Compilation
TD 1

1 Langages

Exercice 1

Montrer que l'ensemble des langages réguliers sur un vocabulaire V est le plus petit ensemble de langages contenant les langages finis sur V et fermé pour la réunion, la concaténation et l'opération *.

Exercice 2

Soit L un langage sur V. Montrer que L^* est le plus petit langage sur V contenant L et fermé pour la concaténation.

Exercice 3

Montrer que les égalités suivantes sont vraies pour tout langage L :
— $(L^*)^* = L^*$
— $(\epsilon + L)^* = L^*$
— $L^*.L^* = L^*$

Exercice 4

Montrer que pour tous langages L, M, N et P, si $L \subseteq M$ et $N \subseteq P$, alors $L^* \subseteq M^*$ et $L.N \subseteq M.P$.

Exercice 5

1. Montrer que les égalités suivantes sont vraies pour tout langage L :
   — $(L^*)^* = (L + M)^*$
   — $(L.M)^*.L = L.(M.L)^*$
   — $(L.M + L)^*.L = L.(M.L + L)^*$
2. Montrer que l'égalité suivante n'est pas valide : $(L + M)^* = L^* + M^*$

Exercice 6

Soient L et M deux langages sur un vocabulaire V, X une inconnue à valeur dans l'ensemble des langages sur V.

1. Montrer que l'équation $L.X = M$ n'admet pas nécessairement une solution.
2. Montrer que l'équation $X = L.X + M$ admet toujours une solution.
3. Donner des exemples de langages L et M tels que $X = L.X + M$ admet plusieurs solution.
4. Reprendre les questions 2 et 3 avec l'équation $X = X.L + M$.

Exercice 7

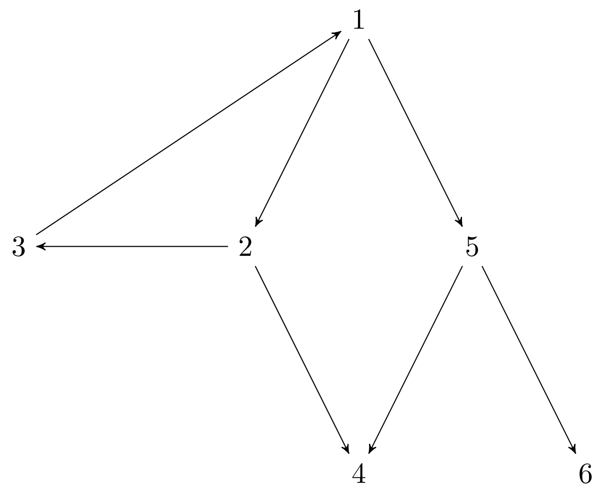
1. Soient V un vocabulaire non vide, x, y deux mots sur V tels que $xy = yx$. Montrer qu'il existe $u \in V^+$ et deux entiers $p, q \geq 0$ tels que $x = u^p$ et $y = u^q$.

2. Soient $x, z \in V^+$, $y \in V^*$ tels que $xy = yz$. Montrer qu'il existe deux mots sur V, u et v et un entier $p \geq 0$ tels que $x = uv$, $z = vu$ et $y = (uv)^p u = u(vu)^p$.

2 Relations

Exercice 8

1. Soit ρ la relation sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ définie par le graphe de la figure ci-dessous. Tracer les graphes des relations ρ^+ et ρ^*.



2. Définir un algorithme qui, étant donné une relation sur un ensemble fini, calcule sa fermeture transitive.