Chapitre 10 — Vecteurs II

Savoir-faire 1

- ☐ Représenter un vecteur dont on connaˆit les coordonnées.
- ☐ Lire les coordonnées d'un vecteur.
- ☐ Calculer les coordonnées d'une somme de vecteurs, d'un produit d'un vecteur par un nombre réel.
- ☐ Caractériser alignement et parallélisme par la colinéarité de vecteurs.
- ☐ Résoudre des problèmes en utilisant la représentation la plus adaptée des vecteurs.

1 Coordonnées d'un vecteur

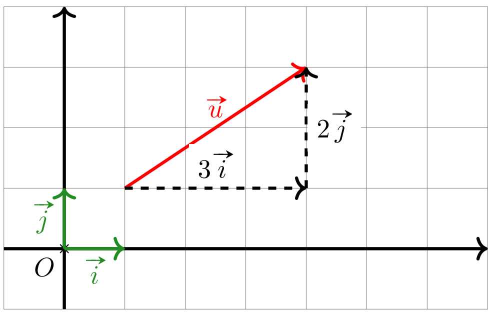
Définition 1

Soit O un point et deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dont les directions sont perpendiculaires et dont les normes sont égales à 1. On dit que $(\vec{i}, \vec{j})$ est une **base orthonormée** du plan et que $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un **repère orthonormé du plan**.

Définition 2

Dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$, soit $\vec{u}$ un vecteur. Il existe un unique couple $(x; y)$ tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
x et y sont les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, notées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Exemple 1



Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, $\vec{u}$ a ainsi pour coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

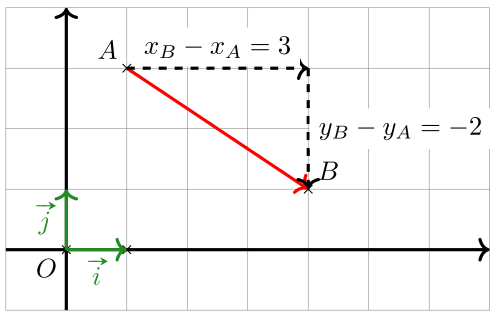
Propriété 1: Coordonnées d'un vecteur

Dans un repère, si deux points A et B ont pour coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Démonstration 1

Soit $M(x; y)$ le point tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. $ABMO$ est un parallélogramme et $[OB]$ et $[AM]$ ont même milieu.
Les coordonnées du milieu de $[OB]$ sont $\left(\frac{x_B}{2}; \frac{y_B}{2}\right)$.
Les coordonnées du milieu de $[AM]$ sont $\left(\frac{x_A+x}{2}; \frac{y_A+y}{2}\right)$.
On en déduit que $\frac{x_B}{2} = \frac{x_A+x}{2}$ et $\frac{y_B}{2} = \frac{y_A+y}{2}$, d'où $x = x_B - x_A$ et $y = y_B - y_A$.

Exemple 2



Sur le graphique ci-dessus, on a : $A(1;3)$ et $B(4;1)$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont donc $\begin{pmatrix} 4-1 \\ 1-3 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Propriété 2: Caractérisation analytique de l'égalité de deux vecteurs

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées dans un repère du plan.
Autrement dit, si les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont égaux, alors $x = x'$ et $y = y'$.

Exercices : 80–82 p.139, 83–89 p.140

Méthode 1: Montrer qu'un quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme

- on calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{DC}$.
- on vérifie qu'elles sont égales.

Définition 3

Dans un repère orthonormé (O, I, J), soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
La norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Définition 4

Dans un repère orthonormé (O, I, J), soient $A\,(x_A; y_A)$ et $B\,(x_B; y_B)$. Alors :

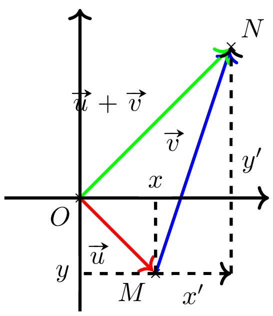
$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Propriété 3: Coordonnées de la somme de deux vecteurs

Dans un repère, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$

Démonstration 2

Dans un repère d'origine O, la translation de vecteur $\vec{u}(x; y)$ associe au point O le point $M(x; y)$. La translation de vecteur $\vec{v}(x'; y')$ associe au point M le point N. Alors, $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{ON}$. Cherchons les coordonnées de N :
Les coordonnées de $\overrightarrow{MN}$ sont $(x_N - x; y_N - y)$. Or, $\overrightarrow{MN} = \vec{v}$, c'est-à-dire $x_N - x = x'$ et $y_N - y = y'$. On en déduit que N a pour coordonnées $(x + x'; y + y')$, d'où $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.



Exemple 3

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}10\\-8\end{pmatrix}$, alors $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}$

Définition 5: Déterminant de deux vecteurs

Soit $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ une base orthonormée et deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

On appelle **déterminant** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ le nombre $det\left(\vec{u},\vec{v}\right)=xy'-yx'$, noté également $\begin{vmatrix}x & x'\\y & y'\end{vmatrix}$

Propriété 4

Soit $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ une base orthonormée et deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $det\left(\vec{u},\vec{v}\right)=0$.

Démonstration au programme 1

- Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
  - Si l'un des deux vecteurs est nul (par exemple $\vec{u}$), alors $det\left(\vec{u},\vec{v}\right)=0\times y'-0\times x'=0$
  - Sinon, il existe un nombre k tel que $\vec{v}=k\vec{x}$, soit $x'=kx$ et $y'=ky$. Alors $det\left(\vec{u},\vec{v}\right)=xy'-yx'=x\times ky-y\times kx=kxy-kxy=0$.
- Réciproquement, supposons que $xy'-yx'=0$.
  On a alors $xy'=yx'$.
  - Si l'un des vecteurs est nul, alors il est nécessairement colinéaire à l'autre.
  - Si les deux vecteurs sont non nuls, alors $\vec{u}$ a au moins une coordonnée non nulle, par exemple x, donc $x\neq 0$. On pose alors $k=\dfrac{x'}{x}$, et on obtient que $xy'=yx' \iff y'=\dfrac{yx'}{x} \iff y'=ky$, car $x\neq 0$.
    Par conséquent, $\vec{v}=k\vec{u}$, et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exemple 4

Soient dans une base $\vec{u}\begin{pmatrix}12\\-26\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}35\\-72\end{pmatrix}$.

Alors $\begin{vmatrix}12 & 35\\-26 & -72\end{vmatrix}=12\times(-72)-(-26)\times 35=46\neq 0$, donc les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

Exercices : 108–110 p.141, 112–117 p.141, 118–120 p.142