Appunti FdA
Lezioni di Costanzi

Lorenzo Monaci

28 settembre 2024

Indice

1 Rappresentazione in forma di stato

Un sistema oltre che con le funzioni di trasferimento può essere rappresentato tramite la forma di stato.

Esempio del pendolo

$$mL^2\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + mgL\sin(\theta) = u$$

Dove rappresentiamo l'ingresso del sistema come u (il *momento torcente risultante*) e l'uscita del sistema y (gli *effetti del moto*). Supponendo di avere condizioni iniziali: $\theta(0) = \theta_0,\ \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$

Possiamo formalizzare l'equazione differenziale come

$$F(y(t), \dots, y^{(n)}(t), u(t), \dots, u^{(p)}(t), t) = 0$$

Si definisce in forma normale un sistema descritto dalla formula sopra esplicitando $y^{(n)}(t)$:

$$y^{(n)} = \hat{F}(y(t), \dots, y^{(n-1)}(t), u(t), \dots, u^{(p)}(t), t)$$

Nell'esempio di prima:

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{mL^2}(u - c\dot{\theta} + mgL\sin(\theta))$$

In generale è difficile risolvere un'equazione del genere, per semplificarci la vita scriviamo un **sistema di n equazioni differenziali di primo grado**:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \Rightarrow \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\dots) \\ \dots \\ f_n(\dots) \end{bmatrix}$$

Una rappresentazione equivalente alla forma normale è:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases}$$

Questa rappresentazione prende il nome di **forma di stato**, nella quale possono anche comparire funzioni vettoriali. $x(t)$ è detto **stato del sistema**, cioè un vettore di variabili necessarie e sufficienti a descrivere il sistema a ogni istante nel tempo, cioè $x(t),\ y(t)\ \forall\, t > t_0$ conoscendo solamente $x(t_0),\ u(t)\ \forall\, t > t_0$.

Per vedere come passare dalla forma normale a quella di stato bisogna definire le proprietà di un sistema dinamico:

1 - Causalità

Un sistema è detto causale se l'uscita all'istante t dipende solo dagli ingressi $u(\tau)$ con $\tau \leq t$ (se $\tau < t$ è strettamente causale).

Un sistema in **forma normale** è causale se $n \geq p$ (se $n > p$ è strettamente causale). Se avessimo $n < p$ il sistema risulta *non causale*, in quanto l'uscita del sistema dipende dal futuro.

Per definizione un sistema in **forma di stato** è sempre causale, strettamente causale se l'uscita *non dipende da* $u(t) \rightarrow y(t) = g(x(t), t)$.

2 - Stazionarietà o tempo-invarianza

Un sistema è detto stazionario se a fronte di stesse condizioni iniziali e stessi input produce gli stessi output per traslazioni dell'asse dei tempi.

Un sistema in **forma normale** è stazionario se $\hat{F}$ non dipende da t.

Un sistema in **forma di stato** è stazionario se f e g non dipendono da t.

3 - Linearità

Un sistema dinamico è linaere se $\hat{F}$ dipende linearmente da y e dalle sue derivate e da u e dalle sue derivate.

Un sistema in **forma normale** è lineare se si può scrivere nella forma

$$y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i(t) y^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^{p} \beta_j(t) u^{(j)}(t)$$

Se è anche stazionario α_i e β_j non dipendono da t.

Un sistema in **forma di stato** è lineare se si può scrivere come:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u,t) = A(t)x + B(t)u \\ y = g(x,u,t) = C(t)x, D(t)u \end{cases}$$

Dove $A\ n \times n$, $\quad B\ n \times m$, $\quad C\ l \times n$, $\quad D\ l \times m$ e $n \rightarrow$ numero di variabili di stato, $m \rightarrow$ numero di ingressi (dim. u), $l \rightarrow$ numero di uscite (dim. y).

Attenzione che il numero di ingressi/uscite e l'ordine degli stessi sono cose diverse! Anche il *numero di variabili di stato* è n ma diverso da quello di prima[1].

I sistemi lineari godono delle proprietà di **Omogeneità**, cioè se $u(t) \Rightarrow y(t)$ allora anche $\lambda u(t) \Rightarrow \lambda y(t)\ \forall \lambda$ e **Sovrapposizione**, cioè se $u_1(t) \Rightarrow y_1(t)$ e $u_2(t) \Rightarrow y_2(t)$ allora $u_1(t) + u_2(t) \Rightarrow y_1(t) + y_2(t)$.

Inoltre dato che ogni soluzione di un'equazione differenziale lineare è somma di due contributi (particolare e omogenea), vale anche il principio di sovrapposizione:

[1] Ricordarsi la differenza tra SISO, MIMO ecc.

Per le condizioni iniziali

Se $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ sono n soluzioni omogenee linearmente indipendenti allora ogni soluzione omogenea è loro combinazione lineare e i coefficienti dipensono solo dalle condizioni iniziali.

Cioè da set diversi di condizioni iniziali si hanno soluzioni omogenee differenti, che dipendono dall'*evoluzione delle CI*. Allora se si combinano linearmente si ottiene una oluzione omogenea che è combinazione lineare delle omogenee con gli stessi coefficienti.

Per gli ingressi

Sia $u_a \to y_{p_a}$ e $u_b \to y_{p_b}$, cioè all'ingresso a corrisponde la soluzione particolare y_{p_a}.

Allora $\forall \alpha_i, \beta_j$ si ha che $u = \alpha_i u_a + \beta_j u_b \Rightarrow y_p = \alpha_i y_{p_a} + \beta_j y_{p_b}$.

Infine se $y_{p_a}(t)$ è soluzione particolare per $u(t)$ lo è anche $\dot{y}_{p_a}(t)$ per $\dot{u}(t)$

2 Passare da una forma a un'altra

2.1 Caso $p = 0$

Scegliendo come stato

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^1 \\ \dots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

possiamo rappresentare **in generale** ogni sistema come:

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dots \\ y^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \dots \\ x_n \\ \hat{F}([y, \dots, y^{(n-1)}], u, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \dots \\ x_n \\ \hat{F}(x, u, t) \end{bmatrix} \\ y = x_1 = g(x, u, t) \ (nella\ forma\ che\ vogliamo) \end{cases}$$

oppure per i **sistemi lineari**:

$$y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha y^{(i)} + u(t)$$

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ -\alpha_0 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} X + [0]u \end{cases}$$

La matrice è detta **compagna orizzontale inferiore**, inoltre le condizioni iniziali sulle derivate della y diventano *sullo stato*.

Esempio del pendolo

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{mL^2}(u - c\dot{\theta} + mgL\sin(\theta))$$

Abbiamo un sistema non lineare ($\sin(\theta)$) e $p = 0$.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Da cui

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{mL^2}(u - c\dot{\theta} + mgL\sin(x_1)) \end{bmatrix} \quad X(0) = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 \end{bmatrix} \\ y = x_1 \end{cases}$$

Esempio dei carrelli

$$m_1\ddot{y}_1 + c(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k(y_1 - y_2) = F_1 m_2\ddot{y}_2 + c(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k(y_2 - y_1) = F_2$$

Abbiamo un sistema lineare! Scriviamo la forma normale:

$$\ddot{y} = \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1}(F_1 - c(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k(y_1 - y_2)) \\ \frac{1}{m_2}(F_2 - c(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k(y_2 - y_1)) \end{bmatrix}$$

In questo caso abbiamo $p = 0$, $n = 2$ (ordine massimod delle uscite), $m = 2$ (dim. u aka F), $l = 2$ (dim. y), $n = 4$ (dim. x)

Procedimento generale

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{X} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{1}{m_1}(u_1 - c(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k(y_1 - y_2)) \\ \frac{1}{m_2}(u_2 - c(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k(y_2 - y_1)) \end{bmatrix} \\ y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad X(0) = \begin{bmatrix} y_{1_0} \\ y_{2_0} \\ y_{3_0} \\ y_{4_0} \end{bmatrix} \end{cases}$$

Per i sistemi lineari

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & -\frac{c}{m_1} & \frac{c}{m_1} \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & \frac{c}{m_2} & -\frac{c}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

2.2 Caso $0 < p < n$ per sistemi lineari

Dalle ipotesi: $y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i y^{(i)} + \sum_{j=0}^{p} \beta_j u^{(j)}$ (y e u funzioni del tempo).

Si usa un'*equazione ausiliaria*:

$$z^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} -\alpha_i z^{(i)}(t) u(t)$$

la cui soluzione $z(t)$ è la risposta del sistema all'ingresso $u(t)$; ma allora se $y(t)$ cerca la risposta del sistema a una **combinazione lineare** delle derivate di $u(t)$

allora questa, per linearità, sarà combinazione lineare delle derivate di z con gli stessi coefficienti:

$$y^{(n)}(t) = \sum_{j=0}^{p} \beta_j z^{(j)}(t)$$

da cui un buono stato potrebbe essere

$$X = \begin{bmatrix} z \\ \vdots \\ z^{(n)} \end{bmatrix}$$

perché descrive bene l'evoluzione dello stato stesso e dell'uscita

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ -\alpha_0 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \sum_{i=0}^{p-1} \beta_{i-1} x_i = \begin{bmatrix} \beta_0 & \cdots & \beta_p & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} X + [0]u \end{cases}$$

2.3 Caso $p = n$ per i sistemi lineari

Partiamo dalle considerazioni del caso precedente e tenendo conto che $z^{(i)}(t) = x_{i-1}$:

$$\begin{cases} y(t) = \sum_{i=0}^{p-1} \beta_{i-1} x_i + \beta_n z^{(n)} = \\ = \sum_{i=0}^{p-1} \beta_{i-1} x_i - \beta_n [\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i z^{(i)}(t) + u(t)] = \\ = \sum_{i=0}^{p-1} \beta_{i-1} x_i - \beta_n [\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i-1} x_i + \beta_n u(t)] = \\ = \sum_{i=0}^{p-1} (\beta_{i-1} - \beta_n \alpha_{i-1}) x_i + \beta_n u(t) \end{cases}$$

Di conseguenza le matrici A e B rimangono uguali, mentre

$$y = \begin{bmatrix} \beta_0 - \beta_n \alpha_0 & \ldots & \beta_{n-1} - \beta_n \alpha_{n-1} & \end{bmatrix} + \beta_n u$$

Esempi a pag. 11

3 Utilizzo di uno stato arbitrario

Nella trasformazione da forma normale a forma di stato abbiamo scelto lo stato X in modo da semplificarci la vita, tuttavia non è l'unica scelta possibile, dobbiamo trovare un modo per usare le trasformazioni per qualsiasi stato.

Se X è lo stato dells sistema allora $\hat{X} = \Phi(x)$ è una rappresentazione equivalente, cioè **è biettiva**. A noi interessano i casi in cui Φ è lineare e quindi rappresentabile in forma matriciale: $\hat{X} = \Phi(x) = Tx, \quad T \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \det(T) = 0$

Voglaimo sapere come cambiano le matrici della forma di stato, partiamo dalla definizione di $\hat{x} = Tx$:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = T\dot{x} = TAx + TBu = TAT^{-1}x + TBu \\ y = Cx + Du = CT\hat{x} + Du \end{cases}$$

Da cui

$$\begin{cases} \hat{A} = TAT^{-1}, \quad \hat{B} = TB \\ \hat{C} = CT^{-1}, \quad \hat{D} = D \end{cases}$$

3.1 Linearizzazione di un sistema

Dato un sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u,t) \\ y = g(x,u,t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = t_0 \\ u = \bar{u} \\ X(0) = x_0 \end{cases}$$

allora $\bar{x}$ che soddisfa $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x},u,t)$ è detto **movimento dello stato**, e rappresenta come cambia al variare dei valori 'iniziali'. Invece $\bar{y} = g(\bar{x},u,t)$ è detto **movimento dell'uscita** corrispondente.

Nel caso non lineare non è detto che $\bar{x}$ esista, o che sia unico!

Nel caso di sistemi **tempo-invarianti** se $u = \bar{u}$ è un ingresso costante allora $\bar{x}$ che soddisfa *le condizioni iniziai* e $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x},\bar{u}) = 0$ se esiste è detto **movimento dello stato di equilibrio**.

In particolare se prendo uno stato $x(t) = \bar{x}(t) + dx(t)$ (movimento perturbato = stato di equilibrio + perturbazioni) ottengo un movimento dello stato

$$\bar{x} = \dot{\bar{x}} + d\dot{x}(t) = \boxed{d\dot{x}(t)}$$

Dunque la dinamica del movimento perturbato dipende solo dalla dinamica delle perturbazioni.

Allora usiamo lla serie di Taylor:

$$\dot{x} = f(x,u) \approx f(\bar{x},\bar{u}) + \frac{d}{dx} f|_{x=\bar{x},u=\bar{u}}(x-\bar{x}) + \frac{d}{du} f|_{x=\bar{x},u=\bar{u}}(u-\bar{u})$$

$$y = g(x,u) \approx g(\bar{x},\bar{u}) + \frac{d}{dx} g|_{x=\bar{x},u=\bar{u}}(x-\bar{x}) + \frac{d}{du} g|_{x=\bar{x},u=\bar{u}}(u-\bar{u})$$

Da cui ricaviamo i4 del'ave maria A,B,C e D che sono matrici Iacobiane, a moltiplicare $(x - \hat{x})$ e $(u - \hat{u})$

Infine la dinamica di un sistema tempo-invariante attorno a uno stato di equilibrio $\bar{x}$ per $\bar{u}$ può essere approssimato con il sistema lineare

$$\begin{cases} \delta\dot{x} = \dot{x} - \dot{\bar{x}} \approx \cancel{f(\bar{x},\bar{u})} + Adx + Bdu + \cancel{\dot{\bar{x}}} \\ \delta\dot{x} = y - \bar{y} \approx \cancel{g(\bar{x},\bar{u})} + Cdx + Ddu - \cancel{g(\bar{x},\bar{u})} \end{cases}$$

3.2 Studio delle soluzioni generiche per sistemi lineari

Vanno risolte equazioni del tipo $\dot{x} = Ax + Bu$

3.2.1 Caso per sistemi SISO, dim(x)=1

$$\dot{x} = ax + bu(Forma\ di\ Lagrange)$$

la cui soluzione è

$$x(t) = x_0 e^{at} + b \int_0^t e^{a(t-\tau)} u(\tau) d\tau$$

Dimostrazione

$$x(t) = x_0 e^{at} + be^{at} \int_0^t e^{-a\tau} u(\tau) d\tau \tag{1}$$

$$\dot{x}(t) = x_0 a e^{at} + bae^{at} \int_0^t e^{-a\tau} u(\tau) d\tau + be^{at} e^{-at} u(t) \tag{2}$$

$$= a(x_0 e^{at} + be^{at} \int_0^t e^{-a\tau} u(\tau) d\tau) + bu(t) \tag{3}$$

$$= ax(t) + bu(t) \tag{4}$$

Caso per sistemi MIMO, dim(x)>1

La forma dell'equazione cambia per il fatto che usiamo **matrici**:

$$x(t) = x_0 e^{At} + B \int_0^t e^{A(t-\tau)} u(\tau) d\tau$$

Come si tratta *l'esponenziale di una matrice*?

$$e^M = \sum_0^\infty \frac{M^k}{k!} = \frac{I}{0!} + \frac{M}{1!} + \frac{M^2}{2!} + \dots$$

Proprietà

1. $e^{M^-}1$ esiste sempre e coincide con e^{-M}
2. $e^{T^{-1}MT} = T^{-1}e^{M}T$
3. $\frac{\partial}{\partial t}e^{Mt} = Me^{Mt}$

4 Concetto di stabilità interna

Dato uno stato $\tilde{x}$ generato da un ingresso $\hat{u}$ e condizioni iniziali $\hat{x}(0) = \hat{x}_0$ è detto **stabile** per il sistema se:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ : \ \forall x_0 \ ||x - \tilde{x_0}|| \leq \delta \ \Rightarrow \ ||x(t) - \tilde{x}(t)|| \leq \epsilon \ \forall t > 0$$

Cioè $\tilde{x}$ è detto stabile se esiste sempre un range di incertezza sulle condizioni iniziali tale che i movimenti generati da queste ultime restano vicini quanto voglio a $\tilde{x}$.

$\tilde{x}$ si dice *asintoticamente stabile* se è stabile e inoltre $\boxed{\lim_{t\to\infty} ||x(t - \tilde{x}(t))|| = 0}$

4.1 Studio della stabilità dei sistemi LTI

Dato un sistema LTI

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

e sia $\tilde{x}$ un movimento dello stato per $\tilde{u}$ e $\tilde{x}(0) = \tilde{x}_0$, se perturbiamo le C.I. di un $dx = x_0 - \tilde{x}_0$ studiamo la dinamica del movimento originale ($\tilde{x}$) e di quello perturbato:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u} \tag{5}$$

$$\dot{x} = Ax + B\tilde{u} \tag{6}$$

N.B. l'ingresso è lo stesso, scambiano le C.I.!

$$\Rightarrow d\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\tilde{x}} = Ax - A\tilde{x} = Adx \Rightarrow dx(t) = e^{At}dx_0$$

Sostituendo nella condizione di stabilità si vede che dipende solo da $dx(t)$, a prescindere dal movimento $\tilde{x}$, dunque per i sistemi LTI la stabilità è una proprietà **dell'intero sistema** (non dal particolare movimento) e dipende solo dalla matrice e^{At}, dunque solo da A.

A diagonalizzabile

$$A = T\Lambda T^{-1} = ma = mg \ \forall \lambda$$

Dove T è la matrice degli autovettori di A e a e g sono la molteplicità algebrice e geomerica, allora

$$e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1}$$

Dove

$$e^{\Lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda^k}{k!} t^k = \begin{bmatrix} \Sigma \lambda_1^k t^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \Sigma \frac{\lambda_n^k}{k!} t^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Dunque $dx(t)$ è combinazione lineare delle funzioni $e^{\lambda_i t}$, se glin autovalori fossero complessi non sarebbe è un problema perchè si combinerebbero come funzioni sinusoidali e cosinusoidali.

A non diagonalizzabile

Vuol dire che A è *difettiva*, cioè $ma > mg$ per almeno un λ. Sfruttiamo il fatto che esiste sempre la combinazione $A = QJQ^{-1}$ dove Q è la matrice degli autovettori generalizzati (*meaningless*) e J è una matrice in forma di Jordan, ossia diagonale a blocchi, con ogni blocco del tipo:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori di A sono proprio gli elementi della diagonale dei blocchi, la loro ma è uguale a quante volte appaiono sulle diagonali e la loro mg è uguale al numero di blocchi in cui compaiono.

Allora

$$e^{At} = Qe^{Jt}Q^{-1} = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & e^{J_n t} \end{bmatrix}$$

dove

$$e^{J_i t} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{bmatrix} = e^{(\lambda I + J_{0_i})t} = e^{\lambda t} I e^{J_{0_i} t} = e^{\lambda t} e^{J_{0_i} t}$$

Va capito cos'è $e^{J_{0_i} t}$:

$$e^{J_{0_i} t} = I + J_{0_i} t + J_{0_i}^2 \frac{t^2}{2} + \cdots + J_{0_i}^{q-1} \frac{t^{q-1}}{(q-1)!}$$

Dove q indica la dimensione del blocco di Jordan J_i e J_{0_i} si dice **nilpotente** di ordine q

Dunque

$$e^{J_{0_i} t} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{(q-1)}}{(q-1!)} \\ \vdots & & \cdots & & \vdots \\ \vdots & & \cdots & & \frac{t^2}{2} \\ \vdots & & \cdots & & t \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Allora el funzioni che si combinano linearmente in $e^{J_i t}$ sono esattamente

$$\frac{t^k}{k!} e^{\lambda t}, \quad 0 \le k \le q-1$$

Se avessimo avuto autovalori complessi coniugati invece

$$\frac{t^k}{k!} e^{\sigma t} \sin(\omega t), \ \frac{t^k}{k!} e^{\sigma t} \cos(\omega t), \quad 0 \le k \le q-1$$

N.B. in questo caso torna molto urile la *similitudine fra matrici* che permette di avere una matrice diagonale a blocchi.

4.2 Criterio di stabilità per sistemi LTI

Ora che sappiamo quali funzioni (aka *modi*) si combinano linearmente in e^{At} tiriamo fuori qualche criterio:

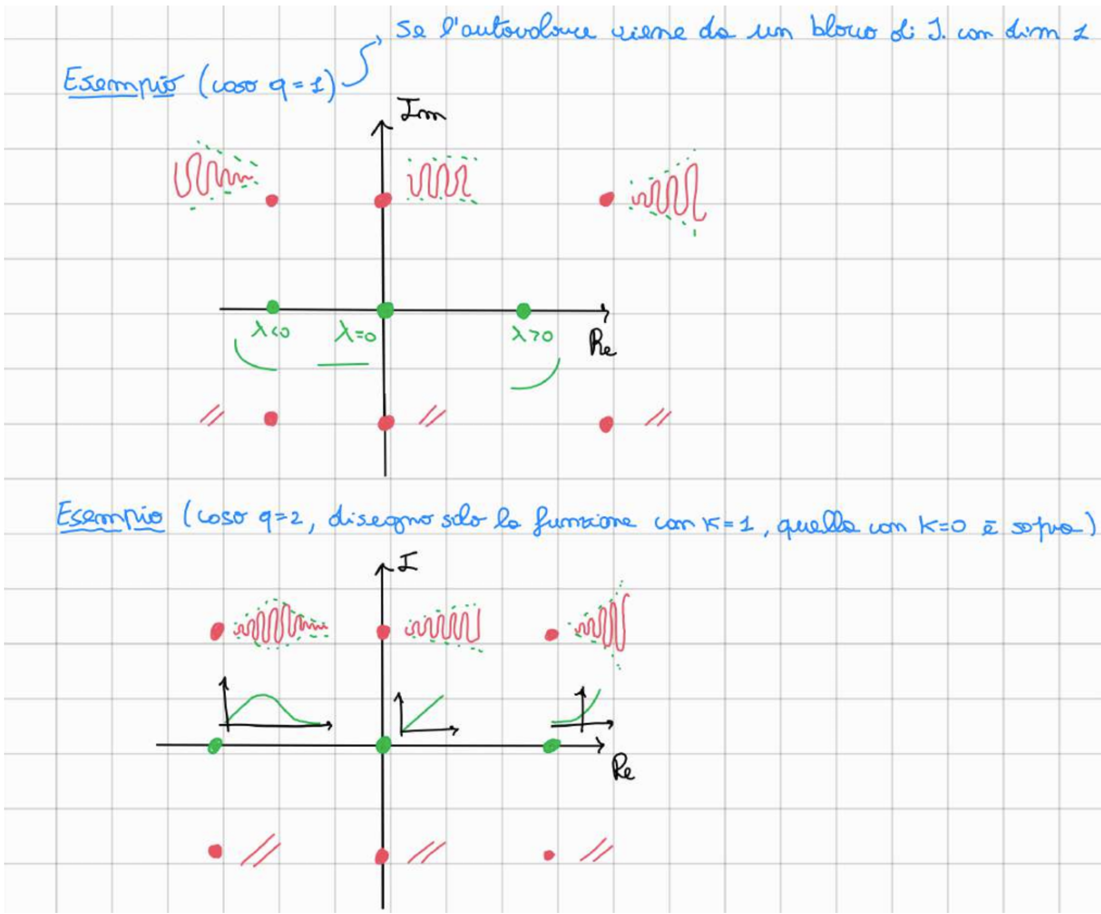


Figura 1: Casi $q = 1$ e $q = 2$

Stabilità	**Modi**	**Autovalori**
Asintotica	$\to 0$	$\{Re\} < 0$
Semplice o Marginale	No $\to \infty$ e almeno uno $\nrightarrow 0$	no $\{Re\} > 0$ almeno uno con $\{Re\} = 0$ **tutti** quelli con $\{Re\} = 0$ hanno $ma = mg$ (caso $q = 1$)
Instabile	Almeno uno $\to \infty$	Almeno uno con $\{Re\} > 0$ **oppure** Almeno uno con $\{Re\} = 0$ e $ma \neq mg$ (caso $q > 1$)

5 Stabilità di un movimento per sistemi non lineari

Dato che la stabilità non è più una caratteristica del sistema, possiamo studiare il stsema **linearizzato** detto anche LTI associato e, dato $\tilde{x}$ stato di equilibrio associato a $\tilde{u}$ per un sistema non lineare tempi-invariante

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = g(x,u) \end{cases}$$

Allora:

a. LTI associato è a.s. $\Rightarrow \tilde{x}$ è a.s.

b. LTI associato instabile $\Rightarrow \tilde{x}$ è instabile

(*stabilità marginale non implica nulla*)

6 Criterio di Lyapunov

Serve a studiare la stabilità di un sistema non lineare il cui LTI associato è *marginalmente stabile*.

Sia V una funzione in $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita $\pm$ in un certo $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ se $V(\tilde{x}) = 0$ e inoltre assume valori $\pm$ in un suo intorno:

$$\exists \delta > 0 : \forall x^* \in B(x^*, \delta),\ x^* \neq \tilde{x}\ V(x^*) \lesseqgtr 0$$

Valgono i seguenti risultati:

1. Se esiste $V(X)$ DP in $\bar{x}$ tale che $\dot{V} = \frac{d}{dx}V(x)$ SDN in $\bar{x}$ allora $\bar{x}$ è un punto di equilibrio stabile del sistema.

2. Se esiste $V(X)$ DP in $\bar{x}$ tale che $\dot{V} = \frac{d}{dx}V(x)$ DN in $\bar{x}$ allora $\bar{x}$ è un punto di equilibrio **asintoricamente** stabile del sistema.

3. Se esiste $V(X)$ DP in $\bar{x}$ tale che $\dot{V} = \frac{d}{dx}V(x)$ DP in $\bar{x}$ allora $\bar{x}$ è un punto di equilibrio **in**stabile del sistema.

Quale $V(x)$ usare? Non esiste una standard, di solito si usano funzioni che descrivono l'energia di un sistema o forme quadratiche
$V(x) = x^T M x$ DP in $x = 0 \Leftrightarrow M = M^T$ e M definita **positiva**
$V(x) = x^T M x$ DN in $x = 0 \Leftrightarrow M = M^T$ e M definita **negativa**

N.B. una matrice è definita positiva se tutti i minori principali di testa sono positivi (criterio di Sylvester). **N.B.** la matrice M viene scelta a caso, si vede se DP o DN

6.1 Lyapanov per sistemi lineari

Possiamo applicare il criterio per i sistemi lineari in alternativa allo studio di e^{At}, *nel caso in cui* $u = 0$

$\dot{x} = Ax + Bu = Ax$ quindi un movimento di equilibrio è sicuramente $x = (0 \cdots 0)$ studiare la stabilità di questo movimento vuol dire studiare la stabilità del sistema:

Secgliamo $M = M^T$ DP, allora

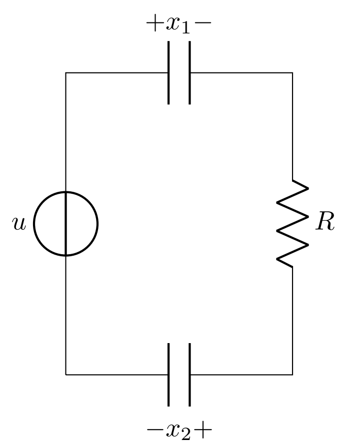
$$V(x) = x^T M x e \dot{V}(x) = \dot{x}^T M x + x^T M \dot{x} = x^T A^T M x + x^T M A x = x^T (A^T M + M A) x = x^T Q x$$

Teorema

Un sistema LTI è *asintoticamente stabile* $\Leftrightarrow \forall Q = Q^T \ DP \ \exists M = M^T \ DP \ : A^T M + M A = -Q$

La forza di questo teorema è che presa una qualunque Q DP posso ricavarmi M semplicemente svolgendo operazioni algebriche

7 Raggiungibilità, Controllabilità, Osservabilità



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{RC}(x_1 + x_2 - u) \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{RC}(x_1 + x_2 - u) \\ y = x_1 \end{cases}$$

Supponiamo di fare un cambio di stato con

$$\begin{cases} \hat{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \hat{x}_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

Dunque

$$\dot{\hat{x}}_1 = -\frac{2}{RC}(x_1 + x_2 - u) = \frac{2}{RC}(\hat{x}_1 - u) \qquad \text{(influenzabile)}$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = 0 \qquad \text{(non è influenzabile direttamente da u!)}$$

$$y = x_1 = \frac{1}{2}(\hat{x}_1 + \hat{x}_2)$$

Una domanda che possiamo farci è se manipolando come vogliamo u possiamo sempre *raggiungere* lo stato desiderato[2], vogliamo trovare un modo per sapere quali variabili di stato sono influenzabili da u e quali no, questa proprietà prende il nome di **raggiungibilità**.

Dato un sistema LTI in forma di stato, uno stato $\tilde{x}$ si dice raggiungibile se

$$\exists t^* > 0,\ \tilde{u}(t) \in [0, t^*]$$

Tali che se $\tilde{x}_f(t) \in [0, t^*]$ è il movimento generato da $\tilde{u}(t)$ allora $\tilde{x}_f(t^*) = \tilde{x}$

[2] HAHAHAHA, no

Questa proprietà divide gli stati in *raggiungibili* e *non raggiungibili*, la somma di questi set, è $\mathbb{R}^n$ **N.B.** questa proprietà non dipende mai dall'uscita, infatti si parla anche di *raggiungibilità della coppia* (A,B).

Un sistema che non ha stati non raggiungibili ($x_{NR} = \varnothing$) si dice *completamente raggiungibile*

$$x_{NR} = \varnothing \Leftrightarrow M_r = [B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B] \ : \ rank(M_r) = n$$

$M_r \in \mathbb{R}^{n \times n \cdot m}$ matrice di raggiungibilità

Se un sistema non è completamente raggiungibile possiamo isolare le parti non raggiungibili:

a. Chiamo $n_r = rank(M_r)$, dato che non è c.r. sarà minore di n

b. Effettuo un cambio di variabile tramite T_r: $\hat{x} = T_r x$, $\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u$ tale che le matrici $\hat{A}$ e $\hat{B}$ abbiano la forma

$$\hat{A} = T_r A T_r^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & \hat{A}_{ab} \\ 0 & \hat{A}_b \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = T_r B = \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\hat{A}_{ab}$ può essere 0, $\hat{A}_a \in \mathbb{R}^{n_r \times m}$, $\hat{B}_a \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$

c. T_r^{-1} viene scelta in questo modo:[n_r colonne lin. ind. **di** M_r | $n - n_r$ colonne lin. ind.]

Allora posso partizionare anche $\hat{x}$:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_a \\ \hat{x}_b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}}_a = \hat{A}_a \hat{x}_a + \hat{A}_{ab}\hat{x}_b + \hat{B}u \\ \dot{\hat{x}}_b = \hat{A}_b \hat{x}_b \end{cases}$$

Nell'ultima equazione non compare u, è la parte non raggingibile!

Nota

$\hat{A}$ è triangolare a blocchi, detti *autovalori della parte raggiungibile*

$$autov(\hat{A}) = autov(A) = autov(\hat{A}_a) + autov(\hat{A}_b)$$

7.1 Controllabilità

Per i sistemi LTI **raggiungibilità** e **controllabilità** coincidono (se e solo se), cioè *si può poratre il sistema da uno stato qualsiasi all'origine* in tempo finito.

Se la parte non controllabile di un sistema è asintoticamente stabile ($\{Re\}(\lambda_{NAS}) < 0$) il sistema si dice **stabilizzabile**.

Per un sistema **completamente controllabile** esiste sempre almeno un ingresso che permette al sistema di portarsi da uno stato x_A a uno stato x_B passando dall'origine.

7.2 Osservabilità

Dato un sistema LTI in forma di stato, uno stato $\tilde{x} \neq \vec{0}$ si dice non **osservabile** se: $\forall t^* > 0$ finita l'evoluzione libera dell'uscita (y) generata da $\tilde{x}$, y_l è tale che $y_l(t) = 0,\ \forall t \in [0, t^*]$

In altre parole se un qualsiasi tratto dell'uscita libera generata da $\tilde{x}$ è indistinguibile dallo stesso dell'uscita libera generata da $x = \vec{0}$.

Questa proprietà divide gli stati in *osservabili* e *non osservabili*, nota che questa proprietà *non dipende mai dall'ingresso*, infatti si parla anche di osservaibilità della coppia (A,C).

Un sistema per il quale $x_{NO} = \varnothing$ si dice **completamente osservabile**.

$$x_{NO} = \varnothing \Leftrightarrow M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \ :\ rank(M_o) = n$$

I blocchi sono $l \times n$, quindi $M_o \in \mathbb{R}^{nl \times n}$

Se un sistema non è completamente osservabile possiamo isolare le parti non osservabili:

a. Chiamo $n_o = rank(M_o)$, dato che non è c.o. sarà minore di n

b. Effettuo un cambio di variabile tramite T_o: $\hat{x} = T_o x$, $\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u$ tale che le matrici $\hat{A}$ e $\hat{C}$ abbiano la forma

$$\hat{A} = T_o A T_r^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & 0 \\ \hat{A}_{ab} & \hat{A}_b \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = T_o C = \begin{bmatrix} \hat{C}_a & 0 \end{bmatrix}$$

$\hat{A}_{ab}$ può essere 0, $\hat{A}_a \in \mathbb{R}^{n_o \times n_o}$, $\hat{C}_a \in \mathbb{R}^{l \times n_o}$

c. T_r^{-1} viene scelta in questo modo:[n_o vettori lin. ind. | $n - n_o$ vettori che compongono una base del ker(M_o)] ($\xi_i \ :\ M_o \xi_i = 0 \Rightarrow span(\xi_i) = x_{NO}$)

Allora posso partizionare anche $\hat{x}$:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_a \\ \hat{x}_b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}}_a = \hat{A}_a \hat{x}_a \\ \dot{\hat{x}}_b = \hat{A}_{ab}\hat{x}_b + \hat{A}_b \hat{x}_b \\ \hat{y} = \hat{C}_a \hat{x}_a \end{cases}$$

Nell'ultima equazione non compare $\hat{x}_b$, è la parte non osservabile!

Nota

$\hat{A}$ è triangolare a blocchi, detti *autovalori della parte osservabile*

$$autov(\hat{A}) = autov(A) = autov(\hat{A}_a) + autov(\hat{A}_b)$$

8 Legame tra forme di stato e funzioni di trasferimento

Ricordiamoci come è fatta una funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}} = \frac{Y(s)}{U(s)} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \begin{cases} sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

Esplicitiamo la $X(s)$ dalla prima:

$$sX(s) - AX(s) = x(0) + BU(s) \tag{7}$$
$$X(s)(sI - A) = x(0) + BU(s) \tag{8}$$
$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s) \tag{9}$$

Riportandosi nel dominio del tempo

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Dove il primo addendo rappresenta le **condizioni iniziali** e il secondo l'**evoluzione forzata**.

Guardiamo ora l'uscita $Y(s)$

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x_0 + C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s) \tag{10}$$
$$x(0) = 0 \tag{11}$$
$$Y(S) = U(s)[C(sI - A)^{-1} + D] \tag{12}$$
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \boxed{C(sI - A)^{-}1B + D} \tag{13}$$

Ricordando che

$$M^{-1} = \frac{adj(M)}{\det(M)} = \frac{cof^T(M)}{\det(M)} \ : \ (cof(M))_{i,j} = (-1)^{i+j}\det(M_{i,j})$$

Dunque la funzione di trasferimento

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \tag{14}$$
$$= C\frac{adj(sI - A)}{\det(A)}B + D \tag{15}$$
$$= \frac{Cadj(sI - A)B + Dp_{A(s)}}{p_{A(s)}} \tag{16}$$

Dove $p_{A(s)}$ è il polinomio caratteristico della matrice A, l'aggiunta di A ha elementi di grado al più $n-1$ e il polinomio caratteristico ha grado esattamente n, allora (*ricordandosi che la f. di trasferiemnto può essere una matrice*)

a. Il sistema è **causale** se $\deg(denominatore) \geq \deg(numeratore)$ (*a valle di semplificazioni*)

b. In generale i poli della funzione di trasferimento sono *un sottoinsieme degli autovalori* della matrice A (*tranne eventuali cancellazioni*)

9 Ispezione di un sistema

Un sistema può essere sia *non completamente raggiungibile* che *non completamente osservabile*, è possibile dimostrare che esiste **sempre** una scomposizione detta **scomposizione di Kolman** che porta il sistema in una forma che evidenzia tutte le parti raggiungibili e non, osservabili e non, tale si chiama **forma canonica**:

$$\hat{x} = T_k x, \qquad \begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y = \hat{C}\hat{x} + Du \end{cases}$$

Con le varie componenti

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_a \\ \hat{x}_b \\ \hat{x}_c \\ \hat{x}_d \end{bmatrix}, \ \hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_a & \hat{A}_{ab} & \hat{A}_{ac} & \hat{A}_{ad} \\ 0 & \hat{A}_b & 0 & \hat{A}_{bd} \\ 0 & 0 & \hat{A}_c & \hat{A}_{cd} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{A}_d \end{bmatrix}, \ \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_a \\ \hat{B}_b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{C}_b & 0 & \hat{C}_d \end{bmatrix}$$

I valori non nulli nelle matrici $\hat{B}$ e $\hat{C}$ sono rispettivamente la parte raggiungibile e osservabile.

Dato che gli autovalori sono separati nella matrice $\hat{A}$ si può studiare la stabilità delle singole parti.

a. x_a parte **completamente osservabile** e raggiungibile

b. x_b parte raggiungibile ma **non** osservabile

c. x_c parte osservabile ma **non** raggiungibile

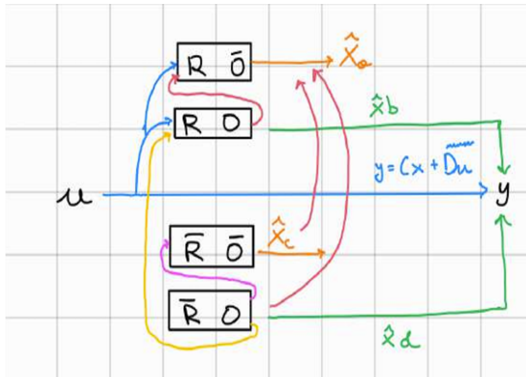
d. x_d parte **né** osservabile **né** raggiungibile

Riprendiamo la soluzione $y(t)$ con $\hat{x}$ in forma canonica:

$$y(t) = \hat{C}e^{\hat{A}t}\hat{x}_0 + \int_0^t \hat{C}e^{\hat{A}(t-\tau)}\hat{B}ud\tau + Du(t) \tag{17}$$

$$Y(s) = \hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{x}_0 + [\hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{B} + D]U(s) \tag{18}$$

Come diventa $G(s)$ con le matrici trovate prima?



$$\hat{C}e^{\hat{A}(t-\tau)}\hat{B} = \begin{bmatrix}0 & \hat{C}_b & 0 & \hat{C}_d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{\hat{A}_a(t-\tau)} & * & * & * \\ & e^{\hat{A}_b(t-\tau)} & * & * \\ & & e^{\hat{A}_c(t-\tau)} & * \\ & & & e^{\hat{A}_d(t-\tau)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{B}_a \\ \hat{B}_b \\ 0 \\ 0\end{bmatrix} \tag{19}$$

$$= \begin{bmatrix}0 & \hat{C}_b e^{\hat{A}_b(t-\tau)} & * & *\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{B}_a \\ \hat{B}_b \\ 0 \\ 0\end{bmatrix} \tag{20}$$

$$= \hat{C}_b e^{\hat{A}_b(t-\tau)}\hat{B}_b \tag{21}$$

allora

$$y(t) = \hat{C}e^{\hat{A}t}\hat{x}_0 + \int_0^t \hat{C}_b e^{\hat{A}_b(t-\tau)}\hat{B}_b u d\tau + Du(t)$$

Dunque

$$\boxed{G(s) = \hat{C}_b e^{\hat{A}_b(t-\tau)}\hat{B}_b + D}$$

Quindi dipende solo dalla parte completamente osservabile e raggiungibile, in più i **poli** della funzione di trasferimento sono *gli autovalori della matrice* $\hat{A}_b$

Esempio a pag. 52[3]

9.1 Ispezione diretta della completa raggiungibilità

Sarebbe bello se ci fosse un modo per poter 'vedere a occhio' la completa raggiungibilità duardando direttamente le matrici A e B, in effetti c'è, vediamo come si fa:

[3] Il rango di una matrice è l'ordine massimo delle sottomatrici quadrate con determinante diverso da zero che si possono estrarre da A, oppure il numero di righe lin. indip.

Caso di sustema SISO con A diagonale

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} b1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; M_r = \begin{bmatrix} b1 & \lambda_1 b_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} b_1 \\ \vdots & & \dots & \vdots \\ bn & \lambda_n b_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} b_n \end{bmatrix}$$

$$rank(M_r) = \max \Leftrightarrow \begin{cases} B \textit{ non ha elementi nulli} \\ \lambda \textit{ sono tutti diversi} \end{cases}$$

Lemma PBM per la raggiungibilità

In generale per sistemi MIMO e A in forma di Jordan, la coppia A, B è completamente raggiungibile **se e solo se** il rango della matrice $[\lambda I - A|B] \in \mathbb{R}^{n \times (n+m)}$ è *massimo per ogni lambda.*

Osservazione:

- Per λ_i non autovalore di A, $rank(\lambda_i I - A) = \max$
- Per λ_i autovalore di A , $rank(\lambda_i I - A) \neq \max$

Dimostrazione

Supponiamo che esista $\lambda_i \in \mathbb{C} \,:\, rank(P(\lambda_i)) < n$, allora $\exists q \in \mathbb{C}^n \,:\, q^T P(\lambda_i) = q^T[\lambda_i I - A|B] = 0$, cioè q appartiene al nucleo[4] di $P(\lambda_i)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} q^T B = 0 \\ q^T A = \lambda_i q^T \end{cases}$$

Dunque post-moltiplicando iterativamente la seconda equazione per $A^* B$ ottengo:

$$q^T[B|AB \cdots A^{n-1}B] = q^T M_r = 0, \; q \neq 0 \Rightarrow rank(M_r) < \max$$

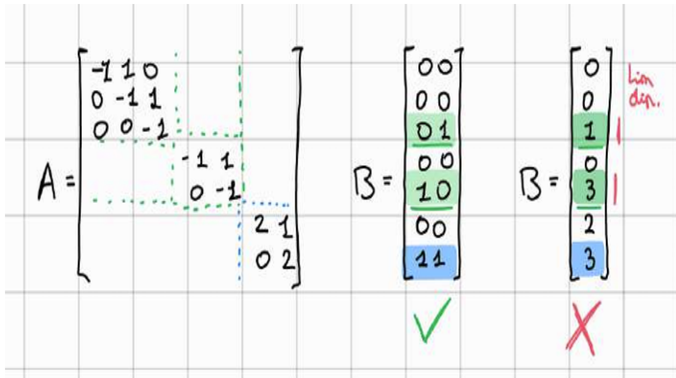
Considerando il caso di partenza, con A in forma di Jordan:

- Per λ_i non autovalore ottengo rango massimo
- Per λ_i autovalore ottengo la matrice $[\lambda I - A]$ con tante righe nulle quanti sono i blocchi di Jordan corrispondenti a λ_i, cioè la sua *molteplicità geometrica* (quelli con solo λ senza l'1 a fianco)

Affinché $P(\lambda_i)$ abbia rango massimo per ogni lambda *tutti i $b_{j,m}$ dei blocchi di un particolare autovalore devono essere linearmente indipendenti.*

Si deduce che se un sistema SISO ha un autovalore con *molteplicità geometrica maggiore di 1*, non è un comonente raggiungibile.

[4] boh



9.2 Ispezione diretta per la completa osservabilità

Il lemma PBM diventa il seguente: *La coppia A, C è completamente osservabile se e solo se il rango della matrice*

$$\begin{bmatrix} \lambda I - A \\ \cdots \\ C \end{bmatrix}$$

ha rango massimo per ogni lambda.

In pratica si agisce analogamente al caso precedente solo che tutte le **colonne** $C_{i,1}$ devono essere linearmente indipendenti. Quindi se un sistema SISO ha un autovalore con $mg > 1$ è un componente non osservabile

10 Dalla forma di stato alla funzione di trasferimento

Ci aspettiamo di trovare infinite soluzioni, scelte equivalenti delle variabili di stato:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\beta_n s^n + \beta_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0} \tag{22}$$

$$= \frac{\hat{\beta}_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \hat{\beta}_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0} + \hat{\beta}_n \;\rightarrow\; \hat{\beta}_i = \beta_i - \beta_n \alpha_i \tag{23}$$

Forma più generale, considerando che si trattano proprie e strettamente proprie

10.1 1° Rappresentazione possibile: forma canonica di raggiungibilità

Per costruzione è sempre completamente raggiungibile.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_n \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 & \cdots & \hat{\beta}_{n-1} \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_n \end{bmatrix}$$

La completa osservabilità dipende *solo dai polinomi a fattor comune tra D e N.*

10.2 2° Rappresentazione possibile: forma canonica di osservabilità

Per costruzione è sempre completamente osservabile.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & & 0 & -\alpha_1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_{n-1} \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_n \end{bmatrix}$$

La completa raggiungibilità dipende *solo dai polinomi a fattor comune tra D e N.*

Esempio (blocco spinto da una molla)

Forma normale

$$M\ddot{y} = -c\dot{y} - ky + u$$

Forma di stato $x_1 = y, \ x_2 = \dot{y}$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{c}{M} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + 0u \end{cases}$$

Funzione di trasferimento

$$s^2 MY(s) + scY(s) + kY(s) = U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1/M}{s^2 + \frac{c}{M}s + \frac{k}{M}}$$

Forma canonica di raggiungibilità

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{c}{M} \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} \frac{1}{M} & 0 \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Forma canonica di osservabilità

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{k}{M} \\ 1 & -\frac{c}{M} \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} \frac{1}{M} \\ 0 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

11 Froma minima

Un sistema completamente raggiungibile e osservabile è detto in *forma minima*, cioè non è possibile ustilizzare un numero minore di variabili di stato per descrivere la stessa relazione tra ingresso e uscita.

Per sistemi in forma minima la *BIBO stabilità* implica la *stabilità interna asintotica*