Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования “Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники”

Факультет компьютерных систем и сетей

кафедра Информатики

Дисциплина: Методы численного анализа

ОТЧЕТ

к лабораторной работе

на тему:

“Интерполяционные многочлены”

БГУИР КП 1-40 04 01

Выполнил: студент гр. 953505

Красовский В.Ю.

Проверил: доцент кафедры информатики Анисимов В.Я

Минск 2021

Вариант 9

Цели работы:

Изучить интерполяцию функций с помощью интерполяционных многочленов Лагранжа и Ньютона.

Краткие теоретические сведения

Пусть f(x) - функция, непрерывная на отрезке [a,b]. Выберем на этом отрезке точки, называемые узлами интерполяции:

$$a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$$

Предположим,что известны значения функции в узлах интерполяции:

$$f(x_k) = y_k, \quad k = 0,1,\ldots,n.$$

Ставится задача найти многочлен Pn(x) такой, что

$$P_n(x_k) = y_k, \qquad \forall k = 0,1,\ldots n.$$

Такой многочлен Pn(x) называется интерполяционным многочленом, а задача его нахождения — задачей интерполяции.
Можно показать, Что задача интерполяции всегда имеет решение. причем единственное.
Обозначим

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) \quad . \quad \text{Пусть} \quad f(x) \in C^{n+1}[a,b].$$

Погрешность интерполяции оценивается по формуле

$$|R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega(x)|, \quad \text{где} \quad M_{n+1} = \max_{a \le x \le b}|f^{(n+1)}(x)|.$$

1) Интерполяционный многочлен Лагранжа

Пусть $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$,

$$\omega_j(x) = (x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_n).$$

Положим

$$l_j(x) = \frac{\omega_j(x)}{\omega_j(x_j)},$$

т. е. $$l_j(x) = \frac{(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdot\ldots\cdot(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdot\ldots\cdot(x_j-x_n)}.$$

$$l_j(x_i) = \begin{cases} 0, & при\ i \neq j \\ 1, & при\ i = j. \end{cases}$$

Построим многочлен

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} l_j(x) y_j .$$

Такой многочлен называют интерполяционным многочленом Лагранжа.

2) Интерполяционный многочлен Ньютона

Пусть x0, x1, ..., xn - набор узлов интерполирования,
y0, y1, ..., yn значения функции f(x) в узлах.
Величину $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ называют конечной разностью первого порядка в k-ом узле.
Аналогично определяются конечные разности высших порядков.

$$\Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k = y_{k+2} - y_{k+1} - (y_{k+1} - y_k) = y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k$$

……………………………………………………………………………………

$$\Delta^i y_k = \Delta^{i-1} y_{k+1} - \Delta^{i-1} y_k = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} C_n^i y_{k+i} \quad \Delta^i y_k = \Delta^{i-1} y_{k+1} - \Delta^{i-1} y_k = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} C_n^i y_{k+i} .$$

Конечные разности обычно считают по схеме:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
x_0	y_0			
		$\Delta y_0 = y_1 - y_0$		
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$	
		$\Delta y_1 = y_2 - y_1$		$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$	
		$\Delta y_2 = y_3 - y_2$		
x_3	y_3			

Разделенной разностью первого порядка называется выражение

$$f_1(x_k, x_{k+1}) = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}.$$

Разделенной разностью второго порядка называется выражение

$$f_2(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}) = \frac{f_1(x_{k+1}, x_{k+2}) - f_1(x_k, x_{k+1})}{x_{k+2} - x_k} \text{ и т. д.}$$

Пусть x — любая точка отрезка, не совпадающая с узлами. Тогда

$$f_1(x, x_0) = \frac{y_0 - f(x)}{x_0 - x},$$

Откуда

$$f(x) = y_0 + f_1(x, x_0)(x - x_0).$$

Далее

$$f_2(x, x_0, x_1) = \frac{f_1(x_0, x_1) - f_1\ (x, x_0)}{x_1 - x},$$

Откуда

$$f_1(x, x_0) = f_1(x_0, x_1) + f_2\ (x, x_0, x_1)(x - x_1).$$

$$f(x) = y_0 + f_1(x_0, x_1)(x - x_0) + f_2\ (x, x_0, x_1)(x - x_0)(x - x_1).$$

$$f_3(x, x_0, x_1, x_2) = \frac{f_2(x_0, x_1, x_2) - f_2\ (x, x_0, x_1)}{x_2 - x},$$

$$f_2(x, x_0, x_1) = f_2(x_0, x_1, x_2) + f_3\ (x, x_0, x_1, x_2)(x - x_2).$$

$$f(x) = y_0 + f_1(x_0, x_1)(x - x_0) + f_2\ (x, x_0, x_2)(x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ f_3\ (x, x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

$$f(x) = N_n(x) + f_{n+1}(x, x_0, \ldots, x_n)(x - x_0)\ldots(x - x_n),$$

Где

$$N_n(x) = y_0 + f_1(x_0, x_1)(x - x_0) + \ldots + f_n\ (x_0, \ldots, x_n)(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}).$$

Очевидно при

$$x = x_i, \qquad \forall i = \overline{0, n}, \qquad f(x_i) = N_n(x_i), \qquad i = \overline{0, n},$$

т. е. Nn(x) - интерполяционный многочлен. Его называют интерполяционным многочленом Ньютона.

Исходные даннные:

Задание. Построить интерполяционные многочлены в форме Лагранжа и Ньютона, используя номер варианта k, соответствующие значения параметров m и p; и значения x,y из таблиц:

x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
p_i	0.0	0.41	0.79	1.13	1.46	1.76	2.04	2.3	2.55	2.79	3.01

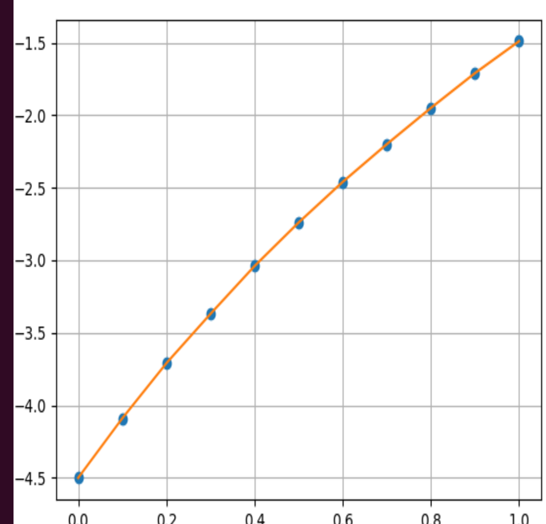
$y_i = p_i + (-1)^k m$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
m	0	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	1.8	2.53	3.96	5.33	1.96

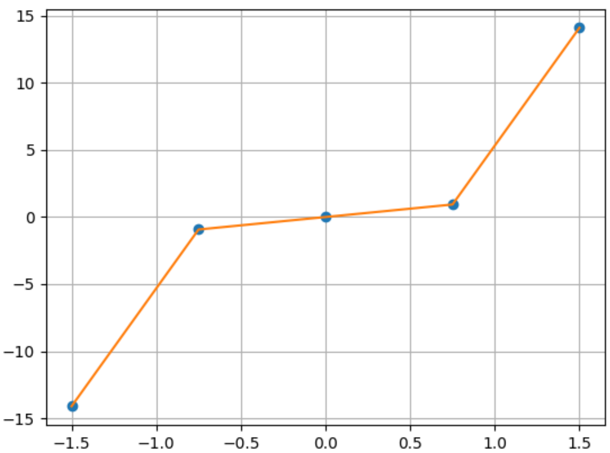
Оценить погрешность. Вычислить значение ф-ии в точке 0.47 с помощью интерполяционного многочлена и многочлена наилучшего приближения. Сравнить значения.

Результаты выполнения программы:

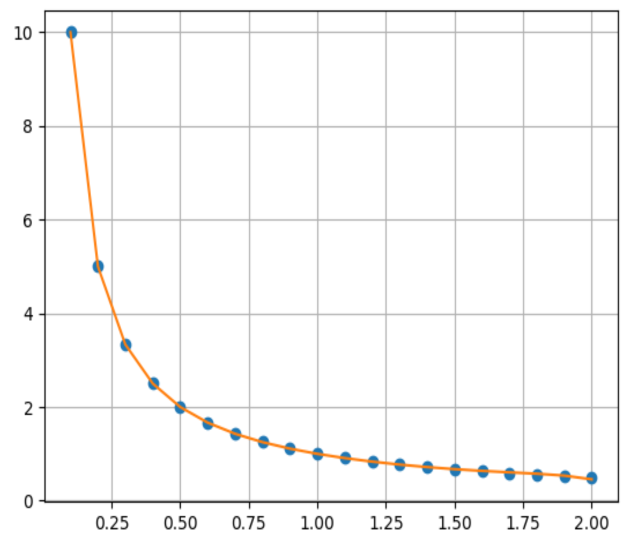
```
Многочлен Лагранжа
      10             9             8             7             6
3279 x  - 1.682e+04 x + 3.714e+04 x - 4.611e+04 x + 3.532e+04 x
             5        4         3         2
 - 1.719e+04 x + 5268 x - 966.3 x + 92.75 x + 0.6282 x - 4.5

Многочлен Ньютона
      10             9             8             7             6
3279 x  - 1.682e+04 x + 3.714e+04 x - 4.611e+04 x + 3.532e+04 x
             5        4         3         2
 - 1.719e+04 x + 5268 x - 966.3 x + 92.75 x + 0.6282 x - 4.5

Многочлен наилучшего приближения
      10             9             8             7             6
3279 x  - 1.682e+04 x + 3.714e+04 x - 4.611e+04 x + 3.532e+04 x
             5        4         3         2
 - 1.719e+04 x + 5268 x - 966.3 x + 92.75 x + 0.6282 x - 4.5

Значение в точке 0.47(многочлен Ньютона):
-2.8273479203688323
Значение в точке 0.47(многочлен Лагранжа):
-2.82734792029128б
Значение в точке 0.47(многочлен наилучшего приближения):
-2.8273479202920253
```



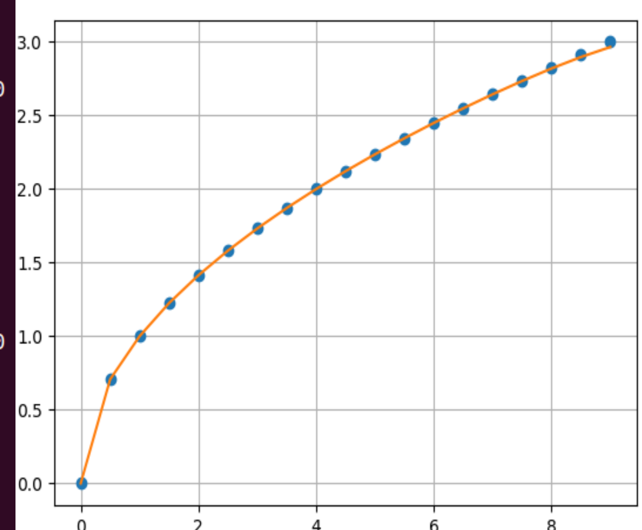
```
Test 1
Многочлен Лагранжа
       3
4.835 x - 1.477 x

Многочлен Ньютона
       3
4.835 x - 1.477 x + 1.776e-15

Многочлен наилучшего приближения
       3             2
4.835 x + 1.354e-16 x - 1.477 x - 3.221e-17

Значение в точке 0.47(многочлен Ньютона):
-0.19244429266804944
Значение в точке 0.47(многочлен Лагранжа):
-0.19244429266804608
Значение в точке 0.47(многочлен наилучшего приближения):
-0.19244429266804988
```




```
Test 2
Многочлен Лагранжа
       19         18         17              16              15
-41.1 x  + 863.2 x  - 8473 x  + 5.166e+04 x  - 2.192e+05 x
              14              13              12              11
 + 6.874e+05 x  - 1.651e+06 x  + 3.108e+06 x  - 4.649e+06 x
              10             9             8             7            6
 + 5.573e+06 x  - 5.374e+06 x + 4.169e+06 x - 2.591e+06 x + 1.28e+06 x
             5            4             3        2
 - 4.96e+05 x + 1.48e+05 x - 3.304e+04 x + 5290 x - 567.4 x + 35.98

Многочлен Ньютона
       19         18         17              16              15
-41.1 x  + 863.2 x  - 8473 x  + 5.166e+04 x  - 2.192e+05 x
              14              13              12              11
 + 6.874e+05 x  - 1.651e+06 x  + 3.108e+06 x  - 4.649e+06 x
              10             9             8             7            6
 + 5.573e+06 x  - 5.374e+06 x + 4.169e+06 x - 2.591e+06 x + 1.28e+06 x
             5            4             3        2
 - 4.96e+05 x + 1.48e+05 x - 3.304e+04 x + 5290 x - 567.4 x + 35.98

Значение в точке 0.47(многочлен Ньютона):
2.1276493720959877
Значение в точке 0.47(многочлен Лагранжа):
2.1276492024096356
```




```
Test 3
Многочлен Лагранжа
            18              17              16            15
-9.141e-12 x  + 7.823e-10 x  - 3.107e-08 x  + 7.6e-07 x
              14              13             12            11            10
 - 1.282e-05 x  + 0.0001582 x  - 0.001477 x  + 0.01067 x  - 0.06027 x
         9          8         7         6         5         4
 + 0.268 x - 0.9383 x + 2.576 x - 5.491 x + 8.953 x - 10.91 x
         3         2
 + 9.647 x - 5.987 x + 2.938 x

Многочлен Ньютона
            18              17              16            15
-9.141e-12 x  + 7.823e-10 x  - 3.107e-08 x  + 7.6e-07 x
              14              13             12            11            10
 - 1.282e-05 x  + 0.0001582 x  - 0.001477 x  + 0.01067 x  - 0.06027 x
         9          8         7         6         5         4
 + 0.268 x - 0.9383 x + 2.576 x - 5.491 x + 8.953 x - 10.91 x
         3         2
 + 9.647 x - 5.987 x + 2.938 x

Значение в точке 0.47(многочлен Ньютона):
0.6847656817499895
Значение в точке 0.47(многочлен Лагранжа):
0.6847656817713228
```



Вывод

Была написана программа на языке python с использованием библиотеки numpy для нахождения интерполяционных многочленов Лагранжа и Ньютона. Были построены функции и найдены их значения в точке 0.47