Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования “Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники”

Факультет компьютерных систем и сетей

кафедра Информатики

Дисциплина: Методы численного анализа

ОТЧЕТ

к лабораторной работе

на тему:

“Решение систем линейных алгебраический уравнений методом Гаусса и с помощью его модификаций”

БГУИР КП 1-40 04 01

Выполнил: студент гр. 953505

Красовский В.Ю.

Проверил: доцент кафедры информатики Анисимов В.Я

Минск 2021

Вариант 9

Цели работы:

изучить метод Гаусса и его модификации,составить алгоритм метода и программу его реализации, получить численное решение заданной СЛАУ

составить алгоритм решения СЛАУ указанными методами, применимый для организации вычислений на ЭВМ

составить программу решения СЛАУ по разработанному алгоритму

выполнить тестовые примеры и проверить правильность работы программы

Краткие теоретические сведения

Задача отыскания решения СЛАУ с n неизвестными является одной из наиболее часто встречающихся вычислительных задач. Хотя задача решения системы линейных уравнений сравнительно редко представляет самостоятельный интерес для приложений, от умения эффективно решать такие системы часто зависит сама возможность математического моделирования с применением ЭВМ разнообразных процессов. Значительная часть численных методов решения различных по своей природе задач (в особенности — нелинейных) включает в себя решение систем линейных уравнений как элементарный шаг соответствующего алгоритма.

Методы решения СЛАУ делятся на прямые и итерационные. Прямые методы дают в принципе точное решение(если не учитывать ошибок округления) за конечное число арифметических операций. Они просты и наиболее универсальны. Для хорошо обусловленных систем небольшого порядка $n <= 200$ применяются практически только прямые методы. Наибольшее распространение среди прямых методов получили метод Гаусса и его модификации.

Метод Гаусса. Одним из самых распространенных методов решения систем линейных уравнений является метод Гаусса. Он также называется методом последовательного исключения неизвестных и заключается в последовательном исключении неизвестных из системы для преобразования ее к эквивалентной системе с верхней треугольной матрицей. Вычисления значений неизвестных производят на этапе обратного хода.

На первом этапе осуществляется так называемый **прямой ход**, когда путём элементарных преобразований над строками систему приводят к ступенчатой или треугольной форме. Для этого среди элементов первого столбца матрицы выбирают ненулевой, перемещают содержащую его строку в крайнее верхнее положение, делая эту строку первой. Далее ненулевые элементы первого столбца всех нижележащих строк обнуляются путём вычитания из каждой строки первой строки, домноженной на отношение первого элемента этих строк к первому элементу первой строки. Данную операцию повторяют для всех последующих строк. Если на какой-то из итераций среди элементов первого столбца не нашёлся ненулевой, то переходят к следующему столбцу и проделывают аналогичную операцию.

На втором этапе осуществляется так называемый **обратный ход.** Обратный ход. Из последнего уравнения системы находим x_n. Подставляя найденное значение x_n в предпоследнее уравнение получим x_{n-1}. Осуществляя обратную подстановку, далее последовательно находим x_{n-2}, …, x_1.

Метод Гаусса с выбором главного элемента

Основное накопление погрешностей решения в методе Гаусса происходит на этапе приведения системы к треугольному виду. Механизм накопления основной части этой погрешности заключается в привнесении погрешностей вычисления коэффициентов k-го уравнения в коэффициенты последующих уравнений при исключении каждого очередного неизвестного. Погрешность будет тем меньше, чем меньше множители k-го шага q_{ik}. Поэтому в методе Гаусса с выбором главного элемента на каждом шаге исключения i-го неизвестного в качестве ведущего используется уравнение (с i-го по n-ое), содержащее максимальный по модулю коэффициент – главный элемент. При этом в качестве него может использоваться один из коэффициентов i-го столбца, i-ой строки или всей непреобразованной части матрицы. Первый подход называется выбором главного элемента по столбцу, второй – по строке, а третий – по всей матрице. При использовании двух последних происходит перестановка столбцов матрицы системы.

Исходные данные:

ЗАДАНИЕ.

Методом Гаусса и методом выбора главного элемента найти с точностью 0,0001 численное решение системы ***Ax=b***,

где A = kC + D, A – исходная матрица для расчёта, k – номер варианта (0-15), матрицы C, D и вектор свободных членов b задаются ниже.

K = 9

Вектор **b**= (4,2; 4,2; 4,2 ; 4,2; 4,2)^T,

$$C = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}2 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0 & 0{,}2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2{,}33 & 0{,}81 & 0{,}67 & 0{,}92 & -0{,}53 \\ -0{,}53 & 2{,}33 & 0{,}81 & 0{,}67 & 0{,}92 \\ 0{,}92 & -0{,}53 & 2{,}33 & 0{,}81 & 0{,}67 \\ 0{,}67 & 0{,}92 & -0{,}53 & 2{,}33 & 0{,}81 \\ 0{,}81 & 0{,}67 & 0{,}92 & -0{,}53 & 2{,}33 \end{bmatrix}.$$

Результаты выполнения программы:

Задание:

```
Система:
[[ 4.13  0.81  2.47  0.92 -0.53  4.2 ]
 [-0.53  4.13  0.81  2.47  0.92  4.2 ]
 [ 2.72 -0.53  4.13  0.81  2.47  4.2 ]
 [ 0.67  2.72 -0.53  4.13  0.81  4.2 ]
 [ 0.81  0.67  2.72 -0.53  4.13  4.2 ]]
Метод Гаусса : [0.810065 0.797443 0.136504 0.246372 0.670423]
Метод Гаусса с выбором по столбцу : [0.810065 0.797443 0.136504 0.246372 0.670423]
Метод Гаусса с выбором по всей матрице : [0.810065 0.797443 0.136504 0.246372 0.670423]
Невязка : 8.881784197001252e-16
```

Тестовый пример 1:

```
Тест 1
Система:
[[ 2. -1.  0.  0.]
 [-1.  1.  4. 13.]
 [ 1.  2.  3. 14.]]
Метод Гаусса : [1. 2. 3.]
Метод Гаусса с выбором по столбцу : [1. 2. 3.]
Метод Гаусса с выбором по всей матрице : [1. 2. 3.]
Невязка : 0.0
```

Тестовый пример 2:

```
Тест 2
Система:
[[ 1.  2.  3.  1.]
 [ 2. -1.  2.  6.]
 [ 1.  1.  5. -1.]]
Метод Гаусса : [ 4. -0. -1.]
Метод Гаусса с выбором по столбцу : [ 4.  0. -1.]
Метод Гаусса с выбором по всей матрице : [ 4. -0. -1.]
Невязка : 0.0
```

Тестовый пример 3:

```
Тест 3
Система:
[[ 3.  2. -5. -1.]
 [ 2. -1.  3. 13.]
 [ 1.  2. -1.  9.]]
Метод Гаусса : [3. 5. 4.]
Метод Гаусса с выбором по столбцу : [3. 5. 4.]
Метод Гаусса с выбором по всей матрице : [3. 5. 4.]
Невязка : 0.0
```

Выводы

Была написана программа на языке python с использование библиотеки numpy для решения СЛАУ методами Гаусса, выбором по столбцу, выбором по матрице.