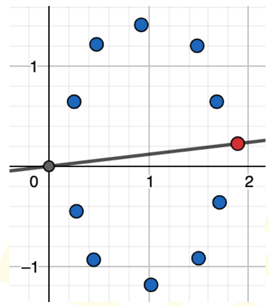
Descripción

La época de pandemia te tiene aburrido y una tarde, ya desesperado, decidiste jugar con puntos en el plano cartesiano. Empezaste con 11 puntos en el plano, y teniendo una atracción desmedida por el equilibrio y el balance, quisiste dividirlos en conjuntos de igual cantidad. Para lograr tu objetivo, trazaste una recta desde el origen a uno de los puntos. De esta forma conseguiste que el plano quedara dividido en dos partes, ambas con 5 puntos en su interior, como se muestra en la figura:



Luego de seguir experimentando con distintos puntos e incrementando la cantidad de puntos, te preguntas si esta tarea puede ser automatizada.

Entrada

Una línea con un entero positivo impar n indicando el número de puntos. Luego seguirán n líneas, con 2 números (de tipo float) por línea separados por un espacio, representando las coordenadas de cada punto en el plano cartesiano.

Salida

Una única línea con las 2 coordenadas del punto deseado, separadas por un espacio y redondeadas a 4 decimales. El punto de la salida es el único punto que al formar una recta con el origen, divide al conjunto de puntos en dos subconjuntos de igual tamaño a ambos lados de la recta.

Límites

- $0 \leq x_i < 100$.
- $-200000 \leq y_i < 200000$

Subtarea 1 [70 puntos]

$n < 1000$

Subtarea 2 [30 puntos]

$n < 300000$

[Subtarea 1] *Solución:*
Una forma de resolver la primera subtarea es para cada punto contar cuántos puntos están en un lado específico de la recta definida por ese punto y el origen. Si la cantidad de puntos de un lado es de $(n-1)/2$ entonces ese punto es el punto que buscamos. Para cada punto vamos a comparar con cada uno de los otros puntos en que lado están. Para esto vamos a usar el producto cruz entre los 2 vectores que tienen como punto inicial el origen y como punto final los dos puntos a comparar. Usaremos el producto cruz ya que debido a que todos los vectores están en el plano xy, el producto cruz de cualesquiera dos vectores va a estar en el eje z, siguiendo la regla de la mano derecha este vector puede apuntar tanto hacia el eje z positivo o al eje z negativo. Ahora, de esta manera podemos saber para un punto $p_i = (x_i, y_i)$ y su respectivo vector $v_i = (x_i, y_i)$ cuántos puntos p_j

están arriba. Ya que si p_j está arriba de p_i entonces $v_i \times v_j$ donde v_j es el vector del punto p_j, va a apuntar en la dirección $+z$. En el caso de que el punto p_j esté abajo debido a la regla de la mano derecha el vector resultante va a apuntar al eje $-z$. Vemos que solamente necesitamos la dirección del vector resultante, mas no la magnitud. Para obtener este valor usamos el producto cruz con determinantes, dado dos vectores $v_i = (x_i, y_i, 0)$ y $v_j = (x_j, y_j, 0)$ su producto cruz va a ser, después de simplificar, $v_i \times v_j = (0, 0, x_i y_j - x_j y_i)$. Este vector resultante va a estar en el eje $+z$ si y sólo si $x_i y_j - x_j y_i > 0$. Usando la fórmula anterior podremos saber para cada punto, en dónde van a estar ubicado los demás puntos. Como usamos dos bucles la complejidad es de $O(n^2)$, suficiente para pasar la primera subtarea.

[Subtarea 2] *Solución:*
Para resolver todo el problema, notamos que cada punto forma un ángulo al unir el segmento desde el punto al origen, el cual podemos representarlo con respecto a la pendiente de la recta que une ambos puntos. Notamos que un punto p_i está arriba de otro punto p_j si y sólo si el ángulo que forma p_i es mayor que el ángulo que forma p_j. Entonces para nuestro punto solución van a haber $(n-1)/2$ puntos cuyos ángulos son mayores que el ángulo del punto solución. Vemos que si ordenamos los puntos con respecto a su ángulo de mayor a menor, el primer punto (ubicado en el índice 0) va a ser el mayor, y por lo tanto, no van a haber puntos superior a él. Para el segundo punto solo el primero está arriba de él, y así sucesivamente. Por lo tanto, el punto ubicado en el índice $(n-1)/2$ va a ser el que estamos buscando, ya que al estar en la mitad y al n ser impar, va a tener igual cantidad de puntos arriba de él que abajo de él. Entonces, primero se guardan todos los puntos con el respectivo ángulo (o pendiente) de la recta que une el origen con ese punto en una matriz o también en un vector de vectores. Luego se procede a ordenarlos únicamente tomando en consideración el ángulo (o pendiente), ya que una vez ordenados si escogemos el punto medio, este punto va a ser el que buscamos. Como la única operación realizada es el ordenamiento, la complejidad de esta solución es de $O(nlog(n))$.