Задачи для подготовки к экзамену по курсу «Алгебра», 4-ой модуль 2020/2021-го учебного года.
Версия 1. 15 июня 2021 г.

1. (а) Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 12 & -8 \end{pmatrix}$. Можно ли привести ее к диагональному виду, перейдя к подходящему базису?
(б) Вычислить матрицу $A^n, n \in N$.

2. Найти матрицу линейного оператора, переводящего векторы $a_1 = (2,5)^T, a_2 = (1,3)^T$, соответственно в векторы $b_1 = (7,-4)^T, b_2 = (2,-1)^T$ в базисе, в котором даны координаты векторов.

3. В базисе $e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ линейный оператор ϕ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора ϕ в базисе $\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Можно ли найти базис из собственных векторов для матрицы A? В случае положительного ответа найти этот базис, в случае отрицательного, объяснить почему это невозможно.
$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Линейный оператор переводит вектор $a_1 = (-1,0)^T$ в вектор $b_1 = (5,5)^T$, а вектор $a_2 = (1,1)^T$ в вектор $b_1 = (-2,-3)^T$. 1) В какое множество перейдет прямая, заданная уравннение $2x_1 - x_2 = -2$? 2) Какое множество переходит в эту прямую? 3) Написать уравнения тех прямых, которые переходят сами в себя.

6. Найти базис ядра и базис образа линейного отображения $\phi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, заданного матрицей $A_\phi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 9 & -14 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -9 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Является ли отображение сюръективным?

7. Представить невырожденную матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ в виде произведения ортогональной матрицы Q на верхнетреугольную матрицу R.

8. Постройте сингулярное разложение для матрицы:
$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 \\ 8 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 5 \\ -4 & -7 & -5 \end{pmatrix}$.

9. Пусть в некотором ортонормированном базисе трёхмерного евклидова пространства заданы векторы $e_1 = (0,1,1)^T, e_2 = (-1,-1,1)^T, e_3 = (1,0,1)^T$. Пусть оператор f задан матрицей $A_f = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ в базисе e_1, e_2, e_3. Найти матрицу A_{f^*} сопряженного оператора f^* в том же базисе.

10. В трехмерном евклидовом пространстве ϵ базис s имеет матрицу Грама

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Векторы базиса $\mathbf{e}$ заданы своими координатами в базисе s:

$$[e_1]_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad [e_2]_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [e_3]_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найти биортогональный к базису $\mathbf{e}$ базис $\mathbf{f}$, записав его координаты в базисе s.

11. Найдите базис, двойственный к базису $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ пространства матриц $M_2(\mathbb{R})$. Чему равно значение каждой функции из двойственного базиса на произвольной матрице из $M_2(\mathbb{R})$?

12. Пусть e_1, e_2, e_3 — базис пространства V, $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3$ — двойственный ему базис пространства V^*.
а) Найдите базис V^*, двойственный к базису $2e_1 + e_3$, $e_1 + e_2 + e_3$, e_2 пространства V. б) Найдите базис V, для которого базис $2\varepsilon^1 + \varepsilon^3$, $\varepsilon^1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^3$, ε^2 — двойственный.

13. Привести квадратичную форму $k = x_1^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 5x_3^2$ к каноническому виду посредством ортогональной замены координат. Определить ранг и индексы инерции. Указать соответствующее линейное преобразование.

14. Уравнение $5x^2 + 2y^2 + 4xy + 4\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y - 14 = 0$ линии второго порядка на плоскости привести к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования и сдвига, указав:

    а) одно из преобразований перехода от заданной системы координат к канонической системе координат,

    б) канонический вид уравнения линии.
    в) Определить тип кривой. На плоскости построить каноническую систему координат, в которой схематично изобразить кривую.

15. Эллипс проходит через точку $C(0; -1 + \sqrt{20})$, его большая ось оканчивается вершинами $A(-2; 5)$, $B(-2; -7)$. Написать уравнение кривой, уравнение нижней части эллипса в системе Oxy. Указать большую и малую полуоси, найти эксцентриситет и сделать эскиз.

16. Определить тип поверхности второго порядка, назвать её и сделать эскиз:
    а) $x^2 + z^2 - y^2 = 1$
    б) $y^2 = -2x$.

По задачнику Проскурякова:
1098, 1102, 1134, 1135, 1370, 1374 а), 1530, 1534, 1542, 1558, 1571, 1586, 1598, 1600, 1842.

По задачнику Ким и Крицкова, том I:
35.24 2), 6), 14), 35.27 1), 10), 11), 35.28, 36.18, 36.45, 37.1, 38.10 1), 4), 38.12 3), 9).

По задачнику Кострикина:
36.9 (возьмите $n = 3$), 36.10, 45.19 а), д), е).

По задачнику Ким и Крицкова, том II:
63.15 а), б), 63.42 ж).