

Compilation

TD 1

1 Langages

Exercice 1

Montrer que l'ensemble des langages réguliers sur un vocabulaire V est le plus petit ensemble de langages contenant les langages finis sur V et fermé pour la réunion, la concaténation et l'opération $*$.

Eléments de solution de l'exercice 1

Soit \mathcal{L}_{rx} l'ensemble des langages réguliers sur un vocabulaire V .

Par définition, tout langage fini est un langage régulier (la preuve est immédiate par induction sur le nombre de mots du langage fini).

Fermeture par l'union : Si L_1 et L_2 sont deux langages réguliers alors ils sont définissables par deux expressions régulières e_1 et e_2 . On peut démontrer par induction que $L_1 \cup L_2$ est définissable par l'expression régulière $e_1 + e_2$.

Fermeture par la concaténation : Si L_1 et L_2 sont deux langages réguliers alors ils sont définissables par deux expressions régulières e_1 et e_2 . On peut démontrer par induction que $L_1.L_2$ est définissable par l'expression régulière $e_1.e_2$.

Fermeture par concaténation itérée : Si L est un langage régulier alors il est définissable par une expression régulière e . On peut démontrer par induction que L^* est définissable par l'expression régulière e^* .

Donc \mathcal{L}_{rx} contient tous les langages finis sur V et il est fermé pour la réunion, la concaténation et l'opération $*$.

Minimalité : Soit un ensemble A qui contient tous les langages finis sur V et fermé pour la réunion, la concaténation et l'opération $*$. Montrons que $\mathcal{L}_{rx} \subseteq A$.

Soit $L \in \mathcal{L}_{rx}$, montrons que $L \in A$. On va démontrer par induction (sur le nombre d'opérateurs n dans e) que $L \in A$:

Si $n = 0$, $e = v \in V$. Par définition $\{v\}$ est fini et donc $L \in A$. Supposons que c'est vrai jusqu'à n et montrons que c'est vrai pour $n + 1$.

Si $e = e_1 + e_2$, alors il existe $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_{rx}$ tels que $L = L_1 \cup L_2$. Par hypothèse de récurrence, le nombre d'opérateurs dans L_1 et dans L_2 est inférieur ou égal à n donc on a $L_1 \in A$ et $L_2 \in A$ et donc $L_1 \cup L_2 \in A$.

Si $e = e_1.e_2$, alors il existe $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_{rx}$ tels que $L = L_1.L_2$. Par hypothèse de récurrence, le nombre d'opérateurs dans L_1 et dans L_2 est inférieur ou égal à n donc on a $L_1 \in A$ et $L_2 \in A$ et donc $L_1.L_2 \in A$.

Si $e = e_1^*$, alors il existe $L_1 \in \mathcal{L}_{rx}$ tels que $L = L_1^*$. Par hypothèse de récurrence, le nombre d'opérateurs dans L_1 est inférieur ou égal à n donc on a $L_1 \in A$ et donc $L_1^* \in A$.

Conclusion : $L \in A$ et $\mathcal{L}_{rx} \subseteq A$.

Exercice 2

Soit L un langage sur V . Montrer que L^* est le plus petit langage sur V contenant L et fermé pour la concaténation.

Eléments de solution de l'exercice 2

Soit L un langage sur V . Montrons que L^* est le plus petit langage sur V contenant L et fermé pour la concaténation.

1. Montrons que L^* est un langage sur V : trivialement par induction sur la taille des mots de L^* .
2. Montrons que L^* contient L : par définition, $L^* = \bigcup_{i=0}^{+\infty} L^i$. Donc $L \subset L^*$.
3. Montrons que L^* est fermé par concaténation : soit $l, p \in L^*$. Par définition, il existe n, m tel que $l \in L^n$ et $p \in L^m$. Nous avons donc $l.p \in L^{n+m} \subset L^*$.

Donc L^* est un langage sur V qui contient L et qui est fermé pour la concaténation.

Montrons que c'est le plus petit langage. La démonstration par induction est similaire à celle de l'exercice précédent : Soit A un langage sur V qui contient L et qui est fermé pour la concaténation. Montrons que $L^* \subseteq A$.

Soit $w \in L^*$, Il existe n tel que $w \in L^n$. Montrons que $w \in A$. La preuve est par induction sur n .

1. Si $w \in L$: alors par définition de A , $w \in A$
2. Supposons que l'hypothèse est vraie jusqu'à n et montrons qu'elle est vraie pour $n + 1$.
Il existe $w_1 \in L^n$ et $w_2 \in L$ tels que $w = w_1.w_2$. Par hypothèse de récurrence, $w_1 \in A$ et $w_2 \in A$ et donc par définition $w_1.w_2 \in A$.

Donc $L^* \subseteq A$.

Exercice 3

Montrer que les égalités suivantes sont vraies pour tout langage L :

- $(L^*)^* = L^*$
- $(\epsilon + L)^* = L^*$
- $L^*.L^* = L^*$

Eléments de solution de l'exercice 3

- $(L^*)^* = L^*$: Preuve par double inclusion. $(L^*)^* \subseteq L^*$: Soit $w \in (L^*)^*$. Il existe donc n tel que $w \in (L^*)^n$. Il existe donc $w_1, \dots, w_n \in L^*$ tels que $w = w_1 w_2 \dots w_n$ et donc il existe m_1, \dots, m_n tels que $w_1 \in L^{m_1}, \dots, w_n \in L^{m_n}$ et donc $w \in L^{m_1 + \dots + m_n}$.
 $L^* \subseteq (L^*)^*$: Soit $w \in L^*$. Il existe donc n tel que $w \in L^n$ et donc il existe $w_1, \dots, w_n \in L$ tels que $w = w_1 w_2 \dots w_n$. Or $L \subset L^*$ et donc $w_1, \dots, w_n \in L^*$ et donc $w \in (L^*)^n$ et donc $w \in (L^*)^*$.
- $(\epsilon + L)^* = L^*$: preuve par double inclusion : $L^* \subseteq (\epsilon + L)^*$. $L \subseteq (\epsilon + L)$ et donc $L^* \subseteq (\epsilon + L)^*$.
 $(\epsilon + L)^* \subseteq L^*$. Soit $w \in (\epsilon + L)^*$. Il existe donc n et $w_1, \dots, w_n \in (\epsilon + L)$ tel que $w = w_1 \dots w_n$. Soient l'ensemble $\{i_1, \dots, i_k\}$ des indices i entre 1 et n tels que $w_{i_j} \neq \epsilon$ ($k \leq n$). On a donc $w = w_{i_1} \dots w_{i_k}$ et donc $w \in L^{i_1 + \dots + i_k} \subset L^*$.
- $L^*.L^* = L^*$: preuve par double inclusion. $L^*.L^* \subseteq L^*$. Soit $w \in L^*.L^*$. Il existe w_1, w_2 et n_1, n_2 tels que $w = w_1 w_2$ et $w_1 \in L^{n_1}$ et $w_2 \in L^{n_2}$. Donc $w = w_1 w_2 \in L^{n_1 + n_2} \subset L^*$.
 $L^* \subseteq L^*.L^*$: Soit $w \in L^*$. alors $w = \epsilon w$ et donc $w \in L^*.L^*$.

Exercice 4

Montrer que pour tous langages L, M, N et P , si $L \subseteq M$ et $N \subseteq P$, alors $L^* \subseteq M^*$ et $L.N \subseteq M.P$.

Eléments de solution de l'exercice 4

Soient les langages L, M, N et P tels que $L \subseteq M$ et $N \subseteq P$.

Montrons que $L^* \subseteq M^*$: Soit $w \in L^*$, il existe n tel que $w \in L^n$ donc comme $L \subseteq M$, alors $w \in M^n$ (preuve triviale par induction sur n). Et donc $w \in M^*$ et donc $L^* \subseteq M^*$.

Montrons que $L.N \subseteq M.P$. Soit $w \in L.N$ il existe donc $w_L \in L, w_N \in N$ tels que $w = w_L w_N$. $w_N \in N$ donc par hypothèse, $w_L \in M$ et $w_N \in P$ et donc $w \in M.P$.

Exercice 5

- Montrer que les égalités suivantes sont vraies pour tout langage L :
 - $(L^*)^* = (L + M)^*$
 - $(L.M)^*.L = L.(M.L)^*$
 - $(L.M + L)^*.L = L.(M.L + L)^*$
- Montrer que l'égalité suivante n'est pas valide : $(L + M)^* = L^* + M^*$

Eléments de solution de l'exercice 5

- Soient L, M deux langages quelconques. On a $L \subset L + M$, donc d'après la question 4 on a $(L^*) \subset (L + M)^*$. D'après la question 3 on a $(L^*)^* = L^*$. Donc au final on a $(L^*)^* = L^* \subset (L + M)^*$.
- $(L.M)^*.L \subset L.(M.L)^*$. Soit $w \in (L.M)^*.L$. Si $w \in L$ alors $w \in L.(M.L)^*$. Sinon, il existe n tel que $w \in (L.M)^n.L$ et donc il existe, $w_{L_1}, \dots, w_{L_n}, w_L \in L, w_{M_1}, \dots, w_{M_n} \in M$ tels que $w = w_{L_1}w_{M_1} \dots w_{L_n}w_{M_n}w_L$. $w_{L_1} \in L$ et $w_{M_1}w_{L_2}, \dots, w_{M_{n-1}}w_{L_n}, w_Mw_L \in M.L$ et donc $w \in L.(M.L)^*$.
 $L.(M.L)^* \subset (L.M)^*.L$. L'autre sens est similaire.
- $(L.M + L)^*.L = L.(M.L + L)^*$: La preuve est par double inclusion exactement de la même manière que pour la question précédente.

Exercice 6

Soient L et M deux langages sur un vocabulaire V , X une inconnue à valeur dans l'ensemble des langages sur V .

- Montrer que l'équation $L.X = M$ n'admet pas nécessairement une solution.
- Montrer que l'équation $X = L.X + M$ admet toujours une solution.
- Donner des exemples de langages L et M tels que $X = L.X + M$ admet plusieurs solutions.
- Reprendre les questions 2 et 3 avec l'équation $X = X.L + M$.

Eléments de solution de l'exercice 6

- Soit le vocabulaire $V = \{a, b\}$ et les langages $L = \{a\}$ et $M = \{b\}$. L'équation $L.X = M$ n'admet pas de solutions.
- On peut montrer que le langage L^*M est une solution : Montrons que $L(L^*M) + M = (L^*M)$. La preuve est par double inclusion :
 $L(L^*M) + M \subset (L^*M)$: soit $w \in L(L^*M) + M$. Si $w \in M$ alors $w \in L^*M$ ($w = \epsilon w$). Sinon, $w \in L(L^*M)$ et donc il existe n tel que $w \in L(L^nM)$ et donc par associativité de la concaténation, on a $w \in L^{n+1}M \subset L^*M$.
 $(L^*M) \subset L(L^*M) + M$: Soit $w \in (L^*M)$. Si $w \in M$ alors $w \in L(L^*M) + M$. Sinon, il existe $n > 0$ tel que $w \in L^nM$ et donc $w \in LL^{n-1}M$ et donc $w \in L(L^*M) + M$.
- En fait tout exemple dans lequel L contient le mot vide ϵ donne lieu à une solution non unique. Exemple Si $L = \{\epsilon\}$ alors l'équation devient $X = X + M$ et donc tout ensemble qui contient M est solution à cette équation.
- Si on considère l'équation $X = X.L + M$ alors on peut montrer que $M.L^*$ est une solution. Si L contient ϵ alors on peut avoir plusieurs solutions.

Exercice 7

- Soient V un vocabulaire non vide, x, y deux mots sur V tels que $xy = yx$. Montrer qu'il existe $u \in V^+$ et deux entiers $p, q \geq 0$ tels que $x = u^p$ et $y = u^q$.
- Soient $x, z \in V^+, y \in V^*$ tels que $xy = yz$. Montrer qu'il existe deux mots sur V , u et v et un entier $p \geq 0$ tels que $x = uv, z = vu$ et $y = (uv)^p u = u(vu)^p$.

Eléments de solution de l'exercice 7

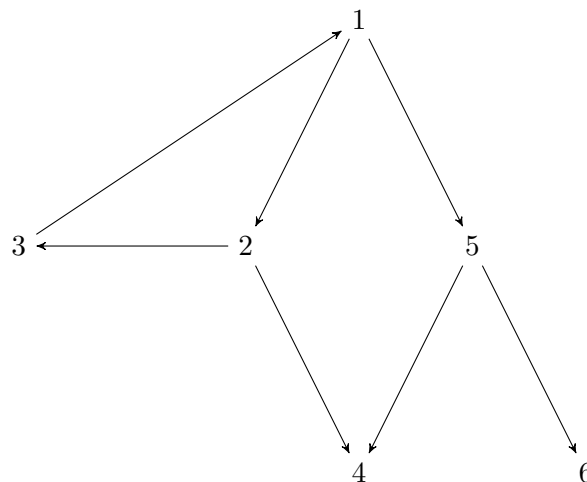
- Preuve par induction sur n (taille de x). On peut supposer sans perte de généralité que $|x| \leq |y|$ (en fait n désigne la plus petite des tailles)

- Si $n = 1$: Montrons par récurrence que $y = x^m$.
 - Si $m = 1$ alors $x = y = u$ et $p = q = 1$.
 - Supposons que c'est vrai jusqu'à m et montrons le pour $m + 1$. $xy = yx$ donc $xy_1 \dots y_{m+1} = y_1 \dots y_{m+1}x$ et donc $x = y_1$ et donc $xy_2 \dots y_{m+1} = y_2 \dots y_{m+1}x$. comme $|x| = 1$ et $|y_2 \dots y_{m+1}| = m$ alors par hypothèse de récurrence on $y_2 \dots y_{m+1} = x^m$ et donc $y = x^{m+1}$.
 - Supposons que c'est vrai jusqu'à n et montrons le pour $n + 1$: -H. R. : si $|x| \leq n$ alors il existe $u \in V^+$ et p, q tels que $x = u^p$ et $y = u^q$. Soit x tel que $|x| = n + 1$ et y tel que $xy = yx$. On $x_1 \dots x_n x_{n+1} y_1 \dots y_m = y_1 \dots y_m x_1 \dots x_n x_{n+1}$. Donc $x_1 = y_1 \dots x_n = y_n x_{n+1} = y_{n+1}$. on pose $v = y_{n+2} \dots y_m$. On a donc $xy = yx$ et donc on a $x_1 \dots x_n x_{n+1} x_1 \dots x_{n+1} v = x_1 \dots x_{n+1} v x_1 \dots x_n x_{n+1} + 1$. soit après simplification : $x_1 \dots x_{n+1} v = v x_1 \dots x_n x_{n+1}$. v donc s'écrit $x_1 z$ et donc on peut écrire $x_2 \dots x_{n+1} v = z x_1 \dots x_n x_{n+1}$... De proche en proche on établit que $x = u^p$ et $y = u^q$
2. la preuve est similaire.

2 Relations

Exercice 8

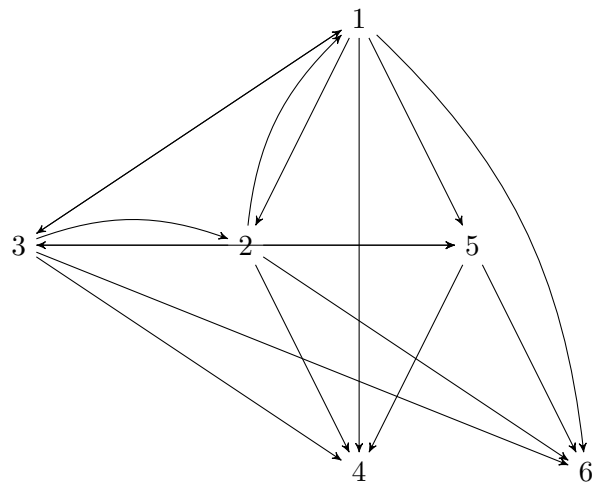
1. Soit ρ la relation sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ définie par le graphe de la figure ci-dessous. Tracer les graphes des relations ρ^+ et ρ^* .



2. Définir un algorithme qui, étant donné une relation sur un ensemble fini, calcule sa fermeture transitive.

Eléments de solution de l'exercice 8

1. Graphe des relations ρ^+



2. Graphe des relations ρ^*

