Text, letter

Description automatically generated

Text, letter

Description automatically generated

№1).

1. A ⊆ A ∪ B => A <~ B. Первая инъекция есть.
2. Если в B – n элементов, то сопоставим их с первыми n из A. ∀остальных элементов из A ∪ B сопоставим следующим образом: i-ому сопоставим (i + n)-ый. Когда же B – счётно - ∀элемента из B будем сопоставлять ближайший по индексу нечётный элемент, я для A – ближайший чётный.

По 1) и 2) и КБШ получаем биекцию => Множество (A ∪ B) ~ A => A ∪ B – счётно.

№2).

Построим 2 инъекции => по КБШ это биекция

Diagram

Description automatically generated

1. A ⊆ A v B => A <~ B. Первая инъекция есть.
2. **Теорема:** если A – бесконечно, то |N <~ A. То есть в A ∃счётное подмножество C ~ |N

A – бесконечно => В A ∃счётное подмножество C. C ~ |N. B \ A ⊆ B => B \ A – конечно или счётно. C v (B \ A) – счётное ~ |N ~ C. C v (B \ A) ~(g - биекция) C. A v B = C v (B \ A) v (A \ C). h: A v B →

h(x) = g(x) ∈ C, если x ∈ C v (B \ A); x, x ∈ (A \ C). A = C v (A \ C). A v B ~(h) A. h – инъекция. Пусть h(x) = h(y). 1 случай: если x, y ∈ C v (B \ A): g(x) = g(y). g – биекция, значит и инъекция => x = y. 2 случай: если x, y ∈ (A \ C): x = y. 3 случай: x ∈ C v (B \ A), y ∈ (A \ C) g(x) = h(x) = h(y) = y, то есть, в данном случае у C и A \ C есть общий элемент, чего быть не может. Противоречие! 4 случай: зеркален 3.

По 1) и 2) и КБШ получаем биекцию => Множество (A v B) ~ A.

№3).

Diagram

Description automatically generated

f: A → B

g: f[A] → A

g(z) = какой-то x такой, что f(x) = z

Такой x существует, так как f сюрьективна для f[A] (как и ∀другая функция для своего образа).

∀z ∈ f[A]: f(g(z)) = z => g – инъекция, так как если g(z1) = g(z2), то f(g(z1)) = f(g(z2)) => z1 = z2.

Так как g – инъекция, то f[A] <~ A => и |f[A]| ≤ |A|

№4\*).

**Теорема:** Пусть у нас A и B конечны и A ~ B. Тогда ∀f: A → B (f – инъекция <=> f – сюръекция).

Доказательство так и не было приведено…

№5).

**Китайская теорема об остатках:** Если m1…mn попарно взаимно просты, то ∀a1…an ∈ Z ∃!x ∈ [0, M),

M = m1 \* … \* mn

x ≡ a1 (mod m1)

…

x ≡ an (mod mn)

Докажем единственность решения:

Возьмём множества A и B:

A = M = [0, M), |A| = M

B = m1 × … × mn, |B| = m1 \* … \* mn = M

**Правило произведения:** Если U и V конечны, то их Декартово произведение конечно, причём:

|U × V| = |U| \* |V|

Получается, A ~ B

Рассмотрим f: A → B

∀x ∈ M f(x) = (x % m1 … x % mn)

f – инъекция: f(x) = f(y) => ∀i x % mi = y % mi => x ≡ y (mod mi) => mi | (x - y) (то есть (x – y) ÷ mi) => так как (m1…mn) попарно взаимно просты => (m1 \* … \* mn) = M | (x - y) => ∃k y = x + k \* M

Так как 0 ≤ x, y, < M и M | |x - y| => x – y = 0 => x = y

Действительно, f – инъекция => ∀(a1…an) ∈ B ∃x f(x) = (a1…an). Это сюрьективность. ∀x % mi = ai,

x ≡ ai (mod mi), так как ai ≡ (ai % mi) (mod mi). Решение единственно из-за инъективности. Модель построена.

№6).

В группе из n > 1 человек некоторые обменялись рукопожатиями. Тогда ∃два разных человека, пожавшие руки равному числу людей.

A = {x1…xn}

d: A → |N

d(xi) = число рукопожатий, сделанных xi

∀x 0 ≤ d(x) ≤ n – 1

Тогда d: A → n

Теперь, чтобы доказать, что 2 разных человека сделали одинаковое число рукопожатий, нужно просто показать, что d – неинективна.

Пусть d – инъективна.

Тогда так как d: A → n, |A| = n, |n| = n => A ~ n, d - инъективно => d – сюрьективно => ∀ 0 ≤ k < n ∃x d(x) = k

Тогда у нас есть такой x, что d(x) = 0 и такой y, что d(y) = n - 1. Тогда получается, что y пожал руку всем(кроме себя, конечно же), включая x, а x не пожал руку никому, кроме того, так как n > 1 => n - 1 ≠ 0 => x ≠ y. Так быть не может => противоречие. Значит, d – неинективна. Тогда действительно ∃a, b такие, что d(a) = d(b).

№7).

**Правило произведения:** Если A и B конечны, то их Декартово произведение конечно, причём:

|A × B| = |A| \* |B|

**Правило суммы:** Если A и B конечны и A ∩ B = ∅, то их объединение конечно, причём:

|A ∪ B| = |A| + |B|

Нужно построить грамотную математическую модель.

Букеты одинаковы ⬄ в них одинаковое число цветов одного вида.

Построим математическую модель букета: (x, y, z), где x – число гвоздик, y – число роз, z – число тюльпанов. (x, y, z) ∈ W, W = 4 × 5 × 6 \ {(0, 0, 0)}, так как пустые букеты не допускаются.

|W| = 4 \* 5 \* 6 – 1 = 119

(a, b, c) = (d, e, f) ⬄ (a = d) ∩ (b = e) ∩ (c = f)

1. A = {W | все цветы одного вида ⬄ ((x = 0) ∩ (y = 0)) ∪ ((x = 0) ∩ (y = 0)) ∪ ((y = 0) ∩ (z = 0))}

A1 = {W | только гвоздики, (y = 0) ∩ (z = 0)}

A1 = {(x, 0, 0) ∈ W | 1 ≤ x ≤ 3}

|A1| = 3

A2 = {W | только розы, (x = 0) ∩ (z = 0)}

A2 = {(0, y, 0) ∈ W | 1 ≤ y ≤ 4}

|A2| = 4

A3 = {W | только тюльпаны, (x = 0) ∩ (y = 0)}

A3 = {(0, 0, z) ∈ W | 1 ≤ z ≤ 5}

|A3| = 5

A = A1 ∩ A2 = A1 ∩ A3 = A2 ∩ A3 = A1 ∩ A2 ∩ A3 = ∅

|A| = |A1 ∪ A2 ∪ A3| = A1 + A2 + A3 = 3 + 4 + 5 = 12

1. B = ({0, 2} × {0, 2, 4} × {0, 2, 5}) \ {(0, 0, 0)}

|B| = (2 \* 3 \* 3) – 1 = 17

1. C = W \ A

(W \ A) ∩ A = ∅, (W \ A) ∪ A = W => |W| = |W \ A| + |A| => |W \ A| = |W| - |A|

|C| = |W \ A| = |W| - |A| = 119 – 12 = 107

№8).

Всего слов:

Wk – множество всех слов длины k.

Wk = Ak, то есть Декартово произведение A степени k.

A = {«а»…«я»}

|Wk| = |Ak| = |A|k = 33k

X = W1 ∪ … ∪ W5

Заметим, что ∀1 ≤ i < j ≤ 5: Wi ∩ Wj = ∅

Тогда: |X| = |W1| + |W2| + |W3| + |W4| + |W5| = 331 + 332 + 333 + 334 + 335 = 40358373

Слов с попарно различными буквами:

X’ – все слова длин 1-5, где все буквы попарно различны.

Wk’ = все слова длины k, где все буквы попарно различны.

X’ = W1’∪ … ∪ W5’

Вспомним биекцию:

Ak ~ Ak

(a1…ak) → f: k → A

f(0) = a1

f(k-1) = ak

Wk’ ~ {f: k → A | f - инъективна}

f – инъективна ⬄ ∀i≠j: f(i) ≠ f(j), ai ≠ aj

|Wk’| = Inj(k, |A|), то есть количество инъекций из k в A

|Wk’| = Inj(k, |A|) = Inj(k, 33) = 33! / (33 - k)! = 33 \* … \* (33 – k + 1), 1 ≤ k ≤ 5 < 33

|X’| = |W1’|+ |W2’|+ |W3’| + |W4’| + |W5’| = 33 + 33 \* 32 + 33 \* 32 \* 31 + 33 \* 32 \* 31 \* 30 + 33 \* 32 \* 31 \* 30 \* 29 = 29496225

№9).

Способы задумать число ~ (100)5

Так как люди ~ 5

А числа ~ 100

X – это все способы

X = (100)5

X’ – это способы, где хотя бы двое задумали одно число.

X’ = {f ∈ X | f - неинъективна}

|X’| = |(100)5| - |Inj(5, 100)| = 1005 - 100! / (100 - 5)! = 1005 - 100 \* 99 \* 98 \* 97 \* 96 = 965497600

№10).

n, k ∈ |N, эти числа фиксированные, 0 < k < n - 1

(0…k…n - 1) – n чисел

Сколько есть способов выбрать из этого множества 2 числа так, чтобы одно было больше k, а другое меньше?

X = {{a, b} ⊆ n | a < k, b > k}, {a, b} = {b, a}, считаем без учёта порядка.

Pt(n) – это множество всех t-элементых подмножеств в множестве из n элементов.

Pt(n) = {A ⊆ n | |A| = t}

|Pt(n)| = Cnt = n! / (t! \* (n - t)!), 0 ≤ t ≤ n

У нас k чисел, меньших k и n - k - 1 чисел, больших k.

X ~ {(a, b)∈ n2 | a < k < b}, так как каждое множество можно упорядочить по возрастанию ровно 1 способом.

X ~ {(a, b)∈ n2 | a < k < b} ~ {a ∈ n| a < k} × {b ∈ n| b > k}

|X| = k \* (n - k - 1)

Другой способ подсчёта:

X = P2(n) \ (P2(k + 1) ∪ P2({k…n-1}))

P2(k + 1) – множество всех пар элементов, где a < k + 1, b < k + 1 => Подмножество из k + 1 элементов: {0…k}

P2({k…n-1}) – множество всех пар элементов, где a > k - 1, b > k - 1 => Подмножество из n – k элементов: {k…n - 1}

Пересечений между этими множествами нет, так как они двуэлементные, причём a ≠ b (так как если a = b, то множество не является двуэлементным)

Cn2 = n \* (n - 1) / 2

|X| = Cn2 - (C2k+1 + C2n-k) = 0.5 \* (n \* (n - 1) - (k + 1) \* k - (n - k) \* (n – k - 1)) =

= k \* (n – k - 1)

№11).

Построим математическую модель.

Всего 52 карты, 4 масти, 13 карт каждой масти. 4 множества карт.

Из колоды берём 6 карт без учёта порядка ~ считаем подмножества

1. Сколько есть подмножеств из 6 элементов, содержащих Даму Пик.

D = {Дама Пик}

A’ - 5 карт, но в нём не может быть Дамы Пик, так как она уже выбрана

Так как A = {D} ∪ A’

D можно выбрать только 1 способом, а A’ – C551

Тогда |X| = 1 \* C551 = C551

1. Давайте посчитаем сколько есть способов выбрать 1 или менее туза и вычтем это число из общего количества способов.

|X| = количество всех выборок – количество выборок с 1 и менее тузом = количество всех выборок – количество выборок с 1 тузом – количество выборок с 0 тузами.

Заметим, что выборки с 1 тузом ∩ выборки с 0 тузами = ∅

Добавляется коэффициент 4, так как у нас 4 разных фиксированных карты.

|X| = C652 - 4 \* C548 - C648

1. Решение вида «Выберем 4 карты разных мастей и ещё 2 любые» Неверно!

13 \* 13 \* 13 \* 13 \* C248

Возьмём набор из шестёрок 4 мастей, а также набор из червового и бубнового королей.

(6♥, 6♦, 6♣, 6♠, {K♥, K♦})

Данный набор посчитается несколько раз!

Например, ещё будет посчитан (6♥, 6♦, K♥, 6♠, {6♣, K♦}), а они с предыдущим одинаковые. Получается не биекция.

А теперь верный способ:

Давайте рассмотрим, сколько может быть карт разных мастей.

Для этого разобьём 6 в сумму 4 положительных упорядоченных по убыванию чисел.

Это можно сделать только 2 способами, так как среди слагаемых не может быть числа > 3, не может быть более 3-х единиц и.т.д.:

6 = 3 + 1 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 + 1

Числа - это количество карт разных мастей.

4 и C24 – это варианты выбора мастей.

|X| = разбиение с тремя картами одной масти + разбиение с двумя парами карт одинаковых мастей, различных между собой =

= 4 \* C313 \* 13 \* 13 \* 13 + C24 \* C213 \* C213 \* 13 \* 13