

Δομές Δεδομένων και Αλγόριθμοι
ΜΕΡΟΣ Γ'
Εργαστήριο (C++)
Τ.Ε.Ι. Ηπείρου - Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής Τ.Ε.

Χρήστος Γκόγκος

Άρτα - 2017

Εργαστήριο 7

Κατακερματισμός, δομές κατακερματισμού στην STL

7.1 Εισαγωγή

Ο κατακερματισμός (hashing) αποτελεί μια από τις βασικές τεχνικές στη επιστήμη των υπολογιστών. Χρησιμοποιείται στις δομές δεδομένων αλλά και σε άλλα πεδία της πληροφορικής όπως η κρυπτογραφία. Στο εργαστήριο αυτό θα παρουσιαστεί η δομή δεδομένων πίνακας κατακερματισμού χρησιμοποιώντας δύο διαφορετικές υλοποιήσεις: την ανοικτή διευθυνσιοδότηση και την υλοποίηση με αλυσίδες. Επιπλέον, θα παρουσιαστούν δομές της STL όπως η `unordered_set` και η `unordered_map` οι οποίες στηρίζονται στην τεχνική του κατακερματισμού. Ο κώδικας όλων των παραδειγμάτων, όπως και στα προηγούμενα εργαστήρια, βρίσκεται στο https://github.com/chgogos/ceteiep_dsa.

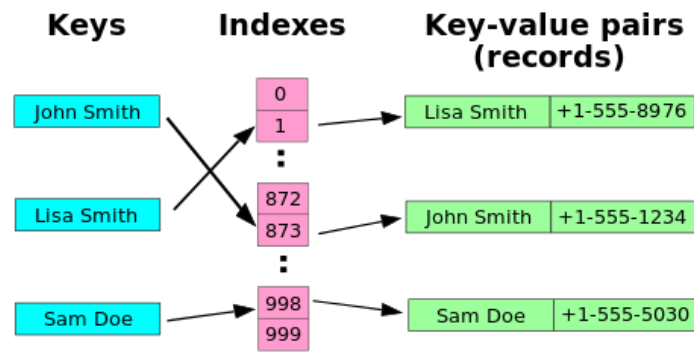
7.2 Τι είναι ο κατακερματισμός;

Ο κατακερματισμός είναι μια μέθοδος που επιτυγχάνει ταχύτατη αποθήκευση, αναζήτηση και διαγραφή δεδομένων. Σε ένα σύστημα κατακερματισμού τα δεδομένα αποθηκεύονται σε έναν πίνακα που ονομάζεται πίνακας κατακερματισμού (hash table). Θεωρώντας ότι τα δεδομένα είναι εγγραφές που αποτελούνται από ζεύγη τιμών της μορφής κλειδί-τιμή, η βασική ιδέα είναι, ότι εφαρμόζοντας στο κλειδί κάθε εγγραφής που πρόκειται να αποθηκευτεί ή να αναζητηθεί τη λεγόμενη συνάρτηση κατακερματισμού (hash function), προσδιορίζεται μονοσήμαντα η θέση του πίνακα στην οποία τοποθετούνται τα δεδομένα της εγγραφής. Η συνάρτηση κατακερματισμού αναλαμβάνει να αντιστοιχήσει έναν μεγάλο αριθμό ή ένα λεκτικό σε ένα μικρό ακέραιο που χρησιμοποιείται ως δείκτης στον πίνακα κατακερματισμού.

Μια καλή συνάρτηση κατακερματισμού θα πρέπει να κατανέμει τα κλειδιά στα κελιά του πίνακα κατακερματισμού όσο πιο ομοιόμορφα γίνεται και να είναι εύκολο να υπολογιστεί. Επίσης, είναι επιθυμητό το παραγόμενο αποτέλεσμα από τη συνάρτηση κατακερματισμού να εξαρτάται από το κλειδί στο σύνολό του.

Στον κώδικα που ακολουθεί παρουσιάζονται τέσσερις συναρτήσεις κατακερματισμού κάθε μία από τις οποίες δέχεται ένα λεκτικό και επιστρέφει έναν ακέραιο αριθμό. Στις συναρτήσεις `hash2` και `hash3` γίνεται χρήση τελεστών που εφαρμόζονται σε δυαδικές τιμές (bitwise operators). Ειδικότερα χρησιμοποιούνται οι τελεστές `<<` (αριστερή ολίσθηση), `>>` (δεξιά ολίσθηση) και `^` (xor - αποκλειστικό ή).

```
1 #include <string>
2
3 using namespace std;
4
5 size_t hash0(string &key) {
6     size_t h = 0;
7     for (char c : key)
8         h += c;
```



Σχήμα 7.1: Κατακερματισμός εγγράφων σε πίνακα κατακερματισμού [1]

```

9  return h;
10 }
11
12 size_t hash1(string &key) {
13     size_t h = 0;
14     for (char c : key)
15         h = 37 * h + c;
16     return h;
17 }
18
19 // Jenkins One-at-a-time hash
20 size_t hash2(string &key) {
21     size_t h = 0;
22     for (char c : key) {
23         h += c;
24         h += (h << 10);
25         h ^= (h >> 6);
26     }
27     h += (h << 3);
28     h ^= (h >> 11);
29     h += (h << 15);
30     return h;
31 }
32
33 // FNV (—FowlerNollVo) hash
34 size_t hash3(string &key) {
35     size_t h = 0x811c9dc5;
36     for (char c : key)
37         h = (h ^ c) * 0x01000193;
38     return h;
39 }

```

Κώδικας 7.1: Διάφορες συναρτήσεις κατακερματισμού (hashes.cpp)

```

1  #include "hashes.cpp"
2  #include <iostream>
3
4  using namespace std;
5
6  int main() {
7      constexpr int HT_SIZE = 101;
8      string keys[] = {"nikos", "maria", "petros", "kostas"};
9      for (string key : keys) {

```

```

10     size_t h0 = hash0(key) % HT_SIZE;
11     size_t h1 = hash1(key) % HT_SIZE;
12     size_t h2 = hash2(key) % HT_SIZE;
13     size_t h3 = hash3(key) % HT_SIZE;
14     cout << "string " << key << " hash0=" << h0 << " hash1=" << h1
15           << ", hash2=" << h2 << ", hash3=" << h3 << endl;
16 }
17 }

```

Κώδικας 7.2: Παραδείγματα κλήσεων συναρτήσεων κατακερματισμού (hashes_ex1.cpp)

```

1 string nikos hash0=43 hash1=64, hash2=40, hash3=27
2 string maria hash0=17 hash1=98, hash2=71, hash3=33
3 string petros hash0=63 hash1=89, hash2=85, hash3=82
4 string kostas hash0=55 hash1=69, hash2=17, hash3=47

```

Οι πίνακες κατακερματισμού είναι ιδιαίτερα κατάλληλοι για εφαρμογές στις οποίες πραγματοποιούνται συχνές αναζητήσεις εγγραφών με δεδομένες τιμές κλειδιών. Οι βασικές λειτουργίες που υποστηρίζονται σε έναν πίνακα κατακερματισμού είναι η εισαγωγή (insert), η αναζήτηση (get) και η διαγραφή (erase). Και οι τρεις αυτές λειτουργίες παρέχονται σε χρόνο $O(1)$ κατά μέσο όρο προσφέροντας ταχύτερη υλοποίηση σε σχέση με άλλες υλοποιήσεις όπως για παράδειγμα τα ισοζυγισμένα δυαδικά δένδρα αναζήτησης που παρέχουν τις ίδιες λειτουργίες σε χρόνο $O(\log n)$.

Ωστόσο, οι πίνακες κατακερματισμού έχουν και μειονεκτήματα καθώς είναι δύσκολο να επεκταθούν από τη στιγμή που έχουν δημιουργηθεί και μετά. Επίσης, η απόδοση των πινάκων κατακερματισμού υποβαθμίζεται καθώς οι θέσεις τους γεμίζουν με στοιχεία. Συνεπώς, εφόσον ο προγραμματιστής προχωρήσει στη δική του υλοποίηση ενός πίνακα κατακερματισμού είτε θα πρέπει να γνωρίζει εκ των προτέρων το πλήθος των στοιχείων που πρόκειται να αποθηκευτούν είτε όταν αυτό απαιτηθεί να υπάρξει πρόβλεψη έτσι ώστε τα δεδομένα να μεταφέρονται σε μεγαλύτερο πίνακα κατακερματισμού.

Στις περισσότερες εφαρμογές υπάρχουν πολύ περισσότερα πιθανά κλειδιά εγγραφών από ότι θέσεις στο πίνακα κατακερματισμού. Αν για δύο ή περισσότερα κλειδιά η εφαρμογή της συνάρτησης κατακερματισμού επιστρέφει το ίδιο αποτέλεσμα τότε λέμε ότι συμβαίνει σύγκρουση (collision) η οποία θα πρέπει να διευθετηθεί με κάποιο τρόπο. Ο ακόλουθος κώδικας μετρά το πλήθος των συγκρούσεων που συμβαίνουν καθώς δημιουργούνται hashes για ένα σύνολο 2.000 κλειδιών αλφαριθμητικού τύπου.

```

1 #include <random>
2 using namespace std;
3
4 mt19937 mt(1821);
5 uniform_int_distribution<int> uni(0, 25);
6
7 string generate_random_string(int k) {
8     string s{};
9     const string letters_en = "ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ";
10    for (int i = 0; i < k; i++)
11        s += letters_en[uni(mt)];
12    return s;
13 }

```

Κώδικας 7.3: Δημιουργία τυχαίων λεκτικών (random_strings.cpp)

```

1 #include "hashes.cpp"
2 #include "random_strings.cpp"
3 #include <iostream>
4 #include <set>
5
6 using namespace std;
7 constexpr int HT_SIZE = 10001;
8

```

```

9 int main() {
10     set<int> aset;
11     int collisions = 0;
12     for (int i = 0; i < 2000; i++) {
13         string key = generate_random_string(10);
14         size_t h = hash0(key) % HT_SIZE; // 1863 collisions
15         // size_t h = hash1(key) % HT_SIZE; // 172 collisions
16         // size_t h = hash2(key) % HT_SIZE; // 188 collisions
17         // size_t h = hash3(key) % HT_SIZE; // 196 collisions
18         if (aset.find(h) != aset.end())
19             collisions++;
20         else
21             aset.insert(h);
22     }
23     cout << "number of collisions " << collisions << endl;
24 }

```

Κώδικας 7.4: Συγκρούσεις (hashes_ex2.cpp)

```

1 number of collisions 1863

```

Γενικότερα, σε έναν πίνακα κατακερματισμού, η εύρεση μιας εγγραφής με κλειδί *key* είναι μια διαδικασία δύο βημάτων:

- Εφαρμογή της συνάρτησης κατακερματισμού στο κλειδί της εγγραφής.
- Ξεκινώντας από την θέση που υποδεικνύει η συνάρτηση κατακερματισμού στον πίνακα κατακερματισμού, εντοπισμός της εγγραφής που περιέχει το ζητούμενο κλειδί (ενδεχόμενα θα χρειαστεί να εφαρμοστεί κάποιος μηχανισμός διευθέτησης συγκρούσεων).

Οι βασικοί μηχανισμοί επίλυσης των συγκρούσεων είναι η ανοικτή διευθυνσιοδότηση και ο κατακερματισμός με αλυσίδες.

7.2.1 Ανοικτή διευθυνσιοδότηση

Στην ανοικτή διευθυνσιοδότηση (open addressing, closed hashing) όλα τα δεδομένα αποθηκεύονται απευθείας στον πίνακα κατακερματισμού. Αν συμβεί σύγκρουση τότε ελέγχεται αν κάποιο από τα υπόλοιπα κελιά είναι διαθέσιμο και η εγγραφή τοποθετείται εκεί. Συνεπώς, θα πρέπει το μέγεθος του hashtable να είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το πλήθος των στοιχείων που πρόκειται να αποθηκευτούν σε αυτό. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η απόδοση της ανοικτής διευθυνσιοδότησης μειώνεται κατακόρυφα σε περίπτωση που το hashtable είναι σχεδόν γεμάτο.

Αν το πλήθος των κελιών είναι m και το πλήθος των εγγραφών είναι n τότε το πηλίκο $a = \frac{n}{m}$ που ονομάζεται παράγοντας φόρτωσης (load factor) καθορίζει σημαντικά την απόδοση του hashtable. Ο παράγοντας φόρτωσης στην περίπτωση της ανοικτής διευθυνσιοδότησης δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερος της μονάδας.

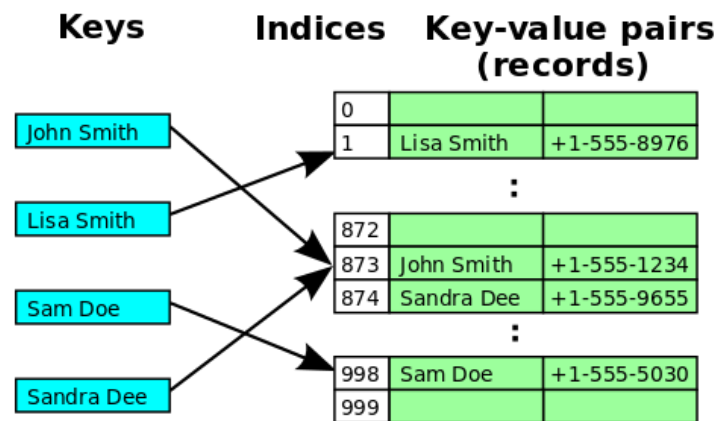
Υπάρχουν πολλές παραλλαγές της ανοικτής διευθυνσιοδότησης που σχετίζονται με τον τρόπο που σε περίπτωση σύγκρουσης επιλέγεται το επόμενο κελί που εξετάζεται αν είναι ελεύθερο προκειμένου να τοποθετηθούν εκεί τα δεδομένα της εγγραφής. Αν εξετάζεται το αμέσως επόμενο στη σειρά κελί και μέχρι να βρεθεί το πρώτο διαθέσιμο, ξεκινώντας από την αρχή του πίνακα αν βρεθεί στο τέλος, τότε η μέθοδος ονομάζεται γραμμική ανίχνευση (linear probing). Άλλες διαδεδομένες μέθοδοι είναι η τετραγωνική ανίχνευση (quadratic probing) και ο διπλός κατακερματισμός (double hashing) [4].

Στη συνέχεια ακολουθεί μια υλοποίηση ενός πίνακα κατακερματισμού με ανοικτή διευθυνσιοδότηση και γραμμική ανίχνευση. Στον πίνακα κατακερματισμού τοποθετούνται εγγραφές με κλειδιά και τιμές αλφαριθμητικού τύπου.

```

1 #include <iostream>
2
3 using namespace std;

```



Σχήμα 7.2: Κατακερματισμός εγγραφών με ανοικτή διευσθυνοδότηση και γραμμική αντίχνευση [1]

```

4
5 struct record {
6     string key;
7     string value;
8 };
9
10 class oa_hashtable {
11 private:
12     int capacity;
13     int size;
14     record **data; // array of pointers to records
15
16     size_t hash(string &key) {
17         size_t value = 0;
18         for (size_t i = 0; i < key.length(); i++)
19             value = 37 * value + key[i];
20         return value % capacity;
21     }
22
23 public:
24     oa_hashtable(int capacity) {
25         this->capacity = capacity;
26         size = 0;
27         data = new record *[capacity];
28         for (int i = 0; i < capacity; i++)
29             data[i] = nullptr;
30     }
31
32     ~oa_hashtable() {
33         for (size_t i = 0; i < capacity; i++)
34             if (data[i] != nullptr)
35                 delete data[i];
36         delete[] data;
37     }
38
39     record *get(string &key) {
40         size_t hash_code = hash(key);
41         while (data[hash_code] != nullptr) {
42             if (data[hash_code]->key == key)
43                 return data[hash_code];

```

```

44     hash_code = (hash_code + 1) % capacity;
45 }
46 return nullptr;
47 }
48
49 void put(record *arecord) {
50     if (size == capacity) {
51         cerr << "The hashtable is full" << endl;
52         return;
53     }
54     size_t hash_code = hash(arecord->key);
55     while (data[hash_code] != nullptr && data[hash_code]->key != "ERASED") {
56         if (data[hash_code]->key == arecord->key) {
57             delete data[hash_code];
58             data[hash_code] = arecord; // update existing key
59             return;
60         }
61         hash_code = (hash_code + 1) % capacity;
62     }
63     data[hash_code] = arecord;
64     size++;
65 }
66
67 void erase(string &key) {
68     size_t hash_code = hash(key);
69     while (data[hash_code] != nullptr) {
70         if (data[hash_code]->key == key) {
71             delete data[hash_code];
72             data[hash_code] = new record{"ERASED", "ERASED"}; // insert dummy record
73             size--;
74             return;
75         }
76         hash_code = (hash_code + 1) % capacity;
77     }
78 }
79
80 void print_all() {
81     for (int i = 0; i < capacity; i++)
82         if (data[i] != nullptr && data[i]->key != "ERASED")
83             cout << "#(" << i << ") " << data[i]->key << " " << data[i]->value
84                 << endl;
85     cout << "Load factor: " << (double)size / (double)capacity << endl;
86 }
87 };
88
89 int main() {
90     oa_hashtable hashtable(101); // hashtable with maximum capacity 101 items
91     record *precord1 = new record{"John Smith", "+1-555-1234"};
92     record *precord2 = new record{"Lisa Smith", "+1-555-8976"};
93     record *precord3 = new record{"Sam Doe", "+1-555-5030"};
94     hashtable.put(precord1);
95     hashtable.put(precord2);
96     hashtable.put(precord3);
97     hashtable.print_all();
98     string key = "Sam Doe";
99     record *precord = hashtable.get(key);
100    if (precord == nullptr)
101        cout << "Key not found" << endl;
102    else {
103        cout << "Key found: " << precord->key << " " << precord->value << endl;
104        hashtable.erase(key);

```



```

105 }
106 hashtable.print_all();
107 }

```

Κώδικας 7.5: Ανοικτή διευθυνσιοδότηση (open_addressing.cpp)

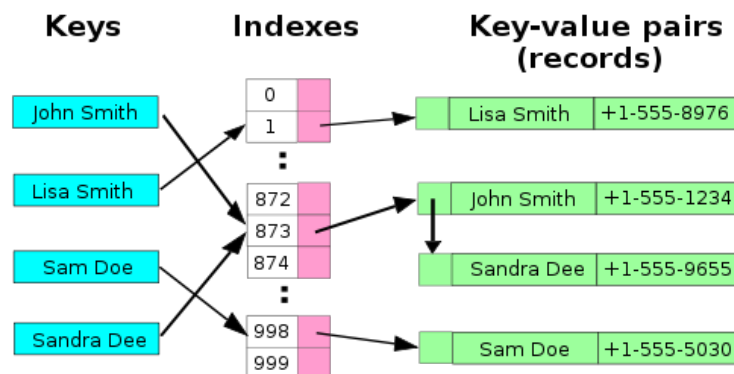
```

1 #(1) Sam Doe +1-555-5030
2 #(46) John Smith +1-555-1234
3 #(57) Lisa Smith +1-555-8976
4 Load factor: 0.029703
5 Key found: Sam Doe +1-555-5030
6 #(46) John Smith +1-555-1234
7 #(57) Lisa Smith +1-555-8976
8 Load factor: 0.019802

```

7.2.2 Κατακερματισμός με αλυσίδες

Στον κατακερματισμό με αλυσίδες (separate chaining) οι εγγραφές αποθηκεύονται σε συνδεδεμένες λίστες κάθε μια από τις οποίες είναι προσαρτημένες στα κελιά ενός hashtable. Συνεπώς, η απόδοση των αναζητήσεων εξαρτάται από τα μήκη των συνδεδεμένων λιστών. Αν η συνάρτηση κατακερματισμού κατανέμει τα n κλειδιά ανάμεσα στα m κελιά ομοιόμορφα τότε κάθε λίστα θα έχει μήκος $\frac{n}{m}$. Ο παράγοντας φόρτωσης, $a = \frac{n}{m}$, στον κατακερματισμό με αλυσίδες δεν θα πρέπει να απέχει πολύ από την μονάδα. Πολύ μικρό load factor σημαίνει ότι υπάρχουν πολλές κενές λίστες και συνεπώς δεν γίνεται αποδοτική χρήση του χώρου ενώ μεγάλο load factor σημαίνει μακριές συνδεδεμένες λίστες και μεγαλύτεροι χρόνοι αναζήτησης.



Σχήμα 7.3: Κατακερματισμός εγγραφών με αλυσίδες [1]

Στη συνέχεια ακολουθεί μια υλοποίηση ενός πίνακα κατακερματισμού με κατακερματισμό με αλυσίδες. Για τις συνδεδεμένες λίστες χρησιμοποιείται η λίστα `std::list`.

```

1 #include <iostream>
2 #include <list>
3
4 using namespace std;
5
6 struct record {
7     string key;
8     string value;
9 };
10
11 class sc_hashtable {
12 private:
13     int size;
14     list<record *> *buckets;

```

```

15
16 size_t hash(string &key) {
17     size_t value = 0;
18     for (size_t i = 0; i < key.length(); i++)
19         value = 37 * value + key[i];
20     return value % size;
21 }
22
23 public:
24     sc_hashtable(int size) {
25         this->size = size;
26         buckets = new list<record *>[size];
27     }
28
29     ~sc_hashtable() {
30         for (size_t i = 0; i < size; i++)
31             for (record *rec : buckets[i])
32                 delete rec;
33         delete[] buckets;
34     }
35
36     record *get(string &key) {
37         size_t hash_code = hash(key);
38         if (buckets[hash_code].empty())
39             return nullptr;
40         else
41             for (record *rec : buckets[hash_code])
42                 if (rec->key == key)
43                     return rec;
44         return nullptr;
45     }
46
47     void put(record *arecord) {
48         size_t hash_code = hash(arecord->key);
49         buckets[hash_code].push_back(arecord);
50     }
51
52     void erase(string &key) {
53         size_t hash_code = hash(key);
54         list<record *>::iterator itr = buckets[hash_code].begin();
55         while (itr != buckets[hash_code].end())
56             if ((*itr)->key == key)
57                 itr = buckets[hash_code].erase(itr);
58             else
59                 ++itr;
60     }
61
62     void print_all() {
63         int m = 0;
64         for (size_t i = 0; i < size; i++)
65             if (!buckets[i].empty())
66                 for (record *rec : buckets[i]) {
67                     cout << "#(" << i << ") " << rec->key << " " << rec->value << endl;
68                     m++;
69                 }
70         cout << "Load factor: " << (double)m / (double)size << endl;
71     }
72 };
73
74 int main() {
75     sc_hashtable hashtable(101);

```

```

76 record *precord1 = new record{"John Smith", "+1-555-1234"};
77 record *precord2 = new record{"Lisa Smith", "+1-555-8976"};
78 record *precord3 = new record{"Sam Doe", "+1-555-5030"};
79 hashtable.put(precord1);
80 hashtable.put(precord2);
81 hashtable.put(precord3);
82 hashtable.print_all();
83 string key = "Sam Doe";
84 record *precord = hashtable.get(key);
85 if (precord == nullptr)
86     cout << "Key not found" << endl;
87 else {
88     cout << "Key found: " << precord->key << " " << precord->value << endl;
89     hashtable.erase(key);
90 }
91 hashtable.print_all();
92 }

```

Κώδικας 7.6: Κατακερματισμός με αλυσίδες (separate_chaining.cpp)

```

1 #(1) Sam Doe +1-555-5030
2 #(46) John Smith +1-555-1234
3 #(57) Lisa Smith +1-555-8976
4 Load factor: 0.029703
5 Key found: Sam Doe +1-555-5030
6 #(46) John Smith +1-555-1234
7 #(57) Lisa Smith +1-555-8976
8 Load factor: 0.019802

```

Περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τον κατακερματισμό και την υλοποίηση πινάκων κατακερματισμού μπορούν να βρεθούν στις αναφορές [2], [3].

7.3 Κατακερματισμός με την STL

Η STL διαθέτει την κλάση `std::hash` που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επιστροφή hash τιμών για διάφορους τύπους δεδομένων. Στον ακόλουθο κώδικα παρουσιάζεται η χρήση της `std::hash`.

```

1 #include <iostream>
2 #include <string>
3 using namespace std;
4
5 int main() {
6     constexpr int HT_SIZE = 101; // hypothetical hashtable size
7     double d1 = 1000.1;
8     double d2 = 1000.2;
9     hash<double> d_hash;
10    cout << "The hash value for: " << d1 << " is " << d_hash(d1) << " -> #"
11        << d_hash(d1) % HT_SIZE << endl;
12    cout << "The hash value for: " << d2 << " is " << d_hash(d2) << " -> #"
13        << d_hash(d2) % HT_SIZE << endl;
14
15    char c1[15] = "This is a test";
16    char c2[16] = "This is a test.";
17    hash<char*> c_strhash;
18    cout << "The hash value for: " << c1 << " is " << c_strhash(c1) << " -> #"
19        << c_strhash(c1) % HT_SIZE << endl;
20    cout << "The hash value for: " << c2 << " is " << c_strhash(c2) << " -> #"
21        << c_strhash(c2) % HT_SIZE << endl;
22
23    string s1 = "This is a test";

```

```

24 string s2 = "This is a test.";
25 hash<string> strhash;
26 cout << "The hash value for: " << s1 << " is " << strhash(s1) << " -> #"
27     << strhash(s1) % HT_SIZE << endl;
28 cout << "The hash value for: " << s2 << " is " << strhash(s2) << " -> #"
29     << strhash(s2) % HT_SIZE << endl;
30 }

```

Κώδικας 7.7: Παράδειγμα χρήσης της std::hash (stl_hash.cpp)

```

1 The hash value for: 1000.1 is 18248755989755706217 -> #44
2 The hash value for: 1000.2 is 2007414553616229599 -> #30
3 The hash value for: This is a test is 2293264 -> #59
4 The hash value for: This is a test. is 2293248 -> #43
5 The hash value for: This is a test is 5122661464562453635 -> #23
6 The hash value for: This is a test. is 10912006877877170250 -> #46

```

Επιπλέον, η STL υποστηρίζει δύο βασικές δομές κατακερματισμού το std::unordered_set και το std::unordered_map. Το std::unordered_set υλοποιείται ως ένας πίνακας κατακερματισμού και μπορεί να περιέχει τιμές (κλειδιά) οποιουδήποτε τύπου οι οποίες γίνονται hash σε διάφορες θέσεις του πίνακα κατακερματισμού. Κατά μέσο όρο, οι λειτουργίες σε ένα std::unordered_set (εύρεση, εισαγωγή και διαγραφή κλειδιού) πραγματοποιούνται σε σταθερό χρόνο $O(1)$. Ένα std::unordered_set δεν περιέχει διπλότυπα, ενώ αν υπάρχει αυτή η ανάγκη τότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί το std::unordered_multiset.

Στον κώδικα που ακολουθεί οι χαρακτήρες ενός λεκτικού εισάγονται ένας προς ένας σε ένα std::unordered_set έτσι ώστε να υπολογιστεί το πλήθος των διακριτών χαρακτήρων ενός λεκτικού.

```

1 #include <cctype> // tolower
2 #include <iostream>
3 #include <unordered_set>
4
5 using namespace std;
6
7 int main() {
8     string text = "You can do anything but not everything";
9     unordered_set<char> uset;
10    for (char c : text)
11        if (c != ' ')
12            uset.insert(tolower(c));
13    cout << "Number of discrete characters=" << uset.size() << endl;
14    for (unordered_set<char>::iterator itr = uset.begin(); itr != uset.end();
15         itr++)
16        cout << *itr << " ";
17    cout << endl;
18 }

```

Κώδικας 7.8: Παράδειγμα χρήσης του std::unordered_set (stl_unordered_set.cpp)

```

1 Number of discrete characters=15
2 r v e g c b y n u o d a t i h

```

Το std::unordered_map αποθηκεύει ζεύγη (κλειδί-τιμή). Το κλειδί αναγνωρίζει με μοναδικό τρόπο το κάθε ζεύγος και γίνεται hash σε συγκεκριμένη θέση του πίνακα κατακερματισμού. Όπως και στο std::unordered_set, κατά μέσο όρο, οι λειτουργίες σε ένα std::unordered_map πραγματοποιούνται σε σταθερό χρόνο $O(1)$. Η ανάθεση τιμής σε κλειδί μπορεί να γίνει με τους τελεστές = και [], ενώ το πέρασμα από τις τιμές ενός std::unordered_map μπορεί να γίνει με iterator ή με range for.

```

1 #include <iostream>
2 #include <unordered_map>
3
4 using namespace std;

```

```

5
6 int main() {
7     unordered_map<string, double> atomic_mass{{"H", 1.008}, // Hydrogen
8                                                {"C", 12.011}}; // Carbon
9     atomic_mass["O"] = 15.999; // Oxygen
10    atomic_mass["Fe"] = 55.845; // Iron
11    atomic_mass.insert(make_pair("Al", 26.982)); // Aluminium
12
13    for (unordered_map<string, double>::iterator itr = atomic_mass.begin();
14         itr != atomic_mass.end(); itr++)
15        cout << itr->first << " " << itr->second << " ";
16    cout << endl;
17
18    for (const std::pair<string, double> &kv : atomic_mass)
19        cout << kv.first << " " << kv.second << " ";
20    cout << endl;
21
22    string element = "Fe";
23    // string element = "Ti"; // Titanium
24    if (atomic_mass.find(element) == atomic_mass.end())
25        cout << "Element " << element << " is not in the map" << endl;
26    else
27        cout << "Element " << element << " has atomic mass " << atomic_mass[element]
28            << " " << endl;
29 }

```

Κώδικας 7.9: Παράδειγμα χρήσης του std::unordered_map (stl_unordered_map.cpp)

```

1 Al:26.982 H:1.008 C:12.011 O:15.999 Fe:55.845
2 Al:26.982 H:1.008 C:12.011 O:15.999 Fe:55.845
3 Element Fe has atomic mass 55.845

```

7.4 Παραδείγματα

7.4.1 Παράδειγμα 1

Έστω μια επιχείρηση η οποία επιθυμεί να αποθηκεύσει τα στοιχεία των υπαλλήλων της (όνομα, διεύθυνση) σε μια δομή έτσι ώστε με βάση το όνομα του υπαλλήλου να επιτυγχάνει τη γρήγορη ανάκληση των υπόλοιπων στοιχείων των υπαλλήλων. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η υλοποίηση ενός πίνακα κατακερματισμού στον οποίο κλειδί θεωρείται το όνομα του υπαλλήλου και η επίλυση των συγκρούσεων πραγματοποιείται με ανοικτή διευσθυνοδότηση (open addressing) και γραμμική ανίχνευση (linear probing). Καθώς δεν υπάρχει η ανάγκη διαγραφής τιμών από τον πίνακα κατακερματισμού παρουσιάζεται μια απλούστερη υλοποίηση σε σχέση με αυτή που παρουσιάστηκε στον κώδικα 7.5. Ο πίνακας κατακερματισμού μπορεί να δεχθεί το πολύ 100.000 εγγραφές υπαλλήλων. Στο παράδειγμα χρονομετρείται η εκτέλεση για 20.000, 30.000 και 80.000 υπαλλήλους. Παρατηρείται ότι λόγω των συγκρούσεων καθώς ο συντελεστής φόρτωσης του πίνακα κατακερματισμού αυξάνεται η απόδοση της δομής υποβαθμίζεται.

```

1 #include "hashes.cpp"
2 #include "random_strings.cpp"
3 #include <chrono>
4 #include <iomanip>
5 #include <iostream>
6 #include <string>
7 #include <vector>
8
9 using namespace std::chrono;
10

```

```

11 const int N = 100000; // HashTable size
12
13 struct employee {
14     string name;
15     string address;
16 };
17
18 void insert(employee hash_table[], employee &ypa) {
19     int pos = hash1(ypa.name) % N;
20     while (hash_table[pos].name != ypa.name) {
21         pos++;
22         pos %= N;
23     }
24     hash_table[pos] = ypa;
25 }
26
27 bool search(employee hash_table[], string &name, employee &ypa) {
28     int pos = hash1(name) % N;
29     int c = 0;
30     while (hash_table[pos].name != name) {
31         if (hash_table[pos].name == "")
32             return false;
33         pos++;
34         pos %= N;
35         c++;
36         if (c > N)
37             return false;
38     }
39     ypa = hash_table[pos];
40     return true;
41 }
42
43 int main() {
44     vector<int> SIZES{20000, 30000, 80000};
45     for (int x : SIZES) {
46         struct employee *hash_table = new struct employee[N];
47         // generate x random employees, insert them at the hashtable
48         vector<string> names;
49         for (int i = 0; i < x; i++) {
50             employee ypa;
51             ypa.name = generate_random_string(3);
52             ypa.address = generate_random_string(20);
53             insert(hash_table, ypa);
54             names.push_back(ypa.name);
55         }
56         // generate x more names
57         for (int i = 0; i < x; i++)
58             names.push_back(generate_random_string(3));
59         // time execution of 2*x searches in the HashTable
60         auto t1 = high_resolution_clock::now();
61         employee ypa;
62         int c = 0;
63         for (string name : names)
64             if (search(hash_table, name, ypa)) {
65                 // cout << "Employee " << ypa.name << " " << ypa.address << endl;
66                 c++;
67             }
68         auto t2 = high_resolution_clock::now();
69         std::chrono::duration<double, std::micro> duration = t2 - t1;
70         cout << "Load factor: " << setprecision(2) << (double)x / (double)N
71              << " employees found: " << c << ", employees not found: " << 2 * x - c

```

```

72         << " time elapsed: " << std::fixed << duration.count() / 1E6
73         << " seconds" << endl;
74     delete[] hash_table;
75 }
76 }

```

Κώδικας 7.10: Υλοποίηση πίνακα κατακερματισμού για γρήγορη αποθήκευση και αναζήτηση εγγραφών (lab07_ex1.cpp)

```

1 Load factor: 0.2 employees found: 33565, employees not found: 6435 time elapsed: 0.01 seconds
2 Load factor: 0.30 employees found: 54478, employees not found: 5522 time elapsed: 0.13 seconds
3 Load factor: 0.80 employees found: 159172, employees not found: 828 time elapsed: 12.50 seconds

```

7.4.2 Παράδειγμα 2

Στο παράδειγμα αυτό παρουσιάζεται η λύση του ίδιου προβλήματος με το παράδειγμα 1 με τη διαφορά ότι πλέον χρησιμοποιείται η δομή `std::unordered_map` της STL.

```

1 #include "random_strings.cpp"
2 #include <chrono>
3 #include <iomanip>
4 #include <iostream>
5 #include <string>
6 #include <unordered_map>
7 #include <vector>
8
9 using namespace std::chrono;
10
11 struct employee {
12     string name;
13     string address;
14 };
15
16 int main() {
17     vector<int> SIZES{20000, 30000, 80000};
18     for (int x : SIZES) {
19         unordered_map<string, employee> umap;
20         // generate x random employees, insert them at the hashtable
21         vector<string> names;
22         for (int i = 0; i < x; i++) {
23             employee ypa;
24             ypa.name = generate_random_string(3);
25             ypa.address = generate_random_string(20);
26             umap[ypa.name] = ypa;
27             names.push_back(ypa.name);
28         }
29         // generate x more names
30         for (int i = 0; i < x; i++)
31             names.push_back(generate_random_string(3));
32
33         // time execution of 2*x searches in the HashTable
34         auto t1 = high_resolution_clock::now();
35         int c = 0;
36         for (string name : names)
37             if (umap.find(name) != umap.end()) {
38                 // cout << "Employee " << name << " " << umap[name].address << endl;
39                 c++;
40             }
41         auto t2 = high_resolution_clock::now();
42         std::chrono::duration<double, std::micro> duration = t2 - t1;

```

```

43     cout << "Load factor: " << setprecision(2) << umap.load_factor()
44         << " employees found: " << c << ", employees not found: " << 2 * x - c
45         << " time elapsed: " << std::fixed << duration.count() / 1E6
46         << " seconds" << endl;
47 }
48 }

```

Κώδικας 7.11: Γρήγορη αποθήκευση και αναζήτηση εγγραφών με τη χρήση της `std::unordered_map` (lab07_ex2.cpp)

```

1 Load factor: 0.79 employees found: 33565, employees not found: 6435 time elapsed: 0.01 seconds
2 Load factor: 0.95 employees found: 54478, employees not found: 5522 time elapsed: 0.01 seconds
3 Load factor: 0.57 employees found: 159172, employees not found: 828 time elapsed: 0.02 seconds

```

7.4.3 Παράδειγμα 3

Στο παράδειγμα αυτό εξετάζονται τέσσερις διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους ελέγχεται για ένα μεγάλο πλήθος τιμών (5.000.000) πόσες από αυτές περιέχονται σε ένα δεδομένο σύνολο 1.000 τιμών. Οι τιμές είναι ακέραιες και επιλέγονται με τυχαίο τρόπο στο διάστημα $[0, 100.000]$. Ο χρόνος που απαιτεί η κάθε προσέγγιση χρονομετρείται.

- Η πρώτη προσέγγιση (scenario1) χρησιμοποιεί ένα vector για να αποθηκεύσει το σύνολο των 1.000 τυχαίων ακεραίων τιμών και αναζητά σειριακά κάθε τιμή στο vector.
- Η δεύτερη προσέγγιση (scenario2) χρησιμοποιεί επίσης ένα vector για να αποθηκεύσει το σύνολο των 1.000 τυχαίων ακεραίων τιμών, τις ταξινομεί και αναζητά κάθε τιμή στο ταξινομημένο vector.
- Η τρίτη προσέγγιση (scenario3) αποθηκεύει τις 1.000 τυχαίες ακεραίες τιμές σε ένα `std::set` (υλοποιείται στην STL ως δυαδικό δένδρο αναζήτησης) και αναζητά κάθε τιμή σε αυτό.
- Η τέταρτη προσέγγιση (scenario4) αποθηκεύει τις 1.000 τυχαίες ακεραίες τιμές σε ένα `std::unordered_set` (υλοποιείται στην STL ως πίνακας κατακερματισμού) και αναζητά κάθε τιμή σε αυτό.

```

1 #include <algorithm>
2 #include <bitset>
3 #include <chrono>
4 #include <iostream>
5 #include <random>
6 #include <set>
7 #include <unordered_set>
8 #include <vector>
9
10 using namespace std;
11 using namespace std::chrono;
12
13 // number of items in the set
14 constexpr int N = 1000;
15 // number of values checked whether they exist in the set
16 constexpr int M = 5E6;
17
18 uniform_int_distribution<uint32_t> dist(0, 1E5);
19
20 void scenario1(vector<uint32_t> &avector) {
21     long seed = 1940;
22     mt19937 mt(seed);
23     int c = 0;
24     for (int i = 0; i < M; i++)
25         if (find(avector.begin(), avector.end(), dist(mt)) != avector.end())
26             c++;
27     cout << "Values in the set (using unsorted vector): " << c << " ";

```



```

28 }
29
30 void scenario2(vector<uint32_t> &avector) {
31     sort(avector.begin(), avector.end());
32     long seed = 1940;
33     mt19937 mt(seed);
34     int c = 0;
35     for (int i = 0; i < M; i++)
36         if (binary_search(avector.begin(), avector.end(), dist(mt)))
37             c++;
38     cout << "Values in the set (using sorted vector): " << c << " ";
39 }
40
41 void scenario3(set<uint32_t> &aset) {
42     long seed = 1940;
43     mt19937 mt(seed);
44     int c = 0;
45     for (int i = 0; i < M; i++)
46         if (aset.find(dist(mt)) != aset.end())
47             c++;
48     cout << "Values in the set (using std::set): " << c << " ";
49 }
50
51 void scenario4(unordered_set<uint32_t> &auset) {
52     long seed = 1940;
53     mt19937 mt(seed);
54     int c = 0;
55     for (int i = 0; i < M; i++)
56         if (auset.find(dist(mt)) != auset.end())
57             c++;
58     cout << "Values in the set (using std::unordered_set): " << c << " ";
59 }
60
61 int main() {
62     long seed = 1821;
63     mt19937 mt(seed);
64     high_resolution_clock::time_point t1, t2;
65     duration<double, std::micro> duration_micro;
66     vector<uint32_t> avector(N);
67     // fill vector with random values using std::generate and lambda function
68     std::generate(avector.begin(), avector.end(), [&mt]() { return dist(mt); });
69
70     t1 = high_resolution_clock::now();
71     scenario1(avector);
72     t2 = high_resolution_clock::now();
73     duration_micro = t2 - t1;
74     cout << "elapsed time: " << duration_micro.count() / 1E6 << " seconds"
75         << endl;
76
77     t1 = high_resolution_clock::now();
78     scenario2(avector);
79     t2 = high_resolution_clock::now();
80     duration_micro = t2 - t1;
81     cout << "elapsed time: " << duration_micro.count() / 1E6 << " seconds"
82         << endl;
83
84     set<uint32_t> aset(avector.begin(), avector.end());
85     t1 = high_resolution_clock::now();
86     scenario3(aset);
87     t2 = high_resolution_clock::now();
88     duration_micro = t2 - t1;

```

```

89  cout << "elapsed time: " << duration_micro.count() / 1E6 << " seconds"
90      << endl;
91
92  unordered_set<uint32_t> auset(avector.begin(), avector.end());
93  t1 = high_resolution_clock::now();
94  scenario4(aset);
95  t2 = high_resolution_clock::now();
96  duration_micro = t2 - t1;
97  cout << "elapsed time: " << duration_micro.count() / 1E6 << " seconds"
98      << endl;
99  }

```

Κώδικας 7.12: Έλεγχος ύπαρξης τιμών σε ένα σύνολο τιμών (lab07_ex3.cpp)

1 Values in the set (using unsorted vector): 49807 elapsed time: 34.8646 seconds
 2 Values in the set (using sorted vector): 49807 elapsed time: 1.7819 seconds
 3 Values in the set (using std::set): 49807 elapsed time: 1.7591 seconds
 4 Values in the set (using std::unordered_set): 49807 elapsed time: 0.921053 seconds

7.5 Ασκήσεις

1. Γράψτε μια συνάρτηση που να δέχεται έναν πίνακα ακεραίων A και έναν ακέραιο αριθμό sum και να βρίσκει το πλήθος από όλα τα ζεύγη τιμών του A που το άθροισμά τους είναι ίσο με sum.
2. Γράψτε ένα πρόγραμμα που για ένα λεκτικό που θα δέχεται ως είσοδο, να επιστρέφει το χαρακτήρα (γράμματα κεφαλαία, γράμματα πεζά, ψηφία, σύμβολα) που εμφανίζεται περισσότερες φορές καθώς και πόσες φορές εμφανίζεται στο λεκτικό.
3. Γράψτε μια συνάρτηση που να δέχεται έναν πίνακα ακεραίων A και έναν ακέραιο αριθμό K και να βρίσκει τη μεγαλύτερη σε μήκος υποακολουθία στοιχείων του A που έχει άθροισμα ίσο με K.
4. Γράψτε ένα πρόγραμμα που να δέχεται μια λέξη και να βρίσκει γρήγορα όλες τις άλλες έγκυρες λέξεις που είναι αναγραμματισμοί της λέξης που δόθηκε. Θεωρείστε ότι έχετε δεδομένο ένα αρχείο κειμένου με όλες τις έγκυρες λέξεις (words.txt), μια ανά γραμμή.

Βιβλιογραφία

- [1] Wikibooks, Data Structures - Hash Tables https://en.wikibooks.org/wiki/Data_Structures/Hash_Tables
- [2] C++ tutorial: Intro to Hash Tables, <https://pumpkinprogrammerdotcom4.wordpress.com/2014/06/21/c-tutorial-intro-to-hash-tables/>
- [3] HackerEarth, Basics of Hash Tables, <https://www.hackerearth.com/practice/data-structures/hash-tables/basics-of-hash-tables/tutorial/>
- [4] VisualAlgo.net Open Addressing (LP, QP, DH) and Separate Chaining Visualization, <https://visualgo.net/en/hashtable>

Εργαστήριο 8

Γραφήματα

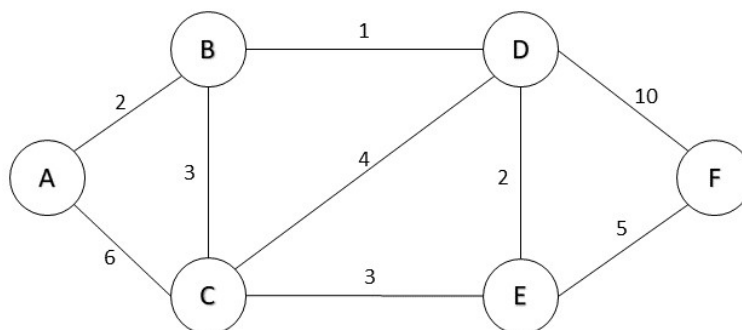
8.1 Εισαγωγή

Τα γραφήματα είναι δομές δεδομένων που συναντώνται συχνά κατά την επίλυση προβλημάτων. Η ευχέρεια προγραμματισμού αλγορίθμων που εφαρμόζονται πάνω σε γραφήματα είναι ουσιώδης. Καθώς μάλιστα συχνά ανακύπτουν προβλήματα για τα οποία έχουν διατυπωθεί αλγόριθμοι αποδοτικής επίλυσής τους η γνώση των αλγορίθμων αυτών αποδεικνύεται ισχυρός σύμμαχος στην επίλυση δύσκολων προβλημάτων.

8.2 Γραφήματα

Ένα γράφημα ή γράφος (graph) είναι ένα σύνολο από σημεία που ονομάζονται κορυφές (vertices) ή κόμβοι (nodes) για τα οποία ισχύει ότι κάποια από αυτά είναι συνδεδεμένα απευθείας μεταξύ τους με τμήματα γραμμών που ονομάζονται ακμές (edges ή arcs). Συνήθως ένα γράφημα συμβολίζεται ως $G = (V, E)$ όπου V είναι το σύνολο των κορυφών και E είναι το σύνολο των ακμών.

Αν οι ακμές δεν έχουν κατεύθυνση τότε το γράφημα ονομάζεται μη κατευθυνόμενο (undirected) ενώ σε άλλη περίπτωση ονομάζεται κατευθυνόμενο (directed). Ένα πλήρες γράφημα (που όλες οι κορυφές συνδέονται απευθείας με όλες τις άλλες κορυφές) έχει $\frac{|V||V-1|}{2}$ ακμές ($|V|$ είναι το πλήθος των κορυφών του γραφήματος). Αν σε κάθε ακμή αντιστοιχεί μια τιμή τότε το γράφημα λέγεται γράφημα με βάρη. Το γράφημα του σχήματος 8.1 είναι ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα με βάρη.



Σχήμα 8.1: Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα 6 κορυφών και 9 ακμών με βάρη στις ακμές του

Ένα γράφημα λέγεται συνεκτικό αν για δύο οποιεσδήποτε κορυφές του υπάρχει μονοπάτι που τις συνδέει. Αν ένα γράφημα δεν είναι συνεκτικό τότε αποτελείται από επιμέρους συνεκτικά γραφήματα τα οποία λέγονται συνιστώσες. Είναι προφανές ότι ένα συνεκτικό γράφημα έχει μόνο μια συνιστώσα.

8.2.1 Αναπαράσταση γραφημάτων

Δύο διαδεδομένοι τρόποι αναπαράστασης γραφημάτων είναι οι πίνακες γειτνίασης (adjacency matrices) και οι λίστες γειτνίασης (adjacency lists).

Στους πίνακες γειτνίασης διατηρείται ένας δισδιάστατος πίνακας $n \times n$ όπου n είναι το πλήθος των κορυφών του γραφήματος. Για κάθε ακμή του γραφήματος που συνενώνει την κορυφή i με την κορυφή j εισάγεται στη θέση i, j του πίνακα το βάρος της ακμής αν το γράφημα είναι με βάρη ενώ αν δεν υπάρχουν βάρη τότε εισάγεται η τιμή 1. Όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του πίνακα λαμβάνουν την τιμή 0. Για παράδειγμα η πληροφορία του γραφήματος για το σχήμα 8.1 διατηρείται όπως φαίνεται στον πίνακα 8.1.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|----|---|----|
| A | 0 | 2 | 6 | 0 | 0 | 0 |
| B | 2 | 0 | 3 | 1 | 0 | 0 |
| C | 6 | 3 | 0 | 4 | 3 | 0 |
| D | 0 | 1 | 4 | 0 | 2 | 10 |
| E | 0 | 0 | 3 | 2 | 0 | 5 |
| F | 0 | 0 | 0 | 10 | 5 | 0 |

Πίνακας 8.1: Πίνακας γειτνίασης για το σχήμα 8.1

Στις λίστες γειτνίασης διατηρούνται λίστες που περιέχουν για κάθε κορυφή όλη την πληροφορία των συνδέσεων της με τους γειτονικούς της κόμβους. Για παράδειγμα το γράφημα του σχήματος 8.1 μπορεί να αναπαρασταθεί με τις ακόλουθες 6 λίστες (μια ανά κορυφή). Κάθε στοιχείο της λίστας για την κορυφή v είναι ένα ζεύγος τιμών (w, u) και αναπαριστά μια ακμή από την κορυφή v στην κορυφή u με βάρος w , όπως φαίνεται στο πίνακα 8.2.

| A | (2,B), (6,C) |
|---|-----------------------------|
| B | (2,A), (3,C), (1,D) |
| C | (6,A), (3,B), (4,D), (3,E) |
| D | (1,B), (4,C), (2,E), (10,F) |
| E | (3,C), (2,D), (5,F) |
| F | (10,D), (5,E) |

Πίνακας 8.2: Λίστα γειτνίασης για το σχήμα 8.1

Περισσότερα για τις αναπαραστάσεις γραφημάτων μπορούν να βρεθούν στις αναφορές [1] και [2].

8.2.2 Ανάγνωση δεδομένων γραφήματος από αρχείο

Υπάρχουν πολλοί τρόποι με τους οποίους μπορούν να βρίσκονται καταγεγραμμένα τα δεδομένα ενός γραφήματος σε ένα αρχείο. Το αρχείο αυτό θα πρέπει να διαβαστεί έτσι ώστε να αναπαρασταθεί το γράφημα στη μνήμη του υπολογιστή. Στη συνέχεια παρουσιάζεται μια απλή μορφή αποτύπωσης κατευθυνόμενων με βάρη γραφημάτων χρησιμοποιώντας αρχεία απλού κειμένου. Σύμφωνα με αυτή τη μορφή για κάθε κορυφή του γραφήματος καταγράφεται σε ξεχωριστή γραμμή του αρχείου κειμένου το όνομά της ακολουθούμενο από ζεύγη τιμών, χωρισμένων με κόμματα, που αντιστοιχούν στις ακμές που ξεκινούν από τη συγκεκριμένη κορυφή. Στο κείμενο που ακολουθεί (graph1.txt) και το οποίο αφορά το γράφημα του σχήματος 8.1 η πρώτη γραμμή σημαίνει ότι η κορυφή A συνδέεται με μια ακμή με βάρος 2 με την κορυφή B καθώς και με μια ακμή με βάρος 6 με την κορυφή C. Ανάλογα καταγράφεται η πληροφορία ακμών και για τις άλλες κορυφές.

¹ A 2,B 6,C

² B 2,A 3,C 1,D

³ C 6,A 3,B 4,D 3,E

⁴ D 1,B 4,C 2,E 10,F

5 E 3,C 2,D 5,F
6 F 10,D 5,E

Η ανάγνωση του αρχείου και η αναπαράσταση του γραφήματος ως λίστα γειτνίασης γίνεται με τη συνάρτηση `read_data` που δίνεται στη συνέχεια όπου `fn` είναι το όνομα του αρχείου. Η συνάρτηση αυτή δημιουργεί ένα λεξικό (`map`) που αποτελείται από εγγραφές τύπου `key-value`. Σε κάθε εγγραφή το `key` είναι ένα λεκτικό με το όνομα μιας κορυφής ενώ το `value` είναι ένα διάνυσμα (`vector`) που περιέχει ζεύγη (`pair<int,string>`) στα οποία το πρώτο στοιχείο είναι ένας ακέραιος αριθμός που αναπαριστά το βάρος μιας ακμής ενώ το δεύτερο ένα λεκτικό με το όνομα της κορυφής στην οποία καταλήγει η ακμή από την κορυφή `key`. Ο κώδικας έχει “σπάσει” σε 3 αρχεία (`graph.hpp`, `graph.cpp` και `graph_ex1.cpp`) έτσι ώστε να είναι ευκολότερη η επαναχρησιμοποίηση του. Η συνάρτηση `print_data` εμφανίζει τα δεδομένα του γραφήματος.

```
1 #include <fstream>
2 #include <iostream>
3 #include <map>
4 #include <sstream>
5 #include <utility>
6 #include <vector>
7
8 using namespace std;
9
10 map<string, vector<pair<int, string>>> read_data(string fn);
11 void print_graph(map<string, vector<pair<int, string>>> &g);
```

Κώδικας 8.1: header file με τις συναρτήσεις για ανάγνωση και εμφάνιση γραφημάτων (`graph.hpp`)

```
1 #include "graph.hpp"
2
3 using namespace std;
4
5 map<string, vector<pair<int, string>>> read_data(string fn) {
6     map<string, vector<pair<int, string>>> graph;
7     fstream filestr;
8     string buffer;
9     filestr.open(fn.c_str());
10    if (filestr.is_open())
11        while (getline(filestr, buffer)) {
12            string buffer2;
13            stringstream ss;
14            ss.str(buffer);
15            vector<string> tokens;
16            while (ss >> buffer2)
17                tokens.push_back(buffer2);
18            string vertex1 = tokens[0].c_str();
19            for (size_t i = 1; i < tokens.size(); i++) {
20                int pos = tokens[i].find(",");
21                int weight = atoi(tokens[i].substr(0, pos).c_str());
22                string vertex2 =
23                    tokens[i].substr(pos + 1, tokens[i].length() - 1).c_str();
24                graph[vertex1].push_back(make_pair(weight, vertex2));
25            }
26        }
27    else {
28        cout << "Error opening file: " << fn << endl;
29        exit(-1);
30    }
31    return graph;
32 }
33
34 void print_graph(map<string, vector<pair<int, string>>> &g) {
```

```

35 for (const auto &p1 : g) {
36     for (const auto &p2 : p1.second)
37         cout << p1.first << "<-->" << p2.first << "<-->" << p2.second << " ";
38     cout << endl;
39 }
40 }

```

Κώδικας 8.2: source file με τις συναρτήσεις για ανάγνωση και εμφάνιση γραφημάτων (graph.cpp)

```

1 #include "graph.hpp"
2
3 using namespace std;
4
5 int main() {
6     map<string, vector<pair<int, string>>> graph = read_data("graph1.txt");
7     print_graph(graph);
8     return 0;
9 }

```

Κώδικας 8.3: Ανάγνωση και εκτύπωση των δεδομένων του γραφήματος του σχήματος 8.1 (graph_ex1.cpp)

Η μεταγλώττιση και η εκτέλεση του κώδικα γίνεται με τις ακόλουθες εντολές:

```

1 $ g++ -Wall -std=c++11 graph.cpp graph_ex1.cpp -o graph_ex1
2 $ ./graph_ex1

```

Η δε έξοδος που παράγεται είναι η ακόλουθη:

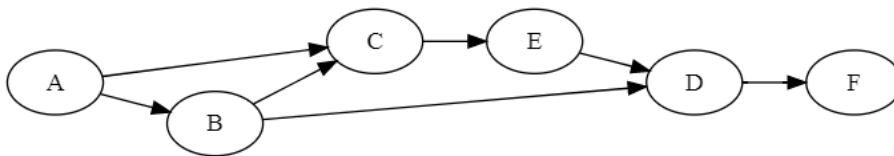
```

1 A<--2-->B A<--6-->C
2 B<--2-->A B<--3-->C B<--1-->D
3 C<--6-->A C<--3-->B C<--4-->D C<--3-->E
4 D<--1-->B D<--4-->C D<--2-->E D<--10-->F
5 E<--3-->C E<--2-->D E<--5-->F
6 F<--10-->D F<--5-->E

```

8.2.3 Κατευθυνόμενα ακυκλικά γραφήματα

Τα κατευθυνόμενα ακυκλικά γραφήματα (Directed Acyclic Graphs=DAGs) είναι γραφήματα για τα οποία δεν μπορεί να εντοπιστεί διαδρομή από μια κορυφή προς την ίδια. Στο σχήμα 8.2 παρουσιάζεται ένα γράφημα το οποίο δεν παρουσιάζει κύκλους. Αν για παράδειγμα υπήρχε μια ακόμα ακμή από την κορυφή E προς την κορυφή A τότε πλέον το γράφημα δεν θα ήταν DAG καθώς θα υπήρχε ο κύκλος A-C-E-A.



Σχήμα 8.2: Ένα κατευθυνόμενο ακυκλικό γράφημα (DAG)

Τα DAGs χρησιμοποιούνται στη μοντελοποίηση πολλών καταστάσεων. Μπορούν για παράδειγμα να αναπαραστήσουν εργασίες που πρέπει να εκτελεστούν και για τις οποίες υπάρχουν εξαρτήσεις όπως για παράδειγμα ότι για να ξεκινήσει η εκτέλεση της εργασίας D θα πρέπει πρώτα να έχουν ολοκληρωθεί οι εργασίες B και E.

8.2.4 Σημαντικοί αλγόριθμοι γραφημάτων

Υπάρχουν πολλοί αλγόριθμοι που εφαρμόζονται σε γραφήματα προκειμένου να επιλύσουν ενδιαφέροντα προβλήματα που ανακύπτουν σε πρακτικές εφαρμογές. Οι ακόλουθοι αλγόριθμοι είναι μερικοί από αυτούς:

- Αναζήτηση συντομότερων διαδρομών από μια κορυφή προς όλες τις άλλες κορυφές (Dijkstra). Ο αλγόριθμος αυτός θα αναλυθεί στη συνέχεια.
- Εύρεση μήκους συντομότερων διαδρομών για όλα τα ζεύγη κορυφών (Floyd Warshall) [3].
- Αναζήτηση κατά βάθος (Depth First Search). Είναι αλγόριθμος διάσχισης γραφήματος ο οποίος ξεκινά από έναν κόμβο αφετηρία και επισκέπτεται όλους τους άλλους κόμβους που είναι προσβάσιμοι χρησιμοποιώντας της ακμές του γραφήματος. Λειτουργεί επεκτείνοντας μια διαδρομή όσο βρίσκει νέους κόμβους τους οποίους μπορεί να επισκεφθεί. Αν δεν βρίσκει νέους κόμβους οπισθοδρομεί και διερευνά άλλα τμήματα του γραφήματος.
- Αναζήτηση κατά πλάτος (Breadth First Search). Αλγόριθμος διάσχισης γραφήματος που ξεκινώντας από έναν κόμβο αφετηρία επισκέπτεται τους υπόλοιπους κόμβους σε αύξουσα σειρά βημάτων από την αφετηρία. Βήματα θεωρούνται οι μεταβάσεις από κορυφή σε κορυφή.
- Εντοπισμός ελάχιστου συνεκτικού (ή γεννητικού) δένδρου (Prim [4], Kruskal [5]). Δεδομένου ενός γραφήματος, το πρόβλημα αφορά την εύρεση ενός δένδρου στο οποίο θα περιέχονται όλες οι κορυφές του γραφήματος ενώ οι ακμές του δένδρου θα είναι ένα υποσύνολο των ακμών του γραφήματος τέτοιο ώστε το άθροισμα των βαρών τους να είναι το ελάχιστο δυνατό.
- Τοπολογική ταξινόμηση (Topological Sort) [6]. Ο αλγόριθμος τοπολογικής ταξινόμησης εφαρμόζεται σε DAGs και παράγει μια σειρά κορυφών του γραφήματος για την οποία ισχύει ότι για κάθε κατευθυνόμενη ακμή από την κορυφή u στην κορυφή v στη σειρά των κορυφών η κορυφή u προηγείται της κορυφής v . Για παράδειγμα, για το DAG του σχήματος 8.2 αποτέλεσμα του αλγορίθμου είναι το A,B,C,E,D,F. Σε συνθετότερα γραφήματα μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μια τοπολογικές σειρές κορυφών για το γράφημα.
- Εντοπισμός κυκλωμάτων Euler (Eulerian circuit) [7]. Σε ένα γράφημα, διαδρομή Euler (Eulerian path) είναι μια διαδρομή που περνά από όλες τις ακμές του γραφήματος. Αν η διαδρομή αυτή ξεκινά και τερματίζει στην ίδια κορυφή τότε λέγεται κύκλωμα Euler.
- Εντοπισμός ισχυρά συνδεδεμένων συνιστωσών (Strongly Connected Components) [8]. Ισχυρά συνδεδεμένες συνιστώσες υφίστανται μόνο σε κατευθυνόμενα γραφήματα. Ένα κατευθυνόμενο γράφημα είναι ισχυρά συνδεδεμένο όταν υπάρχει διαδρομή από κάθε κορυφή προς κάθε άλλη κορυφή. Ένα κατευθυνόμενο γράφημα μπορεί να σπάσει σε ισχυρά συνδεδεμένα υπογραφήματα. Τα υπογραφήματα αυτά αποτελούν τις ισχυρά συνδεδεμένες συνιστώσες του γραφήματος.

8.3 Αλγόριθμος του Dijkstra για εύρεση συντομότερων διαδρομών

Ο αλγόριθμος δέχεται ως είσοδο ένα γράφημα $G = (V, E)$ και μια κορυφή του γραφήματος s η οποία αποτελεί την αφετηρία. Υπολογίζει για όλες τις κορυφές $v \in V$ το μήκος του συντομότερου μονοπατιού από την κορυφή s στην κορυφή v . Για να λειτουργήσει σωστά θα πρέπει κάθε ακμή να έχει μη αρνητικό βάρος. Αν το γράφημα περιέχει ακμές με αρνητικό βάρος τότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμος των Bellman-Ford [9].

8.3.1 Περιγραφή του αλγορίθμου

Ο αλγόριθμος εντοπίζει τις συντομότερες διαδρομές προς τις κορυφές του γραφήματος σε σειρά απόστασης από την κορυφή αφετηρία. Σε κάθε βήμα του αλγορίθμου η αφετηρία και οι ακμές προς τις κορυφές για τις οποίες έχει ήδη βρεθεί συντομότερο μονοπάτι σχηματίζουν το υποδένδρο S του γραφήματος. Οι κορυφές που είναι προσπελάσιμες με 1 ακμή από το υποδένδρο S είναι υποψήφια να αποτελέσουν την επόμενη κορυφή που θα εισέλθει στο υποδένδρο. Επιλέγεται μεταξύ τους η κορυφή που βρίσκεται στη μικρότερη απόσταση από την αφετηρία. Για κάθε υποψήφια κορυφή u υπολογίζεται το άθροισμα της απόστασής της από την πλησιέστερη κορυφή v του δένδρου συν το μήκος της συντομότερης διαδρομής από την αφετηρία s προς την κορυφή v . Στη συνέχεια επιλέγεται η κορυφή με το μικρότερο άθροισμα. Όταν επιλεγεί η κορυφή που πρόκειται να προστεθεί στο δένδρο τότε προστίθεται στο σύνολο των κορυφών που απαρτίζουν το υποδένδρο S και για κάθε μία από

τις υποψήφιες κορυφές που συνδέονται με μια ακμή με την κορυφή που επιλέχθηκε ενημερώνεται η απόστασή της από το υποδένδρο εφόσον προκύψει μικρότερη τιμή.

Ψευδοκώδικας Το σύνολο S περιέχει τις κορυφές για τις οποίες έχει προσδιοριστεί η συντομότερη διαδρομή από την κορυφή s ενώ το διάνυσμα d περιέχει τις αποστάσεις από την κορυφή s

1. Αρχικά $S = s$, $d_s = 0$ και για όλες τις κορυφές $i \neq s$, $d_i = \infty$
2. Μέχρι να γίνει $S = V$
3. Εντοπισμός του στοιχείου $v \notin S$ με τη μικρότερη τιμή d_v και προσθήκη του στο S
4. Για κάθε ακμή από την κορυφή v στην κορυφή u με βάρος w ενημερώνεται η τιμή d_u έτσι ώστε:

$$d_u = \min(d_u, d_v + w)$$
5. Επιστροφή στο βήμα 2.

Εκτέλεση του αλγορίθμου Στη συνέχεια ακολουθεί παράδειγμα εκτέλεσης του αλγορίθμου για το γράφημα του σχήματος 8.1.

| | |
|---|--|
| $S = \{A\}, d_A = 0, d_B = 2, d_C = 6, d_D = \infty, d_E = \infty, d_F = \infty$ | Από το S μπορούμε να φτάσουμε στις κορυφές 2 και 3 με μήκος διαδρομής 2 και 6 αντίστοιχα. Επιλέγεται η κορυφή 2. |
| $S = \{A, B\}, d_A = 0, d_B = 2, d_C = 5, d_D = 3, d_E = \infty, d_F = \infty$ | Από το S μπορούμε να φτάσουμε στις κορυφές C και D με μήκος διαδρομής 5 και 3 αντίστοιχα. Επιλέγεται η κορυφή D. |
| $S = \{A, B, D\}, d_A = 0, d_B = 2, d_C = 5, d_D = 3, d_E = 5, d_F = 13$ | Από το S μπορούμε να φτάσουμε στις κορυφές C, E και F με μήκος διαδρομής 5, 5 και 13 αντίστοιχα. Επιλέγεται (με τυχαίο τρόπο) ανάμεσα στις κορυφές C και E η κορυφή C. |
| $S = \{A, B, D, C\}, d_A = 0, d_B = 2, d_C = 5, d_D = 3, d_E = 5, d_F = 13$ | Από το S μπορούμε να φτάσουμε στις κορυφές E και F με μήκος διαδρομής 5 και 13 αντίστοιχα. Επιλέγεται η κορυφή E. |
| $S = \{A, B, D, C, E\}, d_A = 0, d_B = 2, d_C = 5, d_D = 3, d_E = 5, d_F = 10$ | Η μοναδική κορυφή στην οποία μένει να φτάσουμε από το S είναι η κορυφή F και το μήκος της συντομότερης διαδρομής από την A στην F είναι 10. |
| $S = \{A, B, D, C, E, F\}, d_A = 0, d_B = 2, d_C = 5, d_D = 3, d_E = 5, d_F = 10$ | |

Πίνακας 8.3: Αναλυτική εκτέλεση του αλγορίθμου

Συνεπώς ισχύει ότι:

- Για την κορυφή A η διαδρομή αποτελείται μόνο από τον κόμβο A και έχει μήκος 0.
- Για την κορυφή B η διαδρομή είναι η A-B με μήκος 2.
- Για την κορυφή C η διαδρομή είναι η A-B-C με μήκος 5.
- Για την κορυφή D η διαδρομή είναι η A-B-D με μήκος 3.
- Για την κορυφή E η διαδρομή είναι η A-B-D-E με μήκος 5.
- Για την κορυφή F η διαδρομή είναι η A-B-D-E-F με μήκος 10.

| Σύνολο S | A | B | C | D | E | F |
|------------------------|---|----------|----------|----------|----------|----------|
| $\{\}$ | 0 | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ |
| $\{A\}$ | 0 | 2_A | 6_A | ∞ | ∞ | ∞ |
| $\{A, B\}$ | 0 | 2_A | 5_B | 3_B | ∞ | ∞ |
| $\{A, B, D\}$ | 0 | 2_A | 5_B | 3_B | 5_D | 13_D |
| $\{A, B, D, C\}$ | 0 | 2_A | 5_B | 3_B | 5_D | 13_D |
| $\{A, B, D, C, E\}$ | 0 | 2_A | 5_B | 3_B | 5_D | 10_E |
| $\{A, B, D, C, E, F\}$ | 0 | 2_A | 5_B | 3_B | 5_D | 10_E |

Πίνακας 8.4: Συνοπτική εκτέλεση του αλγορίθμου

Στο σύνδεσμο της αναφοράς [10] μπορεί κανείς να παρακολουθήσει την εκτέλεση του αλγορίθμου για διάφορα γραφήματα.

Απόδοση του αλγορίθμου Η ταχύτητα εκτέλεσης του αλγορίθμου εξαρτάται από τις δομές δεδομένων που χρησιμοποιούνται για να αναπαρασταθεί το γράφημα. Γενικά, πρόκειται για έναν εξαιρετικά γρήγορο αλγόριθμο με πολυπλοκότητα χειρότερης περίπτωσης $O(|E|\log|V|)$, όπου $|E|$ είναι ο αριθμός των ακμών και $|V|$ ο αριθμός των κορυφών του γραφήματος.

8.3.2 Κωδικοποίηση του αλγορίθμου

```

1 #include <climits>
2 #include <map>
3 #include <set>
4 #include <vector>
5
6 using namespace std;
7
8 void compute_shortest_paths_to_all_vertices(
9     map<string, vector<pair<int, string>>> &graph, string source,
10     map<string, int> &shortest_path_distances);

```

Κώδικας 8.4: header file για τον αλγόριθμο του Dijkstra (dijkstra.hpp)

```

1 #include "dijkstra.hpp"
2
3 using namespace std;
4
5 void compute_shortest_paths_to_all_vertices(
6     map<string, vector<pair<int, string>>> &graph, string source,
7     map<string, int> &shortest_path_distances) {
8     vector<string> S{source};
9     set<string> NS;
10    for (auto &kv : graph)
11        if (kv.first == source)
12            shortest_path_distances[kv.first] = 0;
13    else {
14        NS.insert(kv.first);
15        shortest_path_distances[kv.first] = INT_MAX;
16    }
17
18    while (!NS.empty()) {
19        string v1 = S.back();
20        for (pair<int, string> w_v : graph[v1]) {
21            int weight = w_v.first;

```

```

22     string v2 = w_v.second;
23     if (NS.find(v2) != NS.end())
24         if (shortest_path_distances[v1] + weight < shortest_path_distances[v2])
25             shortest_path_distances[v2] = shortest_path_distances[v1] + weight;
26     }
27     int min = INT_MAX;
28     string pmin = "None";
29     for (string v2 : NS) {
30         if (shortest_path_distances[v2] < min) {
31             min = shortest_path_distances[v2];
32             pmin = v2;
33         }
34     }
35     // in case the graph is not connected
36     if (pmin == "None")
37         break;
38     S.push_back(pmin);
39     NS.erase(pmin);
40 }
41 }

```

Κώδικας 8.5: source file για τον αλγόριθμο του Dijkstra (dijkstra.cpp)

```

1 #include "dijkstra.hpp"
2 #include "graph.hpp"
3
4 using namespace std;
5
6 int main() {
7     map<string, vector<pair<int, string>>> graph = read_data("graph1.txt");
8     map<string, int> shortest_path_distances;
9     string source = "A";
10    compute_shortest_paths_to_all_vertices(graph, source,
11                                           shortest_path_distances);
12    for (auto pair : shortest_path_distances)
13        cout << "Shortest path from vertex " << source << " to vertex "
14              << pair.first << " has length " << pair.second << endl;
15 }

```

Κώδικας 8.6: source file προγράμματος που καλεί τον αλγόριθμο του Dijkstra (dijkstra_ex1.cpp)

Η μεταγλώττιση και η εκτέλεση του κώδικα γίνεται με τις ακόλουθες εντολές:

```

1 $ g++ -std=c++11 graph.cpp dijkstra.cpp dijkstra_ex1.cpp -o dijkstra_ex1
2 $ ./dijkstra_ex1

```

Η δε έξοδος που παράγεται είναι η ακόλουθη:

```

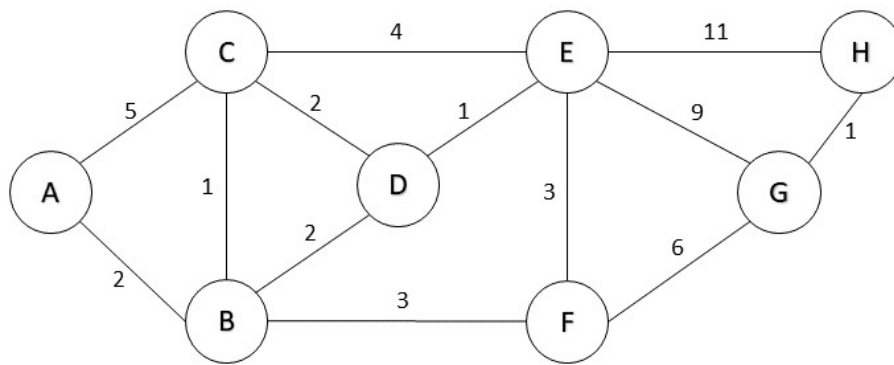
1 Shortest path from vertex A to vertex A has length 0
2 Shortest path from vertex A to vertex B has length 2
3 Shortest path from vertex A to vertex C has length 5
4 Shortest path from vertex A to vertex D has length 3
5 Shortest path from vertex A to vertex E has length 5
6 Shortest path from vertex A to vertex F has length 10

```

8.4 Παραδείγματα

8.4.1 Παράδειγμα 1

Για το σχήμα 8.3 και με αφετηρία την κορυφή A συμπληρώστε τον πίνακα εκτέλεσης του αλγορίθμου για την εύρεση των συντομότερων διαδρομών του Dijkstra και καταγράψτε τις διαδρομές που εντοπίζονται από την αφετηρία προς όλες τις άλλες κορυφές.



Σχήμα 8.3: Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα 8 κορυφών με βάρη στις ακμές του

Ο ακόλουθος πίνακας δείχνει την εκτέλεση του αλγορίθμου

| Σύνολο S | A | B | C | D | E | F | G | H |
|------------------------------|---|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $\{\}$ | 0 | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ |
| $\{A\}$ | 0 | 2_A | 5_A | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ |
| $\{A, B\}$ | 0 | 2_A | 3_B | ∞ | ∞ | 5_B | ∞ | ∞ |
| $\{A, B, C\}$ | 0 | 2_A | 3_B | 4_B | 7_C | 5_B | ∞ | ∞ |
| $\{A, B, C, D\}$ | 0 | 2_A | 3_B | 4_B | 5_D | 5_B | ∞ | ∞ |
| $\{A, B, C, D, E\}$ | 0 | 2_A | 3_B | 4_B | 5_D | 5_B | 14_E | 16_E |
| $\{A, B, C, D, E, F\}$ | 0 | 2_A | 3_B | 4_B | 5_D | 5_B | 11_F | 16_E |
| $\{A, B, C, D, E, F, G\}$ | 0 | 2_A | 3_B | 4_B | 5_D | 5_B | 11_F | 12_E |
| $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ | 0 | 2_A | 3_B | 4_B | 5_D | 5_B | 11_F | 12_E |

Πίνακας 8.5: Συνοπτική εκτέλεση του αλγορίθμου

Οι συντομότερες διαδρομές είναι:

- Για την κορυφή A η διαδρομή είναι η A με μήκος 0
- Για την κορυφή B η διαδρομή είναι η A-B με μήκος 2
- Για την κορυφή C η διαδρομή είναι η A-B-C με μήκος 3
- Για την κορυφή D η διαδρομή είναι η A-B-D με μήκος 4
- Για την κορυφή E η διαδρομή είναι η A-B-D-E με μήκος 5
- Για την κορυφή F η διαδρομή είναι η A-B-F με μήκος 5
- Για την κορυφή G η διαδρομή είναι η A-B-F-G με μήκος 11
- Για την κορυφή H η διαδρομή είναι η A-B-F-G-H με μήκος 12

8.4.2 Παράδειγμα 2

Γράψτε πρόγραμμα που να διαβάζει ένα γράφημα και να εμφανίζει για κάθε κορυφή το βαθμό της, δηλαδή το πλήθος των κορυφών με τις οποίες συνδέεται απευθείας καθώς και το μέσο όρο βαρών για αυτές τις ακμές. Επιπλέον για κάθε κορυφή να εμφανίζει τις υπόλοιπες κορυφές οι οποίες μπορούν να προσεγγιστούν με διαδρομές μήκους 1,2,3 κοκ.

```

1 #include "dijkstra.hpp"
2 #include "graph.hpp"
3 #include <algorithm> // max_element
4 #include <sstream>
5

```

```

6 using namespace std;
7
8 int main() {
9     map<string, vector<pair<int, string>>> graph = read_data("graph2.txt");
10    for (auto &kv : graph) {
11        double sum = 0.0;
12        for (auto &p : kv.second) {
13            sum += p.first;
14        }
15        cout << "Vertex " << kv.first << " has degree " << kv.second.size()
16             << " and average weighted degree " << sum / kv.second.size() << endl;
17    }
18
19    for (auto &kv : graph) {
20        string source_vertex = kv.first;
21        cout << "Source " << source_vertex << ": ";
22        map<string, int> shortest_path_distances;
23        compute_shortest_paths_to_all_vertices(graph, source_vertex,
24                                              shortest_path_distances);
25
26        vector<int> distances;
27        for (auto &p : shortest_path_distances)
28            distances.push_back(p.second);
29        int max = *(max_element(distances.begin(), distances.end()));
30
31        for (int i = 1; i <= max; i++) {
32            stringstream ss;
33            ss << "dist=" << i << "->{";
34            for (auto &p : shortest_path_distances)
35                if (p.second == i)
36                    ss << p.first << " ";
37            ss << "} ";
38            string sss = ss.str();
39            if (sss.substr(sss.length() - 3) != "{}") // check for empty list
40                cout << sss;
41        }
42        cout << endl;
43    }
44 }

```

Κώδικας 8.7: (lab08_ex2.cpp)

Η μεταγλώττιση και η εκτέλεση του κώδικα γίνεται με τις ακόλουθες εντολές:

```

1 $ g++ -std=c++11 lab08_ex2.cpp graph.cpp dijkstra.cpp -o lab08_ex2
2 $ ./lab08_ex2

```

Η δε έξοδος που παράγεται είναι η ακόλουθη:

```

1 Vertex A has degree 2 and average weighted degree 3.5
2 Vertex B has degree 4 and average weighted degree 2
3 Vertex C has degree 4 and average weighted degree 3
4 Vertex D has degree 3 and average weighted degree 1.66667
5 Vertex E has degree 5 and average weighted degree 5.6
6 Vertex F has degree 3 and average weighted degree 4
7 Vertex G has degree 3 and average weighted degree 5.33333
8 Vertex H has degree 2 and average weighted degree 6
9 Source A: dist=2->{B } dist=3->{C } dist=4->{D } dist=5->{E F } dist=11->{G } dist=12->{H }
10 Source B: dist=1->{C } dist=2->{A D } dist=3->{E F } dist=9->{G } dist=10->{H }
11 Source C: dist=1->{B } dist=2->{D } dist=3->{A E } dist=4->{F } dist=10->{G } dist=11->{H }
12 Source D: dist=1->{E } dist=2->{B C } dist=4->{A F } dist=10->{G } dist=11->{H }
13 Source E: dist=1->{D } dist=3->{B C F } dist=5->{A } dist=9->{G } dist=10->{H }
14 Source F: dist=3->{B E } dist=4->{C D } dist=5->{A } dist=6->{G } dist=7->{H }
15 Source G: dist=1->{H } dist=6->{F } dist=9->{B E } dist=10->{C D } dist=11->{A }
16 Source H: dist=1->{G } dist=7->{F } dist=10->{B E } dist=11->{C D } dist=12->{A }

```

8.5 Ασκήσεις

1. Υλοποιήστε τον αλγόριθμο των Bellman-Ford [9] για την εύρεση της συντομότερης διαδρομής από μια κορυφή προς όλες τις άλλες κορυφές.
2. Υλοποιήστε έναν αλγόριθμο τοπολογικής ταξινόμησης για DAGs [6].

Βιβλιογραφία

- [1] Geeks for Geeks, graphs and its representations, <https://www.geeksforgeeks.org/graph-and-its-representations/>
- [2] HackerEarth, graph representation, <https://www.hackerearth.com/practice/algorithms/graphs/graph-representation/tutorial/>
- [3] Programming-Algorithms.net, Floyd-Warshall algorithm, <http://www.programming-algorithms.net/article/45708/Floyd-Warshall-algorithm>
- [4] PROGRAMIZ, Prim's algorithm, <https://www.programiz.com/dsa/prim-algorithm>
- [5] PROGRAMIZ, Kruskal's algorithm, <https://www.programiz.com/dsa/kruskal-algorithm>
- [6] Geeks for Geeks, topological sorting, <https://www.geeksforgeeks.org/topological-sorting/>
- [7] Discrete Mathematics: An open introduction by Oscar Levin, Euler Paths and Circuits, http://discretetext.oscarlevin.com/dmoi/sec_paths.html
- [8] HackerEarth, Strongly Connected Components, <https://www.hackerearth.com/practice/algorithms/graphs/strongly-connected-components/tutorial/>
- [9] Brilliant.org, Bellman-Ford Algorithm, <https://brilliant.org/wiki/bellman-ford-algorithm/>
- [10] Algorithm visualization, Dijkstra's shortest path, <https://www.cs.usfca.edu/galles/visualization/Dijkstra.html>