Text, letter

Description automatically generated

Background pattern

Description automatically generated with low confidence

Дискретная математика ПИ

Листок 10. Порядки и эквивалентности.

1. Рассмотрим отношение R = {(0, 1),(0, 2),(2, 2)}. Является ли оно (ир)рефлексивным, (анти)симметричным, транзитивным?

————————————————————————————————————————

* A picture containing text, sky, hanger, outdoor

  Description automatically generated Не рефлексивным, так как не везде есть петли(путь в самого себя).
* Не является иррефлексивным, так как есть 1 петля (у двойки).
* Не симметрично, потому что нет стрелки из 1 в 0, а из 0 в (ир)рефлексивным 1 есть.
* Антисимметричной, потому что есть только **1** стрелка туда и обратно, и это 1 точка (точка 2).
* Транзитивно ли? То есть ли путь из 2 стрелок, такой что его нельзя заменить на 1 стрелку? Не транзитивность . Имеем и . Транзитивность имеет место.

————————————————————————————————————————

1. Как устроены отношения, одновременно симметричные и антисимметричные?

————————————————————————————————————————

A picture containing letter

Description automatically generated Есть ; R симметрично и антисимметрично. Как устроено R? Если взять петлю в какой-то точке, то это отношение симметрично и антисимметрично. Если же добавить точку (без петель, то ничего не поменяется). То же самое будет если добавить точку с петлей (отношением в саму себя)

Хочу

Пусть . Тогда (симметрично) x = y. Антисимметричность

В обратную сторону:

Дано

Хотим R симметрично и антисимметрично.

(так как это 1 точка). Симметричность доказана.

. Антисимметричность доказана.

Ответ: (x, y) - множество петель. То есть

————————————————————————————————————————

1. Отношение вида R−1 ◦ R всегда симметрично.

————————————————————————————————————————

Хотим:

————————————————————————————————————————

1. Пусть P и Q симметричны. Тогда отношение P ◦ Q симметрично, если и только если P ◦ Q = Q ◦ P.

————————————————————————————————————————

Text, letter

Description automatically generatedДано: ,

симметрично

P и Q симметричны, а симметричность эквивалентна тому, что отношение совпадает со своим обращением или что эквивалентно включено туда или, что обращение включено туда (было на лекции).

————————————————————————————————————————

1. Если P и Q транзитивны, то таково же P ∩ Q.

————————————————————————————————————————

Дано: ,

Было (доказывали на лекции):

Хотим:

(Пересечение 2 множеств вкладывается в каждое из них, то есть )

(P пересеченное с Q и еще с чем-то еще оно включено в P пересеченное с Q)

Композиция пересечений включена в пересечение значит наше отношение транзитивно, результат: пересечение транзитивных отношений транзитивно.

————————————————————————————————————————

1. Пусть f : A → N и отношение ≺ на множестве A таково, что a ≺ b f(a) < f(b) («сравнение студентов по успеваемости»). Докажите, что ≺ есть строгий частичный порядок на A. Сравните нестрогий «напарник» порядка ≺ с отношением {(a, b) ∈ | f(a) f(b)}.

————————————————————————————————————————

Пусть f : A → N, A - множество студентов, N - множество их позиций в рейтинге, f - рейтинг студентов по успеваемости.

Можем 2 студентов сравнивать по рейтингу.

Есть , оно удовлетворяет следующему условию: То есть студент x предшествует студенту y, если его позиция в этом рейтинге, как натуральное число меньше или равна позиции студента y. Лучше учится тот, у кого успеваемость больше.

1. Верно ли то что - строгий частичный порядок на A?

Для этого нужно проверить иррефлексивность и транзитивность.

Проверим иррефлексивность: , то есть любое число меньше самого себя. Такого быть не может

Проверим транзитивность:

(транзитивность выполняется)

(2) Рассмотрим связанного напарника - нестрогий порядок. То есть .

Рассмотрим: Q = { }

| неверно, так как Q не антисимметрично не может совпадать с частичным порядком потому что:

(Так как f может быть не инъективно)

Но это являясь рефлексивным и транзитивным оно не является порядком, не является антисимметричным, потому что могут быть 2 разных студента которые учатся одинаково. Q не порядок и значит он равен нестрогому напарнику нашего строго порядка. (Аналогия: если у двух товаров равные цены то из этого не следует, что товары одинаковые, одинаковые только цены).

————————————————————————————————————————

1. Докажите, что если P и Q суть строгие (либо нестрогие) частичные порядки на множестве A, то P ∩ Q и таковы же.

————————————————————————————————————————

:

Иррефлексивность

= (по условию знаем, что P рефлексивно P c id не пересекается) =

Транзитивность (P транзитивно )

:

Иррефлексивность (Достаточно того, что Q иррефлексивно)

Транзитивность проверили в задаче 5 (пересечение транзитивных отношений транзитивно)

————————————————————————————————————————

1. Пусть на множестве A = \ {∅, N} задан порядок ⊆. Найдите множества min A и max A.

————————————————————————————————————————

x - max в А (то никакой y не больше x)A picture containing text, sky, flock, line

Description automatically generated

ч. у. м.

Рассмотрим A = ( \ {∅, N}, ) ч. у. м.

Пустое множество включено в любое. Любое включено в N.

{ {} | } (то есть все синглетоны)

Пусть { } (но мы исключили пустое множество) (доказали, что все синглетоны минимальны)

В обратную сторону: Пусть , но не синглетон, тогда {} , то есть (нашли кого-то меньшего)

{ \ {} | } ( \ {} (x - натуральный)

Но не одно множество отсюда не строго может включать натуральные минус что-то.

В обратную сторону:можем ли мы доказать что любой максимальный элемент имеет такой вид: { \ {} | }.

Допустим, что , тогда он имеет вид натуральные минус . Так как выкинули , то строго меньше натуральных. если

\ {k, n} , то

\ {k}, то есть x не наибольший.

————————————————————————————————————————

1. Найдите N и N. Проделайте то же для N \ {0, 1}.

————————————————————————————————————————

Application

Description automatically generatedA = (A, | - делимость)

{1}; {0} (0 делится на все, а 1 делится только на сам на себя)

(Была теорема, что если есть наибольший элемент, то он единственный максимальный)

(N \ {0, 1}, |)

простые числа (так как его любой делитель, кроме его самого это 1, а 1 мы выкинули)

(если , то всегда )

————————————————————————————————————————

1. Допустим = {x}. Всегда ли x есть наибольший элемент ч. у. м. (A, <)?

————————————————————————————————————————Text, letter

Description automatically generated

Пусть A = (A, <) ч. у. м. ; и = {x} - наибольший в A

Пример: Берем цепочку натуральных чисел и добавляем к ней один единственный изолированный элемент. Тогда x не будет наибольшим, но он является максимальным, так как любой элемент цепочки не максимальный

————————————————————————————————————————