Bases e Mudança de Base

Uma introdução geométrica com exercícios resolvidos

Leandro Rodrigues

Série Álgebra Linear Visual

Bases e Mudança de Base — trocando o ponto de vista do espaço

Objetivo geral

O objetivo deste artigo é mostrar que **bases e mudança de base** vão muito além de uma formalidade algébrica ou de um simples cálculo com matrizes: elas representam a liberdade de escolher o sistema de coordenadas a partir do qual observamos o espaço vetorial.

A partir de uma abordagem **geométrica, visual e intuitiva**, o texto busca esclarecer como um mesmo vetor pode ter representações diferentes dependendo da base escolhida, sem que sua essência geométrica se altere. O artigo se propõe a ajudar tanto quem está dando os primeiros passos em Álgebra Linear quanto quem já utiliza mudança de base em cálculos, mas ainda não havia percebido esse processo como uma **troca consciente de ponto de vista sobre o espaço**, ideia central para compreender transformações lineares, diagonalização e modelos mais avançados.

Consideração inicial

O estudo de **bases e mudança de base** parte do entendimento de que vetores e transformações lineares não existem isoladamente, mas são sempre descritos a partir de um **sistema de coordenadas**. Antes de discutir como diferentes bases alteram a forma como representamos vetores e operadores, é importante ter uma noção clara do que são transformações lineares e de como elas atuam sobre o espaço.

Por que eu deveria me motivar a aprender sobre bases e mudança de base?

Porque **bases e mudança de base** determinam o ponto de vista a partir do qual descrevemos vetores e transformações. Elas mostram que coordenadas não são absolutas: um mesmo vetor pode ter representações diferentes sem que sua essência geométrica se altere.

Entender mudança de base é perceber que muitas expressões aparentemente complicadas surgem apenas de uma **escolha inadequada de coordenadas**. Ao trocar a base, revelamos a estrutura do espaço e preparamos o caminho para compreender transformações lineares de forma mais profunda, incluindo diagonalização e aplicações em áreas como física, computação gráfica e *machine learning*.

Conceitos fundamentais

Noção intuitiva

Para compreender bases e mudança de base de forma intuitiva, é essencial separar três ideias distintas: o **objeto geométrico** que estamos estudando, o **sistema de coordenadas** usado para descrevê-lo e a **representação numérica** que resulta dessa escolha.

O ponto central é que vetores não dependem de coordenadas para existir. As coordenadas são apenas uma linguagem que escolhemos para descrevê-los. Mudar a base não altera o vetor em si, apenas a forma como o expressamos.

Essa ideia pode ser entendida de maneira mais clara por meio de uma analogia visual simples.

A mesma cadeira observada a partir de ângulos diferentes: o objeto não muda, apenas a forma como é descrito visualmente.

Considere a imagem acima. Vemos a mesma cadeira, mas observada a partir de ângulos diferentes. O objeto físico não muda, mas sua aparência — a forma como é descrita visualmente — depende do ponto de vista adotado.

Nessa analogia:

- a cadeira representa o **vetor geométrico** — o objeto em si, que permanece o mesmo;
- o ângulo da câmera representa a **base**, isto é, o sistema de coordenadas escolhido;
- a imagem resultante corresponde às **coordenadas do vetor** nessa base.

Cada fotografia fornece uma descrição diferente do mesmo objeto, assim como diferentes bases fornecem coordenadas diferentes para o mesmo vetor.

Em Álgebra Linear, ocorre exatamente o mesmo fenômeno. Quando escolhemos a base canônica, descrevemos vetores em termos dos eixos padrão. Ao escolher uma base diferente, passamos a descrever os mesmos vetores a partir de novos eixos, alinhados de outra forma no espaço. As coordenadas mudam, mas o vetor continua sendo o mesmo.

Noção matemática (intuitiva)

Do ponto de vista matemático, uma base de um espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ é um conjunto de vetores que permite descrever qualquer vetor do espaço de forma única, por meio de uma combinação linear. Essa descrição depende da base escolhida: o vetor é o mesmo, mas suas coordenadas mudam conforme o sistema de referência.

Em outras palavras, as coordenadas de um vetor não são propriedades absolutas do vetor, mas da base em relação à qual ele está sendo descrito.

A mudança de base surge exatamente quando comparamos duas descrições diferentes do mesmo vetor. O objetivo não é alterar o vetor geométrico, mas apenas traduzir suas coordenadas de um sistema de referência para outro.

Dadas duas bases B e C de $\mathbb{R}^n$, as coordenadas de um mesmo vetor v nessas bases estão relacionadas por

$$[v]_C = M_C^{-1}\, M_B\, [v]_B. \tag{1}$$

A expressão acima deve ser lida da seguinte forma:

- $[v]_B$ representa as coordenadas do vetor v na base B;
- M_B é a matriz cujas colunas são os vetores da base B, escritos na base canônica;
- M_C^{-1} é a matriz inversa associada à base C, responsável por converter coordenadas canônicas em coordenadas da base C;
- $[v]_C$ representa as coordenadas do mesmo vetor v na base C.

Em termos conceituais, essa equação descreve um processo em duas etapas: primeiro, o vetor é reconstruído a partir de suas coordenadas na base B; em seguida, ele é reescrito em coordenadas da base C. O vetor geométrico v não se altera; é apenas a forma como suas coordenadas são expressas que muda conforme a base escolhida.

Para fixar essas ideias e compreender como esse formalismo é utilizado na prática, analisaremos a seguir alguns exercícios resolvidos. Eles ajudam tanto a consolidar a teoria quanto a reconhecer como bases e mudança de base aparecem em aplicações, como *machine learning*.

Exercícios resolvidos

Exercício 1

Sejam $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ e $\beta' = \{(-1,1),(1,1)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$.

(a) Ache as matrizes de mudança de base $P_{\beta\to\beta'}$ e $P_{\beta'\to\beta}$.

(b) Quais as coordenadas do vetor $v = (3,-2)$ em relação às bases β e β'?

(c) As coordenadas de um vetor v em relação à base β' são dadas por

$$[v]_{\beta'} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quais são as coordenadas de v em relação à base β?

(a) Matrizes de mudança de base

Para determinar $P_{\beta\to\beta'}$, escrevemos os vetores da base β como combinações lineares dos vetores da base β'.

Primeiro vetor: $(1,0)$

$$(1,0) = a(-1,1) + b(1,1).$$

Logo,

$$(1,0) = (-a+b,\ a+b),$$

o que conduz ao sistema

$$\begin{cases} -a+b = 1, \\ a+b = 0. \end{cases}$$

Resolvendo, obtemos $a = -\frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$. Assim,

$$[(1,0)]_{\beta'} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Segundo vetor: $(0,1)$

$$(0,1) = a(-1,1) + b(1,1),$$

o que resulta em

$$(0,1) = (-a+b,\ a+b).$$

Portanto,

$$\begin{cases} -a+b=0, \\ a+b=1. \end{cases}$$

Resolvendo, obtemos $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$. Logo,

$$[(0,1)]_{\beta'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Assim, a matriz de mudança de base é

$$P_{\beta\to\beta'} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Para a matriz inversa, temos

$$P_{\beta'\to\beta} = (P_{\beta\to\beta'})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Coordenadas do vetor $v = (3,-2)$

Como β é a base canônica,

$$[v]_\beta = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Para determinar $[v]_{\beta'}$, escrevemos

$$(3,-2) = a(-1,1) + b(1,1),$$

isto é,

$$(3,-2) = (-a+b,\ a+b).$$

Assim,

$$\begin{cases} -a+b=3, \\ a+b=-2. \end{cases}$$

Resolvendo, obtemos $a = -\frac{5}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$. Logo,

$$[v]_{\beta'} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(c) Conversão de coordenadas

Sabendo que

$$[v]_{\beta'} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

temos

$$v = 4(-1,1) + 0(1,1) = (-4,4).$$

Como β é a base canônica,

$$[v]_{\beta} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Exercício 2

Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a aplicação linear definida por

$$F(x,y,z) = (x+z,\ y-2x).$$

Considere as bases

$$\beta = \{(1,2,1),(0,1,1),(0,3,-1)\} \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \quad \beta' = \{(1,-1),(2,-1)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Determinar a matriz $[F]_{\beta\to\beta'}$.

1) Cálculo das imagens dos vetores da base β

Denotemos

$$b_1 = (1,2,1), \quad b_2 = (0,1,1), \quad b_3 = (0,3,-1).$$

Calculando as imagens:

$$F(b_1) = F(1,2,1) = (1+1,\ 2-2) = (2,0),$$

$$F(b_2) = F(0,1,1) = (0+1,\ 1-0) = (1,1),$$

$$F(b_3) = F(0,3,-1) = (0-1,\ 3-0) = (-1,3).$$

2) Escrita das imagens na base β'

Queremos escrever cada vetor da forma

$$a(1,-1) + b(2,-1) = (u,v).$$

Isso equivale ao sistema

$$\begin{cases} a + 2b = u, \\ -a - b = v. \end{cases}$$

Resolvendo, obtemos

$$b = u + v, \qquad a = -u - 2v.$$

Para $F(b_1) = (2, 0)$**:**

$$b = 2 + 0 = 2, \quad a = -2 - 0 = -2.$$

Logo,

$$[F(b_1)]_{\beta'} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Para $F(b_2) = (1, 1)$**:**

$$b = 1 + 1 = 2, \quad a = -1 - 2 = -3.$$

Logo,

$$[F(b_2)]_{\beta'} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Para $F(b_3) = (-1, 3)$**:**

$$b = -1 + 3 = 2, \quad a = 1 - 6 = -5.$$

Logo,

$$[F(b_3)]_{\beta'} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3) Matriz da transformação

A matriz da transformação linear F em relação às bases β e β' é formada pelas colunas acima:

$$[F]_{\beta \to \beta'} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -5 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Visualização geométrica da mudança de base

Antes de formalizar a mudança de base por meio de matrizes, é instrutivo observar geometricamente o que realmente acontece no plano: o vetor permanece fixo, enquanto o sistema de eixos — isto é, a base — é que muda.

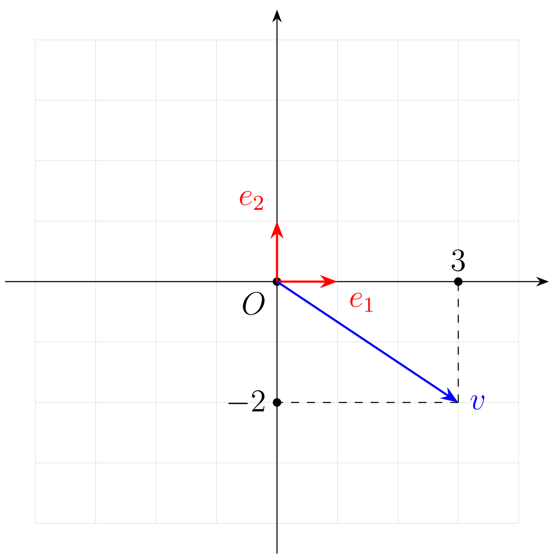
Consideremos o vetor

$$v = (3, -2),$$

utilizado no Exercício 1.

Vetor na base canônica

Na base canônica, os eixos correspondem aos vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$. As coordenadas do vetor coincidem diretamente com suas projeções nesses eixos.



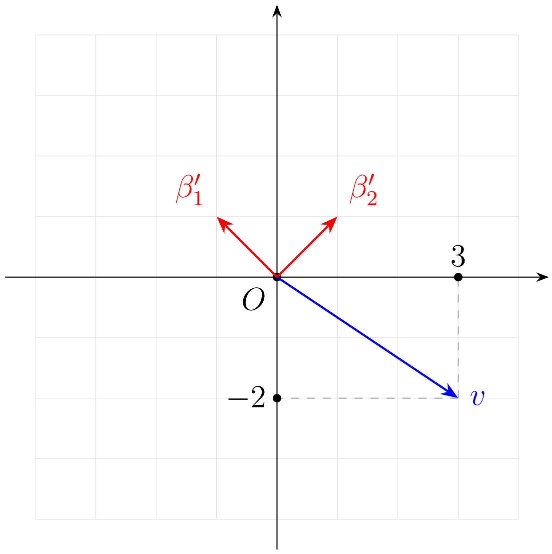
$$[v]_\beta = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Mesmo vetor em uma base diferente

Agora consideremos a base

$$\beta' = \{(-1, 1), (1, 1)\}.$$

Os vetores dessa base definem novos eixos no plano. O vetor geométrico v permanece exatamente o mesmo, mas sua descrição muda quando adotamos esse novo sistema de referência.



As coordenadas de v em relação à base β' são:

$$[v]_{\beta'} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

O vetor geométrico v é o mesmo nos dois gráficos. O que muda é apenas o sistema de eixos utilizado para descrevê-lo. As coordenadas na base β' não são medidas ao longo dos eixos x e y, mas sim ao longo das direções definidas pelos vetores da base β'. Essa visualização reforça a ideia central deste artigo: **mudança de base não é uma transformação aplicada ao vetor, mas uma troca de ponto de vista sobre o espaço**.

Considerações finais

Ao longo deste artigo, vimos que bases e mudança de base não são apenas ferramentas algébricas, mas formas distintas de observar o mesmo espaço vetorial. Um vetor permanece o mesmo objeto geométrico, enquanto suas coordenadas variam conforme o sistema de referência adotado.

A visualização geométrica e os exercícios resolvidos mostram que muitas dificuldades em Álgebra Linear surgem não da complexidade do objeto estudado, mas da escolha do ponto de vista a partir do qual ele é descrito. Compreender mudança de base é, portanto, compreender que diferentes representações podem revelar estruturas diferentes de um mesmo problema.

Essas ideias são fundamentais para temas mais avançados, como diagonalização, transformações lineares entre espaços distintos e aplicações em áreas como computação gráfica, sistemas dinâmicos e *machine learning*. Nos próximos artigos da série, essa perspectiva será explorada de forma ainda mais profunda.