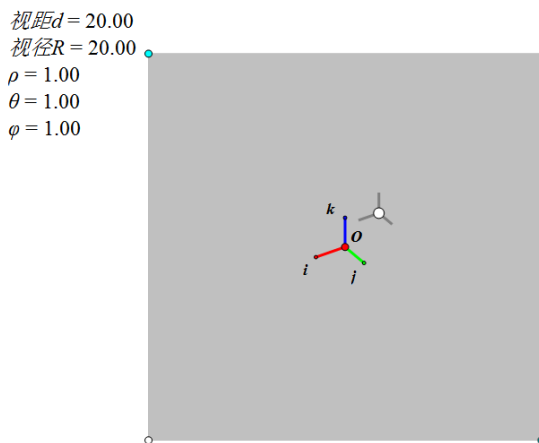


# 几何画板“3D 透视投影坐标系工具包”

## 部分工具使用说明

重庆市万州第二高级中学 向 忠

“3D 透视投影坐标系工具包”为几何画板仿真三维场景而研制。该工具包预设几何画板首选角度单位为“弧度”，其中系列 1 为基础工具，系列 2 为坐标变换工具，系列 3 为常用计算工具，系列 4 为绘圆工具，系列 5 为虚实棱工具，系列 6、7 为着色工具，系列 8 为常用几何体工具，系列 9 为表面特效工具。下图是工具“1.1【透视】3D 坐标系”的界面，其中“视距  $d$ ”为视点(观察者的眼睛位置)到屏幕的距离，“视径  $R$ ”为视点到坐标原点(物体位置)的距离， $\rho$ 、 $\theta$ 、 $\varphi$  为预设球面坐标三参数，背景矩形长宽可调，使用工具时，控点(大白点)必须分离成独立点，分离原点  $O$  后背景矩形才可以删除。当“视距  $d$ ”和“视径  $R$ ”设为相当大(例如  $R=d=1000$ )时，透视投影坐标系近似于平行投影坐标系，可制作高初中数学教学用图。(本文案例源文件放在“Samples\工具例说”目录)



以下通过四个作图案例，介绍工具包中几个重点工具的使用方法。

### 案例一. 正四面体

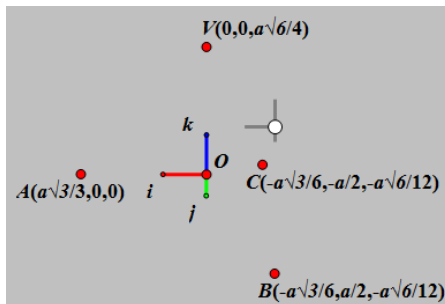
1. 用工具“1.1【透视】3D 坐标系”画坐标系，分离控点，删除  $\rho$ 、 $\theta$ 、 $\varphi$ 。

2. 计算棱长为  $a$  的正四面体的四个顶点坐标： $V(0,0,\frac{\sqrt{6}}{4}a)$ ,  $A(\frac{\sqrt{3}}{3}a,0,0)$ ,

$B(-\frac{\sqrt{3}}{6}a,\frac{a}{2},-\frac{\sqrt{6}}{12}a)$ ,  $C(-\frac{\sqrt{3}}{6}a,-\frac{a}{2},-\frac{\sqrt{6}}{12}a)$  中各不同数量值，其标签设置成相应公

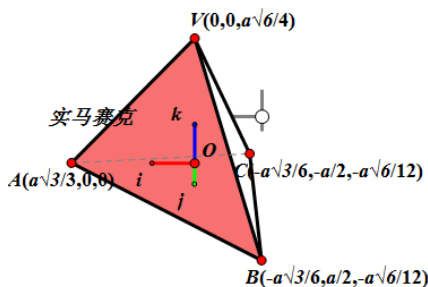
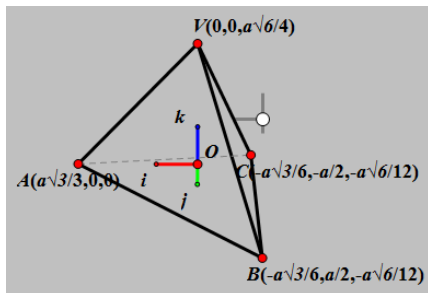
式形式，如下左图：

$$\begin{aligned}
 a &= 5.00 \\
 0 &= 0 \\
 a\sqrt{6}/4 &= 3.06 \\
 a\sqrt{3}/3 &= 2.89 \\
 -a\sqrt{3}/6 &= -1.44 \\
 a/2 &= 2.50 \\
 -a/2 &= -2.50 \\
 -a\sqrt{6}/12 &= -1.02
 \end{aligned}$$

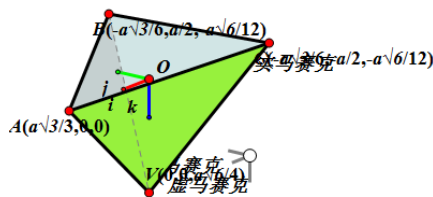
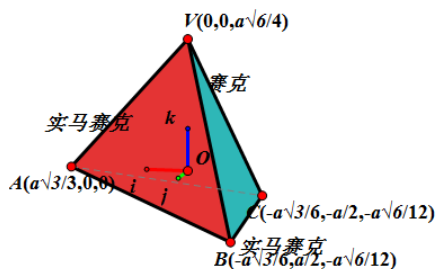


3.用工具“1.2【透视】点(x, y, z)”依次匹配四个顶点的坐标，绘制四顶点，如上右图。

4.用工具“5.1 多面体虚实棱(弧度制)”绘制棱 VA：从四面体外部正对着棱 VA 看，若视 AV 为南北方向，则 B 在 AV 之东，C 在 AV 之西，工具前提条件“南北东西”就应依次匹配 A、V、B、C 四点，得到动态虚实线 VA。再同法绘制其余五条棱，完成正四面体如下左图。



5.如果要对面 VAB 着色，先用工具“3.1 三点面法向量坐标”沿逆时针方向依次匹配 V、A、B 三点坐标，求出面 VAB 的法向量( $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$ )，再用工具“6.1 空间点线面着色参数”依次匹配点 A 的坐标及法向量坐标，最后用工具“6.4【透视】曲面(马赛克)着色”依次匹配 A、B、V、A，对面 VAB 着红色(默认 H=1)，分离原点 O 后如上左图。同法对其余两个侧面着蓝色(H=0.5)和绿色(H=0.25)，暂不对底面 ABC 着色，拖动控点可以观察正四面体的内外表面着色效果，正四面体如下右图。



## 案例二.正 $n$ 棱柱锥台

1. 用工具“1.1【透视】3D 坐标系”画坐标系，分离控点和坐标原点，删除背景矩形。

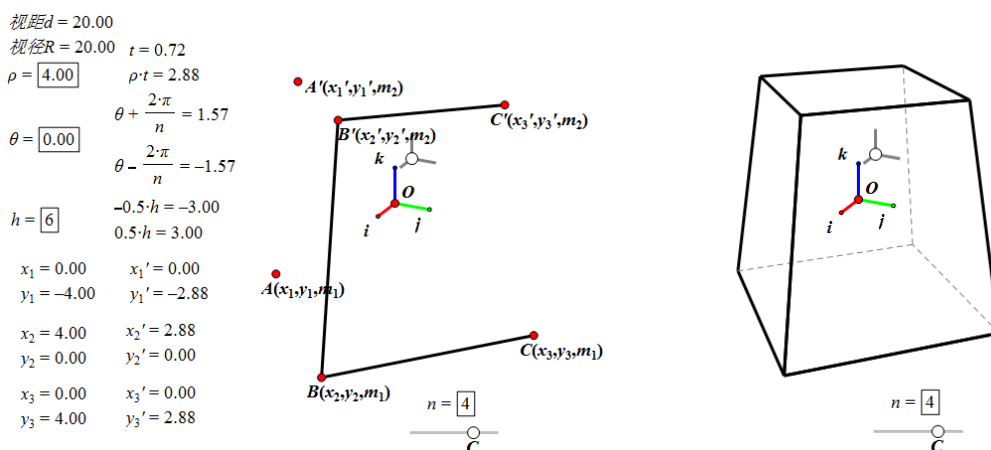
2. 作一水平小线段  $AB$ ，在  $AB$  上任取一点  $C$ ，度量点  $C$  的值(改标签为  $t$ )。编辑  $\rho=4$ 、 $\theta=0$ ，以  $\rho$  为正  $n$  棱台的下底半径，计算棱台的上底半径  $\rho t$ 。

3. 新建参数  $n=4$ ，计算  $\theta+2\pi/n$ 、 $\theta-2\pi/n$  的值；新建参数  $h$ ，计算  $0.5h$ 、 $-0.5h$  的值；以  $A(\rho, \theta-2\pi/n, -0.5h)$ 、 $B(\rho, \theta, -0.5h)$ 、 $C(\rho, \theta+2\pi/n, -0.5h)$  为正  $n$  棱台下底相邻三顶点的柱面坐标， $A'(\rho t, \theta-2\pi/n, 0.5h)$ 、 $B'(\rho t, \theta, 0.5h)$ 、 $C'(\rho t, \theta+2\pi/n, 0.5h)$  为上底相邻三顶点的柱面坐标。

4. 用工具“2.2 坐标变换  $(\rho, \theta) \rightarrow (x, y)$ ”匹分别配点  $A$  和  $A'$  的第一二柱面坐标，得点  $A$  和  $A'$  的第一二直角坐标  $x_1$ 、 $y_1$  和  $x_1'$ 、 $y_1'$ 。

5. 用工具“1.2【透视】点  $(x, y, z)$ ”依次匹配顶点  $A$  和  $A'$  的直角坐标  $(x_1, y_1, -0.5h)$  和  $(x_1', y_1', 0.5h)$ ，得顶点  $A$  和  $A'$ ，同法作顶点  $B$ 、 $B'$ 、 $C$ 、 $C'$ 。

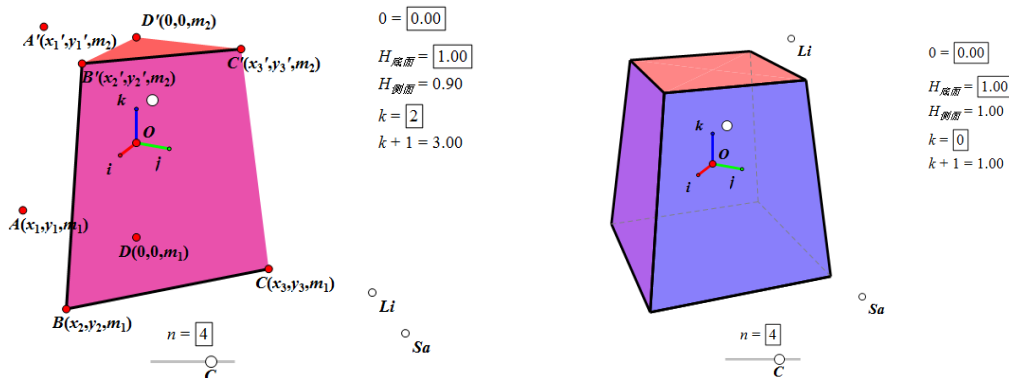
6. 用工具“5.1 多面体虚实棱(弧度制)”按“南北东西”依次匹配  $B$ 、 $B'$ 、 $C$ 、 $A$  得虚实线  $BB'$ ，依次匹配  $B$ 、 $C$ 、 $A$ 、 $B'$  得虚实线  $BC$ ，依次匹配  $B'$ 、 $C'$ 、 $B$ 、 $A'$  得虚实线  $B'C'$ ，如下左图。



7. 隐藏上述六个顶点，以  $n$  为深度，作  $\theta$  到  $\theta+2\pi/n$  的迭代，隐藏上述三组虚实线，得如上右图，拖动点控点  $C$  可在柱锥台间切换。

7'. 若要对表面着色，先作上下底面中心  $D'(0, 0, 0.5h)$  和  $D(0, 0, -0.5h)$ ，新建参数  $H_{\text{底面}}=1$ 、 $k=2$ ，计算  $k+1$ 、 $H_{\text{侧面}}=1-0.8k$  的值；用工具“7.2 三边形面(光照消影)”依次匹配  $H_{\text{底面}}$ 、 $D'$ 、 $B'$ 、 $C'$  得到红色  $\triangle D'B'C'$ ，再依次匹配  $H_{\text{底面}}$ 、 $D$ 、 $C$ 、 $B$  得到红色三角形  $\triangle DCB$ (此时不可见)，最后“7.3 四边形面(光照消影)”依

次匹配  $H_{\text{侧面}}$ 、 $B'$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $C'$  得到四边形  $B'BCC'$ ，如下左图；隐藏上述六个顶点，以  $n$  为深度，作  $\theta$  到  $\theta+2\pi/n$ ， $k$  到  $k+1$  的完整迭代，隐藏上述三组虚实线和三边形四边形，完成正  $n$  棱柱锥台的制作如下右图，



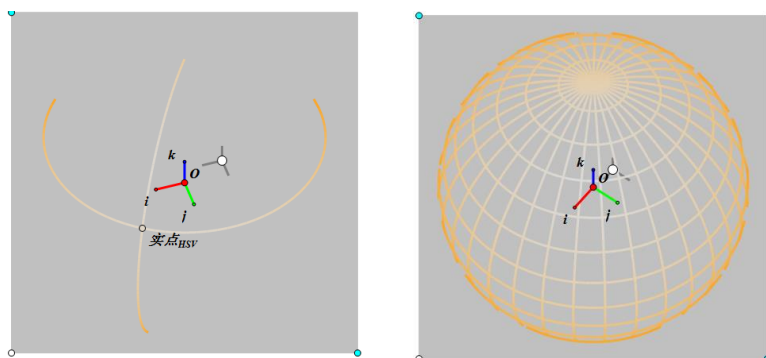
### 案例三. 网络球面

1. 用工具“1.1【透视】3D 坐标系”画坐标系，分离控点和坐标原点。双击编辑  $\rho=5$ 、 $\theta=1$ 、 $\varphi=1$ 。

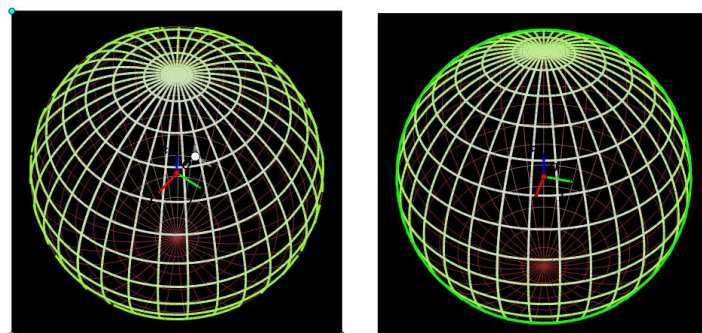
2. 用工具“2.4 坐标变换( $\rho$ 、 $\theta$ 、 $\varphi$ ) $\rightarrow(x, y, z)$ ”依次匹配  $\rho$ 、 $\theta$ 、 $\varphi$ ，化球面坐标( $\rho$ 、 $\theta$ 、 $\varphi$ )为直角坐标( $x, y, z$ )。

3. 用工具“6.2【透视】球面点着色参数”依次匹配  $x, y, z$ ，得“色<sub>实</sub>”等六个计算值；再用工具“1.2【透视】点( $x, y, z$ )”依次匹配  $x, y, z$  绘制点( $x, y, z$ )；最后用工具“6.3 曲面虚实点着色”匹配绘制点( $x, y, z$ )，得“实点<sub>HSV</sub>”或“虚点<sub>HSV</sub>”。

4. 同时选中  $\theta$  和“实点<sub>HSV</sub>”作轨迹线(实经线)，采样数设为 100， $\theta$  的范围设为 0 到  $2\pi$ ；同时选中  $\varphi$  和“实点<sub>HSV</sub>”作轨迹线(实纬线)，采样数设为 100， $\varphi$  的范围设为 0 到  $\pi$ ，得到如下左图；隐藏“实点<sub>HSV</sub>”后同时选中  $\varphi$  和实经线作曲线系，采样数设为 36， $\varphi$  的范围设为 0 到  $\pi$ ；同时选中  $\theta$  和实纬线作曲线系，采样数设为 18， $\theta$  的范围设为 0 到  $2\pi$ ，隐藏实经线和实纬线，得到实经纬网如下右图。



5.拖动控点使“虚点<sub>HSV</sub>”显示出来,对“虚点<sub>HSV</sub>”同法作虚经纬网,改背景为黑色,设“色<sub>实</sub>”=0.25,“色<sub>虚</sub>”=1,得如下左图。

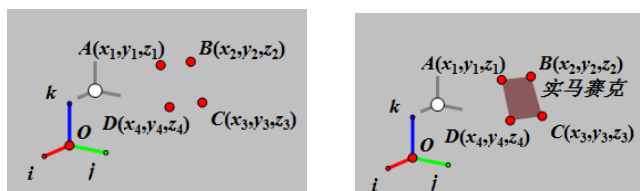


6.为美观起见,可作轮廓圆。用工具“1.4 视点向量坐标”依次匹配  $x$ 、 $y$ 、 $z$  得轮廓圆法向量 $(x', y', z')$ , 新建参数  $a=0$ , 因为轮廓圆圆心为 $(0, 0, 0)$ , 所以用工具“4.1 心法圆( $r=3$ )参数方程”依次匹配  $a$ 、 $a$ 、 $a$ 、 $x'$ 、 $y'$ 、 $z'$ , 得到计算式  $r$ 、 $t$ 、 $R(t)_x$ 、 $R(t)_y$ 、 $R(t)_z$ , 编辑  $r=p+0.15$ ,  $t=0$ ; 用工具“1.2 【透视】点 $(x, y, z)$ ”依次匹配  $R(t)_x$ 、 $R(t)_y$ 、 $R(t)_z$  绘制点 $(R(t)_x, R(t)_y, R(t)_z)$ , 同时选中此绘制点和  $t$  作轨迹线,  $t$  的范围设为 0 到  $2\pi$  得轮廓圆, 完整网络球面的制作如上右图。

#### 案例四. 马赛克球面及其公转与自转

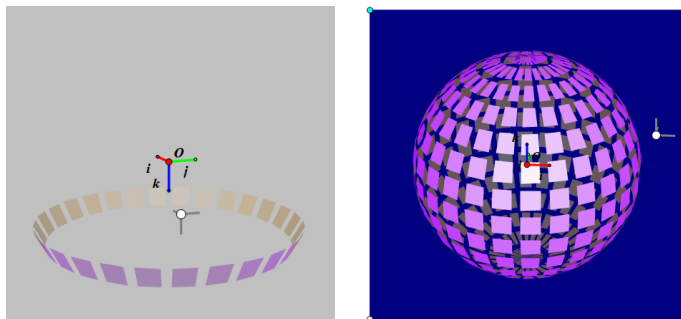
1.用工具“1.1【透视】3D 坐标系”画坐标系, 分离坐标原点。双击编辑 $\rho=5$ 、 $\theta=1$ 、 $\varphi=1$ 。

2.计算 $\theta+0.05\pi$ ,  $\varphi+0.05\pi$ , 将四边形(马赛克)的四个顶点的球面坐标 $(\rho, \theta, \varphi)$ 、 $(\rho, \theta+0.05\pi, \varphi)$ 、 $(\rho, \theta+0.05\pi, \varphi+0.05\pi)$ 、 $(\rho, \theta, \varphi+0.05\pi)$ , 用工具“2.4 坐标变换 $(\rho, \theta, \varphi) \rightarrow (x, y, z)$ ”转化为直角坐标 $(x_1, y_1, z_1)$ 、 $(x_2, y_2, z_2)$ 、 $(x_3, y_3, z_3)$ 、 $(x_4, y_4, z_4)$ , 用工具“1.2 【透视】点 $(x, y, z)$ ”绘制这四点 A、B、C、D, 如下左图。



3.用工具“3.1 三点面法向量坐标”沿逆时针方向依次匹配 B、A、C 三点坐标, 求出马赛克面 ABCD 的法向量 $(n_x, n_y, n_z)$ , 再用工具“6.1 空间点线面着色参数”依次匹配点 A 的坐标及法向量坐标, 得到一组计算式, 双击编辑其中的计算式 V, 将幂的指数 2.5 改为 0.01; 最后用工具“6.4 【透视】曲面(马赛克)着色”依次匹配 A、B、C、D, 绘出“实马赛克”或“虚马赛克”, 如上右图。

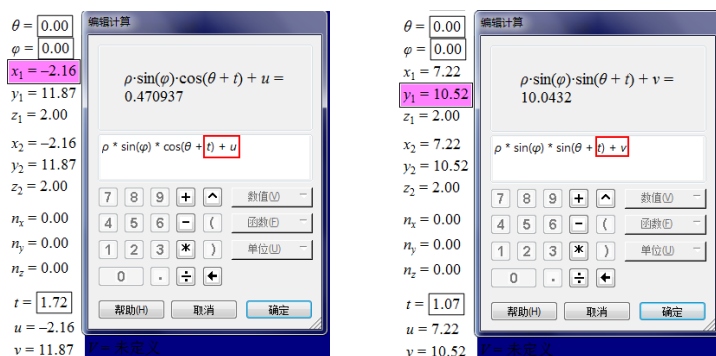
4. 设“色<sub>实</sub>=0.78”，“色<sub>虚</sub>=0.10”，隐藏 A、B、C、D 四点；同时选中 $\theta$ 和“实马赛克”作轨迹，采样数设为 28， $\theta$ 的范围设为 0 到 6.08；将背景矩形置于底层，拖动控点使“虚马赛克”显示出来，同法作“虚马赛克”的轨迹，如下左图。



5. 同时选中 $\varphi$ 和“实马赛克”的轨迹，作轨迹系，采样数设为 15， $\varphi$ 的范围设为 0.01 到  $\pi-0.05\pi$  后，设置“实马赛克”轨迹系的透明度为 100%；同法作“虚马赛克”的轨迹系，设置“虚马赛克”轨迹系的透明度为 80%，并置于底层。

6. 再次将背景矩形置于底层，颜色设为深蓝色，改设 $\theta=0$ 、 $\varphi=0$ ，“视距  $d$ ”设为 25，“视径  $R$ ”设为 30，完成马赛克球面的制作如上右图。

7. 为使球面在  $xy$  平面内的椭圆轨道上环绕坐标原点公转且绕南北极自转，新建参数  $t$ ，计算  $u=15\cos(t)$ ， $v=12\sin(t)$ ，设 $\rho=2$ ，分别双击编辑  $x_1$ 、 $y_1$ ，在其计算式后面添加加数  $u$  或  $v$ ，在 $\theta$ 后面添加加数  $t$ ，如下图；



同法分别双击编辑  $x_2$ 、 $y_2$ 、 $x_3$ 、 $y_3$ 、 $x_4$ 、 $y_4$ ；选中参数  $t$ ，制作动画按钮，设置“1.0 单位每 3.0 秒”，完成球面的公转与自转的制作如下图。

