Flujo de agua en curvas de nivel

Cuando se deja caer una gota en una superficie, la gota tendrá una trayectoria estipulada, ¿pero cuál es esa trayectoria? Imagínese usted que deja caer una gota de agua en el extremo superior de la cáscara de un huevo, ¿Qué trayectoria recorrerá la gota?

Supongamos que el huevo está dado por $\sqrt{-u^2 - v^2 - 64}$ y su punto más alto esta en (0,0), para hacer un análisis sobre la trayectoria podemos deducir ciertos aspectos gracias al cálculo multivariable.

Como primer aspecto, podemos obtener el gradiente de nuestra función, obteniendo las derivadas direccionales de nuestra función y almacenarlas en un vector, el gradiente nos indica el cual el campo de la función varía más rápidamente y su módulo representa el ritmo de variación de la función en la dirección del gradiente, o sea el gradiente nos da el cambio máximo de crecimiento que puede haber en nuestra función. Dicho esto podemos observar que lo que queremos no es el máximo crecimiento sino el máximo decrecimiento, estamos hablando de la dirección contraria del gradiente, con esto obtenemos un aspecto claro del cálculo que se quiere obtener para dicho decrecimiento de nuestra gota. Si ploteamos $\sqrt{-u^2 - v^2 - 64}$ podemos ver que nuestro huevo en los números reales es aproximadamente la mitad de un huevo, observe que:

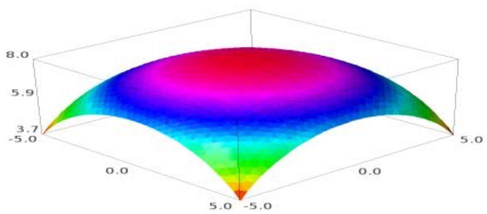

Ilustración 1

Ahora sí, viendo nuestro huevo desde una vista aérea, usando las curvas de nivel para esta función podemos observar que:

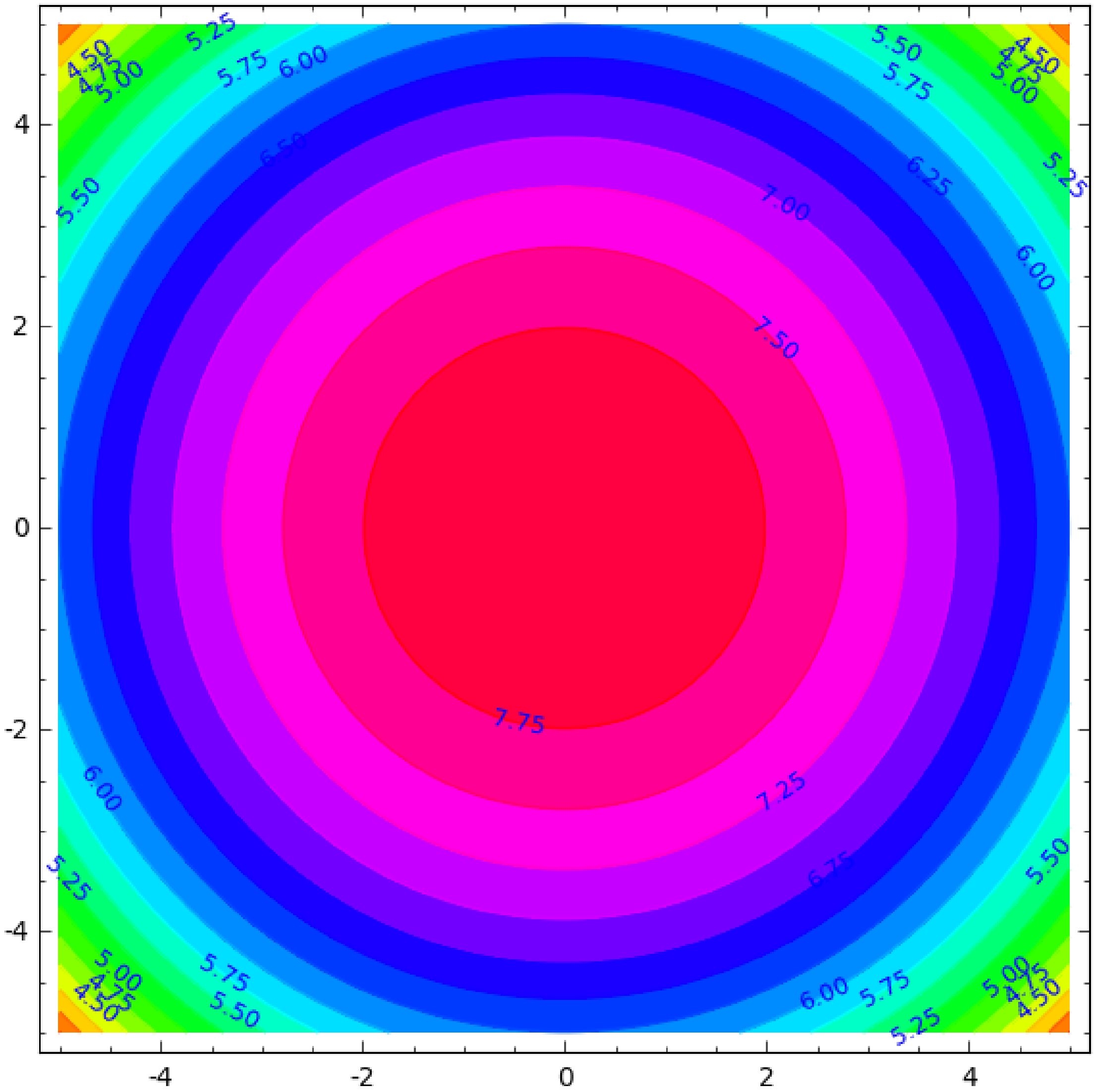

Ilustración 2

Las curvas de nivel se obtienen de:

$$\sqrt{-u^2 - v^2 - 64} = K, donde\ K = 1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6{,}7{,}8{,}.$$

Como siguiente punto tenemos que ver en que dirección va el gradiente, para eso obtendremos las derivadas parciales de nuestra función asì obtendremos el gradiente.

$$\nabla f = < -\frac{u}{\sqrt{-u^2 - v^2 + 64}}, -\frac{v}{\sqrt{-u^2 - v^2 + 64}}, >$$

Gracias al gradiente nosotros podemos graficar nuestro campo vectorial.

Si se hace una gráfica de nuestro mapa de contornos y nuestro campo del gradiente podremos observar la ilustración 3,

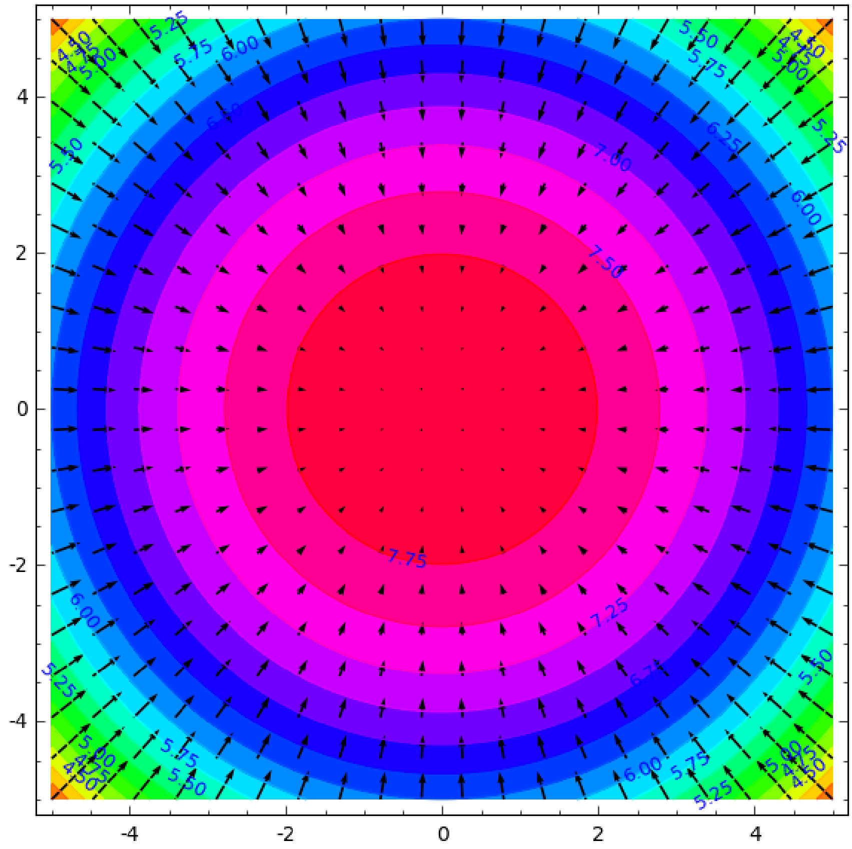

Ilustración 3

Este es el gradiente el que podemos observar en la ilustración número 3, debido a que se quiere el máximo decrecimiento y se puede observar que las curvas de nivel mientras más cerca del origen están su valor es mayor vamos a hacer que la gota de agua viaje en contra del gradiente (en contra de las flechas en la ilustración 3)

Supongamos que el señor Laplace estaba trabajando un día en calculo diferencial, una mañana el decidió desayunar un poco de cálculo multivariable y unos cuantos huevos de postre, mientras el operaba un poco de cálculo se iba preparar los huevos, pero ese día era un día muy caluroso, el señor Laplace estaba sudando, y una gota de sudor fue derramada en el huevo que el todavía no preparaba, la gota de sudor accidentalmente se posicionó en (2,2) del huevo.

A este punto le vamos a llamar nuestro punto inicial.

Si la gota tiene una forma circular, y el radio es de 1/18, y su centro está en (2,2) podremos notar que está dada por:

$$f(x,y) = (x-2)^2 + (y-2)^2 = \frac{1}{18}$$

Como siguiente punto a notar es que la gota tendrá una trayectoria, ella no se quedará parada en (2,2) sino seguirá su trayectoria en la dirección opuesta al vector gradiente, por lo tanto:

$$f(x,y) = (x-2+\frac{df}{dx})^2 + (y-2+\frac{df}{dy})^2 = \frac{1}{18}$$

En el mapa de contornos y su respectivo campo vectorial se puede observar la gota que el señor Laplace derramó y su trayectoria, observe la ilustración 4.