Appunti FdA
Lezioni di Munafò

Lorenzo Monaci

28 settembre 2024

Indice

1 Introduction to control theory

Definizione di **Sistema**
Funzione di **variabili controllate**, **disturbi** e **parametri**

$$Input + Disturbi \rightarrow Sistema \rightarrow Output$$

1.1 Sistemi LTI

Risposta a $\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}$ tramite la risposta impulsiva $h(t)$:
Somma di impulsi infinitesimi $\rightarrow 1(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} 1(\alpha) \cdot h(t-\alpha) d\alpha$

Trasformata di Laplace

Dal dominio del tempo al dominio di Laplace

$$t \rightarrow s = \sigma + j\omega \rightarrow e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t} = e^{\sigma t} \cdot [\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)]$$

Definizione: $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$
Antitrasformata: $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2j\pi} \lim_{\omega\rightarrow\infty} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(s) \cdot e^{st} ds$
Proprietà:

1. linearità
2. traslazione temporale: $\mathcal{L}\{f(t+\tau)\} = F(s)e^{\tau s}$
3. traslazione in frequenza: $\mathcal{L}\{f(t)e^{\alpha t}\} = F(s-\alpha)$
4. derivata: $\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = sF(s)$
5. integrale: $\mathcal{L}\{\int_0^t f(t)dt\} = \frac{1}{s}F(s)$
6. convoluzione: $f(t) \otimes g(t) = F(s) \cdot G(s)$

Funzione di trasferimento

$\mathcal{L}\{h(t)\}$ a condizioni iniziali nulle (variabili di statostudiamo il sistema 'da fermo') moltiplicata per $\mathcal{L}\{1(t)\}$
$H(s) \rightarrow$ matrice di trasferimento $H_{i,j} \rightarrow$ funzione di trasferimento per l'ingresso i-esimo e l'uscita j-esima

Sistemi SISO $\rightarrow H(s) \in \mathbb{C}^{1\times 1}$

Poli/zeri collidono, sisuppone che non accada mai.
Grado di $D(s)$ **ordine del sistema** (n° variabili di stato)

Stabilità BIBO (Bounded Input Bounded Output)

$$\exists\ M \in \mathbb{R}^+ : \forall\tilde{u}(t)\ |\tilde{u}(t)| < B,\ B \in \mathbb{R}^+\ e\ |\tilde{y}(t)| < M$$

Vero **se e solo se** i poli di $G(s)$ hanno $\{Re\} < 0$

2 Diagrammi a blocchi

Semplificando è possibile che il grado del sistema sia inferiore alla somma dei singoli blocchi, si ha cancellazione di zeri e poli e si perdono **stabilità** o **controllabilità**.

Se si cancella un polo con $Re \geq 0$ si ha una **cancellazione critica**, 'nasconde' una parte instabile

2.1 Blocchi in serie

$$G_1(s) = \frac{U(s)}{E(s)} \; e \; G_2(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Siccome $Y(s) = G_2(s)U(s) = G_2(s)G_1(s)E(s)$
allora

$$G(s) = \boxed{G_1(s)G_2(s)} = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \cdot \frac{N_2(s)}{D_2(s)}$$

Se N_1 e D_2 hanno radici in comune allora si perde **stabilità** Se N_2 e D_1 hanno radici in comune allora si perde **osservabilità**

Se $G_1(s)$ e $G_2(s)$ sono asintoticamente stabili allora anche $G(s)$ lo è

2.2 Blocchi in parallelo

$$G_1(s) = \frac{Y_1(s)}{R(s)} \; e \; G_2(s) = \frac{Y_2(s)}{R(s)}$$

Dove $Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = G_1(s)R(s) + G_2(s)R(s) = R(s) \cdot [G_1(s) + G_2(s)]$
Quindi

$$G(s) = \boxed{G_1(s) + G_2(s)} = \frac{N_1D_2 + N_2D_1}{D_1D_2}$$

Adesso se D_1 D_2 hanno radici in comune perdiamo sia **osservabilità** che **controllabilità**.

2.3 Blocchi in ciclo chiuso

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{Y(s)}{R(s) - Y_m(s)} \quad G_2(s) = \frac{Y_m(s)}{Y(s)}$$

Segue che

$$Y(s) = G_1(s) \cdot [R(s) - Y(s)G_2(s)] = \frac{G_1(s)R(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

Dunque

$$G(s) = \boxed{\frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}} = \frac{N_1D_2}{D_1D_2 + N_1N_2}$$

Equazione caratteristica dei sistemi a ciclo chiuso: $D_1D_2 + N_1N_2 = 0$

Se N_1 e D_2 hanno radici in comune $G(s)$ perde **osservabilità** e **controllabilità**

Corollario

Un sistema è **asintoticamente stabile** se **non ci sono cancellazioni** e le radici dell'eq. caratteristica hanno parte reale negativa.

Osservazione

Quando ci sono cancelazioni bisogna vedere che non siano critiche.
'si possono spostare i poli dove servono?'

2.4 Approssimazione del polo dominante

Con quest'approssimazione si abbassa il grado del sistema fino a 2 o 1, considerando solo le parti più 'lente' a rispondere, le quali caratterizzano maggiormente la risposta impulsiva.

Riduzione di un sistema del 2° ordine (2 poli reali)

$$G(s) = \frac{\alpha\beta}{(s+\alpha)(s+\beta)}$$

Se $\beta >> \alpha$ (di almeno 5 volte) si approssima per $s << \beta$

$$G(s) \approx \frac{\alpha}{s+\alpha} = \boxed{\frac{1}{1/\alpha + 1}}$$

Riduzione di un sistema del 3° ordine (1 polo reale e 2 complessi)

$$G(s) = \frac{\alpha\omega_o^2}{(s+\alpha)(s^2+2\xi\omega_o s+\omega_o^2)}$$

Che diventa

$$\frac{\alpha}{s+\alpha}$$

oppure

$$\frac{\omega_o^2}{s^2+2\xi\omega_o+\omega_o^2}$$

a seconda se $\alpha << \xi\omega_o$ o $\alpha >> \xi\omega_o$

$G(0) = \frac{Y(s)}{U(s)} \rightarrow FV = \lim_{s\rightarrow 0} G(s)U(s)\cdot s = \lim_{s\rightarrow 0} G(s)\cdot k = \boxed{G(0)\cdot k}$

Se $\bar{p}$ e $\bar{z}$ sono molto vicini non sono considerati nell'approssimazione, anche se $\bar{p}$ è il più lento.

3 Risposta a 1(t)

Sistemi del 1° ordine

$$G(s) = \frac{1}{1+\tau s} \quad p_1 = -\frac{1}{\tau} \rightarrow Y(s) = \frac{1}{1+\tau s}\cdot\frac{1}{s}$$

Quindi

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$$

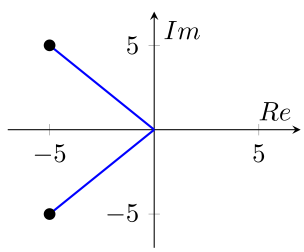
Un po' di definizioni:
τ è detta **costante di tempo** del sistema (per sistemi del 1° ordine)
t_s è il tempo di **settling**: $t_s = -\tau \ln(0.05)$ (in questo caso del 5%).

Sistemi del 2° ordine

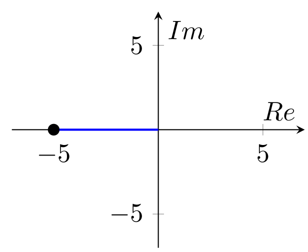
$$G(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_o^2} + \frac{2}{\omega_o}\xi s + 1}$$

Dove ξ è detto **coefficiente di smorzamento** e ω_o **frequenza naturale**

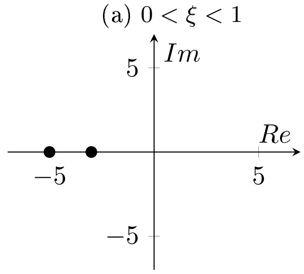
Se abbiamo un sistema in cui $\omega_o < 0$ oppure $\xi < 0$ risulta instabile e non ci interessa. Se invece $\xi \geq 0$ ho **2 poli reali** e posso usare l'approssimazione al polo dominante:



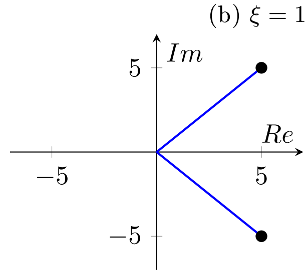
(a) $0 < \xi < 1$



(b) $\xi = 1$



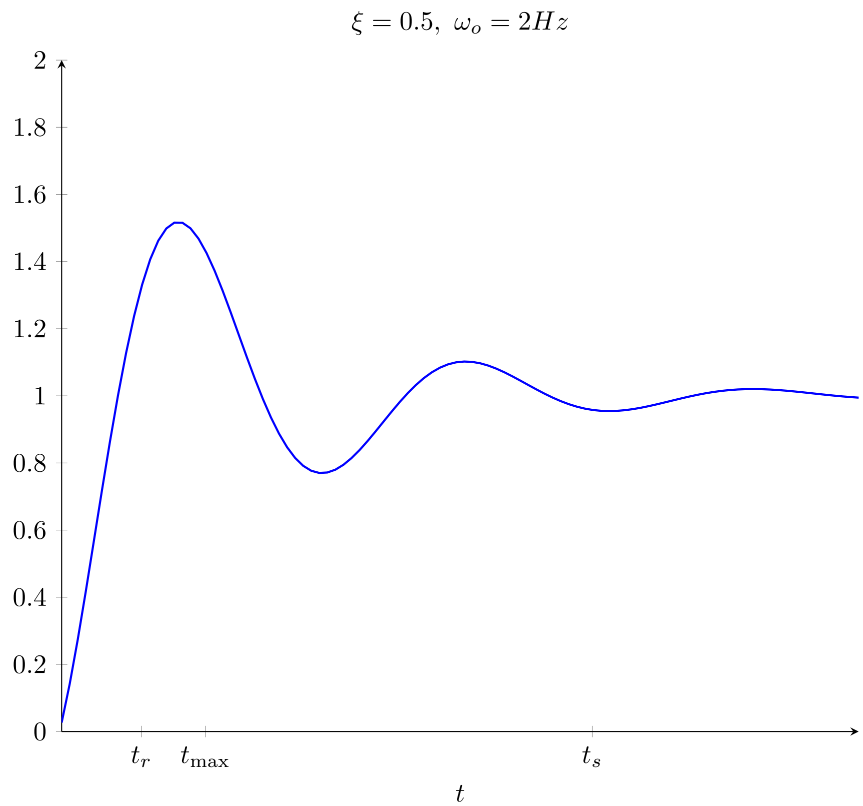
(c) $\xi > 1$



(d) $\xi < 0$

Noi assumiamo $0 < \xi < 1$ cosi che abbiamo 2 poli complessi coniugati:

- $s = -\xi\omega_o \pm j\omega_o\sqrt{1-\xi^2}$
- $y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_o t} \sin(\omega_o\sqrt{1-\xi^2 t} + \arcsin(\xi))$



- $t_s \approx -\frac{1}{\xi\omega_o}\ln(0.05)$ (nei sistemi del 1° ordine $\xi = 1,\ \tau = -\frac{1}{\omega_o}$)
- $T_p = \frac{2\pi}{\omega_o\sqrt{1-\xi^2}}$
- $t_r \approx \frac{1.8}{\omega_o}$ (tempo di **rise**)
- **max overshoot** (massimo superamento percentuale): $5\% = 100e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ da cui mi ricavo ξ
- **tempo massimo di superamento**: $t_{max} = \frac{\pi}{\omega_o\sqrt{1-\xi^2}} = \arg\max_{t\geq 0} y(t)$

Ritardo

$$G(s) = e^{-\tau s}$$

Abbiamo uno scostamento in frequenza proporzionale a ω e al ritardo:

$$e^{-j\omega} \ \Rightarrow\ |G(s)| = 1 \ e \ \angle G(s) = -\omega\tau$$

Gli **zeri** con $Re > 0$ si somportano come dei ritardi.

Per esempio la risposta a $1(t)$ di una $G(s)$ generica è esattamente 3 secondi indietro rispetto a $G(s)e^{-3s}$. Molto simile a $(s-3)G(s)$

4 Diagrammi di Bode

Ipotizziamo in partenza che lavoriamo con sistemi **LTI** che sono **Asintoticamente Stabili**. Una proprietà utile di questi sistemi è che dato un ingresso $u(t) = A\sin(\omega t)$ l'uscita converge sempre a $\boxed{y(t) = A|G(j\omega)|\sin(\omega t + \angle G(j\omega))}$

Dove il modulo di G è detto **gain** e l'argomento **fase**, da notare che l'uscita oscilla alla **stessa frequenza** dell'ingresso!

Ricordandoci che siamo all'equilibrio ($\sigma = 0$), se conosco $G(j\omega)$ allora conosco $y(t)\ \forall\ x(t) \propto \sin(\omega t)$

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\angle G(j\omega)}$$

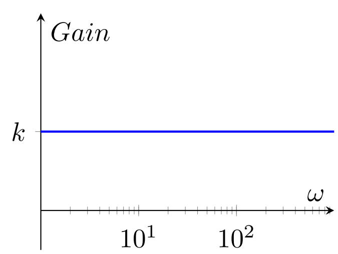
Dove per $\omega > 0$

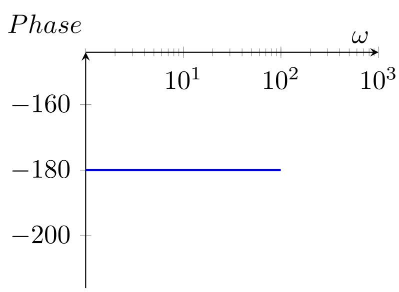
$$|G(j\omega)| = \sqrt{Re^2\{G\} + Im^2\{G\}} \quad \angle G(j\omega) = \arctan 2(Im\{G\}, Re\{G\})$$

Si tracciano quindi 2 diagrammi, uno per il gain (dB) e uno per la fase (gradi).

4.1 Funzioni costanti

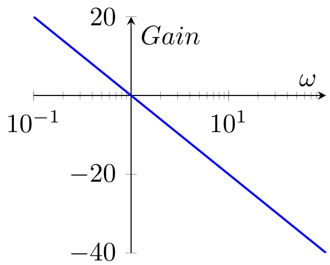
$G(j\omega) = k \in \mathbb{R} \Rightarrow$ guadagno $= \sqrt{k^2} = |k| = 20\log_{10}|k| dB$, fase $= \arctan(\frac{0}{k}) = 0°$ per $k > 0$ e $-180°$ per $k < 0$



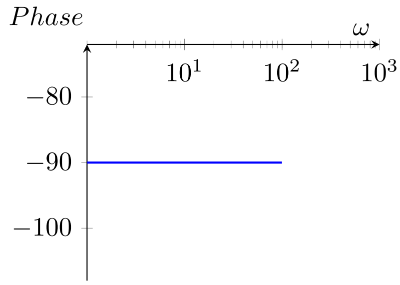


4.2 Funzioni con poli nell'origine

$G(s) = \frac{1}{s} = -\frac{j}{\omega} \Rightarrow$ Guadagno $= \sqrt{1/\omega^2} = \frac{1}{\omega} = 20\log_{10}\frac{1}{\omega} dB$, fase $= \arctan 2(-\frac{1}{\omega}, 0) = -90°$



(a) Ogni decade scende di 20dB



4.3 Funzioni con poli reali

$$G(s) = \frac{1}{1+\frac{j\omega}{\omega_o}} = \frac{1}{1+\frac{\omega^2}{\omega_o^2}} - \frac{\frac{j\omega}{\omega_o}}{1+\frac{\omega^2}{\omega_o^2}}$$

Guadagno[1]:

$$20\log_{10}\sqrt{(\frac{1}{1+\frac{\omega^2}{\omega_o^2}})^2 + (\frac{\frac{j\omega}{\omega_o}}{1+\frac{\omega^2}{\omega_o^2}})^2}$$

Fase:

$$\arctan 2(\frac{-\frac{\omega}{\omega_o}}{1+\frac{\omega^2}{\omega_o^2}}, \frac{1}{1+\frac{\omega^2}{\omega_o^2}}) = \arctan(-\frac{\omega}{\omega_o})$$

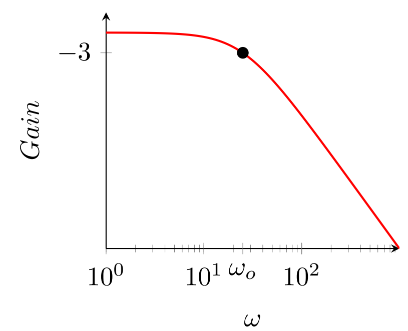
Qui distinguiamo 3 casi:

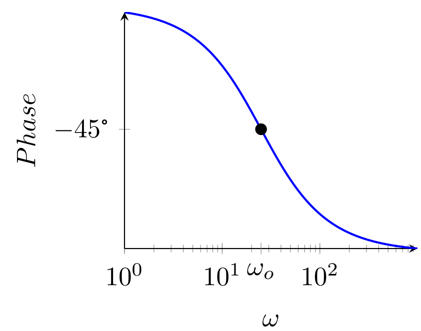
a. $\omega \ll \omega_o$
   gain $= -20\log_{10}(1) = 0\ dB$
   fase $= \arctan(0) = 0°$

b. $\omega = \omega_o$
   gain $= -20\log_{10}(\sqrt{2}) \approxeq -3\ dB$
   fase $= \arctan(-1) = -45°$

c. $\omega \gg \omega_o$
   gain $= -20\log_{10}(\infty) = -\infty\ dB$
   fase $= \arctan(-\infty) = -90°$

[1] Per l'inverso della funzione il diagramma viene specchiato





Nel caso in cui $\omega < 0$ il sistema è specificato instabile e si considera 0°

4.4 Funzioni con poli complessi coniugati

$$G(s) = \frac{\omega_o^2}{s^2 + 2\xi\omega_o s + \omega_o^2}$$

Dove $0 \leq \xi \leq 1$

$$G(j\omega) = \cdots = \frac{1 - (\frac{\omega}{\omega_o})^2}{[1 - (\frac{\omega}{\omega_o})^2]^2 + [2\xi\frac{\omega}{\omega_o}]^2} - j\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_o}}{[1 - (\frac{\omega}{\omega_o})^2]^2 + [2\xi\frac{\omega}{\omega_o}]^2}$$

a. $\omega \ll \omega_o$ $(Re = 1,\ Im = 0)$
gain $= 20\log_{10}(1) = 0$dB fase $= \arctan(0) = 0°$

b. $\omega = \omega_o$ $(Re = 0,\ Im = \frac{1}{2\xi})$
gain $= 20\log_{10}\sqrt{\frac{1}{4\xi^2}} = -20\log_{10}(2\xi)$ da cui:
$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{2} = 0dB \\ \xi < \frac{1}{2}\ supera\ \omega_o \\ \xi > \frac{1}{2}\ sotto\ \omega_o \\ \xi = 0 = +\infty dB \end{cases} \text{fase} = \arctan 2(2\xi, 0) = \arctan(\infty) = -90°$$

c. $\omega \gg \omega_o$ $(Re = -(\frac{\omega}{\omega_o})^{-}2,\ Im = -2\xi(\frac{\omega}{\omega_o})^{-3})$
gain $= 20\log_{10}\sqrt{((-\frac{\omega}{\omega_o})^{-}2)^2 + (-2\xi(\frac{\omega}{\omega_o})^{-3})^2} \approx 20\log_{10}\sqrt{(\frac{\omega}{\omega_o})^{-}4} = -40\log_{10}(|\frac{\omega}{\omega_o}|)$
che è una retta con pendenza di -40 dB per decade ceh si annulla in ω_o
fase $= \arctan 2(-2\xi(\frac{\omega}{\omega_o})^{-3}, -(\frac{\omega}{\omega_o})^{-2}) = \arctan(2\xi\frac{\omega}{\omega_o}) = -180°$

4.5 Diagrammi per zeri qualsiasi

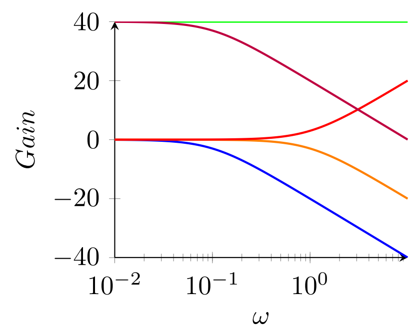
Se ho uno zero, il diagramma viene **specchiato**, perché poli e zeri uguali si cancellano:

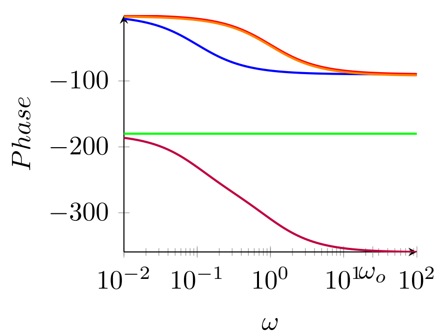
$$G(s) = s = \frac{1}{\frac{1}{s}} = 1 - \frac{1}{s}$$

Dove abbiamo uno zero trasformato in polo e uno zero. Siccome disegnamo logaritmi la risposta in frequenza generale è la somma delle risposte in frequenza dei singoli blocchi. ($\log(AB) = \log(A) + \log(B)$)

Esempio

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{(s+0.1)(s-1)} = -10^2 \cdot \frac{1}{\frac{s}{0.1}+1} \cdot \frac{1}{\frac{s}{-1}+1} \cdot (\frac{1}{s+1})^{-1}$$





Definizioni

- **Picco di risonanza**: Massimo valore di ampiezza 'M_r'
- **Frequenza di picco**: Frequenza a cui avviene il picco di risonanza 'ω_r'

4.6 Banda - Proprietà della risposta in frequenza

Range di frequenza in cui il guadagno è significativo. In un sistema del 1° ordine

$$\frac{1}{1+\frac{s}{\omega_o}}$$

che ha banda B $\in [0, \omega_o]$[2] scrivibile come

$$\frac{1}{1+\tau s}$$

con $\tau = \frac{1}{\omega_o}$ è il **tempo** per arrivare al 64% del valore finale.

Quindi possiamo interpretare la banda come la **velocità di risposta**, anche nei sistemi di ordine maggiore.

In un sistema a ciclo chiuso che ha risposta in frequenza

$$H = \frac{1}{1+L}$$

dove L è un sistema open loop causale (conpiù poli che zeri) abbiamo che il diagramma di Bode:

[2]Dopo inizia la retta a pendanza -20dB/decade

1. inizia a 0dB, infatti

$$\lim_{\omega \to 0} |H(j\omega)| = \lim_{\omega \to 0} \frac{|L(j\omega)|}{\sqrt{1+|L(j\omega)|^2}} \approx \frac{|L(j\omega)|}{|L(j\omega)|} = 1 = 0dB$$

   con $\lim_{\omega \to 0} |L(j\omega)| \gg 1$

2. termina come quello di L, infatti

$$\lim_{\omega \to \infty} |H(j\omega)| = \lim_{\omega \to \infty} \frac{|L(j\omega)|}{\sqrt{1+|L(j\omega)|^2}} \approx \frac{|L(j\omega)|}{1} = |L(j\omega)|$$

   con $\lim_{\omega \to \infty} |L(j\omega)| \ll 1$

Si può dimostrare che H e L hanno circa la **stessa frequenza di superamento** ω_{gc} (dove il gain tocca 0dB) e quindi anche la stessa **banda** e lo stesso **tempo di risposta**

I sistemi con **ritardi** vengono detti **non a fase minima** perché esiste un diagramma di Bode con stesso guadagno ma *fase minore*.

5 Teorema del valore finale

Date $G(s)$ risposta in frequenza e $U(s)$ ingresso di cui voglio conoscere il valore finale

Se e solo se $F(s) = G(s) \cdot U(s)$ ha poli con $Re < 0$ o **al più** nell'origine, allora il valore finale

$$FV = \lim_{t \to +\infty} f(t)$$

corrisponde a

$$\boxed{\lim_{s \to 0} F(s)}$$

Il numero di poli nell'origine indica il **tipo del sistema**

- 0: $FV = 0$ (converge a 0)
- 1: $FV \in \mathbb{R}$ (integrale di qualcosa che tende a 0)
- 2+: $FV = \infty$ (integrale di qualcosa che tende all'infinito)

Esempio

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

FV per $\delta(t) = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{s(s+1)} = 1$
FV per $1(t) = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{s(s+1)} \frac{1}{s} = +\infty$

5.1 Valore finale dell'errore

Applichiamo qesto teorema a un sistema closed loop per valutare lo *steady state error* (valore finale dell'errore), assumendo per semplicità un sensore perfetto.

Otteniamo quindi

$$E(s) = \frac{U(s)}{1 + G(s)}$$

Allora calcolo

$$E_{ss} = \lim_{s \to 0} s \frac{U(s)}{1 + G(s)}$$

In un sistema closed loop mi aspetto che $G(0) = 1 = 0dB$ cioè il valore finale della risposta a $1(t)$. Posso quindi valutare la variazione del FV dell'errore (supposto che L sia stabile) in funzione della risposta di L:

a. Gradino $\frac{1}{s} \to \frac{1}{1+k}$ per **tipo 0**, 0 per **tipo 1**, 0 per **tipo 2** $\rightsquigarrow \lim_{s \to 0} \frac{1}{1+L}$

b. Rampa $\frac{1}{s^2} \to \infty$ per **tipo 0**, $\frac{1}{k}$ per **tipo 1**, 0 per **tipo 2** $\rightsquigarrow \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \frac{1}{1+L}$

c. Parabola $\frac{1}{s^3} \to \infty$ per **tipo 0**, ∞ per **tipo 1**, $\frac{1}{k}$ per **tipo 2** $\rightsquigarrow \lim_{s \to 0} \frac{1}{s^2} \frac{1}{1+L}$

6 Criterio di Routh-Hurwitz

Serve a controllare la *stabilità* di un sistema senza dover risolvere l'equazione caratteristica, cioè trovare i poli $\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$.

Se gli α_i sono tutti dello stesso segno (assumiamolo positivo, al massimo raccolgo -1) il sistema è **instabile**, altrimenti per controllare la stabilità devo creare la tabella seguente:

Il numero di poli con $\{Re\} > 0$ è il numero di cambi di segno nella prima colonna

6.1 Casi particolari

a. se c'è uno *zero in una riga e almeno un elemento diverso da zero in una colonna successiva*, allora il sistema è **instabile** (avrò sicuramente almeno un cambio di segno completando la tabella). Per completare la tabella devo considerare il *limite da destra*.

b. se c'è una riga di zeri ci sono solo 3 configurazioni di poli che la possono generare: poli reali di segno opposto (*instabile*), poli complessi coniugati (*marginalmente stabile*) , 4 poli messi a croce ruotata di 45° (*instabile*). Per completare la tabella uso la riga prima di quella con tutti zeri come **polinomio ausiliare** (con i gradi messi a zig-zag), ne calcolo la derivata rispetto a s e inserisco i coeficenti nella riga di zeri

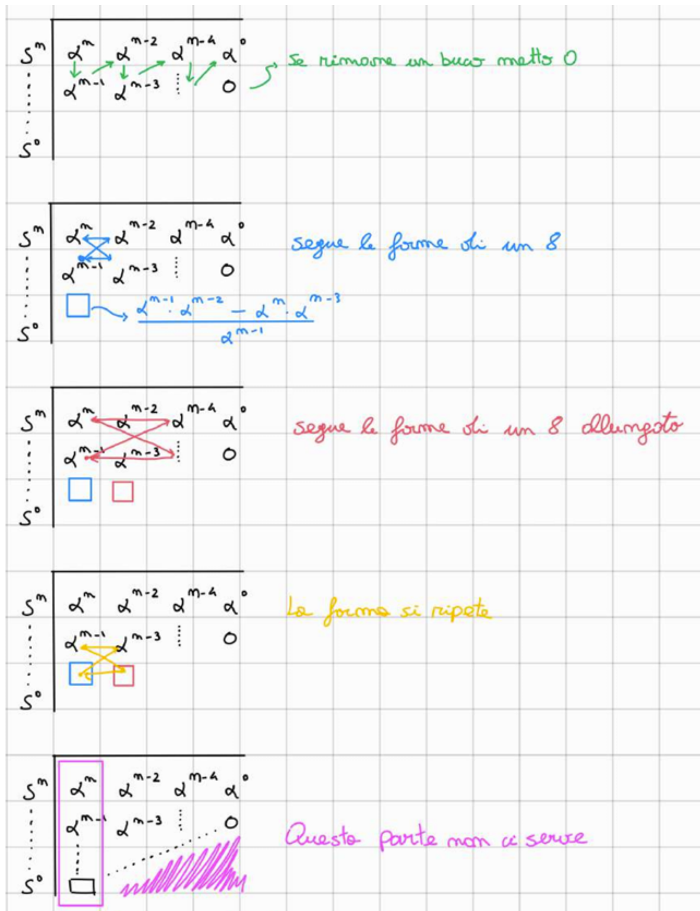


Figura 6: Criterio di Routh-Hurwitz in pratica

Esempio

Abbiamo un sistema

$$G(s) = \frac{1}{s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + 2}$$

e vogliamo velocizzare il suo tempo di risposta alla funzione gradino, utilizzando un controllore a guadagno costante che sia il più grande possibile (più *sensibilità all'errore* $\rightarrow$ più *velocità di risposta*) mantenendo il sistema **stabile**:

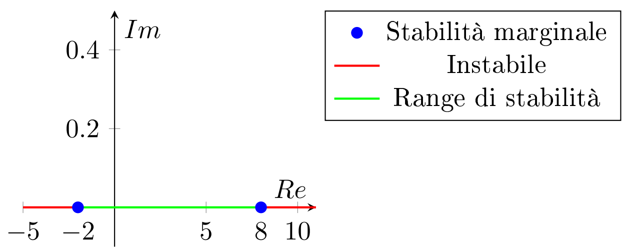
$$F(s) = \frac{kG(s)}{1 + kG(s)} = \frac{k}{s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + 2 + k}$$

Costruiamo quindi la tabella:

s^4	1	11	$2+k$
s^3	6	6	0
s^2	10	$2+k$	
s^1	$\frac{48-6k}{10}$	0	
s^0	$2+k$	0	

Per far si che nella prima colonna non ci siano cambi di segno (dunque che i valori siano *tutti positivi*) dobbiamo imporre che $\frac{48-6k}{10} > 0$ e $2+k > 0$, dunque abbiamo:

$$k < 8 \wedge k > -2$$



7 Criterio di stabilità di Nyquist

Dato un sistema a ciclo aperto $G(s)H(s)$ vogliamo studiare la stabilità del sistema a ciclo chiuso

$$\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

che in generale avrà poli diversi da quello di partenza.

7.1 Principio dell'argomento di Cauchy

La funzione di trasferimento mappa punti nel piano di Laplace in punti del piano Ω, ad esempio

$$G(s) = \frac{s+3}{s+2} \quad \rightarrow \quad G(-2+j) = \frac{-2+j+3}{-2+j+2} = 1-j$$

In sostanza, se prendiamo tutti i punti di una *curva chiusa* nel piano di Laplace e li mappiamo nel piano Ω otteniamo **un'altra curva chiusa**!

Il *principio dell'argomento di Cauchy* dice che per ogni punto nel piano di Laplace, il corrispondente nel piano Ω è un fasore tale che:

a. Il modulo è proporzionale al prodotto dei moduli dei fasori che lo congiungono agli zeri di $G(s)$ *fratto* lo stesso prodotto ma per i poli:

$$\frac{\prod_{i=1}^{N_z} |Z|}{\prod_{i=1}^{N_p} |P|}$$

b. la fase è uguale alla somma delle fasi dei fasori che lo congiungono agli zeri di $G(s)$ *meno* la stessa somma ma per i poli:

$$\sum_{i=1}^{N_z} \angle Z - \sum_{i=1}^{N_p} \angle P$$

Il numero di rotazioni attorno all'origine del piano Ω restituisce la differenza tra il **numero di poli** e il **numero di zeri** racchiusi dalla curva chiusa del piano di Laplace.

8 Diagramma di Nyquist

Vogliamo determinare la stabilità del sistema, quindi vanno trovati i poli della funzione di trasferimento

$$\frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)}$$

nonché gli zeri di

$$1+G(s)H(s)$$

Capiamo innanzitutto se ci sono zeri nel *right half plane* (cioè poli con $Re > 0$) perché in tal caso il sistema risulta instabile.

Si traccia nel piano i Laplace una curva chiusa che copre l'intero right half plane. Tale curva è detta *curva di Nyquist*: si parte dall'origine e si arriva fino a $+j\omega$, si prosegue fino a $+\infty$ per ricoprire l'intero RHP, ci si muove fino a $-j\omega$ e infine si torna presso l'origine.

La corrispondente curva chiusa nel piano Ω **è il diagramma di Nyquist!**

8.1 Determinare il numero di poli e zeri

Quello che facciamo è usare il principio dell'argomento di Cauchy per capire quanti zeri e quanti poli (grazie all'equazione $1 + G(s)H(s) = 0$) ci sono all'interno della curva di Nyquist e quindi nel RHP.

1. Si considera la funzione di trasferimento **open loop** $G(s)H(s)$
2. Si disegna il diagramma di Nyquist di $G(s)H(s)$
3. Si conta il *numero di rotazioni attorno al punto* -1, ottenendo cosi la differenza tra numero di poli e di zeri (ai sensi del principio dell'argomento di Cauchy)
4. Si determina il numero di poli e zeri all'interno della curva di Nyquist

Per determinare il numero di *zeri* nel RHP dobbiamo sapere quanti *poli* abbiamo nel RHP, ciò è facile perché tipicamente sono gli stessi del sistema open loop $G(s)H(s)$.

Dimostriamolo

Possiamo rappresentare il sistema come

$$\frac{N_G}{D_G}\frac{N_H}{D_H}$$

da cui si trovano i poli risolvendo $D_G D_H = 0$ ora poniamo $1 + G(s)H(s)$

$$1 + \frac{N_G}{D_G}\frac{N_H}{D_H} = \frac{D_G D_N + N_G N_H}{D_G D_H}$$

da cui sappiamo che i poli sono $D_G D_H = 0$ ma quindi

$$\boxed{Poli\{G(s)H(s)\} = Poli\{1 + G(s)H(s)\}}$$

8.1.1 L'equazione di Nyquist

Si introduce l'equazione

$$Z = N + P$$

Dove

- Z è il numero di zeri nel RHP (o di zeri nel caso closed loop)
- N è il numero di rotazioni attorno a -1
- P è il numero di polinel RHP, uguale al numero di poli nel RHP del sistema *open loop*

Se il sistema open loop è stabile, allora $P = 0$ quindi $Z = N$, e cioè **abbiamo un sistema *closed loop* stabile solo se non si hanno rotazioni attorno a -1!**

Se invece il sistema open loop è instabile $P \neq 0$, quindi per ottenere la stabilità devo avere $N = -P$ e ciò mi da $Z = 0$. Quindi è necessario avere un numero di rotazioni antiorarie attorno a -1 pari al numero di poli enl RHP.

Considerazioni

Questo approccio ci piace perchè:

1. I diagrammi di Bode analizzano la stabilità di un sistema *closed loop* solo se il sistema *open loop* è stabile!
2. Con il diagramma di Nyquist possiamo analizzare la stabilità del sistema *closed loop* anche quando quello *open loop* è instabile.

8.1.2 Conclusioni

Data una funzione di trasferimento *open loop* voglio determinare se il sistema *closed loop* è asintoticamente stabile.

1. Verificare se lo è il sistema *open loop* (poli con $Re < 0$)
2. Se lo è, il diagramma di Nyquist non circonda e non tocca -1 allora il sistema *closed loop* è asintoticamente stabile.
3. Se il sistema *open loop* non è asintoticamente stabile, si controlla il **numero di rotazioni** attorno a -1, se sono tante quante i poli del sistema *open loop* allora **il sistema è asintoticamente stabile**

9 Margini di guadagno e di fase

Dato un sistema a *ciclo aperto* $G(s)$ ci chiediamo: quali caratteristiche deve avere affinché il sistema a *ciclo chiuso* $\frac{G(s)}{1+G(s)}$ risulti **stabile**?

Semplice, basta che $G(s) \neq -1 \ \forall s$ (cosa concorde con il diagramma di Nyquist) o analogamente:

$$|G(j\omega)| \neq 1 = 0dB \ \wedge \ \angle G(j\omega) \neq -180 \deg \forall \ \omega$$

Quest'ultima condizione è evidente osservando i diagrammi di Bode.

I margini di guadagno e fase sono le quantità di guadagno e fase che possono essere aggiunte al sistema a ciclo aperto prima di raggiungere una frequenza tale che il sistema a ciclo chiuso risulti instabile.

1. **Margine di guadagno:** espresso tramite la frequenza ω_{gc} di *gain-crossover*, alla quale il guadagno vale $0dB$
2. **Margine di fase:** espresso tramite la frequenza ω_{pc} di *phase-crossover*, alla quale la fase vale $-180 \deg$

10 Criterio di stabilità di Bode

Data $H(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$ il criterio di stabilità distingue 2 casi:

1. $$|L(j\omega_{gc})| = 1, \ |L(j\omega)| > 1 \ \forall \ \omega < \omega_{gc}, \ |L(j\omega)| < 1 \ \forall \ \omega > \omega_{gc}$$

   se $\angle L(j\omega_{gc}) > -180°$ allora H è BIBO stabile

2. $$\angle L(j\omega_{pc}) = -180 \deg, \ \angle L(j\omega) > -180 \deg \ \forall \, \omega < \omega_{pc}, \ \angle L(j\omega) < -180 \deg \ \forall \, \omega > \omega_{pc}$$

   se $|L(j\omega_{pc})| < 1$ allora H è BIBO stabile

Quest'analisi è un po' superficiale, dato che è possibile avere situazioni in cui ci sono *ampi margini di guadagno e fase* ma per *piccoli ritardi di fase* si può rendere il sistema molto vicino all'instabilità, quindi in pratica il margine di fase si riduce a qualche grado

10.1 Margini di guadagno e fase da Nyquist

Grazie al criterio di Nyquist possiamo studiare la stabilità di un sistema closed loop anche se il sistema open loop è instabile.

Margine di fase il più piccolo angolo tra -1 e l'intersezione tra il diagramma e la circonferenza unitaria, ossia quanto posso ruotare il diagramma prima di toccare -1

Margine di guadagno quanto posso scalare il diagramma prima di toccare -1 (*non la circonferenza ma il punto sulle ascisse*)

Nota

Quando la fase scende sotto i $-180°$ è come se si avesse un cambio di segno nel nodo sommatore del ciclo chiuso.

Nota

Utilizzando l'approssimazione al polo domniante, se il margine di fase $\omega_{pc} > 75°$ possiamo trattare G come sistema del 1° ordine, al contrario se $\omega_{pc} \leq 75°$ tratteremo G come sistema del 2° ordine, in particolare con $\xi \approx \frac{\omega_{pc}}{100}$

11 Sistemi a ciclo chiuso

Introduciamo ai sistemi a ciclo chiuso del tipo

$$y_{ref} \to -y \to R(s) \to G(s) \to y$$

i disturbi di **carico** e di **misurazione** che andranno a sommarsi all'ingresso del controllore $R(s)$ e all' uscita dell'impianto $G(S)$

Tipicamente i disturbi di carico sono dominati dalle basse frequenze (alta costante di tempo, es. pendenza strada), mentre i disturbi di misurazione dalle alte frequenze (bassa costante di tempo, es. interferenza elettrica)

Vogliamo quindi progettare un controllore tale che

a. il sistema a ciclo chiuso siat stabile

b. il guadagno di ciclo[3] sia alto in corrispondenza dei segnali y_{ref} e d, amplificando i disturbi di carico il sistema sarà più sensibile a essi e quindi li correggerà più facimente e velocemente

[3] funzione $R(s)G(s)$ aka funzione di trasferimento del ciclo

c. il guadagno di ciclo sia basso in corrispondenza del segnale n di disturbo di misurazione

d. rispetti eventuali vincoli sulla risposta transitoria (es. tempo di assestamento) e sulla risposta all'equilibrio (es. valore finale dell'errore)

Considerando tutte le relazioni tra input (y_{ref}, n, d) e output (y):

$$Y = D + RG(Y_{ref} - Y + N)$$

$$\Rightarrow\ Y(1 + RG) = D + RG(Y_{ref} + N)$$

$$\Rightarrow\ Y = \frac{1}{1+RG}D + \frac{RG}{1+RG}Y_{ref} + \frac{RG}{1+RG}N$$

Inoltre

$$E(s) = \frac{1}{1+RG}D + \frac{1}{1+RG}Y_{ref} + \frac{RG}{1+RG}N$$

Dato che tutte hanno $1 + RG$ a denominatore possiamo studiare la stabilità una volta per tutte, si evidenziano dunque:

La funzione di sensitività: $S(s) = \frac{1}{1+RG}$ che descrive come d influenza y, e dovrebbe essere tale che $|S|$ sia piccolo o analogamente $|RG|$ sia grande alle basse frequenze, dove si concentrano i disturbi di carico

Sens. complementare: $T(s) = \frac{RG}{1+RG}$ che descrive come n influenza y, e dovrebbe essere tale che $|T|$ sia piccolo o analogamente $|RG|$ sia piccolo alle alte frequenze, dove si concentrano i disturbi di misurazione

Sens. del controllore: $Q(s) = C_s(s) = \frac{R}{1+RG}$ che descrive come y_{ref} influenza n e deve essere tale che $|Q|$ sia piccolo alle alte frequenze

Nota

$$S + T = \frac{1}{1+RG} + \frac{RG}{1+RG} = \frac{1+RG}{1+RG} = 1 = 0dB\ \forall\ \omega$$

Dunque T e S non possono essere sempre piccole entrambe

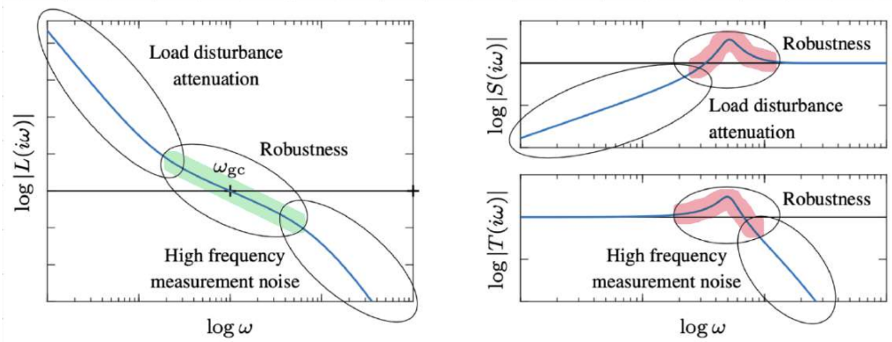
In prtica va ottenuta una situazione nella quale la pendenza di $|L|$ attorno a ω_{gc} è detta n_{gc} ed è approssimabile, per sistemi a fase minima con $n_{gc} \approx \frac{\Phi_m}{90} - 2$, dunque più è piatto, maggiore sarà il margine.

Si definisce **picco di sensitività nominale** M_s *l'inverso della più piccola distanza* tra -1 e il diagramma di Nyquist. Ossia:

$$M_s = \min_{-\infty<\omega<\infty} |R(j\omega)G(j\omega) - (-1)|$$

dalla simmetria del diagrammadi Nyquist si ottiene

$$\max_{0<\omega<\infty} \left|\frac{1}{R(j\omega)G(j\omega)+1}\right| = \max_{0<\omega<\infty} |S(j\omega)|$$



(a) Gain plot of loop transfer function (b) Gain plot of sensitivity functions

Vorremmo che avesse un comportamento simile a $\frac{K}{s}$ $\leadsto$ K alto = scalato a dx
K basso = scalato a sx

Figura 8: Grafici dei guadagni delle funzioni L, S e T

Dunque più il picco è *piatto* più il sistema è *robusto*. Nei casi in cui abbiamo sistemi nei quali ritardi e incertezze impediscono al picco di essere piccolo bisogna per forza *dimiuire la banda*.

La frequenza di superamento ω_{gc} viene scelta tipicamente guardando il diagramma di Bode del sistema G tenendo a mente le frequenze dei segnali che ci interessa amplificare, ad esempio se ho un sistema che si trova spesso a dover rispondere velocemente ω_{gc} sarà alta, non troppo alrimenti diventa troppo sensibile ai ritardi che invece contribuiscono alla fase con ω_{pc}.

Nota

Per ottenere la forma desiderata, potremmo definire

$$R : L = RG = \frac{k}{s} \Rightarrow R = \frac{k}{sG}$$

ma è pericoloso perché invertendo G rischiamo di nascondere eventuali *poli instabili* facendoli diventare zeri, inoltre il controllore potrebbe non essere efficace in caso il modello di G non sia preciso.

Nota

Nel caso in cui G sia instabile si usano *due controllori*: uno per stabilizzare G e l'altro per i requisiti di performance.

Nota

Guarda esempio a pg. 50.

12 Luogo delle radici

E' un metodo che ci permette di studiare come variano i poli della funzione di trasferimento al variare di un parametro k.

12.1 Disegnare il luogo delle radici

Vogliamo studiare i poli di una funzione di trasferimento $F(s,k)$ per $0 \leq k < \infty$:

$$G(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^3 + 4s^2 + k \cdot s + 1}$$

Da qui siamo interessati alle soluzioni dell'equazione

$$s^3 + 4s^2 + k \cdot s + 1 = 0$$

Siccome trovare le radici di una funzione del genere non è sempre semplice riscriviamo l'equazione nella forma

$$\boxed{1 + k \cdot G(s) = 0}$$

Da cui

$$s^3 + 4s^2 + k \cdot s + 1 = 0 \ \Rightarrow \ \frac{s^3 + 4s^2 + 1}{s^3 + 4s^2 + 1} + k \cdot \frac{s}{s^3 + 4s^2 + 1} = \frac{0}{s^3 + 4s^2 + 1}$$

Che equivale a studiare come si muovono i poli nel sistema a ciclo chiuso unitario al variare del guadagno k.

Regole

Consideriamo la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{Q}{P}$, ci sono in totale **11** regole da seguire per fare il disegno:

1. Il numero delle linee (*i luoghi*) n è pari a $\max\{\deg Q, \deg P\}$
2. Le radici partono ($k \to 0$) dai *poli* di G per arrivare ($k \to \infty$) agli *zeri* di G:

   se ci sono più poli che zeri, alcune linee vanno a ∞

   se ci sono più zeri che poli, alcune linee arrivano da ∞
3. Le radici di poli complessi coniugati si muovono a coppia, cioè il luigo delle radici è **specchiato** lungo l'asse reale
4. La stessa radice non torna mai su un punto già percorso
5. La porzione di asse reale a sinistra di un polo o zero di numero dispari (*se contati da setra a sinistra*) è parte del luigo delle radici

6. Se le linee devono uscire dall'asse reale, lo fanno **solo** con un angolo di 90° seguendo gli asintoti di angoli

$$\Phi_i = \frac{2i-1}{|\sharp poli - \sharp zeri|} \cdot 180, \quad i = \{0, 1, \ldots, |\sharp poli - \sharp zeri| - 1\}$$

Gli asintoti sono centrati nel punto

$$C = \frac{\Sigma poli - \Sigma zeri}{|\sharp poli - \sharp zeri|}$$

Si guarda sempre quanti *poli in iuù degli zeri ci sono* per sapere quante linee vanno all'infinito, tenendo conto che le altre **si devono ricongiungere**

7. Se ci sono almeno due linee che vanno o vengono da infinito, allora la somma dell e linee è costante

8. Se fosse necessario tracciare il luogo delle radici per $-\infty \leq k < 0$ basta invertire la regola 5, cioè usare la destra invece che la sinistra e aggiungere 180° agli asintoti

9. Per trovare le frequenze dove eventualmente *le radici si dividono o si uniscono* si deve risolvere

$$\frac{dk}{ds} = \frac{d}{ds}[kG(s) + 1] = \frac{d}{ds}\frac{1}{G} = 0$$

Le soluzioni che stanno **al di fuori** del luogo delle radici vengono scartate

10. Per trovare le intersezioni delle radici con *l'asse immaginario* ci sono 2 vie:

    si usa Routh-Hurwitz per trovare il valore di k che rende il sistema marginalmente stabile (quando ho *una riga di zeri*) e poi risolvere le radici del polinomio ausiliare.

    si impone a 0 *parte reale* e *parte immaginaria* dell'equazione caratteristica di $G(j\omega)$ e si risolve per k e ω[4]

11. Vogliamo trovare *l'angolo di partenza* del luogo delle radici da una coppia di poli o zeri complessi coniugati, sappiamo che un generico punto s è parte del luogo delle radici se è tale che $kG(s) = -1$, guardandolo come numero complesso:

$$|kG(s)|e^{j\angle kG(s)} = -1 + j0 = 1e^{j(2n-1)\pi}, \quad n \in \mathbb{N}$$

da cui si ricava

    il *criterio del modulo*: $|kG(s) = 1|$ trova k tale che s è radice

[4]Esempio a pg. 56

il *criterio dell'angolo*: $\angle G(s) = (2n-1)\pi$ verifica che s appartenga al luogo delle radici
E' possibile dimostrare che l'angolo di partenza di:

poli complessi coniugati è

$$\Phi_{poli} = 180 - \Sigma angolo\ altri\ poli \rightarrow polo + \Sigma angolo\ altri\ zeri \rightarrow polo$$

zeri complessi coniugati è

$$\Phi_{zeri} = 180 - \Sigma angolo\ altri\ zeri \rightarrow zero + \Sigma angolo\ altri\ poli \rightarrow zero$$

12.2 Compensatori di anticipo e ritardo

Ripensando ai diagrammi di Bode ci ricordiamo che i blocchi derivatore e integratore corrispondono rispettivamente a un anticipo e a un ritardo di 90°, in generale uno zero o un polo aggiunti sono rispettivamente anticipi e ritardi.

La generica funzione di trasferimento di un **compensatore di fase** è

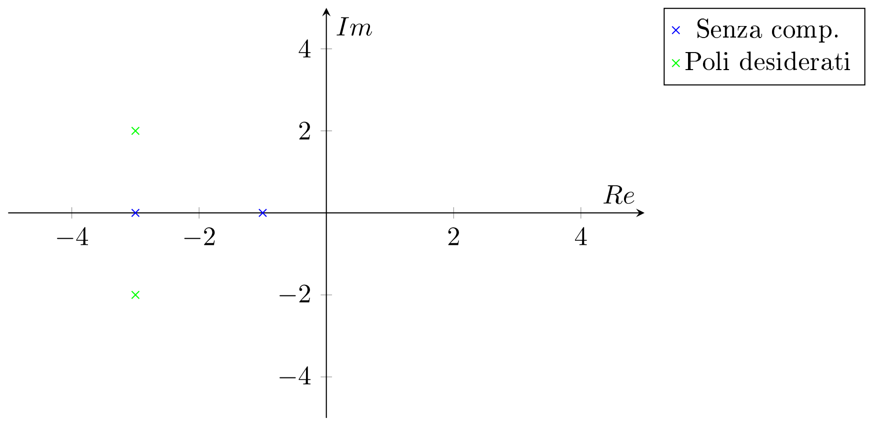
$$\frac{s/\omega_z + 1}{s/\omega_p + 1} = \frac{\omega_p}{\omega_z}\frac{s+\omega_z}{s+\omega_p}$$

a. se $\omega_z < \omega_p$ si tratta di un compensatore di **anticipo**, il guadagno ha un andamento *lineare* tra ω_z e ω_p per poi tornare costante e la fase un *innalzamento*.
   Questo ha l'effetto di spostare i poli del sistema a ciclo chiuso a sinistra, cioè **aumenta stabilità e velocità di risposta**

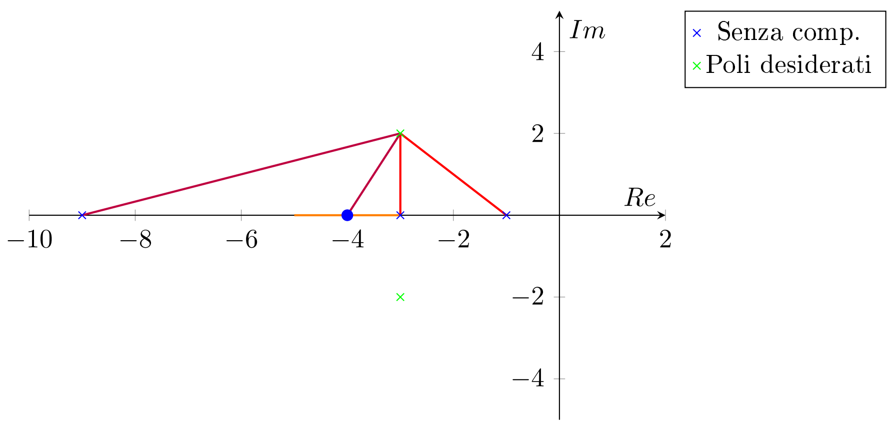
b. se $\omega_z > \omega_p$ si tratta di un compensatore di **ritardo**, analogamente al caso a. ha l'effetto di spostare a *destra* i poli del sistema a ciclo chiuso, **riducendo l'errore a regime**.

12.3 Progettare un compensatore d'anticipo con il luogo delle radici

Mettiamo caso che abbiamo un sistema a ciclo aperto e di voler aumentare la stabilità e la velocità di risposta del sistema a ciclo chiuso, possiamo usare un compensatore d'anticipo per spostare i poli a sinistra verso la *posizione desiderata*.



Possiamo quindi imporre con il **criterio dell'angolo** che questi appartengano al luogo delle radici, quindi il compensatore deve essere tale che $90+135+\Phi_p-\Phi_z=180°$, dunque $\Phi_z>45°$[5] e $\Phi_p=-225+180+\Phi_z=\Phi_z-45°$.



La scelta dello zero è arbitraria purché rispetti i limiti imposti e non inerferisca con i poli dominanti.

Nota

Più si sceglie lo zero con un angolo vicino a 45° più **l'angolo del polo deve essere piccolo**:

a. $z=-4.5 \Rightarrow \Phi_z=53°$ dunque $\Phi_p=8 \Rightarrow p=-17.23$

b. $z=-3.5 \Rightarrow \Phi_z=76°$ dunque $\Phi_p=31 \Rightarrow p=-6.33$

Dunque il compensatore scelto è

$$\frac{s+4}{s+9}$$

[5] Altrimenti la somma non può fare 180°

Bisogna ora sceglere il guadagno appropriato per spostare i poli nel punto desiderato (*crietrio del modulo*)

$$|kG(s)| = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{G(-3+2j)} = \frac{(s+9)(s+1)(s+3)}{s+4}|_{s=-3+2j} \Rightarrow k = 16$$

12.4 Progettare un compensatore di ritardo con il luogo delle radici

Non potendo aumentare k a piacere spesso capita di rimanere con errore a regime non trascurabile, per cui va utilizzato un *compensatore di ritardo*.

Supponiamo di avere un sistema a ciclo aperto e di voler ridurre il suo errore a regime per un certo input:
Prendiamo come input $1(t)$ e come compensatore $\frac{s-z}{s-p}$[6], con funzione di trasferimento a ciclo aperto $\frac{G_N(s)}{G_D(s)}$.

Per il teorema del valore finale abbiamo

a. $E_{ss} = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1+G} = \frac{G_D(0)}{G_D(0)+G_N(0)}$ (senza compensatore)

b. $E_{ss} = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1+G\frac{s-z}{s-p}} = \frac{p \cdot G_D(0)}{p \cdot G_D(0)+z \cdot G_N(0)}$ (con compensatore)

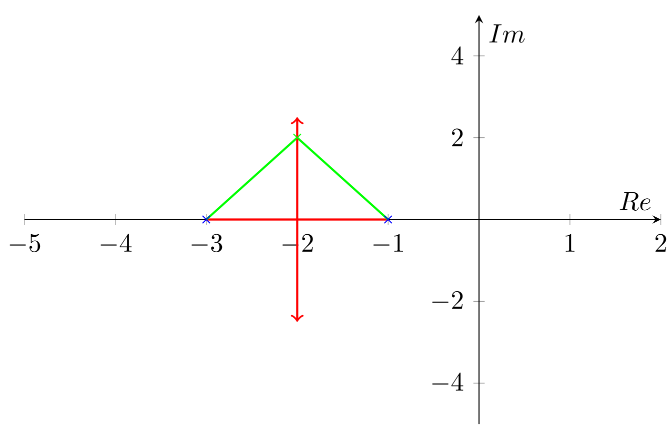
Da *b.* ricaviamo che

$$\frac{p}{z} = \frac{G_D(0) - E_{ssc}G_D(0)}{E_{ssc}G_N(0)}$$

Cioè la posizione che devono avere z e p per l'E_{ssc} desiderato (per avere $E_{ssc} = 0$ dovrei avere $\frac{p}{z} = \infty$ che è impossibile).

Solitamente si utilizza un compensatore di ritardo per ridurre l'errore a regime di un certo input per sistemi che **soddisfano già i requisiti di performance**, vogliamo quindi evitare di spostare i poli dominanti.

In pratica vogliamo fare si che preso un punto nel luogo delle radici, aggiungendo il compensatore (e quindi un polo Φ_p e uno zero Φ_z), il punto rimanga nel luogo delle radici: $\theta_1 + \theta_2 + \Phi_p - \Phi_z \approx 180°$



[6]Considero z e p, non ω_z e ω_p.

Dunque vogliamo che $\Phi_p \approx \Phi_z$ mantenendoil rapporto z/p costante, ricavato dallo studio di E_{ssc} e questo è possibile solo se p e z sono molto vicini all'origine, in questo modo anche se sono di ordini di grandezza differenti in modulo, la loro *distanza* e quindi la *differenza tra i loro angoli* rimane molto piccola.

In generale *lo zero* viene messo più vicino all'asse immaginaria di 50 volte rispetto ai **poli dominanti**, e il polo viene piazzato di conseguenza al rapporto z/p. Questo non cambia i poli dominanti perché seppur il nuovo polo è il più vicino all'origine, viene compensato dallo zero che è altrettanto vicino.

Dall'esempio di prima:

$$H = \frac{L}{1+L} = \frac{16s+64}{s^3+13s^2+55s+91} \Rightarrow H(0)|_{1(t)} = 0.7 \Rightarrow E_{ssc} = 0.3$$

Supponiamo di volere $E_{ssc} = 0.1$: $\frac{z}{p} = \frac{G_D(0) - E_{ssc}G_D(0)}{E_{ssc}G_N(0)} \approx 3.8$, allora dato che $Re\{poli\ dominanti\} = -3$, $z = \frac{-3}{50} = -0.06$ e $p = \frac{-0.06}{3.8} = -0.016$.

Quindi basta aggiungere un blocco

$$\frac{s+0.06}{s+0.016}$$

13 Progettare un compensatore con i diagrammi di Bode

E' possibile avere di requisiti nel dominio della frequenza (margine di fase, frequenza di incroio, banda, ...), è quindi utile vedere gli effetti di un compensatore sui diagrammi di Bode.

L'equazione del compensatore diventa

$$\frac{\alpha\tau s+1}{\tau s+1}, \quad \omega_z = \frac{1}{\alpha\tau}\ \omega_p = \frac{1}{\tau}\ k = \alpha$$

se $\alpha > 1$ abbiamo un compensatore di anticipo, se $\alpha < 1$ di ritardo

Supponiamo di avere il sistema

$$G(s) = \frac{1}{0.2s+1}$$

con i requisiti $\Phi_m > 48°$ e $E_{ss} < 0.02$ per **ingressi a rampa**

Innanzitutto il controllore deve essere di tipo 1, altrimenti non si può rispettare il vincolo su $E_{ss} \Rightarrow R = \frac{k}{s}$:

$$\lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k}{s(0.2s+1)}} = \lim_{s\to 0} \frac{0.2s+1}{s(0.2s+1)+k} < 0.02$$

Dunque $\frac{1}{k} < 0.02 \Rightarrow k > 49$, quindi per fare cifra tonda scegliamo $\boxed{k = 50}$ e abbiamo soddisfatto il vincolo su E_{ss}.

Per il vincolo del margine di fase osserviamo i diagrammi di Bode di GR con $\omega_{gc} = 15Hz$ e $\Phi_m = 18°$, ci sono quindi **due strade**:

1. Alzare il diagramma di fase in corrispondenza di ω_{gc}, è dimostrabile che inserendo un compensatore di anticopo si ha

   Massimo contributo di fase: $\Phi_{max} = \arcsin(\frac{\alpha-1}{\alpha+1})$

   Frequenza del contributo massimo: $\omega_{max} = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}$

   Guadagno alla frequenza di contributo massimo $G_{max} = \sqrt{\alpha}$ (sempre all'interno del confine delimitato tra ω_z e ω_p).
   Nel nostro esempio vogliamo che

   $$\Phi_{max} = 48 - 18 = 30 \Rightarrow \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} = \sin(30) \Rightarrow \alpha = 4$$

   $$\omega_{max} = 20Hz \Rightarrow \frac{1}{\tau\sqrt{4}} = 20 \Rightarrow \tau = 0.025$$

   Il compensatore aumenta il guadagno attorno a ω_{max} e sposta ω_{gc} leggermente verso destra, quindi il contributo di fase non sarà massimo, abbiamo quindi bisogno di imporre una ω_{max} leggermente più alta

2. Abbassare il diagramma del guadagno in modo da spostare la ω_{gc} dove la fase è alta di suo (senza toccare il guadagno a $\omega = 0$, il quale determina E_{ss} che abbiamo appena aggiustato)
   Calcoliamo ω_{gc} che rispetta Φ_m, dobbiamo diminuire il guadagno di circa 18dB (20 per sicurezza) ossia $\alpha = 0.1$, tutto ciò senza influenzare la fase intorno a ω_{pm} e dunque vorremmo il polo e lo zero il più vicini possibile all'origine. (anche qui vale la regola che lo zero sia 50 volte più vicino del polo dominante).
   In questo caso dunque

   $$\omega_z = \frac{1}{\alpha\tau} = \frac{1}{0.1\tau} = \frac{10}{\tau} = \frac{5}{50}(freq\ polo\ dominante) \ \Rightarrow \tau = 100$$

   Da cui si ricava il compensatore

   $$\frac{\alpha\tau s + 1}{\tau s + 1} = \boxed{\frac{10s + 1}{100s + 1}}$$

14 Controllori PID

Un controllore PID gestisce l'errore in 3 modi:

1. tramite un controllore proporzionale k_P:il comando è proporzionale all'errore **attuale** (presente, aumenta ω_n, diminuisce ξ)

2. tramite un integratore $k_I\frac{1}{s}$: il comando dipende dalla **storia** dell'errore (passato, riduce E_{ss}). L'area sottesa dal grafico rappresenta l'intensità del comando.

3. tramite un derivatore $k_D s$: il comando dipende da come **sta cambiando** l'errore (futuro, aumenta ξ). L'intensità del comando diminuisce all'aumentare della velocità di variazione dell'errore.

14.1 Problemi tipici

14.1.1 Integrale wind-up

Nella realtà gli attuatori hanno dei **limiti fisici**, oltre i quali non possono agire anche se comandati diversamente, il problema sta nel fatto che se gli attuatori *non seguono il comando* non riusciranno a reagire finchè il comando non torna nei limiti fisici.

Per risolvere questo problema ci sono vari modi, tra cui resettare l'integrale quando l'errore si azzera.

14.1.2 Rumore nel derivatore

Il derivatore è molto sensibile ai rumori ad alta frequenza, questo perchè variando molto velocemente producono una derivata con ampiezza elevata ($\sin(10t) \to 10\cos(t)$)

Per risolvere il problema basta ridurre il guadagno del derivatore alle alte frequenze, fattibile con un filtro passa-basso:

$$\frac{1}{\frac{1}{N}s+1} \cdot k_D s, \quad \frac{1}{N} = \frac{K_D}{k_P}, \quad \omega_0 = -N$$

14.1.3 Setpoint kick

Un altro problema del derivatore è che se impostiamo all'improvviso un segnale di riferimento (ad esempio diamo in ingresso uno scalino come $1(t)$) allora si genererà un controllo impulsivo (stile $\delta(t)$), per evitare ciò spesso si collega il derivatore all'usvita del sistemae non all'errore.

15 Metodo di Ziegler-Nichols

La scelta dei parametri per un controllore PID è complicata, dipende molto dal sistema e dai requisiti di performance. Esistono tuttavia delle euristiche che analizzando la risposta al gradino unitario riescono a fornire parametri accettabili nella maggior parte dei casi.

Siano k^* e T^* (ricavati de Bode/Luogo delle Radici e sistema del 2° ordine) il **margine di guadagno** e il **periodo delle oscillazioni** del sistema a *ciclo aperto* con il solo ramo proporzionale del controllore, se $k^* \neq \infty$ allora una possibile scelta dei parametri è:

Tipo di controllore	k_P	τ_I	τ_D
P	$0.5k^*$	/	/
PD	$0.45k^*$	$0.8T^*$	/
PID	$0.6k^*$	$0.5T^*$	$0.126T^*$

Dove τ_I e τ_D sono le costanti di tempo dei controllori Integratore e Derivatore:

$$PID(s) = k_P + \frac{k_I}{s} + k_D s = \frac{k_D s^2 + k_P s + k_I}{s} = k_P\left(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s\right) = \boxed{\frac{\tau_I \tau_D s^2 + \tau_I s + 1}{\tau_I s}}$$

16 Risposta forzata al gradino

Data un'equazione differenziale *ingresso-uscita* del tipo

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{m} \beta_j u^{(j)}(t)$$

vogliamo trovare *l'espressione nel tempo di* $y(t)$.

1. Trasformata di laplace

Ci portiamo nel dominio di laplace ricordandoci che *trasformare una derivata significa moltiplicare la funzione nel dominio di laplace per s elevata al grado della derivata.*

Esempio

$$\ddot{y} + 20\dot{y} = \dot{u} + 12u$$

diventa

$$s^2 Y(s) + 20sY(s) = sU(s) + 12U(s)$$

2. Antitrasformare Y(s)

Esplicitiamo $Y(s)$ in funzione di $U(s)$ che altro non è che la trasfomata di $1(t)$, cioè $\frac{1}{s}$. Dopodiché svolgiamo l'antitrasformata con il teorema dei residui[7], e otteniamo l'espressione di $y(t)$.

17 Risposta libera

Data una funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

si riporta nella forma di equazione differenziale

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{m} \beta_j u^{(j)}(t)$$

considerando le condizioni iniziali

$$y(0) = a_0,\ y'(0) = a_1,\ y''(0) = a_2,\ \cdots$$

e ponendo l'ingresso $u(t)$ a pari a zero (definizione di risposta libera) otteniamo

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i y^{(i)}(t) = 0$$

[7]Prof. Crisostomi docet

Risolviamo ora l'equazione caratteristica

$$b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_0 s = 0$$

Dopo aver trovato le radici procediamo a seconda del tipo di radici trovate:

17.1 Radici reali e distinte

La soluzione generale sarà della forma

$$y(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} + \cdots + C_n e^{s_n t}$$

con le condizioni iniziali troviamo i coefficienti C_i

$$y(0) = c_0 \tag{1}$$
$$y'(0) = c_1 \tag{2}$$
$$\vdots \tag{3}$$
$$y^n(0) = c_n \tag{4}$$

17.2 Radici reali multiple

A sto giro la soluzione generale è della forma

$$y(t) = (C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + \cdots + C_n t^n) e^{s_0 t}$$

Risolviamo di nuovo con le condizioni iniziali e troviamo i coefficienti.

17.3 Radici complesse coniugate

Once again la forma dell'equazione generale cambia, ora in seno e coseno:

$$e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)),\ s_0 = \alpha + j\beta$$

Con le condizioni iniziali si determinano i coefficienti per la $y(t)$