

Δομές Δεδομένων και Αλγόριθμοι - Εργαστήριο 9

Γραφήματα

Τ.Ε.Ι. Ηπείρου, Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής Τ.Ε.
Χρήστος Γκόγκος - Αναπληρωτής Καθηγητής

1 Εισαγωγή

2 Γραφήματα

Ένα γράφημα ή γράφος (graph) είναι ένα σύνολο από σημεία που ονομάζονται κορυφές (vertices) ή κόμβοι (nodes) για τα οποία ισχύει ότι κάποια από αυτά είναι συνδεδεμένα απευθείας μεταξύ τους με τμήματα γραμμών που ονομάζονται ακμές (edges ή arcs). Συνήθως ένα γράφημα συμβολίζεται ως $G = (V, E)$ όπου V είναι το σύνολο των κορυφών και E είναι το σύνολο των ακμών.

Αν οι ακμές δεν έχουν κατεύθυνση τότε το γράφημα ονομάζεται μη κατευθυνόμενο (undirected) ενώ σε άλλη περίπτωση ονομάζεται κατευθυνόμενο (directed). Ένα πλήρες γράφημα (που όλες οι κορυφές συνδέονται απευθείας με όλες τις άλλες κορυφές) έχει $\frac{|V||V-1|}{2}$ ακμές ($|V|$ είναι το πλήθος των κορυφών του γραφήματος). Αν σε κάθε ακμή αντιστοιχεί μια τιμή τότε το γράφημα λέγεται γράφημα με βάρη. Το γράφημα της Εικόνας 1 είναι ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα με βάρη.

2.1 Αναπαράσταση γραφημάτων

Δύο διαδεδομένοι τρόποι αναπαράστασης γραφημάτων είναι οι πίνακες γειτνίασης (adjacency matrices) και οι λίστες γειτνίασης (adjacency lists).

Στους πίνακες γειτνίασης διατηρείται ένας δισδιάστατος πίνακας $n \times n$ όπου n είναι το πλήθος των κορυφών του γραφήματος. Για κάθε ακμή του γραφήματος που συνενώνει την κορυφή i με την κορυφή j εισάγεται στη θέση i, j του πίνακα το βάρος της ακμής αν το γράφημα είναι με βάρη ενώ αν δεν υπάρχουν βάρη τότε εισάγεται η τιμή 1. Όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του πίνακα λαμβάνουν την τιμή 0. Για παράδειγμα η πληροφορία του γραφήματος της Εικόνας 1 διατηρείται όπως φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα.

Στις λίστες γειτνίασης διατηρούνται λίστες που περιέχουν για κάθε κόμβο όλη την πληροφορία των συνδέσεων του με τους γειτονικούς του κόμβους. Για παράδειγμα το γράφημα της Εικόνας 1 μπορεί να αναπαρασταθεί με τις ακόλουθες 6 λίστες (μια ανά κορυφή). Κάθε στοιχείο της λίστας για τον κόμβο v είναι ένα ζεύγος τιμών (w, u) και αναπαριστά μια ακμή από τον κόμβο v στον κόμβο u με βάρος w .

2.2 Σημαντικοί αλγόριθμοι γραφημάτων

3 Αλγόριθμος του Dijkstra για εύρεση της συντομότερης διαδρομής

Ο αλγόριθμος δέχεται ως είσοδο ένα γράφημα $G = (V, E)$ και μια κορυφή του γραφήματος s η οποία αποτελεί την αφετηρία. Υπολογίζει για όλες τις κορυφές $v \in V$ το μήκος του συντομότερου μονοπατιού από την κορυφή s στην κορυφή v . Για να λειτουργήσει σωστά θα πρέπει κάθε ακμή να έχει μη αρνητικό βάρος. Αν το γράφημα περιέχει ακμές με αρνητικό βάρος τότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμος των Bellman-Ford.

3.1 Περιγραφή του αλγορίθμου

Ο αλγόριθμος εντοπίζει τις συντομότερες διαδρομές προς τις κορυφές του γραφήματος σε σειρά απόστασης από την κορυφή αφετηρία. Σε κάθε βήμα του αλγορίθμου η αφετηρία και οι ακμές προς τις κορυφές για τις οποίες έχει ήδη βρεθεί συντομότερο μονοπάτι σχηματίζουν το υποδένδρο S του γραφήματος. Οι κορυφές που είναι προσπελάσιμες με 1 ακμή από το υποδένδρο S είναι υποψήφιος να αποτελέσουν την επόμενη κορυφή που θα εισέλθει στο υποδένδρο. Επιλέγεται μεταξύ τους η κορυφή που βρίσκεται στη μικρότερη απόσταση από την αφετηρία. Για κάθε υποψήφια κορυφή u υπολογίζεται το άθροισμα της απόστασής της από την πλησιέστερη κορυφή v του δένδρου συν το μήκος της συντομότερης διαδρομής από την αφετηρία s προς την κορυφή v . Στη συνέχεια επιλέγεται η κορυφή με το μικρότερο άθροισμα. Όταν επιλεγεί η κορυφή που πρόκειται να προστεθεί στο δένδρο τότε προστίθεται στο σύνολο των κορυφών που απαρτίζουν το υποδένδρο S και για κάθε μία από τις υποψήφιες κορυφές που συνδέονται με μια ακμή με την κορυφή που επιλέχθηκε ενημερώνεται η απόστασή της από το υποδένδρο εφόσον προκύψει μικρότερη τιμή.

Ψευδοκώδικας

Παράδειγμα

Απόδοση Η ταχύτητα εκτέλεσης του αλγορίθμου εξαρτάται από τις δομές δεδομένων που χρησιμοποιούνται για να αναπαρασταθεί το γράφημα. Γενικά, πρόκειται για έναν εξαιρετικά γρήγορο αλγόριθμο με πολυπλοκότητα χειρότερης περίπτωσης $O(|E|\log|V|)$, όπου $|E|$ είναι ο αριθμός των ακμών και $|V|$ ο αριθμός των κορυφών του γραφήματος.

3.2 Κωδικοποίηση του αλγορίθμου

4 Παραδείγματα

4.1 Παράδειγμα 1

4.2 Παράδειγμα 2

5 Ασκήσεις

- 1.
- 2.

Αναφορές