### A “Harder” Problem

人们都说微积分很难, 但是我们刚才所看到的例子 — 计算 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的导数—并不是很难。 微积分之所以显得困难，在于它所呈现的背景情境。例如，我们即将解决的问题融合了代数、几何与问题解决能力，并运用了微积分。正因为我们用微积分来解决它，它才成为“微积分问题”。虽然这确实是个更难的问题，但困难的根源并非微积分本身。

到目前为止我们讨论的都是几何学，因此我们的例题必须是几何题。

**Problem:** 计算由x轴，y轴和函数$y = \frac{1}{x}$的切线所围成的三角形的面积

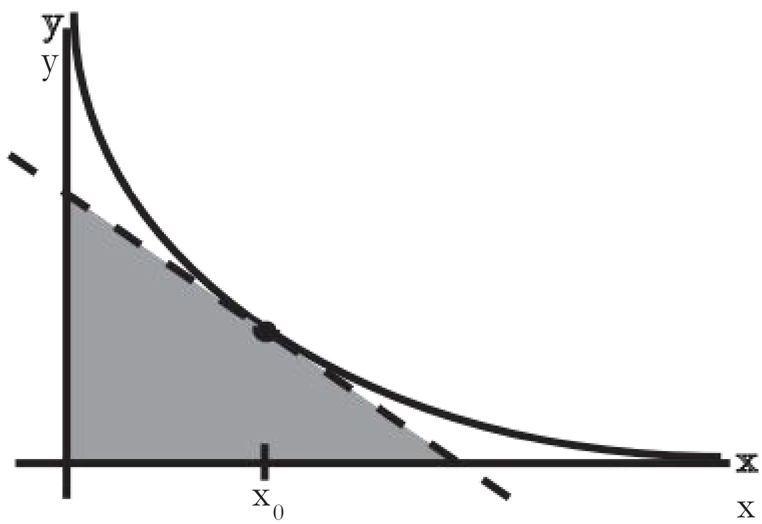


Figure 1: Triangle formed by axes and tangent line
Fig 1: 由x,y轴和切线围成的三角形

我们首先绘制一幅图。在绘图过程中，我们意识到自己默认三角形位于第一象限。 我们找到的解可能依赖于这个假设，也可能不依赖——若想确保当x和$\frac{1}{x}$为负值时解依然成立，后续还需进行验证工作。

因为这个问题涉及切线，所以这是一个微积分问题，但是正如你所见，微积分实际上是简单的部分。

我们解题的下一步是为图像添加标签。我们将图像标记为$y = \frac{1}{x}$。我们想在三角形上添加一些标签，比如边长，但是我们不知道如何求出这些数值。我们所知道的是三角形的斜边与函数图像相切，因此我们可以标注出切点$(x_0, \frac{1}{x_0})$（这使我们可以标注数轴上的点$(x_0, 0)$和点$(0, y_0)$）。

三角形的面积等于 $\frac{1}{2}b \cdot h$，所以我们还需要求出三角形的底边和高的长度。若能求出切线与x轴相交点的x坐标，即可知三角形底边的长度。同理，求出切线的y截距即可得到三角形的高。

为了求出切线的x轴截距和y轴截距，我们首先需要求出该直线的方程。我们从写出直线的“点斜式（point-slope）”方程开始：

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

在这个问题中需要用到问微积分部分是求切线的斜率m。幸运的是，我们在前一个例题中已经完成了这项计算：$m = -\frac{1}{x_0^2}$.

$$y - y_0 = -\frac{1}{x_0^2}(x - x_0)$$

我们已经完成该问题所有的微积分计算，但是仍需进一步求解三角形面积。点($x_0$, $y_0$)斜边与函数$y = \frac{1}{x}$的图像相切的交点。保持x0不变，把$y_0$替换为 $\frac{1}{x_0}$。

$$y - \frac{1}{x_0} = -\frac{1}{x_0^2}(x - x_0).$$

首先计算切线的x截距，这将得到三角形底边的长度。该直线在y=0处与x轴相交。将y=0代入切线方程，得到：

$$\begin{aligned}
0 - \frac{1}{x_0} &= \frac{-1}{x_0^2}(x - x_0) \\
\frac{-1}{x_0} &= \frac{-1}{x_0^2}x + \frac{1}{x_0} \\
\frac{1}{x_0^2}x &= \frac{2}{x_0} \\
x &= x_0^2\left(\frac{2}{x_0}\right) = 2x_0
\end{aligned}$$

因此，这条切线的x轴截距位于 $x = 2x_0$ 处。

接下来，我们可以采用类似的计算方法求出y截距——将x替换为0并求解y（因为y截距是直线上x坐标为0的点）。若不想重复计算，或喜欢运用巧妙技巧简化问题，我们可以利用图形的对称性走捷径。

因为$y = \frac{1}{x}$与 $x = \frac{1}{y}$是相同的等式，当x与y交换时，$y = \frac{1}{x}$ 的图像是对称的。根据对称性，我们可以将上述计算中的x值与y值互换，从而得出y截距位于$y = 2y_0 = \frac{2}{x_0}$.

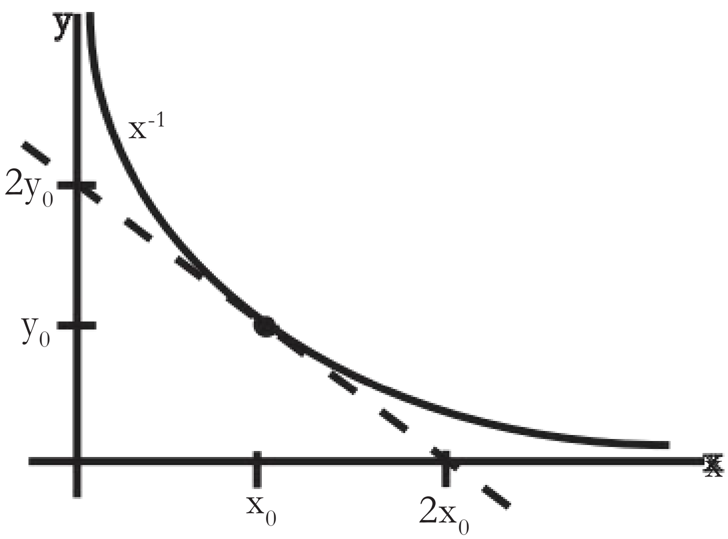


Figure 2: Triangle formed by axes and tangent line, labeled

最终得出,

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\text{b} \cdot \text{h} = \frac{1}{2}(2\text{x}_0)(2\text{y}_0) = 2\text{x}_0\text{y}_0 = 2\text{x}_0(\frac{1}{\text{x}_0}) = 2 \text{ (see Fig. 2)}$$

有趣的是，无论在图形上何处绘制切线，三角形的面积始终为2！

注：我们称之为“一元微积分”，但实际上使用了四个变量：x、y、$x_0$和$y_0$。变量数量还可以更多！这使得事情变得复杂，而你需要逐渐适应这种情况。

我们做的另一件复杂的事情是变量复用。在这个问题中，变量y至少存在三种不同的可能解释。当我们说y= $\frac{1}{x}$,时，指的是双曲线上某一点的垂直位置；当我们说$y - y_0 = \frac{-1}{x_0^2}(x - x_0)$时，指的是切线上某一点的垂直位置。 而当我们说y = 0时，指的是x轴上所有点的垂直位置。当你练习微积分一段时间后，就能从上下文判断y的含义，就像在对话中能分辨对方说的是“sea”还是“see”一样。在达到这种境界之前，请务必在计算前确认方程的具体含义。