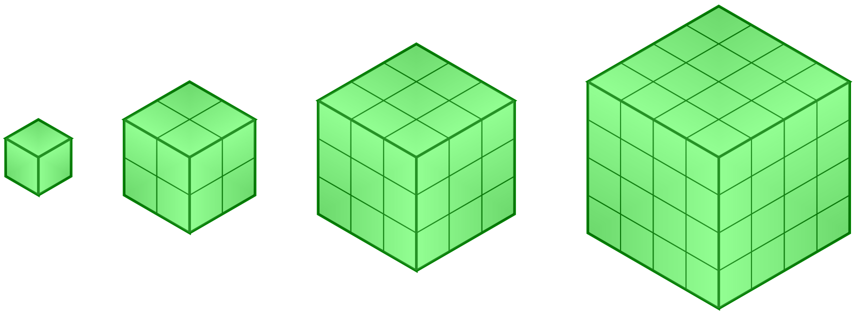
Chapitre 6 — Suites I

Activités

Activité 1

À chaque étape, on construit un cube formé de petits cubes.



Étape 1 **Étape 2** **Étape 3** **Étape 4**

1. (a) Combien de petits cubes sont utilisés pour les différentes étapes ?

   (b) Combien de petits cubes sont utilisés pour l'étape 10 ? Pour l'étape 25 ?

   (c) On note c_1 le nombre de petits cubes à l'étape 1, c_2 le nombre de petits cubes à l'étape 2, etc. Ecrire avec cette notation les résultats des précédentes questions.

2. On considère désormais que le petit cube unique est l'étape 0.

   (a) Combien de cubes sont utilisés pour l'étape 4 ?

   (b) On note a_0 le nombres de cubes à l'étape 0, etc. Donner les valeurs de a_4, a_{10}, et a_{25}.

3. (Pour les plus rapides***) : A l'étape 10, déterminer le nombre de segments unitaires visibles sur le cube.

Activité 2

On considère le tableau suivant :

	A	B	C	D	E	F	G
1	0	0	1	0	1	0	1
2	1	2	2	1	3	1	1
3	2	4	4	4	7	3	2
4	3	6	8	9	15	6	3
5	4	8	16	16	31	10	5
6	5				63	15	8
7	6						
8	7						

1. Complétez les colonnes de la manière qui vous semble la plus logique.
2. Imaginons que le tableau s'étende vers le bas, quels nombres y aura-t-il dans les case $B50$, $C15$ et $D25$?
3. En utilisant un tableur, quelles formules doit-on écrire (en B6, C6, D6, E7, F7, G7) si on désire étendre vers le bas le tableau ?

1 Notion de suite

1.1 Définition

Définition 1

Une suite u de nombre réels est une fonction définie dans l'ensemble des entiers naturels :

$$u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) \end{array} \right.$$

Le terme $u(n)$ c'est-à-dire l'image par u de n, est le plus souvent noté u_n.

Exemple 1

La liste des carrés des nombres entiers est une suite : ses premiers termes sont 1, 4, 9, 16, ...
On peut noter u_0 le premier terme, u_1 le deuxième, etc.
On a ainsi $u_0 = \dots$, $u_1 = \dots$, $u_2 = \dots$, et plus généralement $u_n = \dots$.

Vocabulaire : La suite u_0, u_1, etc. est notée (u_n). On dit qu'elle est définie sur $\mathbb{N}$.
u_n est le terme général ou terme d'indice n de la suite (u_n).

1.2 Mode de génération d'une suite

1.2.1 Suite définie de façon explicite

Exemple 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = -n^2 + n - 2$. Elle est alors définie par l'expression du terme général en fonction de n.
Dans ce cas, on sait calculer directement n'importe quel terme de la suite :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n										

Remarque : Le terme général est alors de la forme $u_n = f(n)$.
On peut donc utiliser le tableau de valeurs de la calculatrice pour calculer les termes de la suite.

1.2.2 Suite définie par récurrence

Exemple 3

On peut également construire des suites à l'aide d'un procédé.
On définit par exemple la suite (v_n) de premier terme $v_0 = 5$ et dont le terme suivant est obtenu en multipliant par 2 le terme précédent est en ajoutant 3.

Entrée → Multiplier par 2 → Ajouter 3 → Sortie

On a alors $v_0 = 5$, $v_1 = 2 \times v_0 + 3 = 13$, $v_2 = 2 \times v_1 + 3 = 29$, et plus généralement $v_{n+1} = 2v_n + 3$.

Définition 2

On définit une suite par récurrence en donnant deux informations :

- son premier terme
- une relation qui permet de calculer, à partir de chaque terme, le terme suivant, c'est-à-dire une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Cette relation est appelée relation de récurrence.

Exemple 4

Dans l'exemple précédent, on note alors la suite (v_n) de la façon suivante :

$$\begin{cases} v_0 & = 5 \\ v_{n+1} & = 2v_n + 3 \end{cases}$$

1.2.3 Suite définie par un algorithme

On peut définir une suite par son premier terme et des instructions dans une boucle « Pour » qui permet de calculer les termes suivants.

Exemple 5

Pseudo-Code

```
U ← 4
Pour i variant de 1 a n Faire
  U ← 2×U+1
FinPour
```

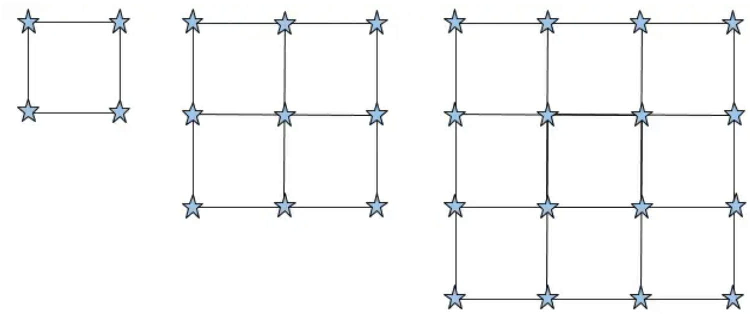
U représente le terme initial de la suite u_0, puis on calcule $u_1 = 2u_0 + 1$, et ainsi de suite.
Après les N étapes, U correspond au terme u_n.

1.2.4 Suite définie par des motifs géométriques

La suite (u_n) peut être définie comme une quantité géométrique dans une figure ou un motif particulier se répète.

Exemple 6

A l'aide des motifs suivants :



On définit une suite (u_n) qui définit le nombre de segments contenus dans le motif à l'étape n.
Ainsi, $u_0 = 4$, $u_1 = 12$, $u_2 = 24$, avec plus généralement $u_n =$

Méthode 1: Calculer les termes d'une suite définie par récurrence à l'aide de la calculatrice

	Numworks
	TI-83
	Casio

Exercices : 13–20 p.84, 40–49 p.86, 50–51 p.87, 55–58 p.87, 60–61 p.87

2 Sens de variation d'une suite

Définition 3

Une suite (u_n) est dite :

- strictement croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} > u_n$.
- strictement décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} < u_n$
- constante si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n$
- monotone si elle est soit croissante, soit décroissante, soit constante.

Exemple 7

Dans l'exemple précédent, la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{n}$ est strictement croissante.
En effet, pour tout entier naturel n, on a : $n+1 > n$ et puisque la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, on en déduit que $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$, soit $u_{n+1} > u_n$.

Méthode 2: Étude du sens de variation d'une suite

Pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n), on étudie **le signe de** $u_{n+1} - u_n$.

Exemple : Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{2n-4}{n+1}$. On a alors :

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n =$

Méthode 3: Étude du sens de variation d'une suite - cas des suites positives

Pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n) pour laquelle $u_n > 0$ pour tout entier n, on peut calculer **le rapport** $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

Exemple : Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{3^{4n}}{4^{3n}}$. Pour tout entier n, on a bien $u_n > 0$.
On a alors :

$\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} =$

$\rightarrow$ ***Exercice d'application 1:*** *Etudier les variations des suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par :*

1. *Pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3n-2}{2n+4}$.*
2. *Pour tout entier naturel n, $v_n = 0,5^n$.*
3. *Pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = n + w_n$ avec $w_0 = -2$.*

3 Représentation graphique

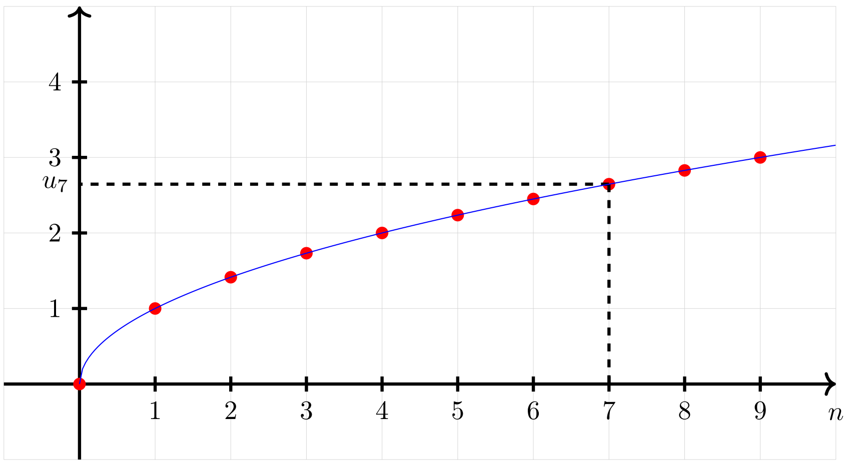
3.1 Suite explicite

Définition 4

Dans un repère du plan, la représentation graphique d'une suite (u_n) est l'ensemble des points de coordonnées $(n; u_n)$, où n décrit les entiers naturels.

Exemple 8

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \sqrt{n}$, définie explicitement. Il suffit de connaître la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ pour obtenir celle de la suite.



Remarque : La représentation graphique d'une suite est un nuage de points : on ne relie pas les points.

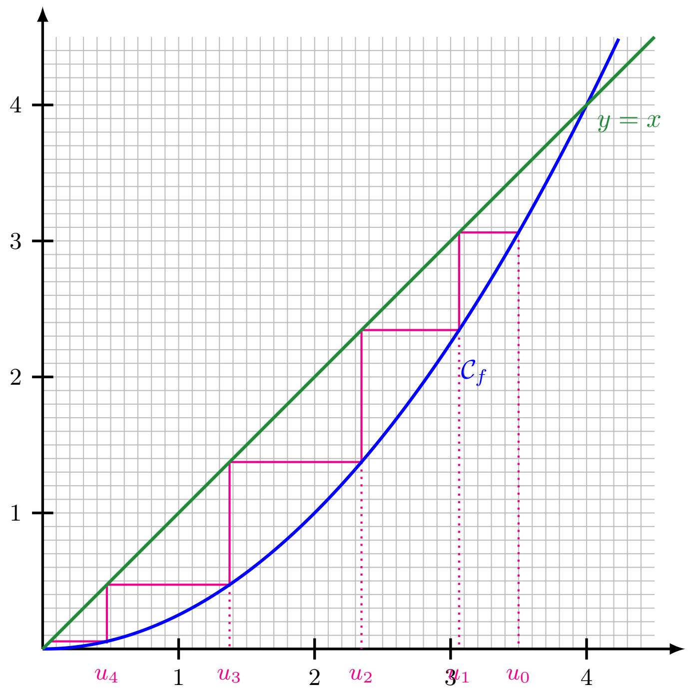
3.2 Suite définie par récurrence

Dans le cas d'une suite définie par récurrence, on ne peut pas tracer directement la représentation graphique de la suite. On peut cependant déterminer les premiers termes de la suite.

Pour cela, on trace la représentation graphique de la fonction définie par la relation de récurrence, puis on trace la droite d'équation $y = x$, afin de pouvoir reporter sur l'axe des abscisses les valeurs des premiers termes de la suite.

Par exemple, soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= \dfrac{1}{4}u_n^2 \end{cases}$.

Après avoir tracé la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{4}x^2$, on peut reporter les premiers termes de la suite.



Pour le tracer à la calculatrice :

Numworks

TI-83

Casio

4 Notion de limite d'une suite

S'intéresser à la limite d'une suite (u_n), c'est étudier le comportement des termes u_n quand on donne à n des valeurs aussi grandes que l'on veut, ce qui se dit aussi « quand n tend vers l'infini ».

4.1 Limite finie

On reprend l'exemple précédent de la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= \frac{1}{4}u_n^2 \end{cases}$.

Graphiquement, on a pu observer que les termes de la suite semblent se rapprocher de 0.
On réalise le tableau suivant :

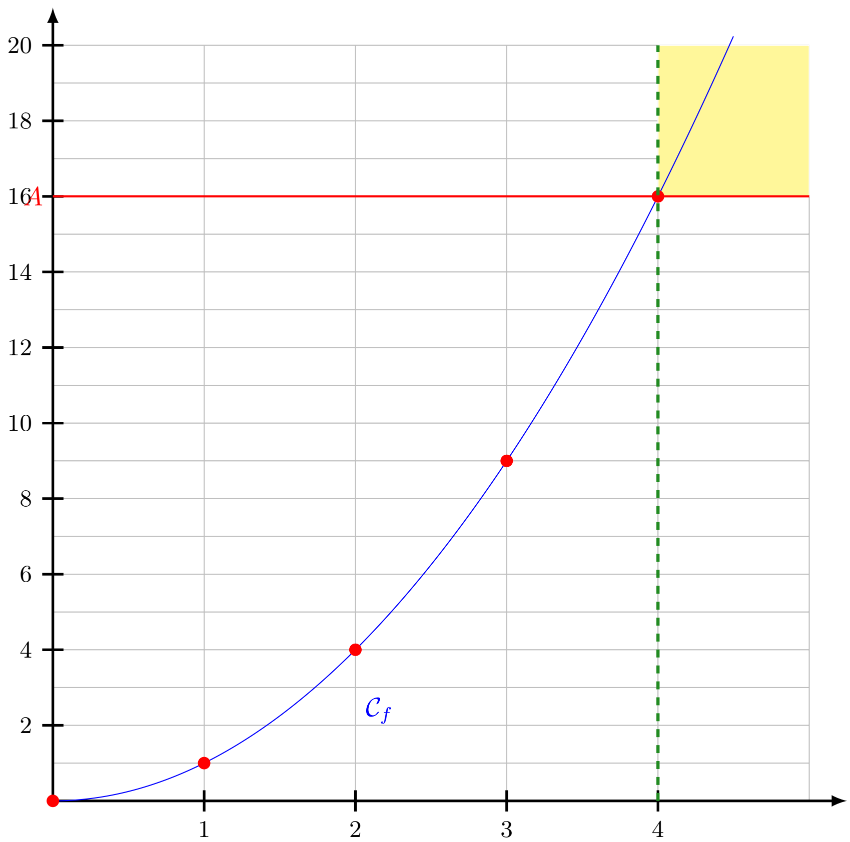
n	0	1	2	3	4	9
u_n	2	0,5	0,125	0,03125	0,0078125	0,00000762939

On peut démontrer que pour tout réel ε positif, il existe un rang à partir duquel l'écart entre u_n et 0 est inférieur à a, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$, on a $|u_n - 0| < \varepsilon$.
On dit alors que :

- la suite (u_n) tend vers 0 quand n tend vers l'infini, et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
- la suite (u_n) est convergente.

4.2 Limite infinie

On prend l'exemple de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2$.



On peut remarquer à l'aide de la courbe représentative ou de la calculatrice que les termes de la suite augmentent très rapidement.
On peut démontrer que pour tout réel A positif, il existe un rang à partir duquel u_n est supérieur à A, c'est-à-dire que pour tout $A > 0$, il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$, on a $u_n > A$.
On dit alors que :

- la suite (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini, et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- la suite (u_n) est divergente.

Exercices : 63–73 p.88