Descripción

Matrizlandia es una ciudad de n calles horizontales y n calles verticales, muy parecida a una matriz de $n \times n$. Cada calle, horizontal o vertical, cuenta con exactamente n casas. La dirección de cada casa corresponde al par de números de la calle horizontal y vértical donde se encuentra. Por ejemplo, la casa de la esquina superior izquierda tiene como dirección el par de números $(0, 0)$ y la de la esquina inferior derecha tiene como dirección el par $(n - 1, n - 1)$. Además de la dirección, cada casa tiene un tamaño en metros cuadrados, que puede ser representado por un entero positivo. Los ciudadanos son tan ordenados, que construyeron la ciudad de tal forma en cada calle horizontal, las casas están ordenadas de forma ascendente en base a su tamaño. Lo mismo sucede con las calles verticales, las casas también están ordenadas ascendentemente por su tamaño.

Como parte del equipo del municipio de Matrizlandia, te asignan la tarea de censar la k-ésima casa más pequeña. En caso de que existan múltiples casas con ese tamaño, te tocará censar todas. Para darte una idea previa al censo, agarras el mapa de la ciudad y decides que sería útil saber de qué tamaño es la k-ésima casa más pequeña.

Entrada

En la primera línea el valor de n.

En la segunda línea el valor de k.

Luego seguirán n líneas con n valores enteros separados por un espacio. Cada línea contiene los tamaños de las casas en orden.

Salida

Una sola línea, con el tamaño de la k-ésima casa más pequeña.

Límites

Los tamaños de las casas son menores a 10^8.

$1 \leq n \leq 2500$.

$1 \leq k \leq n^2$.

Subtarea 1 [20 puntos]

$n < 1000$.

Subtarea 2 [80 puntos]

Sin restricciones.

Notas

Por conveniencia, numeramos las calles desde el 0 hasta $n - 1$.

[Subtarea 1] *Solución:*
Una primera solución ordena todos los elementos de la matriz en un arreglo, lo que tiene complejidad $O(n^2 \log n^2)$ y accede en tiempo constante al k-ésimo menor elemento. Esto es suficiente para resolver la primera subtarea. A continuación se proponen alternativas para mejorar la eficiencia. En lugar de ordenar todo el arreglo, podemos usar el hecho de que las filas están ordenadas y combinarlas en $O(n)$ secuencialmente usando una subrutina similar al paso de combinar del ordenamiento por mezcla. Si lo hacemos secuencialmente, la complejidad es $O(n^3)$. Para optimizar esto, podemos mezclar las filas en pares y combinar los resultados en cada nivel. Esto toma $O(n^2 \log n)$ ya que hay $\log n$ niveles y cada nivel toma $O(n^2)$.

[Subtarea 2] *Solución:*
Para resolver el problema eficientemente, debemos usar la propiedad de orden de las filas y las columnas. Una idea interesante es remover el elemento mínimo k veces. Si podemos hacer esto, el último número que removamos será el k-ésimo menor elemento. Sabemos que el elemento de la esquina superior izquierda $A[0][0]$ es el menor, entonces lo removemos (para no considerarlo nuevamente). ¿Cuáles son los posibles candidatos para el mínimo elemento luego de eliminar $A[0][0]$ (el segundo menor elemento en total)? Por la propiedad de que las filas y las columnas están ordenadas, solamente los elementos $A[1][0]$ y $A[0][1]$ son posibles candidatos a ser e segundol menor elemento. Esto nos lleva a la idea de utilizar un montículo (implementado como un priority queue en código). Empezamos añadiendo el elemento $A[0][0]$ al montículo, y extraemos el elemento mínimo k veces. Cada vez que extraemos un elemento $A[i][j]$, añadimos los elementos $A[i+1][j]$ y $A[i][j+1]$ al montículo (en caso de existir). La extracción del mínimo y la inserción en un montículo toma $O(\log Q)$ donde Q es el tamaño del montículo. Ya que empezamos con 1 elemento y en cada iteración removemos 1 elemento y añadimos a lo mucho dos elementos, Q crece a lo mucho en 1 en cada iteración. La complejidad es entonces $O(\log 1 + \log 2 + \ldots + \log k) = O(k \log k)$ lo cual depende solamente de k y no de n. Sin embargo, utilizamos espacio extra $O(n^2)$ para guardar todos los elementos en un priority queue, pero esto es aceptable pues el espacio es lineal en el número de elementos.