构造选讲

王蔚澄

2025 年 2 月 8 日

构造题

通常来说，构造题只要求给出一个满足要求的解，但其考察的范围广泛，包括图论，数学，甚至仅需要观察力．今天将对构造题做一些讨论．

CF1630A

问题

对 $n = 2^m (n \geq 4)$, 给定 $0 \leq k \leq n-1$, 将 $0, \ldots, n-1$ 分成 $n/2$ 组 $(a_1, b_1), \ldots, (a_{n/2}, b_{n/2})$, 满足 $\sum_{i=1}^{n/2} a_i \& b_i = k$. 其中 $\&$ 表示按位与.

CF1630A

问题

对 $n = 2^m (n \geq 4)$, 给定 $0 \leq k \leq n-1$, 将 $0, \ldots, n-1$ 分成 $n/2$ 组 $(a_1, b_1), \ldots, (a_{n/2}, b_{n/2})$, 满足 $\sum_{i=1}^{n/2} a_i \& b_i = k$. 其中 $\&$ 表示按位与.

解

注意到如下性质: $x\&(n-x-1) = 0, x\&(n-1) = x, x\&0 = 0$.

CF1630A

问题

对 $n = 2^m (n \geq 4)$, 给定 $0 \leq k \leq n-1$, 将 $0, \ldots, n-1$ 分成 $n/2$ 组 $(a_1, b_1), \ldots, (a_{n/2}, b_{n/2})$, 满足 $\sum_{i=1}^{n/2} a_i \& b_i = k$. 其中 $\&$ 表示按位与.

解

注意到如下性质: $x\&(n-x-1) = 0, x\&(n-1) = x, x\&0 = 0$.
在 $k = 0$ 时, 将 x 和 $(n-x-1)$ 匹配即可.
当 $k < n-1$ 时, 修改匹配 $(0, n-k-1), (k, n-1)$.

CF1630A

问题

对 $n = 2^m (n \geq 4)$, 给定 $0 \leq k \leq n-1$, 将 $0, \dots, n-1$ 分成 $n/2$ 组 $(a_1, b_1), \dots, (a_{n/2}, b_{n/2})$, 满足 $\sum_{i=1}^{n/2} a_i \& b_i = k$. 其中 $\&$ 表示按位与.

解

注意到如下性质: $x\&(n-x-1) = 0, x\&(n-1) = x, x\&0 = 0$.
在 $k = 0$ 时, 将 x 和 $(n-x-1)$ 匹配即可.
当 $k < n-1$ 时, 修改匹配 $(0, n-k-1), (k, n-1)$.
当 $k = n-1$ 时, $n = 4$ 无解, 否则修改匹配 $(n-1, n-2), (1, n-3), (0, 2)$.

GYM 102900B

问题

给定两张 $n \times m$ 的扫雷地图 A, B, 每个位置可以是雷或者空地, 每个空地会标上周围八相邻格子中雷的个数. 你可以反转 A 中的 $\lfloor nm/2 \rfloor$ 个格子, 你的目标是让 A 和 B 的所有格子中数的和相同.

GYM 102900B

问题

给定两张 $n \times m$ 的扫雷地图 A, B, 每个位置可以是雷或者空地, 每个空地会标上周围八相邻格子中雷的个数. 你可以反转 A 中的 $\lfloor nm/2 \rfloor$ 个格子, 你的目标是让 A 和 B 的所有格子中数的和相同.

解

注意到一个地图的数的和就是相邻的 (雷, 空地) 对数. 这说明一个地图和它的全部取反数字和相同.
把 A 变成 B 和 B 取反中编辑距离较近的.

增量构造

类似于数学归纳法的思想，每次从前一个结果加一个元素．或者反过来，每次删一个元素递归．

这两种几乎是本质相同的．

ICPC WF24 A

问题

给 n 个定义域域均在 $[0, M]$ 的非负分段线性函数，你要给每个函数分配一个区间，使得每个函数的区间的下方面积 $\geq$ 总的下方面积的 n 分之一.

$n \leq 5000$，每个函数都存在一个点 > 0.

ICPC WF24 A

问题

给 n 个定义域域均在 $[0, M]$ 的非负分段线性函数，你要给每个函数分配一个区间，使得每个函数的区间的下方面积 $\geq$ 总的下方面积的 n 分之一.
$n \leq 5000$，每个函数都存在一个点 > 0.

解

计算每一个函数从 0 开始到多少达到 $1/n$，取最早的并分配. 此时其余函数下方面积都至少有 $(n-1)/n$，递归构造即可.

ICPC WF14 A

问题

给定 n, 一开始在 1 到 $2n$ 号位置有字母 B A B A $\cdots$ B A, $-2n+1$ 到 0 号位置空着, 每次操作你可以选择相邻的两个字母移动到两个相邻的空位上, 你的目标是最后得到连续的 A $\cdots$AB $\cdots$B, 可以不从 1 号位置开始. 你需要找到最短的操作序列.

$3 \leq n \leq 100$

ICPC WF14 A

问题

给定 n, 一开始在 1 到 $2n$ 号位置有字母 B A B A $\cdots$ B A, $-2n+1$ 到 0 号位置空着, 每次操作你可以选择相邻的两个字母移动到两个相邻的空位上, 你的目标是最后得到连续的 A $\cdots$AB $\cdots$B, 可以不从 1 号位置开始. 你需要找到最短的操作序列.

$3 \le n \le 100$

Hint.

最少操作次数就是 n.

ICPC WF14 A

问题

给定 n, 一开始在 1 到 $2n$ 号位置有字母 B A B A $\cdots$ B A, $-2n+1$ 到 0 号位置空着, 每次操作你可以选择相邻的两个字母移动到两个相邻的空位上, 你的目标是最后得到连续的 A $\cdots$AB $\cdots$B, 可以不从 1 号位置开始. 你需要找到最短的操作序列.

$3 \le n \le 100$

Hint.

最少操作次数就是 n.

证明: 考虑相邻的相同的对数, 初始时 0, 最后时 $2n-2$, 每一步最多只增加 2, 且第一步只能增加 1.

ICPC WF14 A

假设对足够小的 n 已经采用暴力, 手动构造等方法得到解法.

ICPC WF14 A

假设对足够小的 n 已经采用暴力, 手动构造等方法得到解法.

解

在 n 足够大时, 考虑如下操作 (假设 _ 表示空格)

```
__BABABABA···BABABABA
ABBABABABA···BABAB__A
ABBA__BABA···BABABBAA
```

对紫色部分递归求解, 得到

```
ABBAAAAA···BBBB__BBAA
A__AAAAA···BBBBBBBBAA
AAAAAAAA···BBBBBBBB__
```

最后整体往左移了两格, 符合归纳调用的假设.

欧拉回路

如果一个联通有向图每个点都入度等于出度，则这个图有欧拉回路. 如果只存在一个点入度比出度大一，另一个点入度比出度小一，其他点都入度等于出度，则这个图有欧拉路径.

欧拉回路

如果一个联通有向图每个点都入度等于出度, 则这个图有欧拉回路. 如果只存在一个点入度比出度大一, 另一个点入度比出度小一, 其他点都入度等于出度, 则这个图有欧拉路径.

如果一个联通无向图每个点度数都是偶数, 则这个图有欧拉回路. 如果只存在两个点度数是奇数, 其他点度数都是偶数, 则这个图有欧拉路径.

欧拉回路

如果一个联通有向图每个点都入度等于出度，则这个图有欧拉回路．如果只存在一个点入度比出度大一，另一个点入度比出度小一，其他点都入度等于出度，则这个图有欧拉路径．

如果一个联通无向图每个点度数都是偶数，则这个图有欧拉回路．如果只存在两个点度数是奇数，其他点度数都是偶数，则这个图有欧拉路径．

在求非欧拉图的欧拉路径时，可以先补一条边变成欧拉回路，然后最后再去掉．

UOJ 670

问题

给定 n 个长度 ≤ 2 的字符串，每个字符串可以翻转，你需要排列字符串的顺序，使得最后拼接得到一个回文串.

$n \leq 5 \times 10^5$.

UOJ 670

问题

给定 n 个长度 ≤ 2 的字符串，每个字符串可以翻转，你需要排列字符串的顺序，使得最后拼接得到一个回文串.

$n \leq 5 \times 10^5$.

解

对总长为偶数的情形，考虑最远离中心的长为 1 的字符串，一定是类似下图的情形

UOJ 670

解

对总长为偶数的情形，考虑最远离中心的长为 1 的字符串，一定是类似下图的情形

考虑如下建图，对长为 2 的字符串 (a_i, b_i)，连接无向边 (a_i, b_i)，对长为 1 的字符串 a_i，连接无向边 $(0, a_i)$. 则这些长为 1 的字符串匹配过程就是从节点 0 开始走一个环.
这说明有解当且仅当 0 所在的联通块有欧拉回路，且其他边都出现偶数次，注意可以有一个自环放在最中间.

UOJ 670

解

对总长为奇数的情形，做类似的讨论，唯一的区别在于最中间的一组匹配只需要一个长为 1 的字符串. 此时 0 号点的度数必定为奇数，走一条欧拉路径，最后一条边就是整个字符串的中心.

这说明有解当且仅当 0 所在的联通块有欧拉路径，且其他边都出现偶数次.

QOJ 5434

问题

给定 n, 构造一个长为 n 的 01 串, 包含最多的本质不同子串.
$n \le 2 \times 10^5$.

QOJ 5434

问题

给定 n, 构造一个长为 n 的 01 串, 包含最多的本质不同子串.
$n \le 2 \times 10^5$.

Hint

一个显然的上界是 $\sum_{i=1}^{n} \min(2^i, n-i+1)$.

QOJ 5434

Hint

找到最小的 k 使得 $2^k \geq n-k+1$, 则目标变为每个长为 k 的字串两两不同, 且 2^{k-1} 种长为 $k-1$ 的字符串全部出现.

QOJ 5434

Hint

找到最小的 k 使得 $2^k \geq n-k+1$, 则目标变为每个长为 k 的字串两两不同, 且 2^{k-1} 种长为 $k-1$ 的字符串全部出现.

首先考虑 $n=2^k+k-1$ 的情形, 此时只需要保证每种长为 2^k 的字符串都出现. 一个简单的想法是对每种字符串建立一个点, 如果字符串 s 可以通过在最后加一个字符再删除第一个字符得到 t, 就连接 $s \to t$ 有向边, 只需求出整个图的哈密顿路径就能得到答案.

QOJ 5434

Hint

找到最小的 k 使得 $2^k \geq n-k+1$, 则目标变为每个长为 k 的字串两两不同, 且 2^{k-1} 种长为 $k-1$ 的字符串全部出现.

首先考虑 $n = 2^k + k - 1$ 的情形, 此时只需要保证每种长为 2^k 的字符串都出现. 一个简单的想法是对每种字符串建立一个点, 如果字符串 s 可以通过在最后加一个字符再删除第一个字符得到 t, 就连接 $s \to t$ 有向边, 只需求出整个图的哈密顿路径就能得到答案.

但是我们无法快速找到哈密顿路径.

QOJ 5434

解

考虑 $n = 2^k + k - 1$ 的情形, 对每个长为 $k-1$ 的字符串建立一个点, 表示当前字符串的最后 $k-1$ 个字符, 对每个长为 2^k 的字符串 $s_1 \cdots s_k$, 连接有向边 $(s_1 \cdots s_{k-1}) \to (s_2 \cdots s_k)$, 只需求出整个图的欧拉路径就能得到答案.

QOJ 5434

解

考虑 $n = 2^k + k - 1$ 的情形, 对每个长为 $k-1$ 的字符串建立一个点, 表示当前字符串的最后 $k-1$ 个字符, 对每个长为 2^k 的字符串 $s_1 \cdots s_k$, 连接有向边 $(s_1 \cdots s_{k-1}) \to (s_2 \cdots s_k)$, 只需求出整个图的欧拉路径就能得到答案.

计算一下度数, 每个点入度和出度均为 2, 这说明整个图实际上是欧拉图, 即我们找到的答案事实上是欧拉回路.

注意在一般情况下, 即使所有长为 k 的字符串两两不同, 也不能说明 2^{k-1} 种长为 $k-1$ 的字符串全部出现.

QOJ 5434

解

对任意的 n, 找到最小的 k 使得 $2^k > n - k + 1$, 求出 $n = 2^{k-1} + k - 2$ 时的答案, 这个字符串满足 2^{k-1} 种长为 $k-1$ 的字符串全部出现, 注意这也意味着这个字符串每个长为 k 的字符串两两不同. 考虑在前面情形中的欧拉图, 这个字符串对应了其上的一条经过了所有点的环, 我们需要在此基础上得到长为 n 的答案.

将这些边去掉, 分析度数, 图上剩下的边分成了若干联通块, 每个联通块都有欧拉回路.
枚举这些联通块, 先考虑欧拉回路, 如果假如整个环后长度仍不够, 直接将这个环接在原来环的某个节点上; 否则只保留前一半路径, 通过旋转原来的环, 接在原来环的最后.

GYM103855A

问题

有 n 个宝石, 每个宝石的颜色是红, 黑之一. 一开始每个宝石都分别在一个袋子里, 接下来有 m 次操作:

- 合并宝石 i 和 j 所在的袋子.
- 丢弃宝石 i.
- 发现宝石 i 所在的袋子里有至少 r 个红色宝石和至少 b 个黑色宝石.

你需要构造一组合法的宝石颜色, 或报告无解.

$n \leq 2000, m \leq 4000.$

GYM103855A

解

首先考虑没有 2 操作的情形，合并操作形成了一棵树，一个限制 3 相当于子树内的红色宝石个数在一个区间内.

GYM103855A

解

首先考虑没有 2 操作的情形，合并操作形成了一棵树，一个限制 3 相当于子树内的红色宝石个数在一个区间内.
考虑上下界网络流，每个宝石流量限制为 1，若有流量表示为红色，在每个限制处拆点并加上下界限制的边.

GYM103855A

解

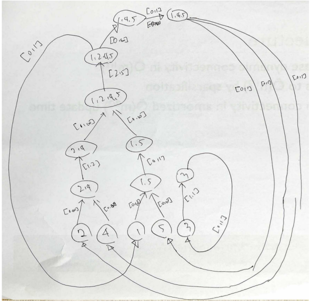
首先考虑没有 2 操作的情形, 合并操作形成了一棵树, 一个限制 3 相当于子树内的红色宝石个数在一个区间内.
考虑上下界网络流, 每个宝石流量限制为 1, 若有流量表示为红色, 在每个限制处拆点并加上下界限制的边.

加入操作 2 后, 问题在于我们需要刻画删除的宝石恰好在它的生命周期中对操作 3 贡献流量.

GYM103855A

解

一种做法是考虑循环流，在删除的地方连一条边向每个宝石的起始点. 假设每个未被删除的宝石都在最后被删除，则删除对应的边的确恰好覆盖了宝石的生命周期.



NOI2020 制作菜品

问题

有 n 种原材料，第 i 种原材料有 d_i 克，你需要做 m 道菜，每道菜都要恰好 k 克，且最多使用两种原材料. 保证 $\sum d_i = m \times k$，你需要构造一种做菜方案，或报告无解.

$n \le 500, n-2 \le m \le 5000, k \le 5000$，10 组多测. 子任务:

$m \ge n-1$.

NOI2020 制作菜品

问题

有 n 种原材料，第 i 种原材料有 d_i 克，你需要做 m 道菜，每道菜都要恰好 k 克，且最多使用两种原材料. 保证 $\sum d_i = m \times k$，你需要构造一种做菜方案，或报告无解.

$n \le 500, n-2 \le m \le 5000, k \le 5000$，10 组多测. 子任务: $m \ge n-1$.

Hint

当 $m = n-1$ 时，总是有解. 当 $m \ge n$ 时，总有 $\max d_i \ge k$，如此重复即可化归为 $m = n-1$ 的情形.

NOI2020 制作菜品

解

当 $m = n - 1$ 时, 假设所有 d_i 从小到大排序, 注意到如下性质:

- $d_1 < k$. 抽屉原理直接说明.

NOI2020 制作菜品

解

当 $m = n - 1$ 时，假设所有 d_i 从小到大排序，注意到如下性质：

- $d_1 < k$. 抽屉原理直接说明.

此时，我们想要找一个和 d_1 匹配的，然后递归到 $n - 1$ 的情形

NOI2020 制作菜品

解

当 $m = n - 1$ 时, 假设所有 d_i 从小到大排序, 注意到如下性质:

- $d_1 < k$. 抽屉原理直接说明.
- $d_1 + d_n \geq k$. 否则 $d_n < k - d_1$,
  $\sum d_i < d_1 + (n-1)(k-d_1) = (n-1)k - (n-2)d_1 \leq mk$.

将 d_1 和 d_n 匹配即可.

NOI2020 制作菜品

当 $m = n - 2$ 时，一个想法是将 n 种原材料划分为两个集合，分别调用 $m = n - 1$ 的做法.

NOI2020 制作菜品

当 $m = n - 2$ 时，一个想法是将 n 种原材料划分为两个集合，分别调用 $m = n - 1$ 的做法．事实上，这是正确的．

证明.

假设在每一个有匹配的两种原材料之间连边，则 $n - 2$ 条边不足以使图联通，考虑每个联通块，均满足 $\sum d_i = k \times (|S| - 1)$． □

NOI2020 制作菜品

当 $m = n - 2$ 时，一个想法是将 n 种原材料划分为两个集合，分别调用 $m = n - 1$ 的做法. 事实上，这是正确的.

证明.

假设在每一个有匹配的两种原材料之间连边，则 $n - 2$ 条边不足以使图联通，考虑每个联通块，均满足 $\sum d_i = k \times (|S| - 1)$. □

解

目标变为找到一个集合 S，使得 $\sum_{i \in S} d_i = k(|S| - 1)$，直接跑背包的复杂度为 $O(n^2 k)$.

使用 bitset 优化，找 S 满足 $\sum_{i \in S}(d_i - k) = -k$ 即可.

QOJ 9641

问题

给定 $v_1, \dots, v_n$，你需要构造一个长为 $2n$ 的序列 $a_1, \dots, a_{2n}$，且 $1 \sim n$ 的每个数都出现两次，设 i 出现的位置为 x_i, y_i，满足 $1 \le x_i \le n < y_i \le 2n$.
且对所有 i，满足 $a_{x_i}, \dots, a_{y_i}$ 中最小的出现偶数次的数是 v_i.
$n \le 2 \times 10^5$，10 组多测.

QOJ 9641

问题

给定 $v_1, \ldots, v_n$，你需要构造一个长为 $2n$ 的序列 $a_1, \ldots, a_{2n}$，且 $1 \sim n$ 的每个数都出现两次，设 i 出现的位置为 x_i, y_i，满足 $1 \le x_i \le n < y_i \le 2n$.
且对所有 i，满足 $a_{x_i}, \ldots, a_{y_i}$ 中最小的出现偶数次的数是 v_i.
$n \le 2 \times 10^5$，10 组多测.

Hint

很显然 $v_i \le i$. 事实上，这是充要条件.

QOJ 9641

问题

给定 $v_1, \ldots, v_n$，你需要构造一个长为 $2n$ 的序列 $a_1, \ldots, a_{2n}$，且 $1 \sim n$ 的每个数都出现两次，设 i 出现的位置为 x_i, y_i，满足 $1 \le x_i \le n < y_i \le 2n$.
且对所有 i，满足 $a_{x_i}, \ldots, a_{y_i}$ 中最小的出现偶数次的数是 v_i.
$n \le 2 \times 10^5$，10 组多测.

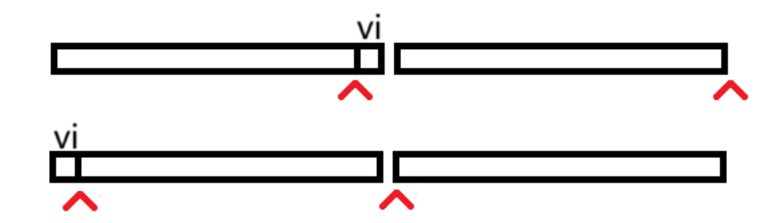
Hint

很显然 $v_i \le i$. 事实上，这是充要条件.
考虑从小往大加数，大的数不会对小的数的答案造成影响.

QOJ 9641

解

考虑从小往大加数，假设当前加入的数是 i，保证至少有一个 i 在最中间或者最边上．这对应 $< i$ 的数均在其一侧，加入时分别讨论即可．



(构造不唯一)

QOJ 7939

问题

有 n 个塔排成一排, 第 i 个塔的高度是 h_i, 如果两个塔 i, j 满足 $\max(h_i, h_j) > \max_{i<k<j} h_k$, 他们之间可以通信.

给定 $a_1, \ldots, a_n$, a_i 表示可以和第 i 个塔通信的塔的个数. 你需要构造一组满足条件的 h_i.

保证数据有解, $n \le 5 \times 10^5$.

QOJ 7939

问题

有 n 个塔排成一排, 第 i 个塔的高度是 h_i, 如果两个塔 i, j 满足 $\max(h_i, h_j) > \max_{i<k<j} h_k$, 他们之间可以通信.
给定 $a_1, \ldots, a_n$, a_i 表示可以和第 i 个塔通信的塔的个数. 你需要构造一组满足条件的 h_i.
保证数据有解, $n \le 5 \times 10^5$.

Hint

考虑第一个塔, 它会和一个前缀和所有前缀最大值通信, 然后依次类推.

QOJ 7939

问题

有 n 个塔排成一排，第 i 个塔的高度是 h_i，如果两个塔 i, j 满足 $\max(h_i, h_j) > \max_{i<k<j} h_k$，他们之间可以通信.
给定 $a_1, \ldots, a_n$，a_i 表示可以和第 i 个塔通信的塔的个数．你需要构造一组满足条件的 h_i.
保证数据有解，$n \le 5 \times 10^5$.

Hint

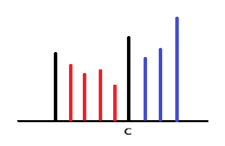
考虑第一个塔，它会和一个前缀和所有前缀最大值通信，然后依次类推.

在之后的讨论中，假设每个塔和自己也可以通信.

QOJ 7939

解

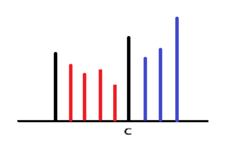
考虑可以和第一个塔通信的极长前缀，设其为 $1 \sim c$，即 1 和 $c+1$ 不能通信，如果 $c \neq n$，简单的讨论说明 $h_c \geq h_1$.



QOJ 7939

解

考虑可以和第一个塔通信的极长前缀，设其为 $1 \sim c$，即 1 和 $c+1$ 不能通信，如果 $c \neq n$，简单的讨论说明 $h_c \geq h_1$.

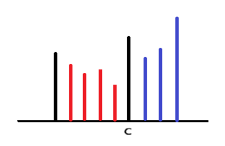


对 $1 < i < c$，i 能通信的 1 也能通信．1 能通信的 c 也能通信，这说明 $a_i \leq a_1$，$a_c > a_1$．此性质可以帮助我们找到 c.

QOJ 7939

解

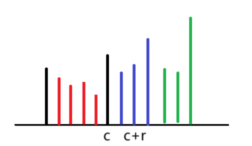
考虑可以和第一个塔通信的极长前缀，设其为 $1 \sim c$，即 1 和 $c+1$ 不能通信，如果 $c \neq n$，简单的讨论说明 $h_c \geq h_1$.



对 $1 < i < c$，i 能通信的 1 也能通信．1 能通信的 c 也能通信，这说明 $a_i \leq a_1$，$a_c > a_1$．此性质可以帮助我们找到 c.
如果不存在这样的 c，说明 1 可以和所有塔通信，此时可以假设 1 号塔是最高的，然后递归求解 $2 \sim n$.

QOJ 7939

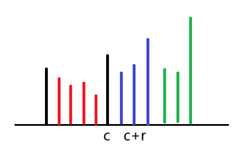
解



此时，我们可以知道后面的前缀最大值个数就是 $s = a_1 - c$，将这个数减去后可以递归求解 $2 \sim c - 1$.

QOJ 7939

解

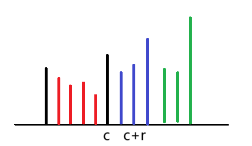


此时，我们可以知道后面的前缀最大值个数就是 $s = a_1 - c$，将这个数减去后可以递归求解 $2 \sim c - 1$.
考虑位置 c，除了前 c 个和 s 个前缀最大值，还有 $r = a_c - c - s$ 个可以通信. 此时，我们需要考虑 a_{c+r+1}，有两种情况.

- $c + r + 1$ 是前缀最大值之一.
- $h_{c+r} = h_c$.

QOJ 7939

解



- $c + r + 1$ 是前缀最大值之一.
- $c + r + 1$ 不是前缀最大值之一, 此时必定有 $h_{c+r} = h_c$.

对第一种情况, $c + r$ 将至多能和 $c \sim c + r$ 和前缀最大值通信, 即 $a_{c+r} \leq r + s$.
对第二种情况, $c + r$ 将能和 $c \sim c + r$ 和前缀最大值和 $c + r + 1$ 通信, 即 $a_{c+r} > r + s$.

QOJ 7939

解

递归求解即可．可以精细实现或使用线段树维护．