Chapitre 9 — Fonction logarithme népérien

Activité 1

On considère la fonction exponentielle définie par $f(x) = e^x$.

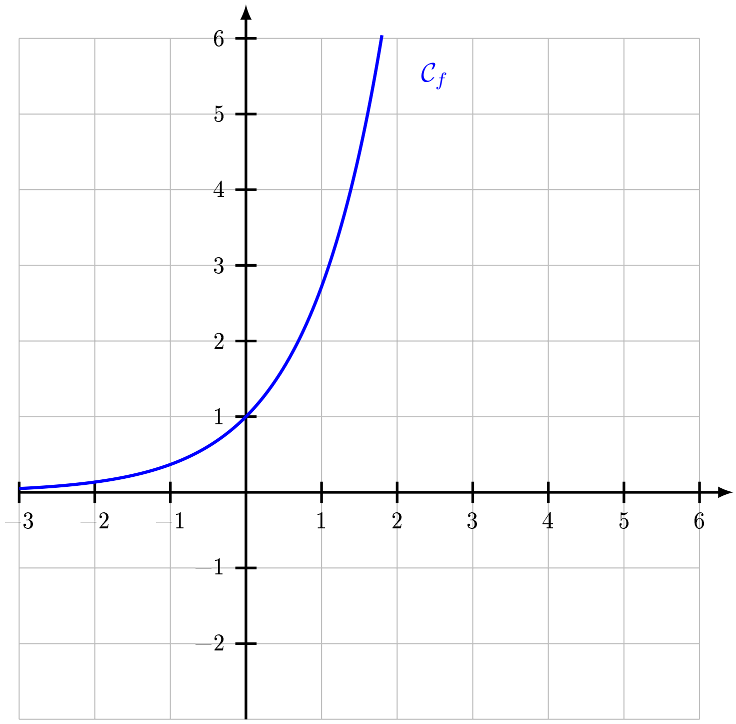
1. Justifier que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0; 10]$. Donner une valeur approchée de k à 10^{-1} près.

2. Soit k un nombre réel. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $e^x = k$ en fonction de k.

3. Résoudre $e^x = 1$.

Activité 2

On considère maintenant la représentation graphique de la fonction exponentielle, donnée ci-dessous:



1. Tracer sur le graphique la droite (d) d'équation $y = x$, puis tracer la courbe symétrique de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (d).
2. On note ln la fonction appelée "Logarithme népérien" correspondant à la représentation graphique obtenue. Tracer cette fonction à la calculatrice.
3. Déterminer graphiquement l'ensemble de définition de cette fonction.
4. Déterminer graphiquement le sens de variation de la fonction ln.
5. Déterminer graphiquement le signe de la fonction ln.

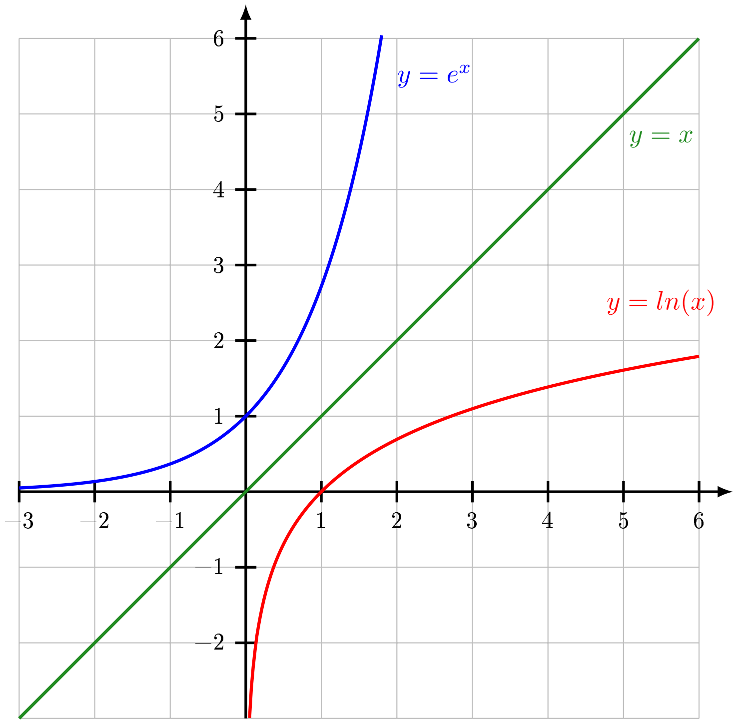
1 Fonction logarithme népérien

Définition 1

- Pour tout réel $a > 0$ l'équation $e^x = a$, d'inconnue x, admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
  Cette solution se note $x = ln(a)$ et s'appelle le logarithme népérien de a.
- La fonction qui, à tout réel $a > 0$, associe le réel $ln(a)$ s'appelle la **fonction logarithme népérien**.
  C'est la **fonction réciproque** de la fonction exponentielle. Elle est définie sur $]0; +\infty[$.

Propriété 1

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et le logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Propriété 2

- Pour tout réel $b > 0$ et pour tout réel a, $e^a = b \iff a = ln(b)$.
- $ln(1) = 0$ et $ln(e) = 1$.
- Pour tout réel $a > 0$, $e^{ln(a)} = a$
- Pour tout réel a, $ln(e^a) = a$.
- Pour tous réels a et b positifs, $a = b \iff ln(a) = ln(b)$
- Pour tous réels a et b positifs, $a < b \iff ln(a) < ln(b)$.

Méthode 1: Résoudre une équation ou inéquation avec logarithme

Résoudre sur $]0;+\infty[$ les équations ou inéquations suivantes:

$3ln(x)+2=11$	$ln(x)<ln(2)$

Exercices : 32–33 p.244, 34–37 p.245, 40–41 p.245

Méthode 2: Résoudre une équation ou inéquation avec logarithme - Cas général

Résoudre sur les équations ou inéquations suivantes:

$ln(5x+1)=ln(x)$	$ln(4x^2-x)\leqslant ln(3x)$

Exercices : 57–74 p.246

2 Relation fonctionnelle et propriétés algébriques

Théorème 1

Pour tous réels a et b strictement positifs, $ln(a \times b) = ln(a) + ln(b)$.

Exemple 1

- $ln(35) = ln(7 \times 5) = ln(7) + ln(5)$
- $ln(\frac{1}{5}) + ln(10) = ln(\frac{1}{5} \times 10) = ln(2)$

Propriété 3

- Pour tous entier n et a réel strictement positif, $ln(a^n) = n \times ln(a)$.
- Pour tout réel b strictement positif, $ln\left(\frac{1}{b}\right) = -ln(b)$.
- Pour tous réels a et b strictement positifs, $ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln(a) - ln(b)$.
- Pour tous réels a strictement positif, $ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}ln(a)$.

Méthode 3: Résoudre une équation en utilisant les relations fonctionnelles

Résoudre l'équation $ln(x-4) + ln(x-2) = ln(3)$.

Exercices : 43–48 p.245, 95 p.248, 96–111 p.249

Méthode 4: Résoudre une équation avec inconnue en exposant

Résoudre l'équation $5^n \leqslant 10\ 000$.

Exercices : 116-117 p.249

3 Dérivabilité et limites de la fonction ln

3.1 Dérivabilité

Propriété 4

- La fonction logarithme népérien est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x > 0$:

$$ln'(x) = \frac{1}{x}$$

- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que, pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$. Alors la fonction $ln \circ u$ est dérivable sur I et $(ln \circ u)' = \dfrac{u'}{u}$.

Démonstration au programme 1

Exemple 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = ln(x^2 + 5)$, qui est de la forme $ln(u(x))$ avec $u(x) = x^2 + 5$.
On a alors $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 5}$.

Exercices : 27–28 p.244

Méthode 5: Calculer une fonction dérivée avec logarithme

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ln(x^4 - x^2 + 1)$. Calculer $f'(x)$.

Exercices : 75–88 p.247, 89–94 p.248

3.2 Limites

Propriété 5

- $\lim_{x \to 0^+} ln(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} ln(x) = +\infty$

Propriété 6: Croissances comparées

Pour tout entier $n \geqslant 1$:

- $\lim_{x \to 0^+} x^n ln(x) = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{ln(x)^n}{x} = 0$

Démonstration au programme 2: $\lim_{x \to 0^+} xln(x) = 0$

Exercices : 50–56 p.245, 122–128 p.250, 29–139 p.251