

## CHAPITRE 10 — VECTEURS II

## Savoir-faire 1

- ☐ Représenter un vecteur dont on connaît les coordonnées.
- ☐ Lire les coordonnées d'un vecteur.
- ☐ Calculer les coordonnées d'une somme de vecteurs, d'un produit d'un vecteur par un nombre réel.
- ☐ Caractériser alignement et parallélisme par la colinéarité de vecteurs.
- ☐ Résoudre des problèmes en utilisant la représentation la plus adaptée des vecteurs.

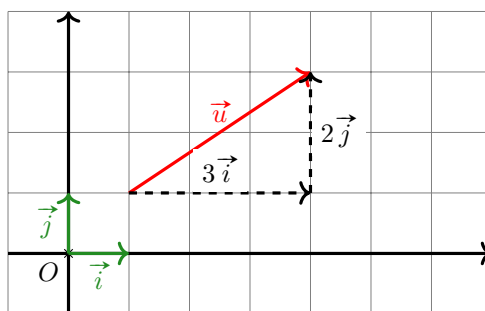
## Définition 1

Soit  $O$  un point et deux vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  dont les directions sont perpendiculaires et dont les normes sont égales à 1. On dit que  $(\vec{i}, \vec{j})$  est une **base orthonormée** du plan et que  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  est un **repère orthonormé du plan**.

## Définition 2

Dans une base  $(\vec{i}, \vec{j})$ , soit  $\vec{u}$  un vecteur. Il existe un unique couple  $(x; y)$  tel que  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ .  
 $x$  et  $y$  sont les coordonnées de  $\vec{u}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ , notées  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

## Méthode: Lire les coordonnées d'un vecteur et construire un vecteur

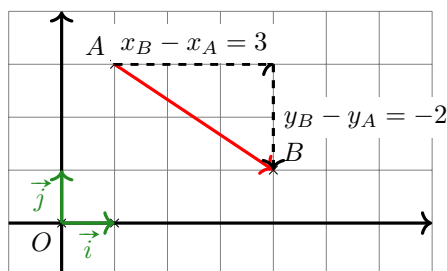


- Donner les coordonnées du vecteur  $\vec{u}$  sur le graphique ci-contre dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .
- Construire un vecteur  $\vec{v}$  de coordonnées  $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ .



## Propriété (Admise) 1: Coordonnées d'un vecteur

Dans un repère, soient  $A$  et  $B$  deux points ayant pour coordonnées respectives  $(x_A; y_A)$  et  $(x_B; y_B)$ :  
 Le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ . On note  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ .

**Méthode: Déterminer les coordonnées d'un vecteur**

Sur le graphique ci-contre, on a :  $A(1; 3)$  et  $B(4; 1)$ .  
 Les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  sont donc  $\begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 1 - 3 \end{pmatrix}$ ,  
 soit  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

**Propriété (Admise) 2: Caractérisation analytique de l'égalité de deux vecteurs**

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées dans un repère du plan.

Autrement dit, si les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  sont égaux, alors  $x = x'$  et  $y = y'$ .

**Exercices :** 80–82 p.139, 83–89 p.140

**Méthode: Montrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme**

Soient  $A(2; 3)$ ,  $B(5; 1)$ ,  $C(3; -2)$  et  $D(0; 0)$ .

Montrer que  $ABCD$  est un parallélogramme.

- On calcule les coordonnées de  $\overrightarrow{AB}$  et de  $\overrightarrow{DC}$ .
- On vérifie qu'elles sont égales.

**Méthode: Calculer les coordonnées d'un point à partir d'une égalité vectorielle**

Soient  $A(9; 2)$ ,  $B(-3; 5)$  et  $C(1; 4)$ .

Déterminer les coordonnées du point  $D$  tel que  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ .



**Définition 3**

Dans un repère orthonormé  $(O, I, J)$ , soit  $\vec{u}$  un vecteur de coordonnées  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

La norme du vecteur  $\vec{u}$ , notée  $\|\vec{u}\|$ , est

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

**Définition 4**

Dans un repère orthonormé  $(O, I, J)$ , soient  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$ . Alors :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

**Exemple 1**

Soient  $A(2; 3)$  et  $B(5; 1)$ . Alors  $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(5 - 2)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$

**Propriété 1: Coordonnées de la somme de deux vecteurs**

Dans un repère, si  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ , alors  $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$

**Démonstration 1**

Dans un repère d'origine  $O$ , la translation de vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  associe au point

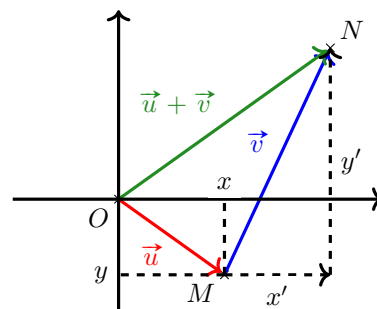
$O$  le point  $M(x; y)$ . La translation de vecteur  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  associe au point  $M$  le

point  $N$ . Alors,  $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{ON}$ .

Cherchons les coordonnées de  $N$  :

Les coordonnées de  $\overrightarrow{MN}$  sont  $\begin{pmatrix} x_N - x \\ y_N - y \end{pmatrix}$ . Or,  $\overrightarrow{MN} = \vec{v}$ , c'est-à-dire  $x_N - x = x'$  et  $y_N - y = y'$ .

On en déduit que  $N$  a pour coordonnées  $(x + x'; y + y')$ , d'où  $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$ .

**Exemple 2**

Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \end{pmatrix}$ , alors  $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$

**Méthode: Calculer les coordonnées d'une somme de vecteurs, du produit d'un vecteur par un réel**

Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Calculer les coordonnées de  $\vec{u} + \vec{v} - 2\vec{w}$ .



**Définition 5: Déterminant de deux vecteurs**

Soit  $(\vec{i}, \vec{j})$  une base et deux vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ .

On appelle **déterminant** de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  le nombre  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx'$ , noté également  $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$

**Propriété 2**

Soit  $(\vec{i}, \vec{j})$  une base et deux vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ .

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si et seulement si  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ .

**Démonstration au programme 1**

- Supposons que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.
  - Si l'un des deux vecteurs est nul (par exemple  $\vec{u}$ ), alors  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \times y' - 0 \times x' = 0$
  - Sinon, il existe un nombre  $k$  tel que  $\vec{v} = k\vec{u}$ , soit  $x' = kx$  et  $y' = ky$ . Alors  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx' = x \times ky - y \times kx = kxy - kxy = 0$ .
- Réciproquement, supposons que  $xy' - yx' = 0$ .

On a alors  $xy' = yx'$ .

- Si l'un des vecteurs est nul, alors il est nécessairement colinéaire à l'autre.
- Si les deux vecteurs sont non nuls, alors  $\vec{u}$  a au moins une coordonnée non nulle, par exemple  $x$ , donc  $x \neq 0$ . On pose alors  $k = \frac{x'}{x}$ , et on obtient que  $xy' = yx' \iff y' = \frac{yx'}{x} \iff y' = ky$ , car  $x \neq 0$ .  
Par conséquent,  $\vec{v} = k\vec{u}$ , et les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

**Méthode: Vérifier la colinéarité de deux vecteurs**

Soient dans une base  $\vec{u} \begin{pmatrix} 12 \\ -26 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 35 \\ -72 \end{pmatrix}$ .



**Exercices :** 108–113 p.141

**Méthode: Montrer que deux droites sont parallèles**

Soient  $A(5; 4)$ ,  $B(2; 1)$ ,  $C(4, 7)$  et  $D(-5; -2)$ .

Montrer que  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles.



**Exercices :** 115–117 p.141, 118–120 p.142