Devoir surveillé N° 4

Nom:	Prénom:

Exercice 1 ▶ /8 points

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = (2-x)e^x + 1$.

1. *Donner la valeur exacte de $g(0)$ et $g(1)$.*
   On a $g(0) = (2-0)e^0 + 1 = 2 + 1 = 3$ et $g(1) = (2-1)e^1 + 1 = 1 + e$.
2. *Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.*
   On a $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 - x = -\infty$ par somme donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (2-x)e^x = -\infty$ par produit puis :
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$
3. (a) *Calculer $g'(x)$ pour tout x dans $[0;+\infty[$.*
   Pour tout $x \in [0;+\infty[$:
$$g'(x) = -1 \times e^x + (2-x)e^x = (1-x)e^x$$
   (b) *En déduire le tableau de variations de la fonction g .*
   On sait d'après la question précédente que pour tout $x \in [0;+\infty[g'(x)$ est du signe de $1-x$, donc le tableau de variations de g est :

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	3	$\nearrow$	$1+e$	$\searrow$	$-\infty$

4. (a) *Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0;+\infty[$.*
   D'après le tableau de variation : pour tout $x \in [0;1]$, $g(x) > 0$, donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $[0;1]$.
   - La fonction g est continue comme produit et somme de fonctions continues.
   - g est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$.
   - $g(1) = 1 + e$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, donc $0 \in]-\infty;1+e]$.

   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[1;+\infty[$, donc sur $[0;+\infty[$ d'après ce qui précède.

   (b) *Compléter le programme Python suivant pour que l'appel encadrement() renvoie les deux bornes d'un encadrement de α d'amplitude inférieure à $0,01$.*

Code Python

```python
def f(x):
    return (2-x)*exp(x)+1

def encadrement():
    a=0,b=3
    while (b-a) > 0.01 :
        m=(a+b)/2
        if f(a)*f(m) > 0:
            a = m
        else:
            b = m
    return a,b
```

(c) *À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude* 10^{-2} *de* α*.*
On obtient à la calculatrice $2,12 \leqslant \alpha \leqslant 2,13$.

(d) *Donner, sans justification, le tableau de signe de* $g(x)$*.*
g s'annule en α donc

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Partie B :

Soit f la fonction définie et dérivable sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x-1}{e^x+1}$.
Un logiciel de calcul formel nous donne les résultats suivants, que l'on peut utiliser sans justification :

? Sauver XCas Calcul Formel STOP Kbd ×

1 deriver$((x-1)/(e^x+1))$

$$\frac{(2-x)e^x+1}{(e^x+1)^2}$$

MENU

1. *À l'aide de la partie A, déterminer les variations de la fonction* f *sur* $[0;+\infty[$.
   On a d'après le logiciel de calcul formel, pour tout $x \in [0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x+1)^2}$
   f' est donc du signe de g, donc on en déduit donc le tableau de variations de f

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$		$\searrow$	0

2. *Montrer que* $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha-2}$ *puis en déduire que* $f(\alpha) = \alpha - 2$.
   On a : $g(\alpha) = 0 \iff (2-\alpha)e^\alpha + 1 = 0 \iff (2-\alpha)e^\alpha = -1 \iff e^\alpha = -\dfrac{1}{2-\alpha} \iff e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha-2}$.
   On en déduit que $f(\alpha) = \dfrac{\alpha-1}{e^\alpha+1} = \dfrac{\alpha-1}{\dfrac{1}{\alpha-2}+1} = \dfrac{\alpha-1}{\dfrac{1+\alpha-2}{\alpha-2}} = \dfrac{\alpha-1}{\dfrac{\alpha-1}{\alpha-2}} = (\alpha-1)\times\dfrac{\alpha-2}{\alpha-1} = \alpha-2$.
3. *En déduire un encadrement d'amplitude* 10^{-2} *de* $f(\alpha)$*.*
   D'après la Partie A : $2,12 \leqslant \alpha \leqslant 2,13 \iff 0,12 \leqslant \alpha - 2 \leqslant 0,13 \iff 0,12 \leqslant f(\alpha) \leqslant 0,13$.

Exercice 2 ▶ /4 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. (a) *Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.*
   f est dérivable sur $[-3\ ;\ 4]$ et pour tout $x \in [-3\ ;\ 4]$:
   $f'(x) = \dfrac{e^x(1+x^2-e^x \times 2x)}{(1+x^2)^2} = \dfrac{(1-2x+x^2)e^x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{(1-x)^2e^x}{(1+x^2)^2}$.

   (b) *Justifier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.*
   On a $f'(1) = \dfrac{(1-1)^2e}{(1+1^2)^2} = 0$, donc la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

2. Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe $\mathcal{C}_f$ comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.

   (a) *D'après le graphique ci-dessus, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ? Argumenter.*
   La fonction f semble convexe sur $[-4; -0,3]$ puis concave sur $[-0,3; 1]$ puis convexe sur $[1; 4]$.
   Elle change donc de convexité et $\mathcal{C}_f$ semble présenter deux points d'inflexion. Le tobbogan seble donc assurer de bonnes senstations.

   (b) On admet que la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, a pour expression pour tout réel x de l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$:

$$f''(x) = \frac{p(x)(x-1)\mathrm{e}^x}{\left(1+x^2\right)^3}$$

   avec pour tout réel $x \in [-3; 4]$, $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$, et on admet également que le signe de $p(x)$ est donné par le tableau suivant :

x	-3		α		4
$p(x)$		$-$	0	$+$	

   avec $\alpha \approx -0,2$ à 10^{-1} près.
   En utilisant l'expression précédente de f'', répondre à la question : « le toboggan assure-t-il de bonnes sensations ? ». Justifier.
   On étudie la convexité de f, donc on étudie le signe de $f''(x)$. D'après l'expression admise, $f''(x)$ est du signe de $p(x)(x-1)$. On en déduit le tableau :

x	-3		α		1		4
$p(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   f'' s'annule deux fois en changeant de signe (ou f change deux fois de convexité), donc $\mathcal{C}_f$ présente deux points d'inflexion.
   Le tobbogan assure donc de bonnes sensations.

3. (Bonus) : Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$:

$$f''(x) = \frac{(x^3-3x^2+5x+1)(x-1)\mathrm{e}^x}{\left(1+x^2\right)^3}$$

Exercice 3 ▶ /5 points

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable. Elle propose alors à ses 5 000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2020.

1. *Démontrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.*
   La fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et pour tout $x \in [0; +\infty[$, on a :
   $f'(x) = \dfrac{5(x+2) - (5x+4)}{(x+2)^2} = \dfrac{10-4}{(x+2)^2} = \dfrac{6}{(x+2)^2}$
   Pour tout réel positif x, $(x+2)^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$. f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
2. *Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel*

   $$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 5.$$

   On considère la proposition $\mathcal{P}(n) : 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 5$.
   Initialisation : On a $u_0 = 1$ et $u_1 = \dfrac{5\times 1+4}{1+2} = \dfrac{9}{3} = 3$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 5$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   Hérédité : Soit k un entier naturel. Supposons que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie, c'est-à-dire que $0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 5$.

   $$\begin{aligned} & 0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 5 \\ \iff & f(0) \leqslant f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(5) \text{ (car } f \text{ est strictement croissante)} \\ \iff & 2 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant \frac{29}{7} \\ \Longrightarrow & 0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 5 \end{aligned}$$

   $\mathcal{P}(k+1)$ est donc vraie.
   Conclusion : On a $P(0)$ vraie et pour tout entier k, $P(k) \Longrightarrow P(k+1)$, donc par le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 5$.
3. *Justifier que la suite (u_n) est convergente.*
   La suite (u_n) est croissante et majorée par 5 d'après la question précédente, donc elle est convergente d'après le théorème de convergence monotone.
4. *En déduire la limite de la suite (u_n) et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.*
   La fonction f est continue car elle est dérivable sur son ensemble de définition. La suite (u_n) est convergente vers une limite ℓ, donc ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$.
   On a donc $\ell = \dfrac{5\ell+4}{\ell+2} \iff \ell(\ell+2) = 5\ell+4 \iff \ell^2 + 2\ell = 5\ell + 4 \iff \ell^2 - 3\ell - 4 = 0 \iff (\ell-4)(\ell+1) = 0$.
   On en déduit que $\ell = 4$ ou $\ell = -1$. Comme $u_0 = 1$ et (u_n) est croissante, on a $\ell \neq -1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

Exercice 4 ▶ **/4 points**

Dans tout cet exercice, les probabilités seront arrondies, si nécessaire, à 10^{-3}.
D'après une étude, les utilisateurs réguliers de transports en commun représentent 17 % de la population française.
Parmi ces utilisateurs réguliers, 32 % sont des jeunes âgés de 18 à 24 ans. (Source : TNS-Sofres)

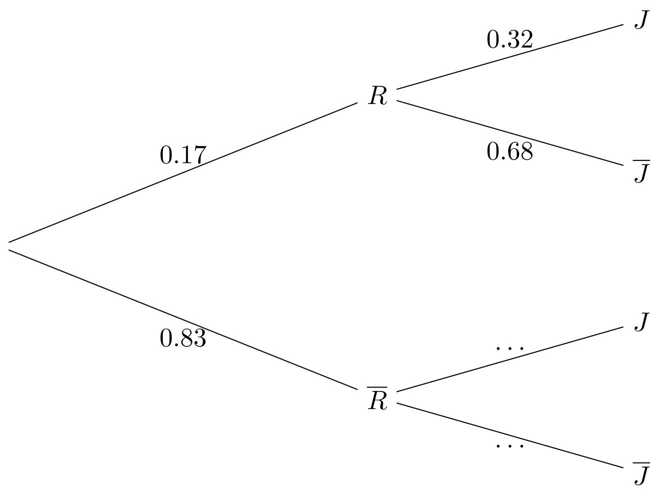
Partie A :

On interroge une personne au hasard et on note :

— R l'évènement : « La personne interrogée utilise régulièrement les transports en commun ».

— J l'évènement : « La personne interrogée est âgée de 18 à 24 ans ».

1. *Représentez la situation à l'aide de cet arbre pondéré, que vous recopierez sur votre copie, en y reportant les données de l'énoncé.*



2. *Calculer la probabilité $P(R \cap J)$.*
   On a $P(R \cap J) = P(R) \times P_R(J) = 0,17 \times 0,32 = 0,0544$.
3. *D'après cette même étude, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 11 % de la population française.*
   Montrer que la probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans n'utilisant pas régulièrement les transports en commun est 0,056 à 10^{-3} près.
   On cherche à calculer $P(\overline{R} \cap J)$.
   On a d'après l'énoncé $P(J) = 0,11$.
   De plus, d'après la formule des probabilités totales, on a $P(J) = P(\overline{R} \cap J) + P(R \cap J)$. On peut donc en déduire que $P(\overline{R} \cap J) = P(J) - P(R \cap J) = 0,11 - 0,0544 = 0,0556$.
4. En déduire la proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun.
   On cherche maintenant $P_{\overline{R}}(J)$.
   On a $P_{\overline{R}}(J) = \dfrac{P(\overline{R} \cap J)}{P(\overline{R})} = \dfrac{0,0556}{0,83} \approx 0,0671$.
   La proportion est donc de $6,71\%$.

Partie B :

Lors d'un recensement sur la population française, un recenseur interroge au hasard 50 personnes en une journée sur leur pratique des transports en commun.
La population française est suffisamment importante pour assimiler ce recensement à un tirage avec remise.
Soit X la variable aléatoire dénombrant les personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées.

1. *Déterminer, en justifiant, la loi de X et préciser ses paramètres.*
   On réalise 50 fois de manière indépendante une même expérience de Bernoulli de paramètre $p = 0,17$ (la probabilité qu'une personne utilise régulièrement les transports en commun) et de succès : « la personne interrogée utilise régulièrement les transports ». La variable aléatoire X compte le nombre de succès, donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,17$.

2. *Calculer $P(X=5)$ et interpréter le résultat.*

   On a $P(X=5) = \binom{50}{5} \times 0,17^5 \times 0,83^{45} \approx 0,139$.

   Il y a environ $13,9\%$ de chance que parmi les 50 personnes interrogées, 5 personnes utilisent régulièrement les transports en commun.

3. *Le recenseur indique qu'il y a moins de 5 % de chance pour que, parmi les* 50 *personnes interrogées,* 13 *personnes ou plus utilisent régulièrement les transports en commun.*

   Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier votre réponse.

   On cherche à calculer $P(X \geqslant 13)$.

   A la calculatrice, on trouve $P(X \geqslant 13) = 1 - P(X < 13) \approx 0,0714$.

   Il y a donc environ $7,14\%$ de chance que parmi les 50 personnes interrogées, 13 personnes ou plus utilisent régulièrement les transports en commun. La probabilité est donc supérieure à 5%, donc l'affirmation du recenseur est fausse.

4. *Quel est le nombre moyen de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les* 50 *personnes interrogées ?*

   On a $E(X) = n \times p = 50 \times 0,17 = 8,5$.

   Le nombre moyen de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées est donc de $8,5$.