Example 1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

我们要求函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的导数。为了求导，我们将会使用下面这个公式:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

图像上, 我们将求出图像 $y = \frac{1}{x}$ 上任意一点 $(x_0, \frac{1}{x_0})$ 处的切线斜率。(函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图像是双曲线，正如函数 $y = x^2$ 的图像是抛物线)

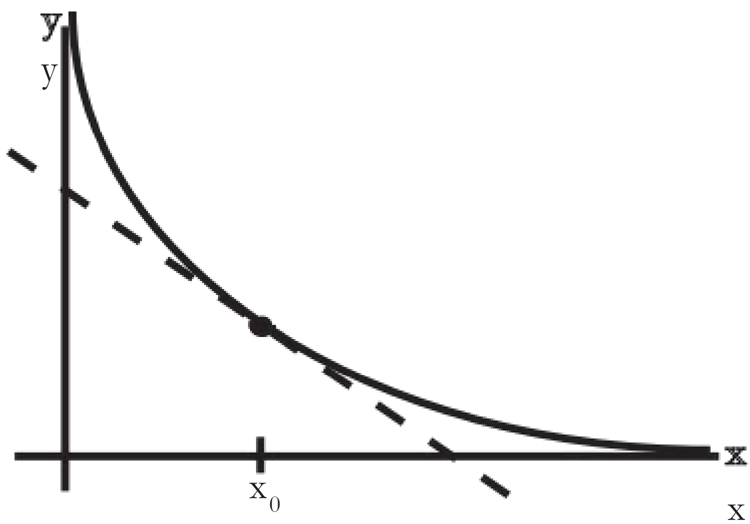

Figure 1: Graph of $\frac{1}{x}$

Fig 1: $\frac{1}{x}$的图像

我们首先计算割线的斜率:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\
&= \frac{\frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0}}{\Delta x} \\
&= \frac{(x_0)(x_0 + \Delta x)}{(x_0)(x_0 + \Delta x)} \frac{\frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0}}{\Delta x} \\
&= \frac{\frac{(x_0)(x_0 + \Delta x)}{x_0 + \Delta x} - \frac{(x_0)(x_0 + \Delta x)}{x_0}}{(x_0)(x_0 + \Delta x)\Delta x} \\
&= \frac{1}{\Delta x} \frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{(x_0)(x_0 + \Delta x)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Delta x}\frac{-\Delta x}{(x_0)(x_0+\Delta x)} \\ &= \frac{-1}{(x_0)(x_0+\Delta x)}. \end{aligned}$$

接下来，我们观察当Δx趋近于零时，割线的斜率会发生什么变化:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{(x_0)(x_0+\Delta x)} = \frac{-1}{x_0^2}$$

当计算导数时需要注意的一点: 人们可能很想直接带入$\Delta x = 0$，然而如果你直接这么做了，最后都会得出 $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{0}{0}$. 你总是需要进行一些约简才能得到正确的答案。

我们计算得出 $f'(x) = \frac{-1}{x_0^2}$. 这正确吗? 如何验证x_0的值?

首先，$f'(x_0)$ 为负值 — 这与函数 $y = \frac{1}{x}$ 图像上切线的斜率一致。第二, 当 $x_0 \to \infty$ (即x_0趋近于无限大), 切线的斜率逐渐减小. 所以 随着x_0增大，$\frac{1}{x_0^2}$ 的值会趋近于 0 , 而实际结果也是这样的。

Question: 解释为什么 $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{(x_0)(x_0+\Delta x)} = \frac{-1}{x_0^2}$?

Answer: x_0 可以是任意一点; 我们可以设 $x_0 = 3$ ，以特定情况求极限

我们想知道Δx趋近于0时，$\frac{-1}{(3)(3+\Delta x)}$ 的值。

当Δx越来越小， $3 + \Delta x$ 越来越接近 3, 所以 $\frac{-1}{(3)(3+\Delta x)}$ 越来越接近 $\frac{-1}{(3)(3)} = \frac{-1}{9}$.

Question: 为什么 $\frac{\frac{1}{x_0+\Delta x} - \frac{1}{x_0}}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\frac{x_0-(x_0+\Delta x)}{(x_0)(x_0+\Delta x)}$?

Answer: 这个简化分为两部。我们将分母中的 Δx 提取出来变成$\frac{1}{\Delta x}$并放在最前面。同时, 我们把两个分母的差值 $\frac{1}{x_0+\Delta x} - \frac{1}{x_0}$ 用同分母的形式重新表示出来。

共同的分母时 $(x_0)(x_0 + \Delta x)$, 就是 $\frac{1}{x_0+\Delta x} - \frac{1}{x_0}$. 的分母的乘积。为了得到共同分母， 我们把第一部分乘以 $\frac{(x_0)}{(x_0)} = 1$ 然后把第二部分乘以 $\frac{(x_0+\Delta x)}{(x_0+\Delta x)}$. 乘1不会改变式子的数值, 但是改变了我们描述这个值的代数表达)。按照预期消掉分母后，我们最终得到 $\frac{x_0-(x_0+\Delta x)}{(x_0)(x_0+\Delta x)}$.