Chapitre 5 — Calcul matriciel

1 Introduction

Bien que le calcul matriciel proprement dit n'apparaisse qu'au début du XIXe siècle, les matrices, en tant que tableaux de nombres, ont une longue histoire d'applications à la résolution d'équations linéaires. Le texte chinois Les Neuf Chapitres sur l'art mathématique, écrit vers le IIe siècle av. J.-C., est le premier exemple connu de l'utilisation de tableaux pour résoudre des systèmes d'équations, introduisant même le concept de déterminant.

En 1545, Jérôme Cardan fait connaître cette méthode en Europe en publiant son Ars Magna. Le mathématicien japonais Seki Kwa utilise indépendamment les mêmes techniques pour résoudre des systèmes d'équations en 1683. Aux Pays-Bas, Johan de Witt représente des transformations géométriques à l'aide de tableaux dans son livre de 1659, Elementa curvarum linearum. Entre 1700 et 1710, Leibniz montre comment utiliser les tableaux pour noter des données ou des solutions, et expérimente plus de 50 systèmes de tableaux à cet effet. En 1750, Gabriel Cramer publie la règle qui porte son nom.

Exemple 1

Afin de fabriquer des vêtements, on utilise du tissu, du fil et des boutons.

Les tableaux ci-dessous récapitulent les quantités nécessaires pour coudre une robe, une chemise ou un jean, ainsi que les prix par fourniture.

	Tissu (en m)	Longueur de fil (en m)	Nombre de boutons
Robe	2,7	1,50	3
Chemise	1,70	0,70	5
Jean	1,50	0,50	1

	Prix (en €)
Tissu au mètre	9,95
Longueur de fil (au m)	1,99
Bouton (à l'unité)	0,50

On peut résumer chacun des tableaux en ne conservant que les nombres. On obtient alors différents tableaux de nombres appelés matrices, notées ici M et P.

On a alors: $M = \begin{pmatrix} 2,70 & 1,50 & 3 \\ 1,70 & 0,70 & 5 \\ 1,50 & 0,50 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 9,95 \\ 1,99 \\ 0,50 \end{pmatrix}$

- M est une matrice possédant autant de lignes que de colonnes. On dit que M est une matrice carrée. Elle est ici de taille 3.
- P est une matrice formée d'une unique colonne. On dit que P est une matrice colonne.

1. (a) Calculer le prix de fabrication d'une robe. Faire de même pour une chemise et un jean.

   (b) Résumer les résultats obtenus en une matrice colonne T, contenant une ligne pour chaque article en conservant l'ordre robe, chemise, puis jean.
   On admet que l'on peut écrire $M \times P = T$

2. On souhaite fabriquer dix robes, dix chemises et dix jeans.

   (a) Écrire la matrice N contenant trois lignes et trois colonnes pour résumer les quantités nécessaires à cette nouvelle fabrication.

   (b) Quelle opération peut-on conjecturer entre M et N ?

Dans tout le chapitre n et m désigneront des entiers naturels non nuls

2 Définitions

Définition 1

Une **matrice** de **taille** $n \times p$ (ou de format (n, p) est un "**tableau**" de nombres ayant n lignes et p colonnes. Ce tableau est délimité par des parenthèses (ou des crochets).

Définition 2

Une matrice A à n lignes et p colonnes est un tableau comportant n lignes et p colonnes.
On note $A = (a_{ij})$ où a_{ij} est le **coefficient** de la i-ème ligne et de la j-ème colonne.

$$\begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n}
\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow i\text{-ième ligne} \\ \\ \\ \end{array} \\
\uparrow & \\
j\text{-ième colonne} &
\end{array}$$

Exemple 2

- $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & \frac{1}{3} \\ \pi & \sqrt{7} \end{pmatrix}$ est de taille .... et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est de taille ....
- Si a_{ij} sont les coefficients de A, on a par exemple, $a_{12} = \dots\dots$, $a_{21} = \dots\dots$, $a_{31} = \dots\dots$ et a_{13} n'existe pas.

Définition 3

- Si $n = 1$, on dit que M est une **matrice ligne** formée d'une seule ligne
- Si $p = 1$, on dit que M est une **matrice colonne** formée d'une seule colonne
- Si $n = p$, on dit que M est une **matrice carrée d'ordre** n
- **Une matrice diagonale** est une matrice carrée d'ordre n dont tous les termes sont nuls sauf ceux qui sont dans la diagonale.
- La **matrice identité** d'ordre n est une matrice carrée diagonale dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1. On la note I_n
- La **matrice nulle** de taille $n \times p$ notée $O_{n,p}$ est la matrice de taille $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls.

Exemple 3

- $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice .... et $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une matrice ....
- $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice .... et $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice ....
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice .... et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice ....

Définition 4

Deux matrices A et B de taille $n \times p$ sont **égales** lorsque pour tout $i \in [\![1;n]\!]$ et pour tout $j \in [\![1;p]\!]$, on a $a_{ij} = b_{ij}$

$$A = B \iff \forall i \in [\![1;n]\!], \forall j \in [\![1;p]\!],\ a_{ij} = b_{ij}$$

Définition 5

Une matrice carrée d'ordre n est **symétrique** lorsque pour tout $i \in [\![1;n]\!]$ et pour tout $j \in [\![1;p]\!]$, on a ....

Exemple 4

La matrice $\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$ est symétrique.

3 Opérations sur les matrices

3.1 Somme et différence

Définition 6

On considère deux matrices A et B de même taille.

- On définit la **somme** de A et B, notée $C = A + B$ comme la matrice obtenue en additionnant terme à terme les coefficients des matrices A et B (i.e. les coefficients ayant mêmes indices)

  On a alors
  $$\forall (i;j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!],\ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

- On définit de la même manière la **différence** de matrices.

Propriété 1

Soient A, B et C trois matrices de mêmes tailles.

- **Commutativité** de la somme de matrice: $A + B = B + A$
- **Associativité** de la somme de matrice: $A + (B + C) = (A + B) + C$
- **Élément neutre** pour l'addition et la soustraction de matrices: $A_{n,m} + O_{n,m} = A_{n,m}$

3.2 Produit d'une matrice par un réel

Définition 7

Soit k un réel et A une matrice. On définit la matrice kA comme la matrice obtenue en multipliant chaque coefficient de A par k. Elle de même taille que A.

Exemple 5

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $k = 3$ alors $kA = 3A = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$

Définition 8

Soit A une matrice, on appelle **opposée** de A la matrice $(-1)A$ notée $-A$. Elle est de même taille que A et formée des coefficients opposés de ceux de A

Propriété 2

Soient A et B des matrices de même taille $n \times p$ et k et k' deux réels.

$$k(A + B) = kA + kB \qquad (k + k')A = kA + k'A \qquad k(k'A) = (kk')A \qquad 1 \times A = A$$

Exercices : 20-21-43

Exercice 1: On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. Calculer $C = 3A$ et $D = 2B$
2. Calculer $E = C - D$
3. Calculer $F = 6A + 4B$
4. Déterminer les matrices X de taille 3×2 telles que $2X + C = A$

3.3 Produit de deux matrices

3.3.1 Produit d'une matrice par une matrice colonne

Définition 9

Soient A une matrice de taille $n \times p$ et B une matrice colonne de p lignes. La matrice AB est définie par:

$$A \times B = (c_{i1}) \quad \text{où} \quad c_{i1} = a_{i1}b_{1i} + a_{i2}b_{2i} + \ldots + a_{ip}b_{pi} = \sum_{k=1}^{p} a_{ip}b_{pi}$$

Exemple 6

Effectuer le produit matriciel entre $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

3.3.2 Produit de deux matrices

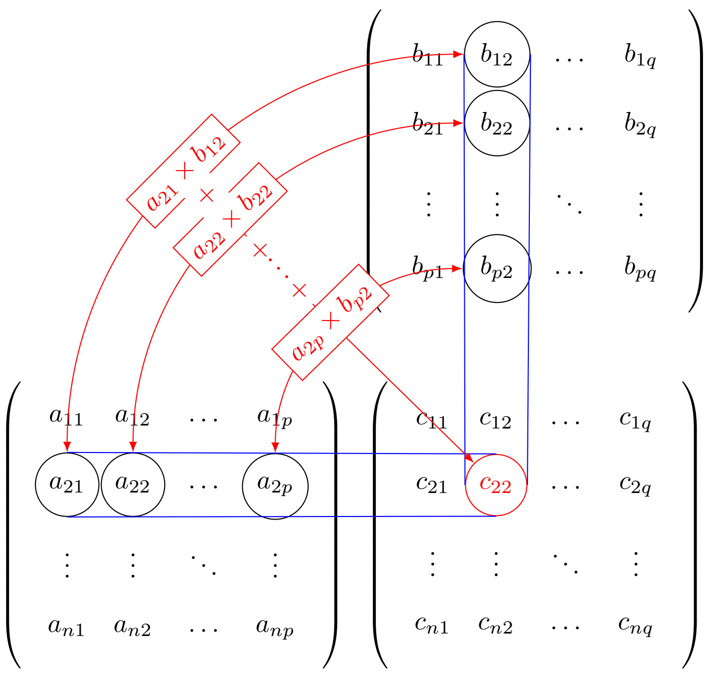
Définition 10

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{jk})$ deux matrices telles que le nombre de colonnes de A soit égale au nombre de lignes de B la matrice AB est la matrice définie par:

$$A \times B = (c_{ij}) \quad \text{où} \quad c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \times b_{kj}$$

Exemple 7

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} =$$



Remarque :
- La matrice AB aura pour dimension [nbre de lignes de A] $\times$ [nbre de colonnes de B]
- En règle générale, **le produit matriciel n'est pas commutatif**: $AB \neq BA$

3.3.3 Propriétés

Propriété 3

Soient A, B et C trois matrices de dimensions compatibles et un réel k.

- **Associativité** du produit: $A(BC) = (AB)C$
- **Distributivité** du produit sur la somme: $A(B+C) = AB + AC$ et $(A+B)C = AC + BC$
- $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
- **Élément neutre** de la multiplication: $A \times I_n = I_n \times A = A$
- **Mise à la puissance**. On définit le carré de A noté A^2 par $A^2 = A \times A$. De manière générale, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit la puissance k-ième de A notée A^k comme le produit de A par elle-même k fois:

$$A^k = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{k\ fois}$$

Remarque : Si A est une matrice carrée non nulle d'ordre n, on convient que $A^0 = I_n$. Alors on peut définir la puissance k par récurrence: $A^0 = I_n$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^{k+1} = A^k \times A$.

Propriété 4

Soit A une matrice diagonale d'ordre n dont les coefficients diagonaux sont les a_{ii}, avec $i \in [\![1;n]\!]$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, A^k est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les a_{ii}^k, avec $i \in [\![1;n]\!]$.

Exercices : 22-23-24-25-44

4 Matrice inverse d'une matrice carrée

Théorème 1

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On dit que A est **inversible** s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que $AB = I_n$ et $BA = I_n$. Si tel est le cas alors la matrice B est unique et cette matrice est appelée **inverse** de la matrice A. On la note A^{-1}.

Remarque :
- Par définition, une matrice et son inverse commutent.
- Si A est inversible alors A^{-1} également et $(A^{-1})^{-1} = A$.
- La matrice I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$
- Toutes les matrices ne sont pas inversibles, en particulier O_n.

Exercice 2: Montrer que $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ -0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ sont inverses l'une de l'autre.

Définition 11

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2.
On appelle **déterminant** de A le réel $ad - bc$ et on le note $det\,A$.

Propriété 5

A est inversible si et seulement si $det\ A \neq 0$ et alors dans ce cas:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Exercice 3: Déterminer si possible les inverses de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercices : 26-27-66-93

5 Écriture matricielle d'un système d'équation

Exemple 8

On considère le système de deux équations à deux inconnues:

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} 3x + 4y & = & 1 \\ 5x + 7y & = & -2 \end{array} \right.$$

1. Déterminer les trois matrices A, X et B telles que le système (S) soit équivalent à $AX = B$.
2. La matrice A est-elle inversible?
3. En déduire que le système (S) admet une unique solution que l'on déterminera.

Définition 12

On considère un système linéaire de n équations à n inconnues.

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \right.$$

On peut associer à (S) les trois matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

appelées respectivement **matrice des coefficients**, **matrice des inconnues** et **matrice des seconds membres** telles que le système (S) soit équivalent à l'égalité matricielle:

$$AX = B$$

Cette égalité est appelée **écriture matricielle** de (S).

Propriété 6

Si (S) est un système linéaire dont l'écriture matricielle est $AX = B$ et si A est une matrice carrée inversible alors (S) admet une unique solution donnée par la matrice

$$X = A^{-1}B$$

Démonstration 1

Soit (S) un système linéaire d'écriture matricielle $AX = B$ et A inversible.

$$AX = B \iff A^{-1}AX = A^{-1}B \iff I_nX = A^{-1}B \iff X = A^{-1}B$$

Exercice 4: Résoudre le système (S) de 3 équations à 3 inconnues. On pourra s'aider de la calculatrice pour calculer l'inverse d'une matrice.

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} x - y + 2z & = & 5 \\ 2x + y - z & = & 1 \\ -x + 2y + z & = & 6 \end{array} \right.$$

Exercices : 28-29-51-53-54-88-89-90