d > 0$	$y^2 = 0$

13. Дайте определение цилиндрической поверхности.

Рассмотрим кривую γ , лежащую в некоторой плоскости P , и прямую L , не лежащую в P .

Цилиндрической поверхностью называют множество всех прямых, параллельных L и пересекающих γ .

14. Дайте определение линейчатой поверхности. Приведите три примера.

Линейчатой называют поверхность, образованную движением прямой линии.

Примеры: эллиптический цилиндр, гиперболический цилиндр, параболический цилиндр.

15. Запишите канонические уравнения эллиптического, гиперболического и параболического цилиндров.

Эллиптический цилиндр:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Гиперболический цилиндр:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Параболический цилиндр:

$$y^2 = 2px$$

16. Запишите канонические уравнения эллипсоида, однополостного гиперboloида, двуполостного гиперboloида.

Эллипсоид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Однополостный гиперboloид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Двуполостный гиперboloид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

17. Запишите канонические уравнения эллиптического параболоида, гиперболического параболоида.

Эллиптический параболоид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

Гиперболический параболоид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$