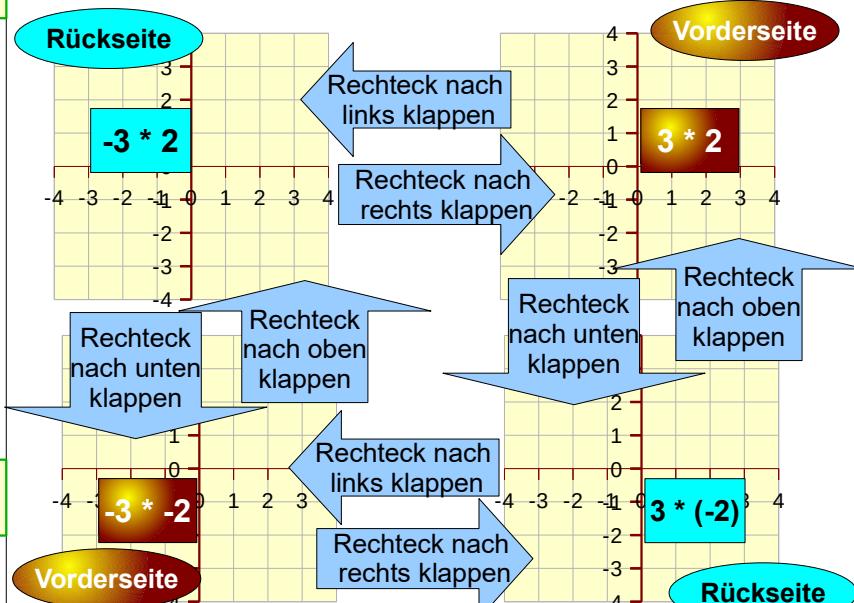


Intensivkurs – Mathematik: Rechenregeln

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Rechenregeln	<p>Rechnen mit ganzen Zahlen \mathbb{Q}</p> <p>Der Betrag einer Zahl</p> <p>Zu jeder positiven reellen Zahl gibt es eine Gegenzahl, eine negative reelle Zahl. Beide Zahlen zeichnet aus, dass sie vom Ursprung den gleichen Abstand haben.</p> <p>Dieser Abstand wird als Betrag der Zahl bezeichnet.</p> <p>Der Betrag ist damit die Zahl ohne Berücksichtigung, auf welcher Seite des Ursprungs sie liegt. Das Symbol für den Betrag von a ist a. Die Definition des Betrages lautet:</p> $ a = \begin{cases} -a & \text{für } a < 0 \\ 0 & \text{für } a = 0 \\ a & \text{für } a > 0 \end{cases}$ <p>Addition zweier Zahlen Summand + Summand = Summe</p> <p>(1) Die beiden Summanden haben gleiche Vorzeichen</p> <ul style="list-style-type: none"> ◆ Das gemeinsame Vorzeichen bleibt erhalten. ◆ Die Beträge der Summanden werden addiert. <hr style="border-top: 1px dashed green;"/> <p>(2) Die beiden Summanden haben unterschiedliche Vorzeichen</p> <ul style="list-style-type: none"> ◆ Das Ergebnis hat das Vorzeichen des Summanden mit dem größten Betrag ◆ Der kleinere Betrag wird vom größeren Betrag subtrahiert. <p>Subtraktion zweier Zahlen Minuend – Subtrahend = Differenz</p> <p>(1) Der Betrag des Minuend ist größer als der Betrag des Subtrahend</p> <p>(1) Beide haben gleiche Vorzeichen</p> <ul style="list-style-type: none"> ◆ Das gemeinsame Vorzeichen bleibt erhalten. ◆ Die Beträge werden subtrahiert <hr style="border-top: 1px dashed green;"/> <p>(2) Beide haben unterschiedliche Vorzeichen</p> <ul style="list-style-type: none"> ◆ Das Ergebnis hat das Vorzeichen des größeren Betrages. ◆ Die Beträge werden addiert 	<p>$4 = +4$ $-4 = +4$ $-7,3 = +7,3$ $7,3 = +7,3$</p> <p>$\left -\frac{1}{3} \right = +\frac{1}{3}$ $\left \frac{1}{3} \right = +\frac{1}{3}$</p> <p>$0 = 0$</p> <p>Da der Betrag einer beliebigen Zahl immer positiv ist, schreibt man das Pluszeichen nicht mit.</p> <p>$(-17) + (-18)$ $(+11) + (+19)$ $-$ $+$ $-17 + -18 = 17 + 18 = 35$ $11 + 19 = 11 + 19 = 30$</p> <p>$=> -35$ $=> +30$</p> <p>$(+19) + (-17)$ $(-28) + (+13)$ $+$ $-$ $19 - -17 = 19 - 17 = 2$ $-28 + 13 = 28 - 13 = 15$</p> <p>$=> +2$ $=> -15$</p> <p>$(-38) - (-23)$ $(+48) - (+14)$ $-$ $+$ $-38 - -23 = 38 - 23 = 15$ $48 - 14 = 48 - 14 = 34$</p> <p>$=> -15$ $=> +34$</p> <p>$(-38) - (+23)$ $(+48) - (-14)$ $-$ $+$ $-38 + 23 = 38 + 23 = 61$ $48 + 14 = 48 + 14 = 62$</p> <p>$=> -61$ $=> +62$</p>

Intensivkurs – Mathematik: Rechenregeln

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele												
Rechenregeln	<p>(2) Der Betrag des Minuend ist kleiner als der Betrag des Subtrahend</p> <p>(1) Beide haben gleiche Vorzeichen</p> <ul style="list-style-type: none"> ◆ Das Ergebnis erhält das entgegengesetzte Vorzeichen des Subtrahenden (Wert mit dem größten Betrag) ◆ Der größere Betrag wird vom kleineren Betrag subtrahiert. <p>(2) Beide haben unterschiedliche Vorzeichen</p> <ul style="list-style-type: none"> ◆ Das Ergebnis erhält das entgegengesetzte Vorzeichen des Subtrahenden (Wert mit dem größten Betrag) ◆ Die Beträge werden addiert <p>Vorzeichenregeln der Multiplikation und Division</p> <p>Das Multiplizieren und Dividieren für alle Zahlenbereiche folgt diesen Regel:</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="color: red; padding-right: 20px;">$(+) \cdot (+) = (+)$</td> <td style="color: red; padding-right: 20px;">$(+) : (+) = (+)$</td> <td style="color: red; padding-right: 20px;">(Vorderseite)</td> </tr> <tr> <td style="color: red; padding-right: 20px;">$(-) \cdot (+) = (-)$</td> <td style="color: red; padding-right: 20px;">$(-) : (+) = (-)$</td> <td style="color: red; padding-right: 20px;">(Rückseite)</td> </tr> <tr> <td style="color: red; padding-right: 20px;">$(-) \cdot (-) = (+)$</td> <td style="color: red; padding-right: 20px;">$(-) : (-) = (+)$</td> <td style="color: red; padding-right: 20px;">(Vorderseite)</td> </tr> <tr> <td style="color: red; padding-right: 20px;">$(+) \cdot (-) = (-)$</td> <td style="color: red; padding-right: 20px;">$(+) : (-) = (-)$</td> <td style="color: red; padding-right: 20px;">(Rückseite)</td> </tr> </table> <p>Zur Veranschaulichung und zum Merken siehe rechte Seite.</p> <p>Multiplikation zweier Zahlen Faktor * Faktor = Produkt</p> <ul style="list-style-type: none"> ◆ Das Vorzeichen bestimmt sich nach den Vorzeichenregeln ◆ Die Beträge der Faktoren werden multipliziert. 	$(+) \cdot (+) = (+)$	$(+) : (+) = (+)$	(Vorderseite)	$(-) \cdot (+) = (-)$	$(-) : (+) = (-)$	(Rückseite)	$(-) \cdot (-) = (+)$	$(-) : (-) = (+)$	(Vorderseite)	$(+) \cdot (-) = (-)$	$(+) : (-) = (-)$	(Rückseite)	<p style="text-align: center;"> $(-19) - (-27)$ $+ -27 - -19 = 27 - 19 = 8$ $\Rightarrow + 8$ </p> <p style="text-align: center;"> $(+ 8) - (+ 13)$ $- +13 - +8 = 13 - 8 = 5$ $\Rightarrow - 5$ </p> <p style="text-align: center;"> $(-19) - (+ 27)$ $- -27 - -19 = 27 - 19 = 46$ $\Rightarrow - 46$ </p> <p style="text-align: center;"> $(+ 8) - (- 13)$ $+ +8 + -13 = 8 + 13 = 21$ $\Rightarrow + 21$ </p> 
$(+) \cdot (+) = (+)$	$(+) : (+) = (+)$	(Vorderseite)												
$(-) \cdot (+) = (-)$	$(-) : (+) = (-)$	(Rückseite)												
$(-) \cdot (-) = (+)$	$(-) : (-) = (+)$	(Vorderseite)												
$(+) \cdot (-) = (-)$	$(+) : (-) = (-)$	(Rückseite)												

Intensivkurs – Mathematik: Rechenregeln

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele																																																																								
Rechenregeln	<p>Multiplikationsschema 1</p> <p>Eine Möglichkeit zwei Zahlen zu multiplizieren ist die Verwendung der Stellenwerttafel zum Multiplizieren:</p> <p>$24 * 365$</p> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="width: 10px;"></td> <td style="width: 10px;"></td> <td style="width: 10px; text-align: center;">H</td> <td style="width: 10px; text-align: center;">Z</td> <td style="width: 10px; text-align: center;">E</td> <td style="width: 10px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid red; text-align: right;">•</td> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid red; text-align: right;">300</td> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid red; text-align: right;">60</td> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid red; text-align: right;">5</td> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid red;"></td> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid red;"></td> </tr> <tr> <td style="border-bottom: 1px solid black; text-align: right;">Z</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; text-align: right;">20</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; text-align: right;">6000</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; text-align: right;">1200</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; text-align: right;">100</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; text-align: right;">7300</td> </tr> <tr> <td style="border-bottom: 1px solid black; text-align: right;">E</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; text-align: right;">4</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; text-align: right;">1200</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; text-align: right;">240</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; text-align: right;">20</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; text-align: right;">1460</td> </tr> <tr> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid red;"></td> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid red;"></td> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid red;"></td> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid red;"></td> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid red;"></td> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid red; text-align: right;">8760</td> </tr> </table> <p>Multiplikationsschema 2</p> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="width: 10px;"></td> <td style="width: 10px;"></td> <td style="width: 10px; text-align: center;">H</td> <td style="width: 10px; text-align: center;">Z</td> <td style="width: 10px; text-align: center;">E</td> <td style="width: 10px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid red; text-align: right;">3</td> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid red; text-align: right;">6</td> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid red; text-align: right;">5</td> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid red; text-align: right;">.</td> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid red;"></td> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid red;"></td> </tr> <tr> <td style="border-bottom: 1px solid black; text-align: right;">6</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; text-align: right;">1</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; text-align: right;">2</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; text-align: right;">1</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; text-align: right;">0</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; text-align: right;">2</td> </tr> <tr> <td style="border-bottom: 1px solid black; text-align: right;">1</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; text-align: right;">2</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; text-align: right;">4</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; text-align: right;">2</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; text-align: right;">0</td> <td style="border-bottom: 1px solid black; text-align: right;">4</td> </tr> <tr> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid red; text-align: right;">8</td> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid red; text-align: right;">7</td> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid red; text-align: right;">6</td> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid red; text-align: right;">0</td> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid red;"></td> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid red;"></td> </tr> <tr> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid red;"></td> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid red;"></td> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid red;"></td> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid red;"></td> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid red;"></td> <td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid red;"></td> </tr> </table> <p style="margin-left: 20px;">Beispiel: $6 * 2 = 12$</p> <table style="margin-left: 20px; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">6</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">2</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">2</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">2</td> </tr> </table> <p style="margin-left: 20px;">Z Die Addition der Ziffern erfolgt im Diagonalverfahren. Die Ziffern der jeweils schräg gezeichneten Parallelogramme sind aufzuaddieren.</p> <p style="margin-left: 20px;">E Die Addition der Ziffern erfolgt im Diagonalverfahren. Die Ziffern der jeweils schräg gezeichneten Parallelogramme sind aufzuaddieren.</p> <p>Division zweier rationaler Zahlen Dividend : Divisor = Quotient</p> <ul style="list-style-type: none"> ◆ Das Vorzeichen bestimmt sich nach den Vorzeichenregeln. ◆ Die Beträge der Zahlen werden dividiert. 			H	Z	E		•	300	60	5			Z	20	6000	1200	100	7300	E	4	1200	240	20	1460						8760			H	Z	E		3	6	5	.			6	1	2	1	0	2	1	2	4	2	0	4	8	7	6	0									6	1	2	2	1	2	
		H	Z	E																																																																						
•	300	60	5																																																																							
Z	20	6000	1200	100	7300																																																																					
E	4	1200	240	20	1460																																																																					
					8760																																																																					
		H	Z	E																																																																						
3	6	5	.																																																																							
6	1	2	1	0	2																																																																					
1	2	4	2	0	4																																																																					
8	7	6	0																																																																							
6	1	2																																																																								
2	1	2																																																																								
© Dipl.-Math. Armin Richter																																																																										

Intensivkurs – Mathematik: Rechenregeln

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Rechenregeln	<p> Rechenregeln für Addition und Multiplikation</p> <p>Für alle Zahlenbereiche gelten für die Addition und Multiplikation folgende Entsprechungen:</p> <p> Das Kommutativgesetz</p> <p>Kommutativgesetz der Addition</p> $a + b = b + a$ <p>Kommutativgesetz der Multiplikation</p> $a \cdot b = b \cdot a$ <p> Das Assoziativgesetz</p> <p>Assoziativgesetz der Addition</p> $(a + b) + c = a + (b + c)$ <p>Assoziativgesetz der Multiplikation</p> $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ <p> Das Distributivgesetz</p> $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	<p>Pluszeichen vor einer Klammer können weggelassen werden, die Vorzeichen wandeln sich in Rechenzeichen um.</p> <p>1 + (2 - 3) Ausgangsgleichung = 1 + (2 + (-3)) Jetzt haben wir in der Klammer eine Summe. = 1 + 2 + (-3) Bei Summen kann man das Assoziativgesetz anwenden. Das heißt man kann die Klammer um die 2. Summe weglassen. = 1 + 2 - 3 Im letzten Schritt wird noch vereinfacht, denn + (-3) ist nichts anderes als -3.</p> <p>Minuszeichen vor einer Klammer können mit dem Vorzeichen der Zahlen nach den oben angegebenen Vorzeichenregeln umgewandelt werden.</p> <p>1 - (2 + 3) Ausgangsgleichung: Vor der Klammer ist ein Minus. So kann das Assoziativgesetz nicht angewendet werden. = 1 + (-2 - 3) Alle Plus und Minus in der Klammer werden umgedreht: Das heißt Plus wird zu Minus und Minus wird zu Plus. Außerdem wird das Minus vor der Klammer zu einem Plus. = 1 + (-2 + (-3)) Differenz in Klammer wird durch eine Summe ersetzt. = 1 + (-2) + (-3) Nun kann man das Assoziativgesetz anwenden. = 1 - 2 - 3 Im letzten Schritt wird noch vereinfacht.</p>
		<p>© Dipl.-Math. Armin Richter</p>  <p>Diese Regeln sind nicht auf Subtraktion und Division in dieser Weise anwendbar.</p>

Intensivkurs – Mathematik: Rechenregeln

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Rechenregeln	<p>Teilbarkeitsregeln</p> <p>Die Quersumme einer Zahl ist die Summe der Ziffern, aus denen die Zahl zusammengesetzt ist. So ist z.B. die Quersumme von 53017965: $QS(53017965) = 5+3+0+1+7+9+6+5 = 36$</p> <p>Für Teilbarkeitsuntersuchungen kann man zwei Vereinfachungen vornehmen:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Man kann alle Ziffern streichen, die ein direktes Vielfaches der Zahl sind, für die die Teilbarkeit untersucht werden soll. So reicht es, wenn man bei der Quersumme von 53017965 alle Zahlen ignoriert, die Vielfaches von 3 sind, wenn man auf die Teilbarkeit von 3 untersuchen will: $QS(53017965) = 5+0+1+7+5 = 18$ 2. Man kann von dieser Quersumme wieder die Quersumme bilden, bis nur noch eine Ziffer übrig bleibt. $QS(18) = 9$ <p>Die alternierende Quersumme einer Zahl entsteht durch das abwechselnde Addieren und Subtrahieren der Ziffern, aus denen die Zahl zusammengesetzt ist. So ist z.B. die alternierende Quersumme von 53017965: $aQS(53017965) = 5-3+0-1+7-9+6-5 = 0$</p>	

Intensivkurs – Mathematik: Rechenregeln

Thema

Gesetze und Regeln

Musterbeispiele

Rechenregeln

Für einige Teilbarkeitsuntersuchungen benötigt man noch die alternierende Dreiergruppensumme. Dazu teilt man die Zahl von rechts her in Gruppen zu je drei Ziffern ein.

Die alternierende Dreiergruppensumme einer Zahl entsteht durch das abwechselnde Addieren und Subtrahieren der entstandenen Dreiergruppen von Zahlen. Dabei ist es unwichtig, ob man mit der ersten oder der letzten Gruppe beginnt, wichtig ist nur der Wechsel von Summe und Differenz. Die alternierende Dreiergruppensumme von 53017965 ist:
 $aGS(53017965) = 53 - 017 + 965 = 1001$

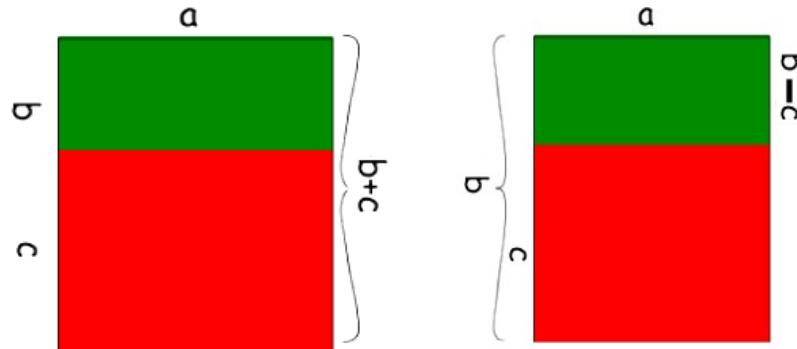
Auch hier kann die Untersuchung mehrfach fortgesetzt werden:

$$aGS(1001) \rightarrow 1 - 001 = 0.$$

Für kleinere Zahlen gibt es einige einfache Teilbarkeitsregeln, mit denen man das schnell testen kann:

- ◆ Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn sie gerade ist, also ihre letzte Ziffer eine 2,4,6,8 oder 0 ist.
- ◆ Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme, also die Summe aller ihrer Ziffern durch 3 teilbar ist.
- ◆ Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn ihre letzten 2 Stellen durch 4 teilbar sind, oder auf 00 endet.
- ◆ Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn ihre letzte Stelle eine 5 oder eine 0 ist.
- ◆ Eine Zahl ist durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist, also wenn sie gerade ist und ihre Quersumme durch 3 teilbar ist (s.o.).
- ◆ Eine Zahl ist durch 7 teilbar, wenn ihre alternierende Dreisigergruppensumme durch 7 teilbar ist.
- ◆ Eine Zahl ist durch 8 teilbar, wenn ihre letzten 3 Stellen durch 8 teilbar sind, oder auf 000 endet..
- ◆ Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.
- ◆ Eine Zahl ist durch 10 teilbar, wenn ihre letzte Stelle eine 0 ist.
- ◆ Eine Zahl ist durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme oder ihre Dreiergruppensumme durch 11 teilbar ist.
- ◆ Eine Zahl ist durch 12 teilbar, wenn sie durch 3 und durch 4 teilbar ist.
- ◆ Eine Zahl ist durch 13 teilbar, wenn ihre alternierende Dreiergruppensumme durch 13 teilbar ist
- ◆ Eine Zahl ist durch 14 teilbar, wenn sie durch 7 und durch 2 teilbar ist
- ◆ Eine Zahl ist durch 15 teilbar, wenn sie durch 3 und durch 5 teilbar ist.
- ◆ Eine Zahl ist durch 18 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 9 teilbar ist.
- ◆ Eine Zahl ist durch 20 teilbar, wenn ihre letzte Stelle eine 0 und ihre vorletzte Stelle gerade ist.

Intensivkurs – Mathematik: Rechenregeln

Thema	Gesetze und Regeln	Musterbeispiele
Rechenregeln	<p>Setzen und Auflösen additiver und subtraktiver Klammern</p> <p>Klammern, vor denen ein Pluszeichen steht dürfen weggelassen werden. Klammern, vor denen ein Minuszeichen steht ändern beim Auflösen alle Rechenzeichen, die in den Klammern stehen.</p> $a + (b + c) = a + b + c$ $a + (b - c) = a + b - c$ $a - (b + c) = a - b - c$ $a - (b - c) = a - b + c$	$2 + (+3) = 2 + 3 = 5 \quad 2 - (+3) = 2 - 3 = -1$ $2 + (+3) = 2 + 3 = 5 \quad 2 - (+3) = 2 - 3 = -1$ $2 * (+3) = 2 * 3 = 6 \quad 2 * (+3) = -2 * 3 = -6$ $-2 * (-3) = 2 * 3 = 6 \quad -2 * (+3) = -2 * 3 = -6$ <p>Treffen zwei ungleiche Vorzeichen aufeinander, entsteht ein: - Treffen zwei gleiche Vorzeichen aufeinander, entsteht ein: +</p> 
	<p>Produkt mit additiver oder subtraktiver Klammer</p> <p>Klammern, vor denen ein Faktor steht und in denen einen Summe oder Differenz steht, unterliegen dem Distributivgesetz:</p> $a * (b \pm c) = a * b \pm a * c$	
	<p>Ausklaermern eines gemeinsamen Faktors</p> <p>Faktoren, die in allen Gliedern einer Summe oder Differenz auftreten können vor die Klammer geschrieben werden. Dieses Ausklaermern kommt einer Division jedes einzelnen Summanden durch den gemeinsamen Faktor gleich. Vorzeichen und Rechenzeichen werden nicht betroffen, solange der Faktor positiv ist. Wird ein negativer Faktor ausgeklaermert, sind alle Rechenzeichen zu ändern.</p> $a*n + b*n - c*n = n*(a + b - c)$ $a*n + b*n - c*n = (-n)*(-a - b + c)$	

© Dipl.-Math.
Armin Richter