

Линейная алгебра

1 курс

Теория для экзамена 4 модуля

1. Дайте определение линейного функционала.

Отображение $f : V \rightarrow \mathbb{F}$ (где V – линейное пространство, \mathbb{F} – поле, над которым рассматривается V) называется линейной формой (линейным функционалом), если $\forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{F}$:

- 1) $f(x + y) = f(x) + f(y)$;
- 2) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

2. Дайте определение сопряжённого пространства.

Пространством, сопряжённым (двойственным) к линейному пространству L , называется множество всех линейных функционалов на L с операциями сложения и умножения на число: $\forall x \in L, \forall \lambda \in \mathbb{F}$:

- 1) $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$;
- 2) $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$.

Обозначение: L^* .

3. Выпишите формулу для преобразования координат ковектора при переходе к другому базису.

Если координаты ковектора записаны в столбец:

$$[f]_{\mathbf{g}} = T_{\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{g}}^T \cdot [f]_{\mathbf{e}}$$

4. Дайте определение взаимных базисов.

Базис $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ в линейном пространстве L и базис $f = (f^1, \dots, f^n)$ в сопряжённом пространстве L^* называются взаимными, если $f^i(e_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

5. Дайте определение биортогонального базиса.

Если отождествить евклидово пространство \mathcal{E} и \mathcal{E}^* , то базис, взаимный к данному, называется биортогональным.

6. Дайте определение сопряжённого оператора в произвольном (не обязательно евклидовом) пространстве.

Любому линейному отображению $A : V_1 \rightarrow V_2$ (V_1, V_2 – линейные пространства) можно сопоставить сопряжённый оператор $A^* : V_2^* \rightarrow V_1^*$ по правилу $\forall v_1 \in V_1, \forall f_2 \in V_2^*$:

$$(A^* f_2)(v_1) = f_2(A v_1)$$

7. Сформулируйте определение алгебры над полем. Приведите два примера.

Пусть A – это векторное пространство над полем \mathbb{F} , снабжённое дополнительной операцией умножения $A \times A \rightarrow A$. Тогда A называется алгеброй над полем \mathbb{F} , если $\forall x, y, z \in A, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ выполнены следующие условия:

- 1) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$;
- 2) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$;
- 3) $(\alpha \cdot x) \cdot (\beta \cdot y) = (\alpha \cdot \beta) \cdot (x \cdot y)$.

Примеры: \mathbb{C} – двумерная алгебра над \mathbb{R} ; алгебра многочленов $\mathbb{F}[x]$.

8. Сформулируйте определение тензора. Приведите два примера.

Пусть есть поле \mathbb{F} и векторное пространство V над этим полем, а так же V^* , сопряжённое к V и

числа $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$f : \underbrace{V \times \dots \times V}_p \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_q \rightarrow F$$

Называется тензором на V типа (p, q) и валентности $p + q$.

Примеры: тензор типа $(1, 0)$ - линейные функции на V , то есть элементы V^* ; тензор типа $(2, 0)$ - билинейная форма; тензор типа $(1, 1)$ можно интерпретировать как линейный оператор.

9. Дайте определение эллипса как геометрического места точек. Выпишите его каноническое уравнение. Что такое эксцентриситет эллипса? В каких пределах он может меняться?

Эллипсом называют геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, постоянна.

Каноническое уравнение: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Эксцентриситет: $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, a - большая полуось, b - малая. Служит мерой "сплюснутости" эллипса.

Причём $\varepsilon \in [0, 1)$. При $\varepsilon = 0$ эллипс превращается в окружность.

10. Дайте определение гиперболы как геометрического места точек. Выпишите её каноническое уравнение. Что такое эксцентриситет гиперболы? В каких пределах он может меняться?

Гиперболой называют геометрическое место точек, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, постоянен.

Каноническое уравнение: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Эксцентриситет: $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}$; характеризует угол между асимптотами.

Причём $\varepsilon \in (1, +\infty)$. При $\varepsilon \rightarrow 1$ гипербола вырождается в 2 луча.

11. Дайте определение параболы как геометрического места точек. Выпишите её каноническое уравнение.

Параболой называют геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки (фокуса) и от данной прямой (директрисы).

Каноническое уравнение: $y^2 = 2px$

12. Сформулируйте теорему о классификации кривых второго порядка.

\forall кривой второго порядка \exists прямоугольная декартова система координат Oxy , в которой уравнение этой кривой имеет один из следующих видов:

| | | | | | |
|---|------------------|--|-------------------|---|-----------|
| 1 | | 2 | | 3 | |
| эллипс | | пустое множество | | точка | |
| $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a \geq b > 0$ | | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ | | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ | |
| 4 | | 5 | | | |
| гипербола | | пара пересекающихся прямых | | | |
| $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a > 0, b > 0$ | | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ | | | |
| 6 | 7 | | 8 | | 9 |
| парабола | пара прямых | | пустое множество | | прямая |
| $y^2 = 2px$ | $y^2 = d, d > 0$ | | $y^2 = -d, d > 0$ | | $y^2 = 0$ |

13. Дайте определение цилиндрической поверхности.

Рассмотрим кривую γ , лежащую в некоторой плоскости P , и прямую L , не лежащую в P .

Цилиндрической поверхностью называют множество всех прямых, параллельных L и пересекающих γ .

14. Дайте определение линейчатой поверхности. Приведите три примера.

Линейчатой называют поверхность, образованную движением прямой линии.

Любой цилиндр является линейчатой поверхностью.

Примеры: эллиптический цилиндр, гиперболический цилиндр, параболический цилиндр.

15. Запишите канонические уравнения эллиптического, гиперболического и параболического цилиндров.

Эллиптический цилиндр: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Гиперболический цилиндр: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Параболический цилиндр: $y^2 = 2px$

16. Запишите канонические уравнения эллипсоида, однополостного гиперboloида, двуполостного гиперboloида.

Эллипсоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Однополостный гиперboloид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Двуполостный гиперboloид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$

17. Запишите канонические уравнения эллиптического параболоида, гиперболического параболоида.

Эллиптический параболоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$

Гиперболический параболоид: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$