

# Compilation

## TD 1

### 1 Langages

#### Exercice 1

Montrer que l'ensemble des langages réguliers sur un vocabulaire  $V$  est le plus petit ensemble de langages contenant les langages finis sur  $V$  et fermé pour la réunion, la concaténation et l'opération  $*$ .

##### Eléments de solution de l'exercice 1

Soit  $\mathcal{L}_{rx}$  l'ensemble des langages réguliers sur un vocabulaire  $V$ .

Par définition, tout langage fini est un langage régulier (la preuve est immédiate par induction sur le nombre de mots du langage fini).

Fermeture par l'union : Si  $L_1$  et  $L_2$  sont deux langages réguliers alors ils sont définissables par deux expressions régulières  $e_1$  et  $e_2$ . On peut démontrer par induction que  $L_1 \cup L_2$  est définissable par l'expression régulière  $e_1 + e_2$

Fermeture par la concaténation : Si  $L_1$  et  $L_2$  sont deux langages réguliers alors ils sont définissables par deux expressions régulières  $e_1$  et  $e_2$ . On peut démontrer par induction que  $L_1 \cdot L_2$  est définissable par l'expression régulière  $e_1 \cdot e_2$

Fermeture par concaténation itérée : Si  $L$  est un langage régulier alors il est définissable par une expression régulière  $e$ . On peut démontrer par induction que  $L^*$  est définissable par l'expression régulière  $e^*$

Donc  $\mathcal{L}_{rx}$  contient tous les langages finis sur  $V$  et il est fermé pour la réunion, la concaténation et l'opération  $*$ .

Minimalité : Soit un ensemble  $A$  qui contient tous les langages finis sur  $V$  et fermé pour la réunion, la concaténation et l'opération  $*$ . Montrons que  $\mathcal{L}_{rx} \subseteq A$ .

Soit  $L \in \mathcal{L}_{rx}$ , montrons que  $L \in A$ . On va démontrer par induction (sur le nombre d'opérateurs  $n$  dans  $e$ ) que  $L \in A$  :

Si  $n = 0$ ,  $e = v \in V$ . Par définition  $\{v\}$  est fini et donc  $L \in A$ . Supposons que c'est vrai jusqu'à  $n$  et montrons que c'est vrai pour  $n + 1$ .

Si  $e = e_1 + e_2$ , alors il existe  $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_{rx}$  tels que  $L = L_1 \cup L_2$ . Par hypothèse de récurrence, le nombre d'opérateurs dans  $L_1$  et dans  $L_2$  est inférieur ou égal à  $n$  donc on a  $L_1 \in A$  et  $L_2 \in A$  et donc  $L_1 \cup L_2 \in A$

Si  $e = e_1 \cdot e_2$ , alors il existe  $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_{rx}$  tels que  $L = L_1 \cdot L_2$ . Par hypothèse de récurrence, le nombre d'opérateurs dans  $L_1$  et dans  $L_2$  est inférieur ou égal à  $n$  donc on a  $L_1 \in A$  et  $L_2 \in A$  et donc  $L_1 \cdot L_2 \in A$

Si  $e = e_1^*$ , alors il existe  $L_1 \in \mathcal{L}_{rx}$  tels que  $L = L_1^*$ . Par hypothèse de récurrence, le nombre d'opérateurs dans  $L_1$  est inférieur ou égal à  $n$  donc on a  $L_1 \in A$  et donc  $L_1^* \in A$

Conclusion :  $L \in A$  et  $\mathcal{L}_{rx} \subseteq A$

#### Exercice 2

Soit  $L$  un langage sur  $V$ . Montrer que  $L^*$  est le plus petit langage sur  $V$  contenant  $L$  et fermé pour la concaténation.

### Eléments de solution de l'exercice 2

Soit  $L$  un langage sur  $V$ . Montrons que  $L^*$  est le plus petit langage sur  $V$  contenant  $L$  et fermé pour la concaténation.

1. Montrons que  $L^*$  est un langage sur  $V$  : trivialement par induction sur la taille des mots de  $L^*$ .
2. Montrons que  $L^*$  contient  $L$  : par définition,  $L^* = \bigcup_{i=0}^{+\infty} L^i$ . Donc  $L \subset L^*$ .
3. Montrons que  $L^*$  est fermé par concaténation : soit  $l, p \in L^*$ . Par définition, il existe  $n, m$  tels que  $l \in L^n$  et  $p \in L^m$ . Nous avons donc  $l.p \in L^{n+m} \subset L^*$ .

Donc  $L^*$  est un langage sur  $V$  qui contient  $L$  et qui est fermé pour la concaténation.

Montrons que c'est le plus petit langage. La démonstration par induction est similaire à celle de l'exercice précédent : Soit  $A$  un langage sur  $V$  qui contient  $L$  et qui est fermé pour la concaténation. Montrons que  $L^* \subseteq A$ .

Soit  $w \in L^*$ , Il existe  $n$  tel que  $w \in L^n$ . Montrons que  $w \in A$ . La preuve est par induction sur  $n$ .

1. Si  $w \in L$  : alors par définition de  $A$ ,  $w \in A$
2. Supposons que l'hypothèse est vraie jusqu'à  $n$  et montrons qu'elle est vraie pour  $n + 1$ . Il existe  $w_1 \in L^n$  et  $w_2 \in L$  tels que  $w = w_1.w_2$ . Par hypothèse de récurrence,  $w_1 \in A$  et  $w_2 \in A$  et donc par définition  $w_1.w_2 \in A$ .

Donc  $L^* \subseteq A$ .

### Exercice 3

Montrer que les égalités suivantes sont vraies pour tout langage  $L$  :

- $(L^*)^* = L^*$
- $(\epsilon + L)^* = L^*$
- $L^*.L^* = L^*$

### Eléments de solution de l'exercice 3

—  $(L^*)^* = L^*$  : Preuve par double inclusion.  $(L^*)^* \subseteq L^*$  : Soit  $w \in (L^*)^*$ . Il existe donc  $n$  tel que  $w \in (L^*)^n$ . Il existe donc  $w_1, \dots, w_n \in L^*$  tels que  $w = w_1w_2\dots w_n$  et donc il existe  $m_1, \dots, m_n$  tels que  $w_1 \in L^{m_1}, \dots, w_n \in L^{m_n}$  et donc  $w \in L^{m_1+\dots+m_n}$ .

$L^* \subseteq (L^*)^*$  : Soit  $w \in L^*$ . Il existe donc  $n$  tel que  $w \in L^n$  et donc il existe  $w_1, \dots, w_n \in L$  tels que  $w = w_1w_2\dots w_n$ . Or  $L \subset L^*$  et donc  $w_1, \dots, w_n \in L^*$  et donc  $w \in (L^*)^n$  et donc  $w \in (L^*)^*$ .

—  $(\epsilon + L)^* = L^*$  : preuve par double inclusion :  $L^* \subseteq (\epsilon + L)^*$ .  $L \subseteq (\epsilon + L)$  et donc  $L^* \subseteq (\epsilon + L)^*$ .

$(\epsilon + L)^* \subseteq L^*$ . Soit  $w \in (\epsilon + L)^*$ . Il existe donc  $n$  et  $w_1, \dots, w_n \in (\epsilon + L)$  tel que  $w = w_1\dots w_n$ . Soient l'ensemble  $\{i_1, \dots, i_k\}$  des indices  $i$  entre 1 et  $n$  tels que  $w_{i_j} \neq \epsilon$  ( $k \leq n$ ). On a donc  $w = w_{i_1}\dots w_{i_k}$  et donc  $w \in L^{i_1+\dots+i_k} \subset L^*$ .

—  $L^*.L^* = L^*$  preuve par double inclusion.  $L^*.L^* \subseteq L^*$ . Soit  $w \in L^*.L^*$ . Il existe  $w_1, w_2$  et  $n_1, n_2$  tels que  $w = w_1w_2$  et  $w_1 \in L^{n_1}$  et  $w_2 \in L^{n_2}$ . Donc  $w = w_1w_2 \in L^{n_1+n_2} \subset L^*$ .

$L^* \subseteq L^*.L^*$  : Soit  $w \in L^*$ . alors  $w = \epsilon w$  et donc  $w \in L^*.L^*$ .

### Exercice 4

Montrer que pour tous langages  $L, M, N$  et  $P$ , si  $L \subseteq M$  et  $N \subseteq P$ , alors  $L^* \subseteq M^*$  et  $L.N \subseteq M.P$ .

### Eléments de solution de l'exercice 4

Soient les langages  $L, M, N$  et  $P$  tels que  $L \subseteq M$  et  $N \subseteq P$ .

Montrons que  $L^* \subseteq M^*$  : Soit  $w \in L^*$ , il existe  $n$  tel que  $w \in L^n$  donc comme  $L \subseteq M$ , alors  $w \in M^n$  (preuve triviale par induction sur  $n$ ). Et donc  $w \in M^*$  et donc  $L^* \subseteq M^*$ .

Montrons que  $L.N \subseteq M.P$ . Soit  $w \in L.N$  il existe donc  $w_L \in L, w_N \in N$  tels que  $w = w_L w_N$ .  $w_N \in N$  donc par hypothèse,  $w_L \in M$  et  $w_N \in P$  et donc  $w \in M.P$ .

### Exercice 5

1. Montrer que les égalités suivantes sont vraies pour tout langage  $L$  :
  - $(L^*)^* = (L + M)^*$
  - $(L.M)^*.L = L.(M.L)^*$
  - $(L.M + L)^*.L = L.(M.L + L)^*$
2. Montrer que l'égalité suivante n'est pas valide :  $(L + M)^* = L^* + M^*$

#### Eléments de solution de l'exercice 5

- Soient  $L, M$  deux langages quelconques. On a  $L \subset L + M$ , donc d'après la question 4 on a  $(L^*) \subset (L + M)^*$ . D'après la question 3 on a  $(L^*)^* = L^*$ . Donc au final on a  $(L^*)^* = L^* \subset (L + M)^*$ .
- $(L.M)^*.L \subset L.(M.L)^*$ . Soit  $w \in (L.M)^*.L$ . Si  $w \in L$  alors  $w \in L.(M.L)^*$ . Sinon, il existe  $n$  tel que  $w \in (L.M)^n.L$  et donc il existe  $w_{L_1}, \dots, w_{L_n}, w_L \in L$ ,  $w_{M_1}, \dots, w_{M_n} \in M$  tels que  $w = w_{L_1}w_{M_1} \dots w_{L_n}w_{M_n}w_L$ .  $w_{L_1} \in L$  et  $w_{M_1}w_{L_2}, \dots, w_{M_{n-1}}w_{L_n}, w_Mw_L \in M.L$  et donc  $w \in L.(M.L)^*$ .  
 $L.(M.L)^* \subset (L.M)^*.L$ . L'autre sens est similaire.
- $(L.M + L)^*.L = L.(M.L + L)^*$  : La preuve est par double inclusion exactement de la même manière que pour la question précédente.

### Exercice 6

Soient  $L$  et  $M$  deux langages sur un vocabulaire  $V$ ,  $X$  une inconnue à valeur dans l'ensemble des langages sur  $V$ .

1. Montrer que l'équation  $L.X = M$  n'admet pas nécessairement une solution.
2. Montrer que l'équation  $X = L.X + M$  admet toujours une solution.
3. Donner des exemples de langages  $L$  et  $M$  tels que  $X = L.X + M$  admet plusieurs solution.
4. Reprendre les questions 2 et 3 avec l'équation  $X = X.L + M$ .

#### Eléments de solution de l'exercice 6

- Soit le vocabulaire  $V = \{a, b\}$  et les langages  $L = \{a\}$  et  $M = \{b\}$ . L'équation  $L.X = M$  n'admet pas de solutions.
- On peut montrer que le langage  $L^*M$  est une solution : Montrons que  $L(L^*M) + M = (L^*M)$ . La preuve est par double inclusion :
  - $L(L^*M) + M \subset (L^*M)$  : soit  $w \in L(L^*M) + M$ . Si  $w \in M$  alors  $w \in L^*M$  ( $w = \epsilon w$ ). Sinon,  $w \in L(L^*M)$  et donc il existe  $n$  tel que  $w \in L(L^nM)$  et donc par associativité de la concaténation, on a  $w \in L^{n+1}M \subset L^*M$ .
  - $(L^*M) \subset L(L^*M) + M$  : Soit  $w \in (L^*M)$ . Si  $w \in M$  alors  $w \in L(L^*M) + M$ . Sinon, il existe  $n > 0$  tel que  $w \in L^nM$  et donc  $w \in LL^{n-1}M$  et donc  $w \in L(L^*M) + M$
- En fait tout exemple dans lequel  $L$  contient le mot vide  $\epsilon$  donne lieu à une solution non unique. Exemple Si  $L = \{\epsilon\}$  alors l'équation devient  $X = X + M$  et donc tout ensemble qui contient  $M$  est solution à cette équation.
- Si on considère l'équation  $X = X.L + M$  alors on peut montrer que  $M.L^*$  est une solution. Si  $L$  contient  $\epsilon$  alors on peut avoir plusieurs solutions.

### Exercice 7

1. Soient  $V$  un vocabulaire non vide,  $x, y$  deux mots sur  $V$  tels que  $xy = yx$ . Montrer qu'il existe  $u \in V^+$  et deux entiers  $p, q \geq 0$  tels que  $x = u^p$  et  $y = u^q$ .
2. Soient  $x, z \in V^+$ ,  $y \in V^*$  tels que  $xy = yz$ . Montrer qu'il existe deux mots sur  $V$ ,  $u$  et  $v$  et un entier  $p \geq 0$  tels que  $x = uv$ ,  $z = vu$  et  $y = (uv)^p u = u(vu)^p$ .

#### Eléments de solution de l'exercice 7

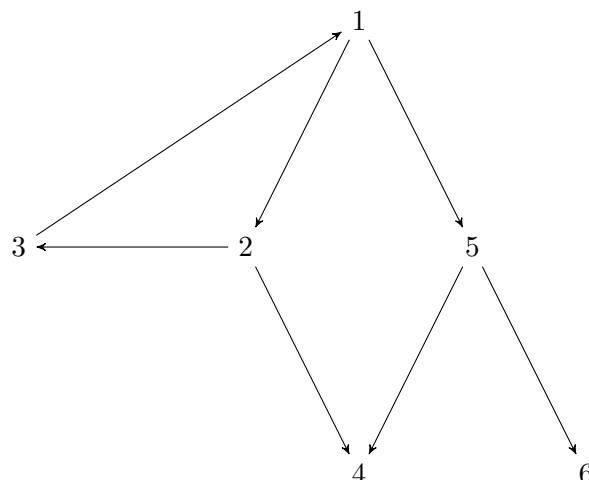
1. Preuve par induction sur  $n$  (taille de  $x$ ). On peut supposer sans perte de généralité que  $|x| \leq |y|$  (en fait  $n$  désigne la plus petite des tailles)

- Si  $n = 1$  : Montrons par récurrence que  $y = x^m$ .
    - Si  $m = 1$  alors  $x = y = u$  et  $p = q = 1$ .
    - Supposons que c'est vrai jusqu'à  $m$  et montrons le pour  $m + 1$ .  $xy = yx$  donc  $xy_1 \dots y_{m+1} = y_1 \dots y_{m+1}x$  et donc  $x = y_1$  et donc  $xy_2 \dots y_{m+1} = y_2 \dots y_{m+1}x$ . comme  $|x| = 1$  et  $|y_2 \dots y_{m+1}| = m$  alors par hypothèse de récurrence on  $y_2 \dots y_{m+1} = x^m$  et donc  $y = x^{m+1}$ .
  - Supposons que c'est vrai jusqu'à  $n$  et montrons le pour  $n + 1$  : -H. R. : si  $|x| \leq n$  alors il existe  $u \in V^+$  et  $p, q$  tels que  $x = u^p$  et  $y = u^q$ . Soit  $x$  tel que  $|x| = n + 1$  et  $y$  tel que  $xy = yx$ . On  $x_1 \dots x_n x_{n+1} y_1 \dots y_m = y_1 \dots y_m x_1 \dots x_n x_{n+1}$ . Donc  $x_1 = y_1 \dots x_n = y_n x_{n+1} = y_{n+1}$ . on pose  $v = y_{n+2} \dots y_m$ . On a donc  $xy = yx$  et donc on a  $x_1 \dots x_n x_{n+1} x_1 \dots x_{n+1} v = x_1 \dots x_{n+1} v x_1 \dots x_n x_n + 1$ . soit après simplification :  $x_1 \dots x_{n+1} v = v x_1 \dots x_n x_{n+1} \cdot v$  donc s'écrit  $x_1 z$  et donc on peut écrire  $x_2 \dots x_{n+1} v = z x_1 \dots x_n x_{n+1} \dots$  De proche en proche on établit que  $x = u^p$  et  $y = u^q$
2. la preuve est similaire.

## 2 Relations

### Exercice 8

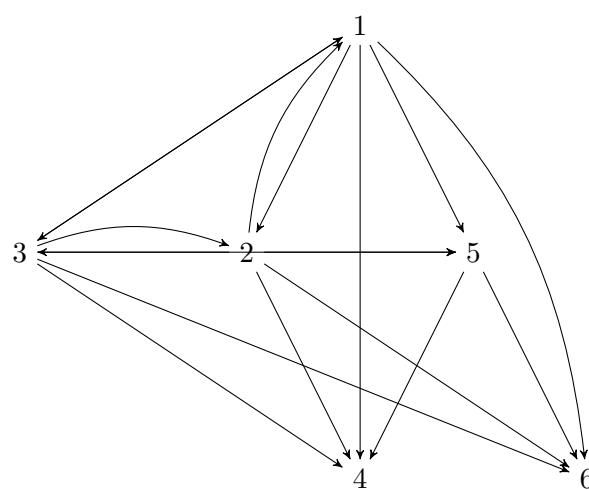
1. Soit  $\rho$  la relation sur l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  définie par le graphe de la figure ci-dessous.  
Tracer les graphes des relations  $\rho^+$  et  $\rho^*$ .



2. Définir un algorithme qui, étant donné une relation sur un ensemble fini, calcule sa fermeture transitive.

### Eléments de solution de l'exercice 8

1. Graphe des relations  $\rho^+$

2. Graphe des relations  $\rho^*$ 