Экзамен ДМ ПИ за прошлый год

4. Пусть множество A бесконечно. Обязательно ли существует инъекция $f\colon A \to \mathcal{P}(A)$, такая что при каждом $x \in A$ множество $f(x)$ бесконечно?

5. Пусть W — множество всех конечных непустых слов, составленных из русских букв (слова не всегда осмыслены). На множестве W задано отношение порядка $\leqslant$, где $x \leqslant y$ означает, что слово x является началом слова y (возможно они совпадают; в частности, а $\leqslant$ аб $\leqslant$ аб $\leqslant$ абак). Пусть, с другой стороны, $\mathcal{P}^*_f(X)$ есть множество всех конечных непустых подмножеств некоторого счетного множества X. Может ли быть так, что ч. у. м. $(W, \leqslant)$ и $(\mathcal{P}^*_f(X), \subseteq)$ изоморфны друг другу?

6. Из колоды в 52 карты (4 масти по 13 достоинств) берут пять таких карт, что их можно расположить по возрастанию достоинства без пропусков (например, могли взять «тройку», «четверку», «пятерку», «семерку» и «шестерку»). Сколько есть таких (неупорядоченных) выборок из пяти карт?

7. Можно ли на плоскости нарисовать 20 прямых и 19 окружностей таким образом, что каждая окружность пересекается ровно с 6 прямыми, а все прямые имеют пересечение с одинаковым числом окружностей?

Пусть конечное множество A имеет мощность n. Сколько существует различных рефлексивных бинарных отношений на множестве A?

Ответ: 2^(n*n-n)

Всего у нас 2^(n*n) различных отношений, так как какая либо пара (x,y) может входить или не входить в отношение, а таких пар n*n. Но у нас однозначно входят по определению рефлексивности все пары вида (x,x), а таких ровно n. Значит, всего есть n*n-n элементов остальных из AxA, которые могут входить или не входить в отношение. Их всего 2^(n*n-n).

Сколькими способами можно разложить 42 (неразличимых) шара по 10 различным ящикам таким образом, чтобы в любых двух разных ящиках оказалось разное число шаров?

Рассмотрим наименьший возможный случай: положим в 1 ящик 0 шаров, 2 ящик 1 шар и тд. В 10 ящике будет 9 шаров. Во всех ящиках разное количество шаров - 0, 1, ... , 9. В сумме это даст 0+1+...+9=45. То есть минимальное возможное количество шаров для 10 ящиков будет 45. Но у нас 42 шара, что меньше 45. Значит таких способов не существует для 42 шаров.

Рассмотрим множество A = {0, 1, 2, 3} и на нем бинарное отношение R = { (0, 1), (1, 3), (3, 3), (2, 3), (2, 0), (0, 3) }. Выберите среди приведеных ВСЕ свойства, которым удовлетветворяет R.

рефлексивно для некоторого непустого подмножества множества A, антисимметрично, некоторое его подмножество иррефлексивно

Пусть < означает естественный (строгий) порядок на множестве \R. Рассмотрим отношение Q на множестве A = [0,1] x [0,1] (т.е. на квадрате), такое что (x, y) Q (a, b) равносильно (x < a И y < b). Верно ли, что Q — строгий частичный порядок на множестве A? Если верно, то найдите max_Q A, т.е. множество элементов A, максимальных в смысле такого порядка.

Пусть А некоторое множество, а P и Q — отношения эквивалентности на нем. Всегда ли отношение P U Q является эквивалентностью на A?

рефлексивно для некоторого непустого подмножества множества А, антисимметрично, некоторое его подмножество иррефлексивно

Да, Q - строгий частичный порядок на множестве А

Доказательство:

1) Транзитивность

Возьмем любые 3 пары: (a,b), (c,d), (x,y)

(a, b) Q (c,d) И (c, d) Q (e, f) => (a < c И b < d) И (c < e И d < f)

Из этого получим a < c < e И b < d < f

Значит a < e И b < f т.е. (a, b) Q (e, f)

Транзитивность доказана

2) Иррефлективность

Возьмем любую пару (a, b)

¬((x, y) Q (x, y)) - выполняется, так как x < x И y < y не выполняется

Иррефлективность доказана

Теперь найдем максимум:

Пара M (xMax, yMax) называется максимальной, если не существует другой пары A (a,b) принадлежащей данному множеству такой, что M Q A выполняется.

Получается, пары (a, b) такой, что (xMax, yMax) Q (a, b) выполняется, не должно существовать.

Значит пары (a, b) такой, что ((a < xMax) И (b < yMax)) не существует

Значит, хотя бы одна из координат xMax или yMax является 1.

Подходят все пары вида (x, 1) или (1, y) для x, y \in [0,1]

Ответ: нет.

Рассмотрим контрпример:

A = {1, 2, 3}

P = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)}

Q = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3), (3, 1)}

Но (2, 1) и (1, 3) лежат в P U Q, а (2, 3) не лежит в их объединении, то есть транзитивность не выполняется.

Значит, объединение не будет эквивалентностью.
