Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования “Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники”

Факультет компьютерных систем и сетей

кафедра Информатики

Дисциплина: Методы численного анализа

ОТЧЕТ

к лабораторной работе

на тему:

“Метод Адамса”

БГУИР КП 1-40 04 01

Выполнил: студент гр. 953505

Красовский В.Ю.

Проверил: доцент кафедры информатики Анисимов В.Я

Минск 2021

Вариант 9

Цели работы: Изучить численное решение Задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений методом Адамса.

Краткие теоретические сведения

Пусть есть дифференциальное уравнение с начальным условием

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Разбиваем отрезок [a, b] с шагом h на n частей. То есть, получаем узлы

$x_k = x_0 + kh$, $k = \overline{0, n}$, где $x_0 = a$.

Пусть $y = y(x)$ - решение. Тогда на $[x_k, x_{k+1}]$ справедливо равенство

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_K}^{x_{K+1}} f(x, y(x))dx.$$

Применим формулу левых прямоугольников для вычисления интеграла:

$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$, то есть формулу Эйлера.

Очевидно,то не самый точный метод вычисления интеграла. Используем интерполяционную квадратурную формулу Лагранжа для вычисления интеграла, т.е.

$$\int_{x_K}^{x_{K+1}} f(x, y(x))dx = A_0 f(x_k, y_k) + A_1 f(x_{k-1}, y_{k-1}),$$ где

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{m} f(x_i)A_i, \quad A_i = \int_a^b l_i(x)dx; \quad l_i(x) = \frac{\varpi_i(x)}{\varpi_i(x_i)}.$$

Найдем коэффициенты А, методом неопределенных коэффициентов:

$$\int_{x_K}^{x_{K+1}} dx = A_0 + A_1; \quad \int_{x_K}^{x_{K+1}} xdx = A_0 x_k + A_1 x_{k-1}.$$

Получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} A_0 = h - A_1 \\ \dfrac{h(x_{k+1} + x_k)}{2} = A_0 x_k + A_1 x_{k-1}\,. \end{cases}$$

Откуда

$$\frac{h(x_{k+1} + x_k)}{2} = (h - A_1)x_k + A_1 x_{k-1}; \qquad \frac{h(x_{k+1} + x_k)}{2} = hx_k - A_1 h;$$

$$\frac{h(x_{k+1} + x_k)}{2} = hx_k - A_1(x_k - x_{k-1}); \qquad A_1 h = hx_k - \frac{h(x_{k+1} + x_k)}{2} = \frac{h(x_k - x_{k+1})}{2}.$$

В итоге получим:

$$A_1 = -\frac{h}{2};$$

$$A_0 = h - A_1 = \frac{3h}{2}.$$

Откуда

$$\int_{x_K}^{x_{K+1}} f(x, y(x))dx = \frac{3}{2}hf_k - \frac{h}{2}f_{k-1}, \quad \text{где} \quad f_k = f(x_k, y_k).$$

Следовательно, получим

$$y_{k+1} = y_k + h\left(\frac{3}{2}f(x_k, y_k) - \frac{1}{2}f(x_{k-1}, y_{k-1})\right) \qquad k = \overline{1, n}..$$

Это формула Адамса второго порядка, которая используется для выполнения задания. Существенным недостатком метода Адамса второго порядка является то обстоятельство, что для его применения надо знать Дополнительно к начальному условию ещё

$$y_{-1} = y(x_0 - h) \text{ или } y_1 = y(x_0 + h).$$

Достоинством метода является то, что значение функции f в каждой точке

(x_k, y_k) вычисляется только один раз.

Исходные данные: (k = 9)

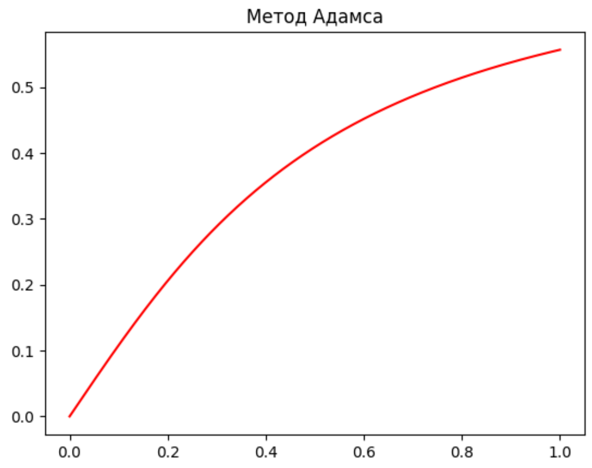
ЗАДАНИЕ. Найти с точностью до 0.001 решения следующих уравнений на отрезке [0; 1]

$$y' = \frac{a(1-y^2)}{(1+m)x^2 + y^2 + 1}, \quad y(0) = 0,$$

где значения параметров a и m принимают следующие значения для вариантов k.

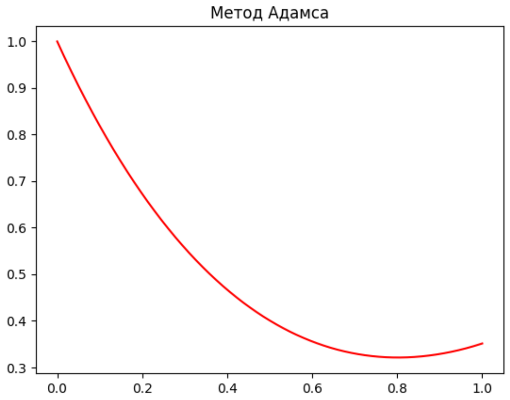
k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
m	1.0	1.5	2.0	1.0	1.5	2.0	1.0	1.5	2.0	1.0	1.5	2.0	1.0	2.0
a	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	0.5	0.7	0.9	1.0

Результаты выполнения программы:



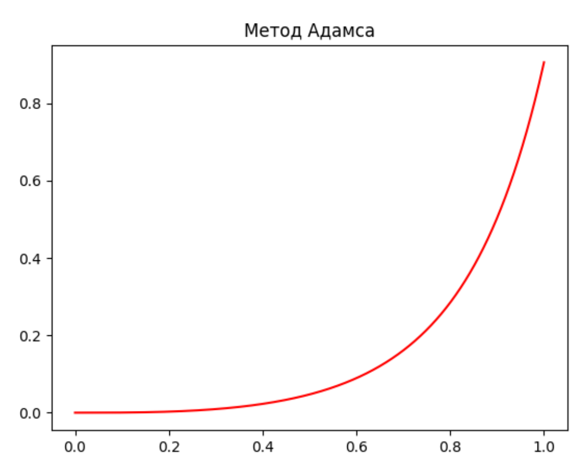

```
Метод Адамса:
Число отрезков: 2048
Погрешность: 0.0005371065987428232
```

Тестовый пример 1:



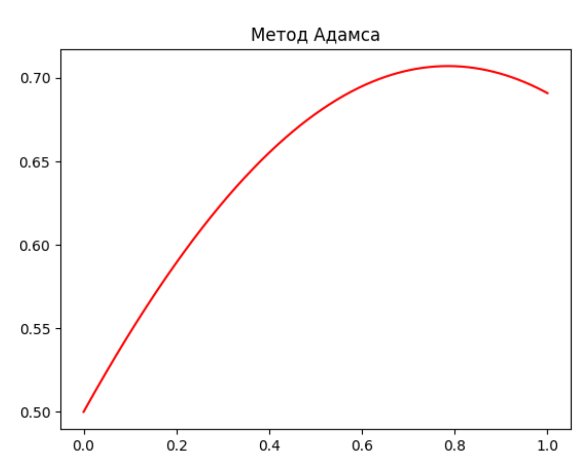

```
Test 1: y' = x^2 - 2y
Метод Адамса:
Число отрезков: 2048
Погрешность: 0.0009746565474419988
```

Тестовый пример 2:




```
Test 2: y' = 3x^2 + x^2 * exp(x^3)
Метод Адамса:
Число отрезков: 8192
Погрешность: 0.0006636425595182294
```

Тестовый пример 3:




```
Test 3: y' = cos(x) - y
Метод Адамса:
Число отрезков: 512
Погрешность: 0.0009727403618645658
```

Вывод: Была написана программа на языке python с использованием библиотек numpy и matplotlib для решения задачи Коши для обыкновенных ДУ методом Эйлера и методом Рунге-Кутта с заданной точностью. Также программа выводит число отрезков разбиения и погрешность методов для заданной функции.