Chapitre 10 — Vecteurs II

Savoir-faire 1

- ☐ Représenter un vecteur dont on connait les coordonnées.
- ☐ Lire les coordonnées d'un vecteur.
- ☐ Calculer les coordonnées d'une somme de vecteurs, d'un produit d'un vecteur par un nombre réel.
- ☐ Caractériser alignement et parallélisme par la colinéarité de vecteurs.
- ☐ Résoudre des problèmes en utilisant la représentation la plus adaptée des vecteurs.

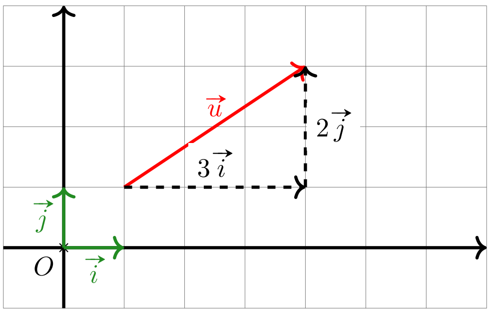
Définition 1

Soit O un point et deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dont les directions sont perpendiculaires et dont les normes sont égales à 1. On dit que $(\vec{i}, \vec{j})$ est une **base orthonormée** du plan et que $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un **repère orthonormé du plan**.

Définition 2

Dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$, soit $\vec{u}$ un vecteur. Il existe un unique couple $(x; y)$ tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
x et y sont les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, notées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Méthode: Lire les coordonnées d'un vecteur et construire un vecteur

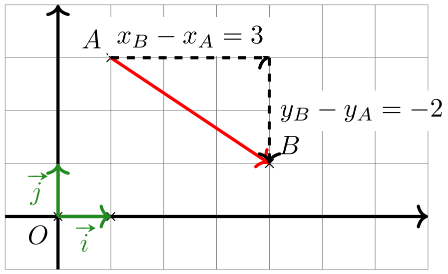


1. Donner les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sur le graphique ci-contre dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
2. Construire un vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Propriété (Admise) 1: Coordonnées d'un vecteur

Dans un repère, soient A et B deux points ayant pour coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$:
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$. On note $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Méthode: Déterminer les coordonnées d'un vecteur



Sur le graphique ci-contre, on a : $A(1;3)$ et $B(4;1)$.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont donc $\begin{pmatrix} 4-1 \\ 1-3 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Propriété (Admise) 2: Caractérisation analytique de l'égalité de deux vecteurs

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées dans un repère du plan.
Autrement dit, si les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont égaux, alors $x = x'$ et $y = y'$.

Exercices : 80–82 p.139, 83–89 p.140

Méthode: Montrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme

Soient $A(2;3)$, $B(5;1)$, $C(3;-2)$ et $D(0;0)$.
Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

- On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{DC}$.

- On vérifie qu'elles sont égales.

Méthode: Calculer les coordonnées d'un point à partir d'une égalité vectorielle

Soient $A(9;2)$, $B(-3;5)$ et $C(1;4)$.
Déterminer les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Définition 3

Dans un repère orthonormé (O, I, J), soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
La norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Définition 4

Dans un repère orthonormé (O, I, J), soient $A\,(x_A; y_A)$ et $B\,(x_B; y_B)$. Alors :

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exemple 1

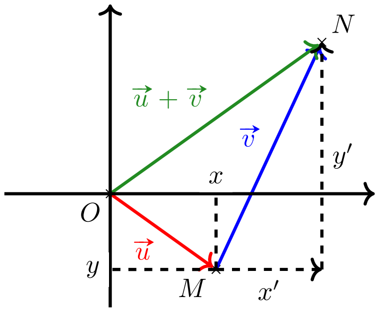
Soient $A(2; 3)$ et $B(5; 1)$. Alors $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(5-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

Propriété 1: Coordonnées de la somme de deux vecteurs

Dans un repère, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$

Démonstration 1

Dans un repère d'origine O, la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe au point O le point $M(x; y)$. La translation de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ associe au point M le point N. Alors, $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{ON}$.
Cherchons les coordonnées de N :
Les coordonnées de $\overrightarrow{MN}$ sont $\begin{pmatrix} x_N - x \\ y_N - y \end{pmatrix}$. Or, $\overrightarrow{MN} = \vec{v}$, c'est-à-dire $x_N - x = x'$ et $y_N - y = y'$.
On en déduit que N a pour coordonnées $(x + x'; y + y')$, d'où $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.



Exemple 2

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 10 \\ -8 \end{pmatrix}$, alors $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$

Méthode: Calculer les coordonnées d'une somme de vecteurs, du produit d'un vecteur par un réel

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calculer les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v} - 2\vec{w}$.

Exercices : 92–99 p.140

Définition 5: Déterminant de deux vecteurs

Soit $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ une base orthonormée et deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

On appelle **déterminant** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ le nombre $det\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = xy' - yx'$, noté également $\begin{vmatrix}x & x'\\y & y'\end{vmatrix}$

Propriété 2

Soit $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ une base orthonormée et deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $det\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = 0$.

Démonstration au programme 1

- Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
  - Si l'un des deux vecteurs est nul (par exemple $\vec{u}$), alors $det\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = 0 \times y' - 0 \times x' = 0$
  - Sinon, il existe un nombre k tel que $\vec{v} = k\vec{x}$, soit $x' = kx$ et $y' = ky$. Alors $det\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = xy' - yx' = x \times ky - y \times kx = kxy - kxy = 0$.
- Réciproquement, supposons que $xy' - yx' = 0$.
  On a alors $xy' = yx'$.
  - Si l'un des vecteurs est nul, alors il est nécessairement colinéaire à l'autre.
  - Si les deux vecteurs sont non nuls, alors $\vec{u}$ a au moins une coordonnée non nulle, par exemple x, donc $x \neq 0$. On pose alors $k = \frac{x'}{x}$, et on obtient que $xy' = yx' \iff y' = \frac{yx'}{x} \iff y' = ky$, car $x \neq 0$.
    Par conséquent, $\vec{v} = k\vec{u}$, et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Méthode: Vérifier la colinéarité de deux vecteurs

Soient dans une base $\vec{u}\begin{pmatrix}12\\-26\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}35\\-72\end{pmatrix}$.

Exercices : 108–113 p.141

Méthode: Montrer que deux droites sont parallèles

Soient $A(5;4)$, $B(2;1)$, $C(4,7)$ et $D(-5;-2)$.
Montrer que (AB) et (CD) sont parallèles.

Exercices : 115–117 p.141, 118–120 p.142