Descripción:

En un planeta muy lejano, Danielle es una apasionada observadora de estrellas. Al acostarse y observar el cielo estrellado se ha dado cuenta de que si ubicase un plano cartesiano en el cielo, en todos los puntos de coordenadas enteras habría una estrella, y no habrían estrellas en ningún otro punto. En este cielo tan aburrido se propone crear constelaciones dibujando triángulos usando 3 estrellas como vértices. Entonces, para cada triángulo que ella dibuja en el cielo, se hace la siguiente pregunta:

¿Cuántas estrellas están dentro del triángulo y cuántas están ubicadas en su perímetro?

Abrumada por la cantidad de estrellas que debe contar y sabiendo que eres un excelente programador, te pide que la ayudes.

Entrada:

Tres líneas, una por cada estrella (vértice). En cada línea 2 enteros separados por un espacio con las coordenadas x_i y_i de cada estrella.

Salida:

Dos enteros separados por un espacio, el primero es la cantidad de estrellas dentro del triángulo y el segundo entero es la cantidad de estrellas en el perímetro del triángulo.

Límites:

$0 \leq x_i, y_i < 200$.

Subtarea 1 [60 puntos]

Triángulos rectángulos cuyo vértice del ángulo recto está en el origen $(0, 0)$ y sus catetos son paralelos a los ejes.

Subtarea 2 [40 puntos]

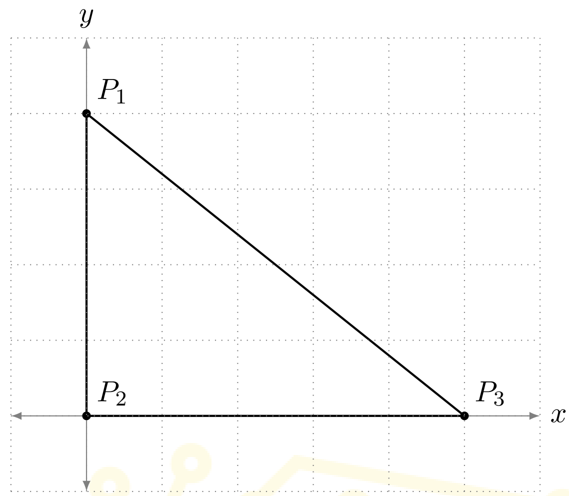
Todo tipo de triángulos sin restricciones.

Notas

Puedes asumir que $x_1 \leq x_2 \leq x_3$.

[Subtarea 1] *Solución:*
Para poder resolver el problema, se va a contar cuántos puntos hay dentro del triángulo y en el perímetro para cada coordenada x_i. Se puede notar que para hallar cuántos puntos con coordenadas x_i hay dentro del triángulo, hay que definir cuál es el mínimo de estos y cuál es el máximo. El límite máximo va a ser el punto con coordenadas enteras más cercano al lado superior y el mínimo el punto con coordenadas enteras más cercano al lado inferior. Entonces para el límite máximo se usa la parte entera de la coordenada y del punto que está en el lado superior con coordenadas x_i y para el inferior la parte entera de la coordenada y del punto que está en el lado inferior. De esta manera la cantidad de puntos dentro del triángulo va a ser la resta de estos números. Además, también podemos verificar si hay puntos en el perímetro. Si el lado superior pasa por un punto de coordenadas enteras se lo debe restar del contador de punto dentro del triángulo por que se lo estaría contando de más. En cambio, si el lado inferior pasa por un punto con coordenadas enteras solo hay que agregarlo al contador de los puntos en el perímetro.

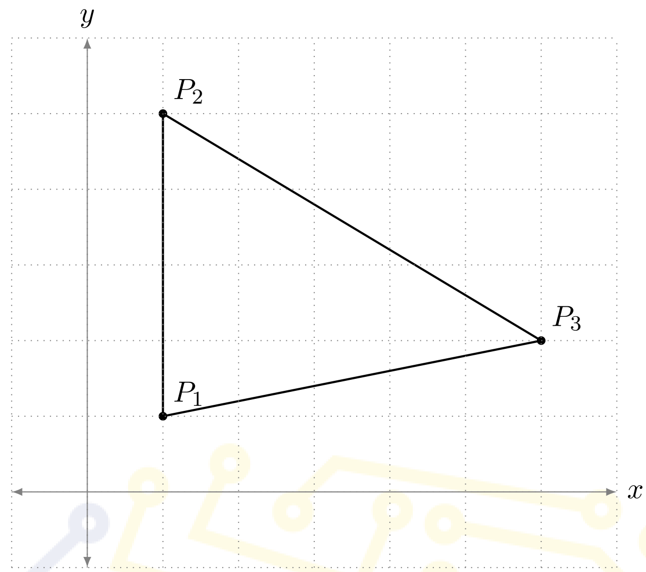
Para la primera subtarea $x_1 = x_2 < x_3$. Los gráficos de la primera subtarea van a ser de la siguiente manera:



En el gráfico podemos observar que para calcular cuántos puntos están en el interior del triángulo con coordenada x_i, basta averiguar el mayor entero que es menor o igual a la coordenada en y del punto con coordenada x_i que está en la recta P_1P_2. Excepto cuando esta coordenada es entera, en tal caso este punto estará en el perímetro, se lo debe restar del conteo de los puntos al interior del triángulo y agregarlo al conteo de los perímetros. El bucle se va a realizar para $x_1 > x_i > x_3$, para hallar el punto de la recta P_1P_2 con coordenada x_i se va a usar la ecuación de la recta. Hay que asegurarse de que $y_1 \geq y_2$, ya que la pendiente se la va a obtener con el mayor de ellos. Al final faltan sumar los puntos que se encuentran en los ejes de coordenadas x y y. Vemos que sin contar al vértice $(0, 0)$ en el eje x hay x_3 estrellas en el lado del triángulo, y en el eje y hay y_1. Sumando estos valores más el vértice obtenemos la cantidad de estrellas en el perímetro del triángulo.

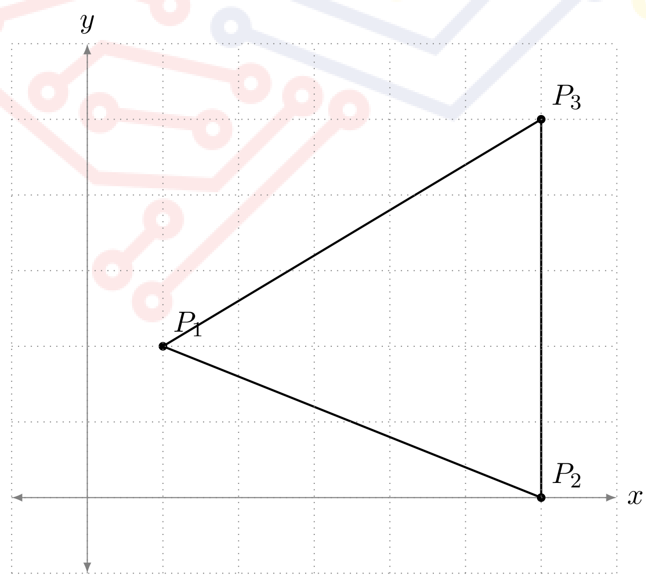
[Subtarea 2] *Solución:*
Para resolver el problema completo la idea es básicamente la misma, pero hay que tomar algunas consideraciones. La más importante es que ahora los puntos con coordenada x_i dentro del triángulo van a tener un límite inferior diferente de 0, en la subtarea 1 este entero era 0 por eso no se lo tomaba en cuenta. Además, si el punto superior es un entero, este se debe de restar de los puntos que están dentro del triángulo, y agregarlo a los que están en el perímetro. Pero si el inferior es un entero solo debe agregarse a lo de los perímetros. Debido a que $x_3 \geq x_2 \geq x_1$ vamos a dividir el proceso en tres casos, esto es para evitar calcular pendientes infinitas y poder definir bien cuáles son las rectas rectas superiores e inferiores: Cuando $x_1 = x_2 < x_3$, cuando $x_1 < x_2 = x_3$ y cuando $x_1 < x_2 < x_3$. Este último caso lo vamos a dividir en dos casos más. Uno cuando P_2 está ubicado encima del segmento que une P_1 y P_3, y el otro cuando está ubicado debajo de este segmento.

Para el primer caso $x_1 = x_2 < x_3$ la gráfica sería aproximadamente:



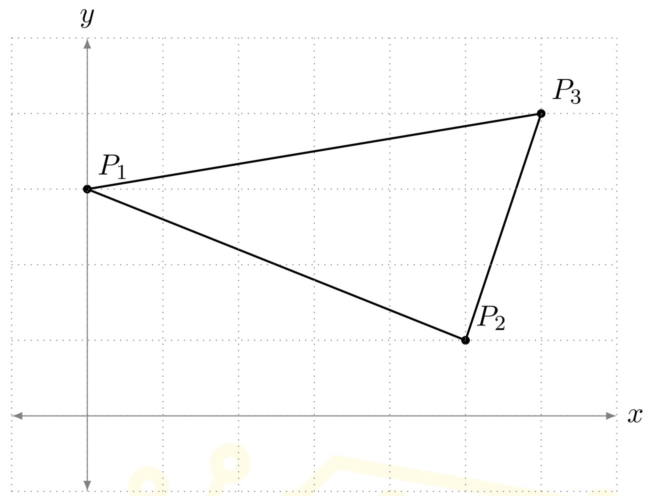
Nos aseguramos que y_1 es mayor que y_2 y caso contrario se intercambian los valores. El bucle solo va a ser entre x_1 o x_2 y x_3. Se calculan ambas pendientes de ambos segmentos, y se obtiene el entero superior e inferior usando la ecuación de la recta. Luego se restan para agregarlos a la suma de los puntos internos. Nos fijamos en los casos que las rectas pasen por puntos de coordenadas enteras y finalmente se agregan los puntos del perímetro que están en el lado de pendiente infinita que son $y_1 - y_2 + 1$ y finalmente el vértice P_3 que no se había contado anteriormente. Además, este caso resuelve toda la subtarea 1.

Para el segundo caso $x_1 < x_2 = x_3$ la gráfica sería aproximadamente:



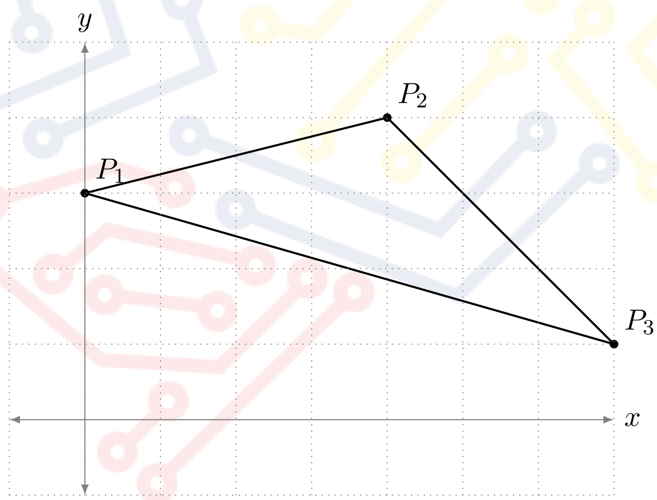
Este caso se resuelve de igual manera que el primero, solo cambiando el bucle, que va de x_1 a x_2 o x_3. Se calcula cómo sacar los enteros máximos y mínimos con la ecuación de la recta y se van agregando. En este caso los puntos del perímetro en el lado de pendiente infinita van a ser $y_3 - y_2 + 1$.

Para el último caso se divide en dos subcasos, el primero cuando P_2 está abajo del segmento P_1P_3, el gráfico sería aproximadamente:



Debido a que desde x_1 a x_3 los lados superiores e inferiores no son los mismos segmentos, este bucle se va a dividir en dos, el primero desde x_1 hasta x_2 y el segundo desde x_2 hasta x_3. De ahí en cada bucle, para calcular los puntos internos la idea es la misma. Al final solo hay que sumar los dos vértices, izquierdo y derecho.

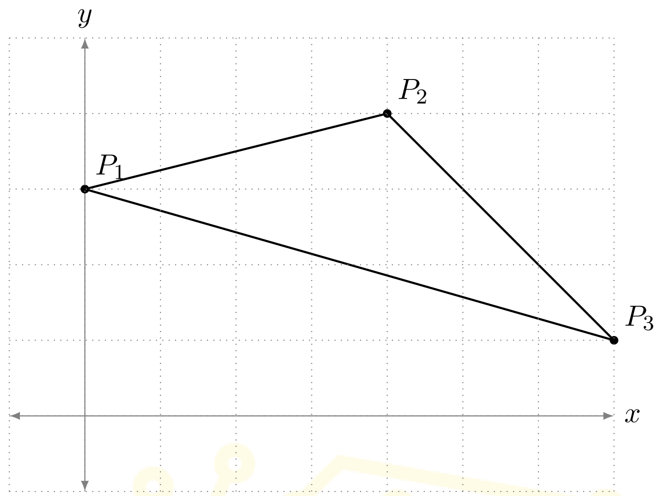
Para el subcaso final P_2 está arriba del segmento P_1P_3, el gráfico sería aproximadamente:



La idea es la misma del anterior subcaso, solo hay que fijarse correctamente qué puntos son los máximos y mínimos.

[Subtarea 2] *Solución:*

Otra solución es determinar si para cada uno de los lados, si el punto (x_i, y_i) está en el mismo semiplano que el otro vértice del triángulo. Si para los tres lados esto se cumple entonces el punto está dentro del triángulo. Además, se comprueba si el punto está en el lado para en ese caso agregarlo al perímetro. Para poder hacer esa verificación, se va a usar la siguiente fórmula del área del triángulo conociendo sus vértices $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$.



$$A = (y_2 - y_1)x_3 + (x_1 - x_2)y_3 + x_2y_1 - x_1y_2.$$

Esta fórmula dará el área correcta si se asume que los puntos P_1, P_2 y P_3 están en sentido horario. Esto quiere decir que si se mantiene fijo P_1 y P_2 y se varía P_3 entonces cuando este esté en el semiplano que hace que los tres puntos estén en sentido horario el área va a ser positiva, y si el punto está en el otro semiplano el área va a ser negativa. Además, si los tres puntos son colineales el área va a ser 0 y sabremos que los tres puntos están en una misma recta. Teniendo esto en cuenta, podemos, para cada lado, sacar su área con el otro vértice del triángulo y luego reemplazar este vértice con el punto a comprobar x_i, y_i y sacar esta otra área. Si ambas áreas tienen el mismo signo entonces el punto a comprobar y el otro vértice están en el mismo semiplano, caso contrario están en diferentes semiplanos. Para que el punto a comprobar esté dentro del triángulo se debe cumplir esta propiedad para los tres lados. En caso de que el área de 0, quiere decir que el punto a comprobar está en la recta de ese lado, pero es necesario verificar que esté entre ambos vértices para comprobar que el punto está en el lado. Finalmente, para saber cuáles puntos se deben comprobar, tenemos que asegurarnos que los puntos cuyas coordenadas x, y estén entre los valores máximos y mínimos de los vértices dados.