Chapitre 10 — Primitives et équations différentielles

Activité 1

La loi de refroidissement d'Isaac Newton (anglais 1642-1727) stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnelle à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.
On rappelle que dans le cas discret, entre deux minutes consécutives n et $n+1$, la température T_n , exprimée en degré Celsius, d'un café vérifiait :

$$\frac{Tn+1-T_n}{n+1-n} = T_{n+1} - T_n = -0,2(T_n - 18)$$

Dans le cas continu (le temps x est exprimé en minute et décrit cette fois une variable continue), entre deux temps x et x', tels que $x < x'$, on a :

$$\frac{T(x') - T(x)}{x' - x} = -0,2(T(x) - 18)$$

Généralement, la variation $T(x') - T(x)$ est notée $\Delta T(x)$.
Pour une variation infinitésimale (très petite, $t' - t$ proche de 0) du temps, avec la fonction T dérivable sur l'intervalle d'étude, ici $[0; +\infty[$, on a :

$$T'(x) = -0,2(T(x) - 18) \iff T'(x) = -0,2T(x) + 3,6$$

Cette équation est appelée équation différentielle d'ordre 1.
Soit la fonction f définie par $f(x) = 18 + 62e^{-0,2x}$.

1. On rappelle que la température du café au début de l'expérience est de 80 degré Celsius. Vérifier que la fonction f vérifie la condition initiale $f(0) = 80$.
2. Montrer que la fonction est solution du problème, c'est-à-dire qu'elle vérifie l'équation différentielle.

Activité 2

1. Déterminer une solution de l'équation différentielle $y' = 2$.
2. Déterminer une solution de l'équation différentielle $y' = y$.
3. Déterminer une solution de l'équation différentielle $y' = 3x^2$.
4. Déterminer trois solutions de l'équation différentielle $y' = 2x$.

1 Équation différentielle

Définition

Une équation différentielle est une équation dont les inconnues sont des fonctions, ici d'une variable x ou t.
En particulier, une équation dans laquelle intervient une fonction dérivable f, sa dérivée f' et la variable x s'appelle une **équation différentielle du** 1^{er} **ordre**.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit qu'une fonction F est solution de l'équation différentielle $y' = f$ sur I lorsque F est dérivable sur I et $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

Exemple

$y' = 2x$, pour x élement de $\mathbb{R}$, est une équation différentielle.
La fonction $f(x) = x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x$, donc f est **une** solution de cette équation différentielle.

Méthode: Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle

Montrer que la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 + 4x - 8$ est solution de l'équation différentielle

$$y' - y = -3x^2 + 2x - 4$$

Exercices : 48–52 p.306, 140 p.313

2 Primitive d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Une fonction F est une **primitive** de f sur I si pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6x$. La fonction F définie par $F(x) = 3x^2 + 4$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ car $F'(x) = 3 \times 2x = 6x = f(x)$.

Méthode: Vérifier qu'une fonction est une primitive d'une autre

Montrer que la fonction F définie par $F(x) = x^2e^x$ est une primitive de la fonction f définie par $f(x) = (x^2 + 2x)e^x$.

Propriété (Admise)

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I

Propriété

Soit f une fonction continue sur I.
Deux primitives de f sur I diffèrent d'une constante.
Autrement dit, si F est une primitive de F sur I, les autres primitives de f sont de la forme $F + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Démonstration au programme

Soient F et G deux primitives de la fonction f sur I.
On a alors $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$ et $G'(x) = f(x)$. On en déduit que $F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$, soit $(F - G)'(x) = 0$.
La fonction dérivée de $F - G$ est nulle sur I, donc $F - G$ est constante sur I.
En notant k cette constante, on a $\forall x \in I, F(x) - G(x) = k$ soit $F(x) = G(x) + k$. Les deux primitives diffèrent d'une constante.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6x$.
Les primitives de f sont de la forme par $F_k(x) = 3x^2 + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Quels que soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Exercices : 54–59 p.306

3 Primitives des fonctions usuelles

Propriété 1

La fonction $f : x \longmapsto ...$	a une primitive $F : x \longmapsto ...$	sur l'intervalle $I = ...$
k	kx	$\mathbb{R}$
x^n, avec $n \neq 0$ et $n \neq 1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$, $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$ si $n \leqslant -2$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$ln(x)$	$]0; +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

Exercices : 69–71 p.307, 73-80 p.307

Propriété 2

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, k un réel quelconque, n un entier différent de 0 et -1, et u une fonction dérivable sur I.

- Une primitive de kf est kF, avec F une primitive de f
- Une primitive de $f+g$ est $F+G$, avec F une primitive de f et G une primitive de g
- Une primitive de $u'e^u$ est e^u
- Une primitive de $u'u^n$ est $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$, avec u ne s'annulant pas dans le cas ou n est négatif
- Une primitive de $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ est $2\sqrt{u}$, si u est strictement positive sur I.
- Une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est $ln(u)$, si u est strictement positive sur I.

Exercices : 81–86 p.307, 90–97 p.308, 102–103 p.308, 133–136 p.312, 138–139 p.313

4 Equations différentielles $y' = ay$ et $y' = ay + b$

Théorème 1

Soit a un nombre réel.
Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$, où C est une constante réelle.
Si, de plus, pour deux réels x_0 et k donnés, $y(x_0) = k$, alors la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto ke^{a(x-x_0)}$ est l'unique fonction solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

Démonstration au programme 1

Soit C un réel. Les fonctions définies par $f(x) = Ce^{ax}$ vérifient bien l'équation différentielle: en effet, $f'(x) = C \times ae^{ax} = a \times Ce^{ax} = af(x)$.
Réciproquement, soit f une solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
On pose $g(x) = e^{-ax}f(x)$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et: $g'(x) = (e^{-ax})'f(x) + e^{-ax}f'(x) = -ae^{-ax}f(x) + e^{-ax}f'(x) = e^{-ax}(-af(x) + f'(x)) = 0$ car f est solution de $y' = ay$.
On en déduit donc que $g'(x) = 0$ et par conséquent que la fonction g est constante, soit $e^{-ax}f(x) = C$.
On en conclut que pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{C}{e^{-ax}} = Ce^{ax}$. ■

Exemple 1
Les solutions de l'équation différentielle $y' = 7y$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{7x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercices : 37–43 p.305, 106–109 p.308, 110–114 p.309

Théorème 2

Soient a et b deux réels non nuls.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Remarque : La fonction $x \mapsto -\dfrac{b}{a}$ s'appelle la solution particulière constante de l'équation différentielle $y' = ay + b$.

Exemple 2
On considère l'équation différentielle $(E)y' = 5y - 3$. On a alors $a = 5$ et $b = -3$.
Les solutions de l'équation (E) sont donc les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{5x} + \dfrac{3}{5}$.

Théorème 3

Soient x_0 et k deux réels fixés.
Il existe une unique solution de l'équation différentielle $(E)y' = ay + b$ vérifiant la condition initiale $y(x_0) = k$.

Exercices : 45–46 p.305, 115–118 p.309, 119–123 p.310

Théorème 4: (Admise)

Soit a un réel et f une fonction définie sur un intervalle I.
Soient $(E) : y' = ay + f$ et g une solution particulière de l'équation différentielle (E) sur I.
Alors, les solutions de (E) sur I sont les fonctions de la forme $f_k : x \longmapsto ke^{ax} + g(x)$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Exercices : 124–129 p.311, 131 p.311

Exercices : 141–149 p.313, 163 p.317