Линейная алгебра
1 курс

Теория для экзамена 4 модуля

1. Дайте определение линейного функционала.
Отображение $f : V \to \mathbb{F}$ (где V – линейное пространство, а $\mathbb{F}$ – поле, над которым рассматривается V) называется линейной формой (линейным функционалом), если $\forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{F}$:
1) $f(x + y) = f(x) + f(y)$;
2) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

2. Дайте определение сопряжённого пространства.
Пространством, сопряжённым (двойственным) к линейному пространству L, называется множество всех линейных функционалов на L с операциями сложения и умножения на число: $\forall x \in L, \forall \lambda \in \mathbb{F}$:
1) $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$;
2) $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$.
Обозначение: L^*.

3. Выпишите формулу для преобразования координат ковектора при переходе к другому базису.
Пусть $\mathbf{e}$ и $\mathbf{g}$ – два базиса в V. Тогда $[f]_{\mathbf{g}} = [f]_{\mathbf{e}} \cdot T_{\mathbf{e}\to\mathbf{g}}$ (если записать координаты по строкам). (Если записать координаты по столбцам, то формула принимает вид $[f]_{\mathbf{g}} = T^T_{\mathbf{e}\to\mathbf{g}} \cdot [f]_{\mathbf{e}}$.)

4. Дайте определение взаимных базисов.
Базис $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ в линейном пространстве L и базис $\mathbf{f} = (f^1, \dots, f^n)$ в сопряжённом пространстве L^* называются взаимными, если $f^i(e_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$.

5. Дайте определение биортогонального базиса.
Если отождествить евклидово пространство $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}^*$, то базис, взаимный к данному, называется биортогональным.

6. Дайте определение сопряжённого оператора в произвольном (не обязательно евклидовом) пространстве.
Любому линейному отображению $A : V_1 \to V_2$ (V_1, V_2 – линейные пространства) можно сопоставить сопряжённый оператор $A^* : V_2^* \to V_1^*$ по правилу $\forall v_1 \in V_1, \forall f_2 \in V_2^*$:

$$(A^* f_2)(v_1) = f_2(A v_1)$$

7. Сформулируйте определение алгебры над полем. Приведите два примера.
Пусть A – это векторное пространство над полем $\mathbb{F}$, снабжённое дополнительной операцией умножения $A \times A \to A$. Тогда A называется алгеброй над полем $\mathbb{F}$, если $\forall x, y, z \in A, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ выполнены следующие условия:
1) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$;
2) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$;
3) $(\alpha \cdot x) \cdot (\beta \cdot y) = (\alpha \cdot \beta) \cdot (x \cdot y)$.
Примеры: $\mathbb{C}$ – двумерная алгебра над $\mathbb{R}$; алгебра многочленов $\mathbb{F}[x]$; кватернионы $\mathbb{H}$.

8. Сформулируйте определение тензора. Приведите два примера.
Пусть $\mathbb{F}$ – поле, V – векторное пространство над этим полем, а V^* – пространство, сопряжённое к V; $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда любое полилинейное отображение $f : \underbrace{V \times \dots \times V}_{p} \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{q} \to \mathbb{F}$

называется тензором на V типа (p, q) и валентности $p+q$.
Примеры: тензор типа $(1,0)$ – линейные функции на V, т.е. элементы V^*, т.е. ковекторы;
тензор типа $(0,1)$ – линейная функция на V^*, но между V и $(V^*)^*$ существует изоморфизм $\Rightarrow$ это вектор;
тензор типа $(2,0)$ – билинейная форма на V;
тензор типа $(1,1)$ – можно интерпретировать как линейный оператор.

9. Дайте определение эллипса как геометрического места точек. Выпишите его каноническое уравнение. Что такое эксцентриситет эллипса? В каких пределах он может меняться?

Эллипсом называют геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, постоянна.
Каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
Эксцентриситет: $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$. Здесь a – большая полуось, b – малая полуось. Эксцентриситет служит мерой «сплюснутости» эллипса.
Эксцентриситет ε лежит в интервале $[0,1)$. При $\varepsilon=0$ эллипс превращается в окружность.

10. Дайте определение гиперболы как геометрического места точек. Выпишите её каноническое уравнение. Что такое эксцентриситет гиперболы? В каких пределах он может меняться?

Гиперболой называют геометрическое место точек, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, постоянен.
Каноническое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
Эксцентриситет: $\varepsilon=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$. Здесь a – действительная полуось, b – мнимая полуось. Эксцентриситет характеризует угол между асимптотами.
Эксцентриситет ε лежит в интервале $(1,+\infty)$. При $\varepsilon \to 1$ гипербола вырождается в два луча.

11. Дайте определение параболы как геометрического места точек. Выпишите её каноническое уравнение.

Параболой называют геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от данной точки (фокуса) и от данной прямой (директрисы).
Каноническое уравнение параболы: $y^2=2px$.

12. Сформулируйте теорему о классификации кривых второго порядка.

Для любой кривой второго порядка существует прямоугольная декартова система координат Oxy, в которой уравнение этой кривой имеет один из следующих видов:

Эллиптический тип

1	2	3
эллипс	пустое множество	точка
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, a \geq b>0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$

Гиперболический тип

4	5
гипербола	пара пересекающихся прямых
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, a>0, b>0$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$

Параболический тип

6	7	8	9
парабола	пара параллельных прямых	пустое множество	прямая
$y^2=2px$	$y^2=d, d>0$	$y^2=-d, d>0$	$y^2=0$

13. Дайте определение цилиндрической поверхности.

Рассмотрим кривую γ, лежащую в некоторой плоскости P, и прямую L, не лежащую в P.

Цилиндрической поверхностью называют множество всех прямых, параллельных L и пересекающих γ.

14. Дайте определение линейчатой поверхности. Приведите три примера.
Линейчатой называют поверхность, образованную движением прямой линии.
Примеры: эллиптический цилиндр, гиперболический цилиндр, параболический цилиндр.

15. Запишите канонические уравнения эллиптического, гиперболического и параболического цилиндров.
Эллиптический цилиндр:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Гиперболический цилиндр:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Параболический цилиндр:

$$y^2 = 2px$$

16. Запишите канонические уравнения эллипсоида, однополостного гиперболоида, двуполостного гиперболоида.
Эллипсоид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Однополостный гиперболоид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Двуполостный гиперболоид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

17. Запишите канонические уравнения эллиптического параболоида, гиперболического параболоида.
Эллиптический параболоид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

Гиперболический параболоид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$