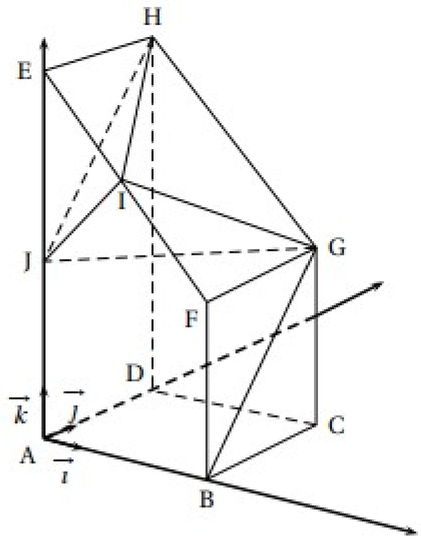
Centres étrangers n°1 – 2023

On considère le prisme droit ABFEDCGH, de base ABFE, trapèze rectangle en A.
On associe à ce prisme le repère orthonormé $\left(A\,;\,\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ tel que :

$$\vec{\imath} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \quad \vec{\jmath} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}, \quad \vec{k} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AE}.$$

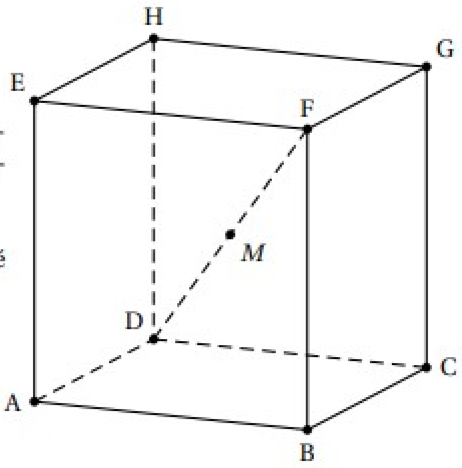
De plus on a $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.
On note I le milieu du segment [EF].
On note J le milieu du segment [AE].



1. Donner les coordonnées des points I et J.
2. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.
   a. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (IGJ).
   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (IGJ).
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d, perpendiculaire au plan (IGJ) et passant par H.
4. On note L le projeté orthogonal du point H sur le plan (IGJ).
   Montrer que les coordonnées de L sont $\left(\frac{8}{3}\,;\,\frac{4}{3}\,;\,\frac{16}{3}\right)$.
5. Calculer la distance du point H au plan (IGJ).
6. Montrer que le triangle IGJ est rectangle en I.
7. En déduire le volume du tétraèdre IGJH.

On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :
$$V = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}.$$

Liban 2017



On considère un cube ABCDEFGH dont la représentation graphique en perspective cavalière est donnée ci-contre.
Les arêtes sont de longueur 1.
L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{D}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{DA}},\,\overrightarrow{\mathrm{DC}},\,\overrightarrow{\mathrm{DH}}\right)$.

Partie A

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ est normal au plan (EBG).
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).
3. En déduire les coordonnées du point I intersection de la droite (DF) et du plan (EBG).
   On démontrerait de la même manière que le point J intersection de la droite (DF) et du plan (AHC) a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.

Partie B

À tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, on associe le point M du segment [DF] tel que $\overrightarrow{\mathrm{D}M} = x\overrightarrow{\mathrm{DF}}$.
On s'intéresse à l'évolution de la mesure θ en radian de l'angle $\widehat{\mathrm{E}M\mathrm{B}}$ lorsque le point M parcourt le segment [DF]. On a $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

1. Que vaut θ si le point M est confondu avec le point D ? avec le point F ?
2. **a.** Justifier que les coordonnées du point M sont $(x\,;\,x\,;\,x)$.
   b. Montrer que $\cos(\theta) = \dfrac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}$. On pourra pour cela s'intéresser au produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{M\mathrm{E}}$ et $\overrightarrow{M\mathrm{B}}$.
3. On a construit ci-dessous le tableau de variations de la fonction

$$f\,:\,x \longmapsto \frac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}.$$

x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
Variations de f	$\frac{1}{2}$ ↘	0 ↘	$-\frac{1}{2}$ ↗	0

Pour quelles positions du point M sur le segment [DF] :

a. le triangle MEB est-il rectangle en M ?

b. l'angle θ est-il maximal ?

France métropolitaine 2016

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ on donne les points :

$$A(1 ; 2 ; 3), B(3 ; 0 ; 1), C(-1 ; 0 ; 1), D(2 ; 1 ; -1), E(-1 ; -2 ; 3) \text{ et } F(-2 ; -3 ; 4).$$

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 : Les trois points A, B, et C sont alignés.

Affirmation 2 : Le vecteur $\vec{n}(0 ; 1 ; -1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Affirmation 3 : La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants et leur point d'intersection est le milieu du segment [BC].

Affirmation 4 : Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

Asie 2014

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples comportant quatre questions indépendantes.
Pour chaque question, une seule des quatre affirmations proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à l'affirmation exacte.
Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point; une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormal, on considère les points $A(1 ; -1 ; -1)$, $B(1; 1; 1)$, $C(0; 3; 1)$ et le plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x + y - z + 5 = 0$.

Question 1

Soit $\mathscr{D}_1$ la droite de vecteur directeur $\vec{u}(2 ; -1 ; 1)$ passant par A.
Une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}_1$ est :

a. $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2+t \\ y &=& -1-t \\ z &=& 1-t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$ **b.** $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -1+2t \\ y &=& 1-t \\ z &=& 1+t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$

c. $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 5+4t \\ y &=& -3-2t \\ z &=& 1+2t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$ **d.** $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 4-2t \\ y &=& -2+t \\ z &=& 3-4t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$

Question 2

Soit $\mathscr{D}_2$ la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+t \\ y &=& -3-t \\ z &=& 2-2t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$.

a. La droite $\mathscr{D}_2$ et le plan $\mathscr{P}$ ne sont pas sécants
b. La droite $\mathscr{D}_2$ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.
c. La droite $\mathscr{D}_2$ et le plan $\mathscr{P}$ se coupent au point $E\left(\frac{1}{3} ; -\frac{7}{3} ; \frac{10}{3}\right)$.
d. La droite $\mathscr{D}_2$ et le plan $\mathscr{P}$ se coupent au point $F\left(\frac{4}{3} ; -\frac{1}{3} ; \frac{22}{3}\right)$.

Question 3

a. L'intersection du plan $\mathscr{P}$ et du plan (ABC) est réduite à un point.
b. Le plan $\mathscr{P}$ et le plan (ABC) sont confondus.
c. Le plan $\mathscr{P}$ coupe le plan (ABC) selon une droite.
d. Le plan $\mathscr{P}$ et le plan (ABC) sont strictement parallèles.

Question 4

Une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie au dixième de degré est égale à :

a. 22,2° **b.** 0,4° **c.** 67,8° **d.** 1,2°

France métropolitaine 2015

Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points A(0 ; −1 ; 5), B(2 ; −1 ; 5), C(11 ; 0 ; 1), D(11 ; 4 ; 4).

Un point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens de A vers B à la vitesse de 1 cm par seconde.
Un point N se déplace sur la droite (CD) dans le sens de C vers D à la vitesse de 1 cm par seconde.
À l'instant $t = 0$ le point M est en A et le point N est en C.
On note M_t et N_t les positions des points M et N au bout de t secondes, t désignant un nombre réel positif.
On admet que M_t et N_t, ont pour coordonnées : $M_t(t\,;\,-1\,;\,5)$ et
$N_t(11\,;\,0,8t\,;\,1+0,6t)$.

Les questions 1 *et* 2 *sont indépendantes.*

1. **a.** La droite (AB) est parallèle à l'un des axes (OI), (OJ) ou (OK). Lequel?
   b. La droite (CD) se trouve dans un plan $\mathscr{P}$ parallèle à l'un des plans (OIJ), (OIK) ou (OJK). Lequel? On donnera une équation de ce plan $\mathscr{P}$.
   c. Vérifier que la droite (AB), orthogonale au plan $\mathscr{P}$, coupe ce plan au point E(11 ; −1 ; 5).
   d. Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes?
2. **a.** Montrer que $M_tN_t^2 = 2t^2 - 25,2t + 138$.
   b. À quel instant t la longueur M_tN_t est-elle minimale?

Correction

Centres étrangers n°1 – 2023

1. Dans le repère $\left(A\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k}\right)$, on a les coordonnées suivantes pour les sommets du prisme droit :

A(0 ; 0 ; 0)	B(4 ; 0 ; 0)	C(4 ; 4 ; 0)	D(0 ; 4 ; 0)
E(0 ; 0 ; 8)	F(4 ; 0 ; 4)	G(4 ; 4 ; 4)	H(0 ; 4 ; 8)

I étant le milieu de [EF], on a $\mathrm{I}\left(\dfrac{x_E + x_F}{2}\,;\,\dfrac{y_E + y_F}{2}\,;\,\dfrac{z_E + z_F}{2}\right)$, soit I(2 ; 0 ; 6).

J étant le milieu de [AE], on a de même : J(0 ; 0 ; 4).

2. **a.** Si le plan est nommé (IGJ), cela signifie que les trois points I, G et J définissent le plan, et donc sont non alignés.

On a : $\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix} x_G - x_I \\ y_G - y_I \\ z_G - z_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et de même : $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Comme le repère est orthonormé, on peut calculer les produits scalaires à l'aide des coordonnées :

- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{IG} = -1 \times 2 + 1 \times 4 + 1 \times (-2) = -2 + 4 - 2 = 0$: $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{IG}$.
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{IJ} = -1 \times (-2) + 1 \times 0 + 1 \times (-2) = 2 + 0 - 2 = 0$: $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{IJ}$.

Ainsi, $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IGJ) : c'est donc un vecteur normal au plan.

b. Une équation cartésienne d'un plan dont $\vec{n}$ est un vecteur normal est de la forme : $-1 \times x + 1 \times y + 1 \times z + d = 0$, soit $-x + y + z + d = 0$, où d est un réel quelconque.

Comme G est un point du plan (IGJ), on en déduit que la constante d dans ce cas doit être telle que :

$$-x_G + y_G + z_G + d = 0 \iff -4 + 4 + 4 + d = 0$$
$$\iff d = -4$$

Une équation de (IGJ) est donc : $-x + y + z - 4 = 0$.

3. Si d est perpendiculaire à (IGJ), alors elle est dirigée par $\vec{n}$, comme elle passe par H, elle admet comme représentation paramétrique : $\begin{cases} x = x_H + t x_{\vec{n}} \\ y = y_H + t y_{\vec{n}} \\ z = z_H + t z_{\vec{n}} \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$, soit ici : $\begin{cases} x = -t \\ y = 4 + t \\ z = 8 + t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

4. Si L est le projeté orthogonal de H sur (IGJ), cela veut dire que la droite (HL) est orthogonale au plan (et passe par H), et donc que la droite (HL) est la droite d. Comme L est un point du plan, c'est donc le seul point de d sur le plan.

Cherchons le paramètre t tel qu'un point M_t de paramètre t dans la représentation de d soit un point de (IGJ) :

$$M_t \in (IGJ) \iff -x_{M_t} + y_{M_t} + z_{M_t} - 4 = 0$$
$$\iff -(-t) + (4 + t) + (8 + t) - 4 = 0$$
$$\iff 3t + 8 = 0$$
$$\iff t = \frac{-8}{3}$$

L est donc $M_{\frac{-8}{3}}$ sur la droite d : il a donc comme coordonnées $\mathrm{L}\left(-\dfrac{-8}{3}\,;\,4 + \dfrac{-8}{3}\,;\,8 + \dfrac{-8}{3}\right)$.

Cela confirme $\mathrm{L}\left(\dfrac{8}{3}\,;\,\dfrac{12-8}{3}\,;\,\dfrac{24-8}{3}\right)$

Autrement dit, le point L est bien le point de coordonnées $\left(\dfrac{8}{3}\,;\,\dfrac{4}{3}\,;\,\dfrac{16}{3}\right)$.

5. Par définition, la distance d'un point à un plan est la distance entre le point et son projeté orthogonal sur le plan, donc on cherche HL. Comme on travaille dans un repère orthonormé :

$$\mathrm{HL} = \sqrt{(x_\mathrm{L} - x_\mathrm{H})^2 + (y_\mathrm{L} - y_\mathrm{H})^2 + (z_\mathrm{L} - z_\mathrm{H})^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{192}{9}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

La distance de H au plan (IGJ) est donc de $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.

6. Calculons : $\overrightarrow{\mathrm{IG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IJ}} = 2 \times (-2) + 4 \times 0 + (-2) \times (-2) = -4 + 0 + 4 = 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IG}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ sont donc orthogonaux (et non nuls) donc les droites qu'ils dirigent, (IG) et (IJ) sont orthogonales (et perpendiculaires, car sécantes en I) : le triangle IGJ est donc rectangle en I.

7. Pour calculer le volume, on choisira IGJ comme base (car le triangle étant rectangle, son aire est simple à calculer) et donc la hauteur correspondante est la distance du quatrième sommet (H) au plan (IGJ) (distance qui a été calculée à la question **5.**).

$\mathrm{IG} = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$\mathrm{IJ} = \sqrt{(-2)^2 + 0 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

L'aire du triangle IGJ est donc : $\mathscr{A}_{\mathrm{IGJ}} = \dfrac{\mathrm{IG} \times \mathrm{IJ}}{2} = \dfrac{2\sqrt{6} \times 2\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{3}$.

Le volume du tétraèdre est donc : $V = \dfrac{1}{3} \times 4\sqrt{3} \times \dfrac{8\sqrt{3}}{3} = \dfrac{32}{3}$.

Le volume du tétraèdre est de $V = \dfrac{32}{3}$ (soit environ 10,7, au dixième près).

Liban 2017

Partie A

D

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (EBG).

Solution : Dans le repère orthonormé $\left(D\,;\,\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}\right)$ on a
D(0; 0; 0) , F(1; 1; 1) , E(1; 0; 1) , B(1; 1; 0) et G(0; 1; 1)
donc $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ et , $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$
on a alors $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{EB} = 0+1-1 = 0$ et $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{EG} = -1+1+0 = 0$
$\overrightarrow{DF}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EBG), il est bien normal à ce plan

2. Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).

Solution : $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (EBG)
donc (EBG) : $x+y+z+d=0$ or $E(1;0;1)\in$ (EBG), d'où $1+1+d=0 \iff d=-2$
finalement une équation de (EBG) est : $x+y+z-2=0$

3. En déduire les coordonnées du point I intersection de la droite (DF) et du plan (EBG).

Solution : Une représentation paramétrique de (DF) est $\begin{cases}x=t\\y=t\\z=t\end{cases}\quad (t\in\mathbb{R})$

Les coordonnées de I doivent donc vérifier le système : $\begin{cases}x=t\\y=t\\z=t\\x+y+z-2=0\end{cases}$ Il

en résulte $3t-2=0 \iff$
$t=\dfrac{2}{3}$.
On a alors $I\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\right)$

On démontrerait de la même manière que le point J intersection de la droite (DF) et du plan (AHC) a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$.

Partie B

À tout réel x de l'intervalle [0; 1], on associe le point M du segment [DF] tel que $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DF}$.
On s'intéresse à l'évolution de la mesure θ en radian de l'angle $\widehat{EMB}$ lorsque le point M parcourt le segment [DF]. On a $0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

1. Que vaut θ si le point M est confondu avec le point D ? avec le point F ?

Solution : Si M est confondu avec D alors $\widehat{EMB} = \widehat{EDB} = \dfrac{\pi}{3}$ car EDB est un triangle équilatéral
Si M est confondu avec F alors $\widehat{EMB} = \widehat{EFB} = \dfrac{\pi}{2}$ car EFB est un triangle rectangle en F

2. **a.** Justifier que les coordonnées du point M sont $(x\,;\,x\,;\,x)$.

> **Solution :** $\overrightarrow{\mathrm{D}M} = x\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{DF}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{\mathrm{D}M}\begin{pmatrix}x\\x\\x\end{pmatrix}$ or $\mathrm{D}(0;0;0)$
>
> On a donc bien $M(x\,;\,x\,;\,x)$

b. Montrer que $\cos(\theta) = \dfrac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}$. On pourra pour cela s'intéresser au produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{M\mathrm{E}}$ et $\overrightarrow{M\mathrm{B}}$.

> **Solution :** $\overrightarrow{M\mathrm{E}}\begin{pmatrix}1-x\\-x\\1-x\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{M\mathrm{B}}\begin{pmatrix}1-x\\1-x\\-x\end{pmatrix}$
>
> $\overrightarrow{M\mathrm{E}}\cdot\overrightarrow{M\mathrm{B}} = (1-x)^2 - x(1-x) - x(1-x) = (1-x)(1-3x) = 3x^2-4x+1$
>
> de plus $\overrightarrow{M\mathrm{E}}\cdot\overrightarrow{M\mathrm{B}} = M\mathrm{E}\times M\mathrm{B}\times\cos\left(\widehat{\mathrm{E}M\mathrm{B}}\right)$
>
> $$= \sqrt{(1-x)^2+(-x)^2+(1-x)^2}\sqrt{(1-x)^2+(1-x)^2+(-x)^2}\times\cos(\theta)$$
> $$= \sqrt{3x^2-4x+2}\sqrt{3x^2-4x+2}\times\cos(\theta)$$
> $$= (3x^2-4x+2)\cos(\theta)$$
>
> On a donc bien $\cos(\theta) = \dfrac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}$

3. On a construit ci-dessous le tableau de variations de la fonction

$$f : x \longmapsto \frac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}.$$

x	0		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		1
Variations de f	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0

Pour quelles positions du point M sur le segment [DF] :

a. le triangle MEB est-il rectangle en M ?

> **Solution :** Le triangle est rectangle en M si $\cos(\theta) = \cos\left(\widehat{\mathrm{E}M\mathrm{B}}\right) = 0$
>
> Il y a donc deux positions du point M :
>
> pour $x = \dfrac{1}{3}$ et pour $x = 1$ c'est à dire pour M en J ou pour M en F

b. l'angle θ est-il maximal ?

> **Solution :**
>
> l'angle θ est maximal quand son cosinus est minimal c'est à dire quand $x = \dfrac{2}{3}$ autrement dit quand M est confondu avec I.

France métropolitaine 2016

Affirmation 1

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$. Puisque $\frac{-2}{2} \neq \frac{-2}{-2}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ n'ont pas leurs coordonnées proportionnelles. Les points A,B et C ne sont donc pas alignés :

L'affirmation 1 est fausse.

Affirmation 2

Calculons $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB}$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC}$:

$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0 \times 2 + 1 \times (-2) + (-1) \times (-2) = 0$

$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0 \times (-2) + 1 \times (-2) + (-1) \times (-2) = 0$

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : on en déduit que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC) :

L'affirmation 2 est vraie.

Affirmation 3

Première méthode :

• Montrons tout d'abord que la droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants :

La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants si et seulement si les vecteurs $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ ne sont pas orthogonaux. Calculons $\vec{n} \cdot \overrightarrow{EF}$:

$$\vec{n}.\overrightarrow{EF} = 0 \times (-1) + 1 \times (-1) + (-1) \times 1 = -2$$

Puisque $\vec{n}.\overrightarrow{EF} \neq 0$, alors

La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants

• Puisque le milieu I du segment [BC] appartient manifestement au plan (ABC), il suffit de vérifier si I appartient à la droite (EF) :

Le milieu I du segment $[BC]$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{x_B + x_C}{2} ; \frac{y_B + y_C}{2} ; \frac{z_B + z_C}{2}\right) = (1,0,1)$$

Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EI}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$

Puisque $\overrightarrow{EI} = -2\overrightarrow{EF}$, les points E, I et F sont alignés :

$$I \in (EF)$$

On a prouvé que la droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants en le milieu du segment [BC] :

L'affirmation 3 est vraie.

Seconde méthode :

• Déterminons une représentation paramétrique de la droite (EF) :

La droite (EF) passe par $E(-1\ ;\ -2\ ;\ 3)$ et est dirigée par $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$. Une représentation paramétrique de la droite (EF) est alors

$$\left\{\begin{array}{l} x = -1 - t \\ y = -2 - t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = \ \ 3 + t \end{array}\right.$$

• Déterminons une équation cartésienne du plan (ABC), noté $\mathscr{P}$: Puisque $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathscr{P}$, ce dernier a une équation de la forme

$$y - z + d = 0 \text{ où } d \in \mathbb{R}$$

Puisque $A(1,2,3)$ est un point de $\mathscr{P}$, alors $y_A - z_A + d = 0$, soit $d = -y_A + z_A = 1$

Une équation du plan $\mathscr{P}$ est $y - z + 1 = 0$

• Déterminons $(EF) \cap \mathscr{P}$:
Soit M un point de la droite (EF). IL existe alors un nombre réel t tel que

$$\left\{\begin{array}{l} x_M = -1 - t \\ y_M = -2 - t \\ z_M = \ \ 3 + t \end{array}\right.$$

M appartient à $\mathscr{P}$ si et seulement si $y_M - z_M + 1 = 0$, i.e :

$$-2 - t - (3 + t) + 1 = 0$$

soit

$$t = -2$$

La droite (EF) et le plan $\mathscr{P}$ sont donc sécants en un point I de coordonnées $(-1-(-2), -2-(-2), 3+(-2)) = (1,0,1)$
Reste à vérifier que I est le milieu de [BC] :
Le milieu du segment $[BC]$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}, \frac{z_B + z_C}{2}\right) = (1,0,1)$$

On en déduit que I est le milieu de [BC]

L'affirmation 3 est vraie.

Affirmation 4

Première méthode :

• Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$. N'ayant pas leurs coordonnées proportionnelles, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires :

Les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles

• Les droites (AB) et (CD) sont donc soit sécantes, soit non coplanaires, selon que le point D appartient ou non au plan (ABC) :

— Une première manière de montrer que D n'appartient pas au plan (ABC) :

D appartient au plan (ABC) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\-1\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ sont orthogonaux.
Puisque $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n} = -1 + 4 = 3 \neq 0$, alors D n'appartient pas au plan (ABC).

— Une seconde manière de montrer que D n'appartient pas au plan (ABC) :

Puisque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, D appartient au plan (ABC) si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\-1\\-4\end{pmatrix}$ s'écrit en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, autrement dit si et seulement si il existe deux nombres réels α et β tels que

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}.$$

L'égalité ci-dessus est équivalente au système :

$$\begin{cases} 1 = 2\alpha - 2\beta \\ -1 = -2\alpha - 2\beta \\ -4 = -2\alpha - 2\beta \end{cases}$$

Les deux dernières équations étant incompatibles, D n'est pas un point du plan (ABC). Les droites (AB) et (CD) ne sont donc pas coplanaires :

L'affirmation 4 est fausse.

Asie 2014

Question 1 - c.

On peut éliminer rapidement les réponses **a.** et **d.** car les vecteurs directeurs des droites proposées ne sont pas colinéaires au vecteur $\vec{u}$.

La représentation paramétrique donnée en **c.** est une droite qui contient le point A pour la valeur $t = -1$.

Question 2 - c.

Le plus efficace pour répondre à cette question est de résoudre le système $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 - t \\ z = 2 - 2t \\ 2x + y - z + 5 = 0 \end{cases}$

qui donne $-\dfrac{2}{3}$ comme valeur à t et qui conduit au point E.

Question 3 - d.

On appelle $\vec{n}\,(2\,;1\,;-1)$ un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

On montre successivement que $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{\text{AB}} = 0$ et $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{\text{AC}} = 0$ ce qui prouve que les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont parallèles. Or $\text{A} \notin \mathscr{P}$ donc les plans sont strictement parallèles.

Question 4 - a.

On utilise l'expression du produit scalaire :

$\overrightarrow{\text{AB}}\,.\,\overrightarrow{\text{AC}} = \text{AB} \times \text{AC} \times \cos\widehat{\text{BAC}} \iff 12 = \sqrt{8} \times \sqrt{21} \times \cos\widehat{\text{BAC}}$

donc $\cos\widehat{\text{BAC}} \approx 0{,}9258$ ce qui correspond à 22,2°.

France métropolitaine 2015

Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points A(0 ; −1 ; 5), B(2 ; −1 ; 5), C(11 ; 0 ; 1), D(11 ; 4 ; 4).

1. **a.** Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = 2\overrightarrow{OI}$.

La droite (AB) est donc parallèle à l'axe (OI).

b. On a $x_C = x_D = 11$ donc la droite (CD) est incluse dans le plan $\mathscr{P}$ d'équation $\boxed{x = 11}$.

c. (AB) est parallèle à (OI) et (OI) est orthogonale au plan $\mathscr{P}$ donc (AB) est orthogonale à $\mathscr{P}$.

Le point d'intersection E a des coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ qui vérifient l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$ et la représentation paramétrique de $\mathscr{P}$.

On doit avoir : $\begin{cases} x = 11 \\ x = t \\ y = -1 \\ z = 5 \end{cases}$ donc $\boxed{\text{E}(11\,;\,-1\,;\,5)}$.

d. Une représentation paramétrique de (AB) est $\begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = 5 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et une représentation paramétrique de (CD) est $\begin{cases} x = 11 \\ y = 0{,}8t' \\ z = 1 + 0{,}6t' \end{cases}$, $t' \in \mathbb{R}$. On résout le système $\begin{cases} t = 11 \\ -1 = 0{,}8t' \\ z = 1 + 0{,}6t' \end{cases}$ qui n'a pas de solutions, car on trouve t' négatif, donc $1 + 0{,}6t' < 5$.

Les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.

2. **a.** $\overrightarrow{M_tN_t}\begin{pmatrix}11 - t\\0{,}8t + 1\\0{,}6t - 4\end{pmatrix}$ donc $M_tN_t^2 = (11 - t)^2 + (0{,}8t + 1)^2 + (0{,}6t - 4)^2$

$= 121 - 22t + t^2 + 0{,}64t^2 + 1{,}6t + 1 + 0{,}36t^2 - 4{,}8t + 16 =$

$\boxed{M_tN_t^2 = 2t^2 - 25{,}2t + 138}$.

b. M_tN_t est positif, donc est minimale quand son carré est minimal.

On considère la fonction $f : t \mapsto 2t^2 - 25{,}2t + 138$; f est une fonction du second degré ; le coefficient de t^2 est 2. Le minimum est atteint pour $t = \dfrac{25{,}2}{4} = 6{,}3$.

La distance est **minimale** pour $\boxed{t = 6{,}3 \text{ s}}$