Text, letter

Description automatically generated

Background pattern

Description automatically generated with low confidence

Дискретная математика ПИ

Листок 10. Порядки и эквивалентности.

1. Рассмотрим отношение R = {(0, 1),(0, 2),(2, 2)}. Является ли оно (ир)рефлексивным, (анти)симметричным, транзитивным?

————————————————————————————————————————

* A picture containing text, sky, hanger, outdoor

  Description automatically generated Не рефлексивным, так как не везде есть петли(путь в самого себя).
* Не является иррефлексивным, так как есть 1 петля (у двойки).
* Не симметрично, потому что нет стрелки из 1 в 0, а из 0 в (ир)рефлексивным 1 есть.
* Антисимметричной, потому что есть только **1** стрелка туда и обратно, и это 1 точка (точка 2).
* Транзитивно ли? То есть ли путь из 2 стрелок, такой что его нельзя заменить на 1 стрелку? Не транзитивность . Имеем и . Транзитивность имеет место.

————————————————————————————————————————

1. Как устроены отношения, одновременно симметричные и антисимметричные?

————————————————————————————————————————

A picture containing letter

Description automatically generated Есть ; R симметрично и антисимметрично. Как устроено R? Если взять петлю в какой-то точке, то это отношение симметрично и антисимметрично. Если же добавить точку (без петель, то ничего не поменяется). То же самое будет если добавить точку с петлей (отношением в саму себя)

Хочу

Пусть . Тогда (симметрично) x = y. Антисимметричность

В обратную сторону:

Дано

Хотим R симметрично и антисимметрично.

(так как это 1 точка). Симметричность доказана.

. Антисимметричность доказана.

Ответ: (x, y) - множество петель. То есть

————————————————————————————————————————

1. Отношение вида R−1 ◦ R всегда симметрично.

————————————————————————————————————————

Хотим:

————————————————————————————————————————

1. Пусть P и Q симметричны. Тогда отношение P ◦ Q симметрично, если и только если P ◦ Q = Q ◦ P.

————————————————————————————————————————

Text, letter

Description automatically generatedДано: ,

симметрично

P и Q симметричны, а симметричность эквивалентна тому, что отношение совпадает со своим обращением или что эквивалентно включено туда или, что обращение включено туда (было на лекции).

————————————————————————————————————————

1. Если P и Q транзитивны, то таково же P ∩ Q.

————————————————————————————————————————

Дано: ,

Было (доказывали на лекции):

Хотим:

(Пересечение 2 множеств вкладывается в каждое из них, то есть )

(P пересеченное с Q и еще с чем-то еще оно включено в P пересеченное с Q)

Композиция пересечений включена в пересечение значит наше отношение транзитивно, результат: пересечение транзитивных отношений транзитивно.

————————————————————————————————————————

1. Пусть f : A → N и отношение ≺ на множестве A таково, что a ≺ b f(a) < f(b) («сравнение студентов по успеваемости»). Докажите, что ≺ есть строгий частичный порядок на A. Сравните нестрогий «напарник» порядка ≺ с отношением {(a, b) ∈ | f(a) f(b)}.

————————————————————————————————————————

Пусть f : A → N, A - множество студентов, N - множество их позиций в рейтинге, f - рейтинг студентов по успеваемости.

Можем 2 студентов сравнивать по рейтингу.

Есть , оно удовлетворяет следующему условию: То есть студент x предшествует студенту y, если его позиция в этом рейтинге, как натуральное число меньше или равна позиции студента y. Лучше учится тот, у кого успеваемость больше.

1. Верно ли то что - строгий частичный порядок на A?

Для этого нужно проверить иррефлексивность и транзитивность.

Проверим иррефлексивность: , то есть любое число меньше самого себя. Такого быть не может

Проверим транзитивность:

(транзитивность выполняется)

(2) Рассмотрим связанного напарника - нестрогий порядок. То есть .

Рассмотрим: Q = { }

| неверно, так как Q не антисимметрично не может совпадать с частичным порядком потому что:

(Так как f может быть не инъективно)

Но это являясь рефлексивным и транзитивным оно не является порядком, не является антисимметричным, потому что могут быть 2 разных студента которые учатся одинаково. Q не порядок и значит он равен нестрогому напарнику нашего строго порядка. (Аналогия: если у двух товаров равные цены то из этого не следует, что товары одинаковые, одинаковые только цены).

————————————————————————————————————————

1. Докажите, что если P и Q суть строгие (либо нестрогие) частичные порядки на множестве A, то P ∩ Q и таковы же.

————————————————————————————————————————

:

Иррефлексивность

= (по условию знаем, что P рефлексивно P c id не пересекается) =

Транзитивность (P транзитивно )

:

Иррефлексивность (Достаточно того, что Q иррефлексивно)

Транзитивность проверили в задаче 5 (пересечение транзитивных отношений транзитивно)

————————————————————————————————————————

1. Пусть на множестве A = \ {∅, N} задан порядок ⊆. Найдите множества min A и max A.

————————————————————————————————————————

x - max в А (то никакой y не больше x)A picture containing text, sky, flock, line

Description automatically generated

ч. у. м.

Рассмотрим A = ( \ {∅, N}, ) ч. у. м.

Пустое множество включено в любое. Любое включено в N.

{ {} | } (то есть все синглетоны)

Пусть { } (но мы исключили пустое множество) (доказали, что все синглетоны минимальны)

В обратную сторону: Пусть , но не синглетон, тогда {} , то есть (нашли кого-то меньшего)

{ \ {} | } ( \ {} (x - натуральный)

Но не одно множество отсюда не строго может включать натуральные минус что-то.

В обратную сторону:можем ли мы доказать что любой максимальный элемент имеет такой вид: { \ {} | }.

Допустим, что , тогда он имеет вид натуральные минус . Так как выкинули , то строго меньше натуральных. если

\ {k, n} , то

\ {k}, то есть x не наибольший.

————————————————————————————————————————

1. Найдите N и N. Проделайте то же для N \ {0, 1}.

————————————————————————————————————————

Application

Description automatically generatedA = (A, | - делимость)

{1}; {0} (0 делится на все, а 1 делится только на сам на себя)

(Была теорема, что если есть наибольший элемент, то он единственный максимальный)

(N \ {0, 1}, |)

простые числа (так как его любой делитель, кроме его самого это 1, а 1 мы выкинули)

(если , то всегда )

————————————————————————————————————————

1. Допустим = {x}. Всегда ли x есть наибольший элемент ч. у. м. (A, <)?

————————————————————————————————————————Text, letter

Description automatically generated

Пусть A = (A, <) ч. у. м. ; и = {x} - наибольший в A

Пример: Берем цепочку натуральных чисел и добавляем к ней один единственный изолированный элемент. Тогда x не будет наибольшим, но он является максимальным, так как любой элемент цепочки не максимальный

————————————————————————————————————————

Определение Супремума:

Супремум – наименьшая верхняя грань.

Sup B – наименьший элемент в Br (верхняя грань)

A = (A , < ) ч.у.м. B ⊆ A

Br = { x ∈A ⎟ ∀y ∈ B y ≤ x }

Bs = {x ∈ A ­­­­­­­­­­­­­­⏐ ∀ y ∈ B x ≤ y}

Inf B - наибольший элемент в Bs (нижняя грань)

**11.**

A picture containing diagram

Description automatically generated(картинка № 0)

1 пример:

B = {2 , 3}

Br = {x ⏐ 2 ≤ x ∧ 3 ≤ x} = {5} ⇒sup B = 5 (только 5 т.к. 3 и 4 сравнивать не можем. Видно на картинке сверху.)

Bs = {0,1} (не можем сравнивать)­­­ ~~∃~~ (не сущ.) inf B

2 пример (та же картинка №0)

C = {2,5}

Cr = {5}

Sup C = 5

Сs = {1, 0 ,2}

Inf C = 2

**12. (a).**

**Надо доказать:**

**(**B ∪ C**)**r **=** Br ∩ Cr

**(**B ∩ C**)**r **=** Br ∪ Cr

Само решение задачи:

x ∈ **(**B ∪ C**)**r ⇔ ∀y (y ∈ B ∪ C ⇒ y ≤ x) ⇔

y((y ∈ B ∨ y ∈ C) ⇒ y ≤ x) ⇔

y ((y ∈ B ⇒ y ≤ x) ∧ (y ∈ С ⇒ y ≤ x)) ⇔

y ((y ∈ B ⇒ y ≤ x) ∧ y (y ∈ С ⇒ y ≤ x)) ⇔

X ∈ Br ∧ x ∈ Cr ⇔

X ∈ Br ∧ Cr

(б) доказать что B ⊆ C ⇒ Cr ⊆ Br

B ⊆ C ⇒ Cr = **(**B ∪ C**)**r = (применяем пункт (а)) = Br ∩ Cr  ⊆ Br

(в) доказать что B ⊆ Brs ∩ Brs

B ⊆ Brs ⏐ Допустим, что x ∈ B

Хотим x ∈ Brs ⇔ y (y ∈ Br ⇒ x ≤ y)) ⇔ y(z(z ∈ B ⇒ z ≤ y) ⇒ x ≤ y)

(Докажем подчеркнутое, тк x ≤ y не совсем явно) Хотим получить: x ≤ y

Пусть y∈ A

∀z(z ∈ B ⇒ z ≤ y) ⇒ (x ∈ B ⇒ x ≤ y) ⇒ x ≤ y (Доказано).

(г) доказать что (1) Br = Brsr ;

И доказать что (2) Bs = Bsrs **;**

**Доказательство 1:**

1. Br ⊆ Brsr (получаем это из пункта (в))

**С :=** Br

Br ⊆ Br sr

**Доказательство 2:**

1. ∀u,v(u ⊆ v ⇒ vr ⊆ ur)

B ⊆ Brs ⇒ Brsr ⊆ Br (Применяем пункт (в) и пункт (б))

**13.**

A = (a, <) ч.у.м. C,D ⊆ A

C цепь ⇔ ∀x,y ∈ C (x ≤ y ∨ y ≤ x )

D антицепь ⇔ ∀x,y ∈ D (x !< y ∧ y !< x)

(!< - это означает, что x < y, где знак меньше перечеркнут)

Пусть С цепь и антицепь ⇔ x,y∈C((x ≤ y ∨ y ≤ x) ∧ x !< y ∧ y !< x) ⇔

∀x,y∈ C (( x ≤ y ∧ x !< y ∧ y !< x) ∨ (y ≤ x ∧ x !< y ∧ y !< x)) ⇔

∀x,y ∈ C ((x = y ∨ y = x) ⇔ ∀x,y ∈ C(x = y) ⇔ ⏐C⏐≤ 1 Доказано!

Краткая теория про линейно упорядоченое множество.

(A, <) – л.у.м. ⇔ ∀ x, y ∈ A (x ≤ y ∨ y ≤ x )

Какие есть цепи в л.у.м.? Ответ: Все подмножества!

Какиеантицепи в л.у.м.? Ответ: Все синглетоны и пустое множество.

**14.** (P( N), ⊆) ч.у.м.

Найти в А цепь с наибольшим, но без наименьшего элемента.

С = {N \ k ⏐k ∈ N} (берем в качестве цепи вот такие множества)

N \ 0 = N \ (пустое мн-во) = N – наиб в C

C – цепь, так как N \ k ⊆ N \ m ⇔ k >= m

Нет наименьшего элемента так как N \ k + 1.

**15.**

(Идея изоморфизма.)

Изображение выглядит как текст, документ

Автоматически созданное описание

**16.** Этот номер был пропущен по причине сложно.

P < r < q ⇒ (по свойству изоморфизма) φ(p) < φ(r) < φ(q) = 1, φ(r), φ(q) ∈ Z

0 < φ(r) < 1, φ(r) ∈ Z ⇒ (Противоречие)

Вывод: (Q, <) !≅ (Z, <)

(Q, <) ≅ (R, <) , т.к. у нас нет биекций, то, следовательно Q не равномощно R

Q равномощно N и R не равномощно P(N)

**17.**

Е – отношение эквивалентности на А ⇔

Е – рефлексивно, симметрично, транзитивно.

Примеры отношений эквивалентности: отношение параллельности на множестве прямых,

Сравнение по модулю

**18.**

Рассмотри отношение R на N2 т.ч. (a, b) R(c,d) ⇔ a + d = b + c

Докажите, что R эквивалентность.

Проверим рефлексивность (a,b) R(a, b) ⇔ a + b = b + a (рефлексивность доказана)

Проверим симметричность (a,b) R (c, d) ⇔ a+d = b + c (симметричность доказана)

Проверим транзитивность дано: 1 (a,b) R (c, d) 2 (c,d) R (x,y)

Из них получаем (a + d = b + c) & (c + y = d + x) +⇒

a + d + c + y = b + c + d + x ⇒ a + y = b + x

**19.** Дано: R, Q – рефлексивны, симметричны, транзитивны.

Попробуем убедиться, что R-1 тоже обладает такими же свойствами.

Решение: idА = ⊆ R ⇒ idA-1 ⊆ R-1 ⇒ R-1 - рефлексивно

R = R-1 ⇒ R-1 = (R-1)-1⇒

idА ⊆ R & idА ⊆ Q ⇒ idА ⊆ R ∩ Q

ссимметричность (R ∩ Q)-1 = R-1 ∩ Q-1 = R ∩ Q

Проверим транзитивность см. задачу 5.

**Дискретная математика ПИ**

**Листок 10. Порядки и эквивалентности.**

**20**. Отношение R ⊆ A2 есть эквивалентность тогда и только тогда, когда (R ◦ R−1) ∪ idA = R.

**21**. Для функции f: R → R выясните, как устроены отношение Ker f и множество R / Ker f, если

a) f(x) есть целая часть числа x

b) f(x) есть дробная часть числа x

**№20).**

Дано: R рефлексивно (idA ⊆ R), симметрично (R = R-1), транзитивно (R ◦ R⊆ R)

Нужно доказать, что любой элемент левого множества принадлежит правому и наоборот:

1. Доказываем в одну сторону

(R ◦ R−1) ∪ idA = R ⇐

⇑

R ◦ R⊆ R (транзитивность) и R = R-1 (симметричность)

1. Доказываем в другую сторону

(R ◦ R−1) ∪ idA

⇑

(R ◦ R−1) ⇐ R = R ◦ idA R ◦ R = R ◦ R-1

⇑

⇐ Дано: (R ◦ R−1) ∪ idA = R (\*)

Хотим: R – рефлексивно, симметрично, транзитивно

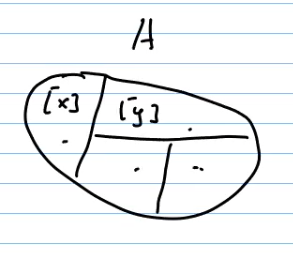
Рефл: (R ◦ R−1) ∪ idA =(\*) R

Сим: R-1 = ((R ◦ R−1) ∪ idA)-1 = (R ◦ R−1) -1 ∪ idA-1 = ((R-1 ) -1 ◦ R−1)∪ idA= (R◦ R−1)∪ idA =(\*) R

Транз: R ◦ R = R ◦ R−1 (R◦ R−1)∪ idA  =(\*) = R

Из п.1 и п.2 получается, что любой элемент левого множества принадлежит правому и наоборот. Следовательно, отношение R ⊆ A2 есть эквивалентность тогда и только тогда, когда (R ◦ R−1) ∪ idA = R.

**№21).**

f: A -> B Ker f = {(a, b) ∈ A2 | f(a) = f(b)}

Ker f = idA ⇔ f – инъекция

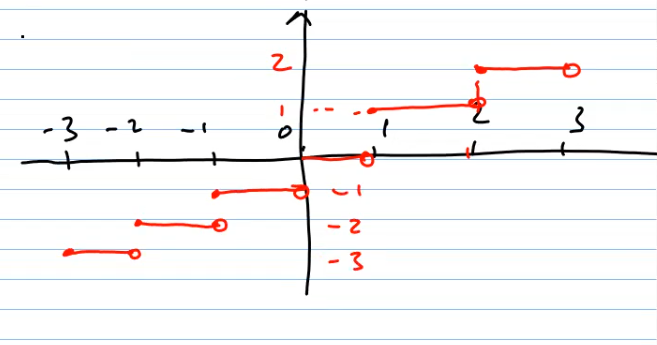
Пусть E – отношение эквивалентности на А

A / E = {[x]E | x ∈ A}, где

[x]E = {y ∈ A | xEy}

[x]Ker f  = {y ∈ A | (x,y) ∈ Ker f, f(y) = f(x)} = f-1[{f(x)}]

A / Ker f = {f-1[{f(x)}] | x ∈ A} = {f-1[{b}] | b ∈ rng f } ~ rng f

**а)**

f: R → R

∀x ∈ R

f(x) = [x] - целая часть = наибольшее целое число n, не превосходящее x

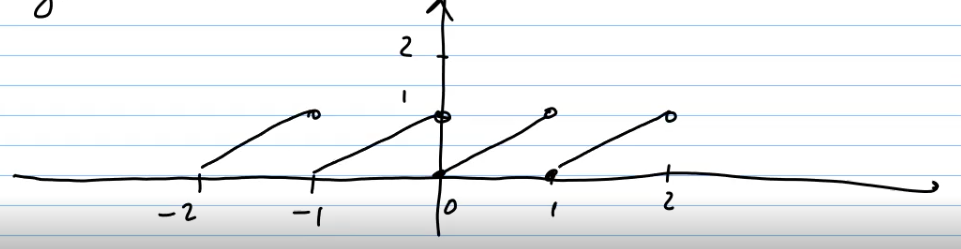
rng f = Z

(x, y) ∈ Ker f ⇔ [x] = [y] ⇔

⇔ x, y ∈ [n, n+1), где n – целое

∀x ∃n ∈ Z [x]Ker f  = [n, n+1)

R / Ker f = {[n, n+1) | n ∈ Z}

**б)**

g: R -> R

g(x) = {x} =

= x – [x] 0

⇑ дробная часть х

rng g = [0, 1) ~ R

(x,y) ∈ Ker g ⇔ {x} = {y} ⇔ x - y ∈ Z

⇑

x -[x] = y – [y] ⇒ x – y = [x] – [y] ∈ Z

[x]Ker g = {y ∈ R | x – y ∈ Z} = {x + n | n ∈ Z} ~ Z

R / Ker g = {{x + n | n ∈ Z} | 0 ≤ x ≤ 1} ~ R

**№16)\*.**

**Пусть φ: A2 → A, причем операция φ на A удовлетворяет условиям коммутативности, ассоциативности и идемпотентности. Пусть x ≤ y ⇐⇒ φ(x, y) = x.**

**a) Докажите, что ≤ нестрогий частичный порядок на A.**

**b) Докажите, что φ(x, y) = inf{x, y} в смысле введенного порядка для всех x, y ∈ A.**

**c) Приведите естественные примеры такой операции φ.**

Пусть φ: A² => A такое что

x ∩ y = y ∩ x  
(1) ∀ x, y φ(x, y) = φ(y, x) (коммутативность)

x ∩ (y ∩ z) = (x ∩ y) ∩ z  
(2) ∀ x, y, z φ(x, φ(y, z)) = φ(φ(x, y), z) (ассоциативность)

x ∩ x = x  
(3) ∀ x φ(x, x) = x (идемпотентность)

Примеры : НОК(x, y) = x ⇔ x ⋮ y

1)НОД и НОК по Z x ≤ y ⇔ НОД (x, y) = x ⇔ x | y

2)Min (•, •) и max (•, •) по (N, с<) min(x, y) = x ⇔ x ≤ y ∀∃∅∩∪

3)∩, ∪ на P(U) x ∩ y = x ⇔ x ≤ y

x ∪ y = x ⇔ x ≥ y

Пусть x ≤ y ⇔ φ(x, y) = x

Утв (А, ≤) ч.у.м.

≤ рефлексивность : x ≤ x ⇔ φ(x, x) = x

≤ антисимметр. : x ≤ y y ≤ x  
 φ(x, y) = x φ(y, x)= y  
 x = φ(x, y) = φ(y, x)= y  
 коммутативность

≤ транз : x ≤ y y ≤ z  
φ(x, y) = x φ(y, z)= y  
x = φ(x, y) = φ(x , φ(y, z))= φ(φ(x, y),z) = φ(x, z)

X ≤ Z

(б)

∀ x,y ∈ А : φ(x, y) = inf ≤ {x, y}

Хотим: (1) φ(x, y) ≤ x (2) φ(x, y) ≤ y

(3) если z ≤ x и z ≤ y, то z ≤ φ(x, y)

1. φ(x, y) ≤ x ⇔ φ(φ(x, y), x) ≟ φ(x, y)  
    коммут. ∥  
    φ(φ(y, x), x)   
    ассоц. ∥  
    φ(y, φ(x, x))   
    идемпотент. ∥  
    φ(y, x)  
    ∥  
    φ(x, y)
2. φ(x,y) ≤ y ⇔ φ(φ(x, y), y) ≟ φ(x, y)

ассоц. ∥  
 φ(x, φ(y, y)) = φ(x, y)  
 идемпотент.

Дано: φ(z, x) = z хотим: φ(z, φ(x, y)) = z  
 φ(z, y) = z

φ(z, φ(x,y)) = φ(φ(z,x),y) = φ(z,y) = z