Линейная Алгебра
1 курс

Теория для экзамена 4 модуля

1. Дайте определение линейного функционала.

2. Дайте определение сопряженного пространства.

3. Выпишите формулу для преобразования координат ковектора при переходе к другому базису.

4. Дайте определение взаимных базисов.

5. Дайте определение биортогонального базиса.

6. Дайте определение сопряженного оператора в произвольном (не обязательно евклидовом) пространстве.

7. Сформулируйте определение алгебры над полем. Приведите два примера.

8. Сформулируйте определение тензора. Приведите два примера.
Пусть есть поле F и векторное пространство V над этим полем, а так же V^*, сопряженное к V и числа $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
$f : \underbrace{V \times, \ldots, \times V}_{p} \times \underbrace{V^* \times, \ldots, \times V^*}_{q} \to F$
Называется тензором на V типа (p, q) и валентности $p + q$.

9. Дайте определение эллипса как геометрического места точек. Выпишите его каноническое уравнение. Что такое эксцентриситет эллипса? В каких пределах он может меняться?
Эллипсом называют геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, постоянна.
Каноническое уравнение: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Эксцентриситет: $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}$, a - большая полуось, а b - малая.
Причём $\varepsilon \in [0, 1)$

10. Дайте определение гиперболы как геометрического места точек. Выпишите её каноническое уравнение. Что такое эксцентриситет гиперболы? В каких пределах он может меняться?
Гиперболой называют геометрическое место точек, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, постоянен.
Каноническое уравнение: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Эксцентриситет: $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}$
Причём $\varepsilon \in (1, +\infty)$

11. Дайте определение параболы как геометрического места точек. Выпишите её каноническое уравнение.
Параболой называют геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки (фокуса) и от данной прямой (директрисы).
Каноническое уравнение: $y^2 = 2px$

12. Сформулируйте теорему о классификации кривых второго порядка.
$\forall$ кривой второго порядка $\exists$ прямоугольная декартова система координат Oxy, в которой уравнение этой кривой имеет один из следующих видов:

1	2	3
эллипс	пустое множество	точка
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a \geq b > 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$

4	5
гипербола	пара пересекающихся прямых
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a > 0, b > 0$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$

13. Дайте определение цилиндрической поверхности.
Рассмотрим кривую γ, лежащую в некоторой плоскости P, и прямую L, не лежащую в P. Цилиндрической поверхностью называют множество всех прямых, параллельных L и пересекающих γ.

14. Дайте определение линейчатой поверхности. Приведите три примера.
Линейчатой называют поверхность, образованную движением прямой линии.
Любой цилиндр является линейчатой поверхностью.
Примеры: эллиптический цилиндр, гиперболический цилиндр, параболический цилиндр.

15. Запишите канонические уравнения эллиптического, гиперболического и параболического цилиндров.
Эллиптический цилиндр: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Гиперболический цилиндр: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Параболический цилиндр: $y^2 = 2px$

16. Запишите канонические уравнения эллипсоида, однополостного гиперболоида, двуполостного гиперболоида.
Эллипсоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
Однополостный гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
Двуполостный гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$

17. Запишите канонические уравнения эллиптического параболоида, гиперболического параболоида.
Эллиптический параболоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$
Гиперболический параболоид: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$