Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования “Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники”

Факультет компьютерных систем и сетей

кафедра Информатики

Дисциплина: Методы численного анализа

ОТЧЕТ

к лабораторной работе

на тему:

“Численное дифференцирование и интегрирование функций”

БГУИР КП 1-40 04 01

Выполнил: студент гр. 953505

Красовский В.Ю.

Проверил: доцент кафедры информатики Анисимов В.Я

Минск 2021

Вариант 9

Цели работы:

Изучить методы численного вычисления производных и методы численного интегрирования. Сравнить методы по трудоемкости, точности. Выполнить тестовое задание по численному дифференцированию и интегрированию.

Краткие теоретические сведения

1)**Численное дифференцирование**. Для получения формул вычисления производной разобьем отрезок [a, b] на n частей следующим образом:

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Тогда

$$y_k = f(x_k), \; y'_k = f'(x_k)$$

и по формуле Тейлора (считая функцию дважды непрерывно дифференцируемой) получаем

$$y_{k+1} = y_k + y_k' h + f''(\xi) h^2 \frac{1}{2},$$ где ξ – некоторая точка на $[x_k, x_{k+1}]$.

Таким образом получаем формулу для приближенного вычисления производной:

$$y'_k \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{h},$$ с погрешностью $R \le \frac{M_2 h}{2}$ где $M_2 = \max\limits_{a \le x \le b} \left| f''(x) \right|$.

Таким образом, обеспечивается точность O(h). Далее воспользуемся следующей теоремой.

Теорема(о среднем).

Пусть функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$. Тогда $\exists$ точка $\xi \in [a, b]$ такая, что $\frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n} = f(\xi)$.

Считая функцию дважды непрерывно дифференцируемой,получим:

$$y_{k+1} = y_k + y'_k h + \frac{y''_k}{2} h^2 + \frac{f'''(\xi_1)}{6} h^3;$$

$$y_{k-1} = y_k - y'_k h + \frac{y''_k}{2} h^2 - \frac{f'''(\xi_2)}{6} h^3.$$

Отсюда можем определить производную как

$$y'_k = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{12} h^2$$

и, применяя теорему о среднем, получаем:

$$y'_k = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + \frac{f'''(\xi_k)}{6} h^2 .$$

Т.е. имеет место формула для приближенного вычисления производной:

$$y'_k \approx \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}, \;\; R \le \frac{M_3 h^2}{6} \;\; \text{где} \;\; M_3 = \max_{a \le x \le b} |f'''(x)| .$$

Точность вычисления производной в этом случае имеет порядок O(h^2).
Для того чтобы найти формулу для вычисления второй производной будем считать функцию f(x) четырежды непрерывно дифференцируемой,тогда:

$$y_{k+1} = y_k + y'_k h + \frac{y''_k}{2} h^2 + \frac{y'''_k}{6} h^3 + \frac{f^{IV}(\xi_1)}{24} h^4 ;$$

$$y_{k-1} = y_k - y'_k h + \frac{y''_k}{2} h^2 - \frac{y'''_k}{6} h^3 + \frac{f^{IV}(\xi_2)}{24} h^4 ,$$

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = y''_k + \frac{f^{IV}(\xi_1) + f^{IV}(\xi_2)}{24} h^2 ,$$

$$y''_k \approx \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} \;\; , \; R = \frac{|f^{IV}(\xi_k)|}{12} h^2 \le \frac{M_4 h^2}{12}$$

При этом обеспечивается точность O(h^2).
2)**Интегрирование функций**. Пусть дана функция f(x), которую необходимо проинтегрировать на отрезке [a,b]. Разобьем этот отрезок на n частей следующим образом:

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b ,$$

И зафиксируем значения функции в точках
Разбиения y0, y1, …, yn

Тогда $\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$ и, полагая $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx y_{k-1}h$, можно получить формулы:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) \quad (\textit{правых прямоугольников});$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}) \quad (\textit{левых прямоугольников});$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(f(x_0 + h/2) + \ldots + f(x_{n+1} + h/2)) \quad (\textit{средних прямоугольников}).$$

Используя формулы правых и левых прямоугольников (взяв их среднее арифметическое) получим формулу трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + \ldots + y_{n-1}), R \le \frac{M_2 nh^2}{12}.$$

Формула Симпсона.
Дана функция f(x), которую необходимо проинтегрировать на отрезке [a,b].
Разобьем этот отрезок на 2n частей следующим образом:

$$h = \frac{b-a}{2n}, \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b. \; \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)dx$$

Будем аппроксимировать элементарную трапецию некоторой параболической трапецией (например y=ax^2 +bx+c) через точки вида

A(x_{2k}, y_{2k}), B(x_{2k+1}, y_{2k+1}), C(x_{2k+2}, y_{2k+2});

Составим систему: $$\begin{cases} y_{2k} = ax_{2k}^2 + bx_{2k} + c \\ y_{2k+1} = ax_{2k+1}^2 + bx_{2k+1} + c \quad (**) \\ y_{2k+2} = ax_{2k+2}^2 + bx_{2k+2} + c \end{cases}$$

Посчитаем определитель: $$\Delta = \begin{vmatrix} x_{2k}^2 & x_{2k} & 1 \\ x_{2k+1}^2 & x_{2k+1} & 1 \\ x_{2k+2}^2 & x_{2k+2} & 1 \end{vmatrix} \ne 0,$$

значит данная система имеет решение a, b, c и причем единственное.
Решая ее мы получим так называемую малую формулу Симпсона:

$$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} (ax^2+bx+c)dx = ... = \frac{h}{3}(y_{2k}+4y_{2k+1}+y_{2k+2}),$$ где a, b и c берутся из системы (**).

По сдвоенному элементарному промежутку запишем

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{3}(y_{2k}+4y_{2k+1}+y_{2k+2}) =$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + 2(y_2+...+y_{2n-2}) + 4(y_1+...+y_{2n-1}) + y_{2n})$$

Таким образом, получается формула Симпсона:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[(y_0+y_{2n}) + 2(y_2+...+y_{2n-2}) + 4(y_1+...+y_{2n-1})],\ R \le \frac{(b-a)^4 h^4 M_4}{180};$$

Анализируя рассмотренные методы численного интегрирования мы можем сделать вывод, что расчет по формуле Симпсона является наиболее точным.

Исходные данные:

Задание. В каждом варианте найти численное значение первой и второй производной в точке, являющейся серединой заданного интервала, с точностью до 0,01. Вычислить с заданной точностью интегралы по формулам прямоугольников, трапеций, Симпсона. Сравнить методы по точности.

№ вар и- ант	**Функция** $f(x)$	Интервал	**Метод**	**Точность**	**Значение интеграла**
9.	$\frac{\cos x}{x}$	[1 ; 2]	Симпсона	0,000001	**0,0855770**

Результаты выполнения программы:

```
Первая производная:  -0.6964354419526675
Количество итераций: 5
Вторая производная:  0.8814225689093289
Количество итераций: 6
```

```
Метод Симпсона:  0.08557690767576151
Количество итераций: 1
Метод левых прямоугольников:  0.08557976070572647
Количество итераций: 12
Метод правых прямоугольников:  0.08557405105206939
Количество итераций: 12
Метод средних прямоугольников:  0.08557625028074753
Количество итераций: 3
Метод трапеций:  0.08557723367113182
Количество итераций: 4
```

Тестовый пример 1:

```
sqrt(x^3) / sin(x)
Метод Симпсона:  1.939985792522868
Количество итераций: 1
Метод левых прямоугольников:  1.9399839535759655
Количество итераций: 14
Метод правых прямоугольников:  1.9399876198206751
Количество итераций: 14
Метод средних прямоугольников:  1.9399853516694037
Количество итераций: 4
Метод трапеций:  1.9399866567540272
Количество итераций: 4

Первая производная:  1.7111248171522675
Количество итераций: 6
Вторая производная:  2.2129529941594224
Количество итераций: 7
```

Тестовый пример 2:

```
sh(x) * cos(x)
Метод Симпсона:  -0.045179364889599505
Количество итераций: 1
Метод левых прямоугольников:  -0.045177320015070695
Количество итераций: 14
Метод правых прямоугольников:  -0.04518140988628671
Количество итераций: 14
Метод средних прямоугольников:  -0.045178616576703835
Количество итераций: 4
Метод трапеций:  -0.04517973913553768
Количество итераций: 5

Первая производная:  -1.957542715456384
Количество итераций: 6
Вторая производная:  -4.693033717830985
Количество итераций: 5
```

Тестовый пример 3:

```
arctg(x) / (9 - x^2)
Метод Симпсона:  0.1500782053688641
Количество итераций: 1
Метод левых прямоугольников:  0.1500763242822466
Количество итераций: 10
Метод правых прямоугольников:  0.15008008572551848
Количество итераций: 10
Метод средних прямоугольников:  0.15007787413724766
Количество итераций: 2
Метод трапеций:  0.15007886671126083
Количество итераций: 2

Первая производная:  0.11029475052694693
Количество итераций: 5
Вторая производная:  0.09910278149618533
Количество итераций: 5
```

Вывод:

Была написана программа на языке Python с использованием библиотеки NumPy для нахождения численного значения 1 и 2 производной в точке и вычисления с заданной точностью интегралов по формулам Симпсона, трапеций, прямоугольников. Также программа выводит количество итераций на метод для сравнения трудоемкости.