

CHAPITRE 10 — VECTEURS II

Savoir-faire 1

- ☐ Représenter un vecteur dont on connaît les coordonnées.
- ☐ Lire les coordonnées d'un vecteur.
- ☐ Calculer les coordonnées d'une somme de vecteurs, d'un produit d'un vecteur par un nombre réel.
- ☐ Caractériser alignement et parallélisme par la colinéarité de vecteurs.
- ☐ Résoudre des problèmes en utilisant la représentation la plus adaptée des vecteurs.

1 Coordonnées d'un vecteur

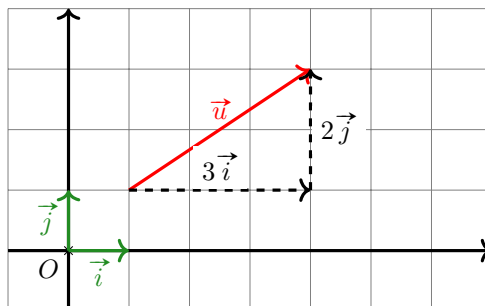
Définition 1

Soit O un point et deux vecteurs \vec{i} et \vec{j} dont les directions sont perpendiculaires et dont les normes sont égales à 1. On dit que (\vec{i}, \vec{j}) est une **base orthonormée** du plan et que $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un **repère orthonormé du plan**.

Définition 2

Dans une base (\vec{i}, \vec{j}) , soit \vec{u} un vecteur. Il existe un unique couple $(x; y)$ tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
 x et y sont les coordonnées de \vec{u} dans la base (\vec{i}, \vec{j}) , notées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Exemple 1

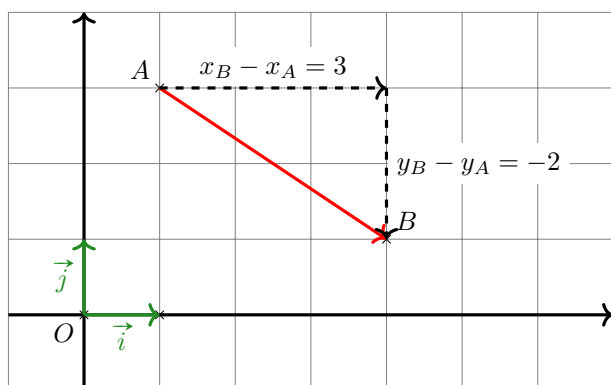


Dans la base (\vec{i}, \vec{j}) , \vec{u} a ainsi pour coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Propriété (Admise) 1: Coordonnées d'un vecteur

Dans un repère, si deux points A et B ont pour coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$, le vecteur \overrightarrow{AB} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Exemple 2



Sur le graphique ci-contre, on a : $A(1; 3)$ et $B(4; 1)$.
 Les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} sont donc $\begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 1 - 3 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Propriété (Admise) 2: Caractérisation analytique de l'égalité de deux vecteurs

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées dans un repère du plan.

Autrement dit, si les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont égaux, alors $x = x'$ et $y = y'$.

Exercices : 80–82 p.139, 83–89 p.140

Méthode 1: Montrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme

Soient $A(2; 3)$, $B(5; 1)$, $C(3; -2)$ et $D(0; 0)$.

Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

- On calcule les coordonnées de \overrightarrow{AB} et de \overrightarrow{DC} .
- On vérifie qu'elles sont égales.

Définition 3

Dans un repère orthonormé (O, I, J) , soit \vec{u} un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

La norme du vecteur \vec{u} , notée $\|\vec{u}\|$, est

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Définition 4

Dans un repère orthonormé (O, I, J) , soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. Alors :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

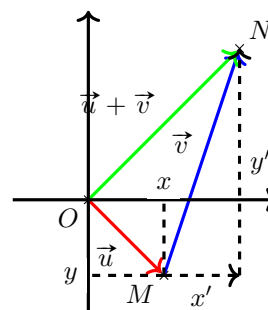
Propriété 1: Coordonnées de la somme de deux vecteurs

Dans un repère, si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$

Démonstration 1

Dans un repère d'origine O , la translation de vecteur $\vec{u}(x; y)$ associe au point O le point $M(x; y)$. La translation de vecteur $\vec{v}(x'; y')$ associe au point M le point N . Alors, $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{ON}$. Cherchons les coordonnées de N :

Les coordonnées de \overrightarrow{MN} sont $(x_N - x; y_N - y)$. Or, $\overrightarrow{MN} = \vec{v}$, c'est-à-dire $x_N - x = x'$ et $y_N - y = y'$. On en déduit que N a pour coordonnées $(x + x'; y + y')$, d'où $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.

**Exemple 3**

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \end{pmatrix}$, alors $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$

Définition 5: Déterminant de deux vecteurs

Soit (\vec{i}, \vec{j}) une base orthonormée et deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

On appelle **déterminant** de \vec{u} et \vec{v} dans la base (\vec{i}, \vec{j}) le nombre $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx'$, noté également $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$

Propriété 2

Soit (\vec{i}, \vec{j}) une base orthonormée et deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

\vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Démonstration au programme 1

- Supposons que \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.
 - Si l'un des deux vecteurs est nul (par exemple \vec{u}), alors $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \times y' - 0 \times x' = 0$
 - Sinon, il existe un nombre k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$, soit $x' = kx$ et $y' = ky$. Alors $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx' = x \times ky - y \times kx = kxy - kxy = 0$.
- Réciproquement, supposons que $xy' - yx' = 0$.
On a alors $xy' = yx'$.
 - Si l'un des vecteurs est nul, alors il est nécessairement colinéaire à l'autre.
 - Si les deux vecteurs sont non nuls, alors \vec{u} a au moins une coordonnée non nulle, par exemple x , donc $x \neq 0$. On pose alors $k = \frac{x'}{x}$, et on obtient que $xy' = yx' \iff y' = \frac{yx'}{x} \iff y' = ky$, car $x \neq 0$.
Par conséquent, $\vec{v} = k\vec{u}$, et les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

Exemple 4

Soient dans une base $\vec{u} \begin{pmatrix} 12 \\ -26 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 35 \\ -72 \end{pmatrix}$.

Alors $\begin{vmatrix} 12 & 35 \\ -26 & -72 \end{vmatrix} = 12 \times (-72) - (-26) \times 35 = 46 \neq 0$, donc les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

Exercices : 108–110 p.141, 112–117 p.141, 118–120 p.142