Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования “Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники”

Факультет компьютерных систем и сетей

кафедра Информатики

Дисциплина: Методы численного анализа

ОТЧЕТ

к лабораторной работе

на тему:

“Методы Эйлера и Рунге-Кутта”

БГУИР КП 1-40 04 01

Выполнил: студент гр. 953505

Красовский В.Ю.

Проверил: доцент кафедры информатики Анисимов В.Я

Минск 2021

Вариант 9

Цели работы: Изучить решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений методом Эйлера и методом Рунге-Кутта.

Краткие теоретические сведения

Рассмотрим дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$. Будем предполагать, что $f(x, y)$ непрерывная и непрерывно дифференцируемая по y функция в окрестности замкнутой области

$$D = \{(x, y) \mid a \le x \le b, c \le y \le d\},$$

содержащей внутри себя точку (x_0, y_0). Требуется решить задачу Коши: найти непрерывно дифференцируемую функцию $y=y(x)$, такую что $y' = f(x, y(x))$ при всех $x \in [a, b]$ и $y(x_0) = y_0$.
Разобьем отрезок [a, b] с помощью точек разбиения $a=x_0, x, \ldots, x_n = b$ с шагом $h = (b - a)/n$. Тогда узлы разбиения имеют вид

$$x_k = x_0 + kh, \quad k = \overline{0,n}.$$

Пусть $y(x_0), y(x_1), \ldots, y(x_n)$ - значения функции в точках разбиения.

1) **Метод Эйлера**
Построим рекуррентную последовательность:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad y_0 = y(x_0),$$

которую называют последовательностью Эйлера. Соединяя ломаными все точки (x_k, y_k), полученные из рекуррентной последовательности Эйлера, получим ломаную линию, приближающую график решения $y = y(x)$. Функция, график которой совпадает с ломаной Эйлера, принимается за приближенное решение задачи Коши. Точность метода Эйлера на всем отрезке [a, b] будет O(h). Для повышения точности вычислений иногда используется модифицированный метод Эйлера, в котором рекуррентная последовательность Эйлера вычисляется по формулам

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k)), \qquad k = 0,1\ldots,n-1.$$

Модифицированный метод Эйлера обычно дает более точное приближение решения.

2) **Метод Рунге-Кутта четвертого порядка.**
На каждом шаге производится вычисление коэффициентов К1,К2, К3, К4:

$$K_1 = hf(x_k, y_k); \qquad K_3 = hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{K_2}{2});$$

$$K_2 = hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{K_1}{2}); \qquad K_4 = hf(x_k + h, y_k + K_3).$$

Затем вычисляем

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4).$$

Данный метод имеет точность $O(h^4)$ на [a, b].

Таким образом, метод Рунге-Кутта 4-го порядка отличается очень высокой точностью. К определенным его недостаткам относится большая сложность и трудоемкость (на каждом шаге необходимо четырежды вычислять значения функции f вместо одного раза в методе Эйлера). Отметим, что на практике выбирают начальную длину шага h таким образом, чтобы $h^4 < \varepsilon$, где ε - заданная точность вычисления решения. Затем шаг выбирают вдвое меньшим и останавливают вычисления, если разность полученных значений y_k со значениями, полученными при начальном выборе шага меньше ε. В противном случае шаг еще раз уменьшают вдвое и т.д.

Исходные данные: (k = 9)

ЗАДАНИЕ. С помощью метода Эйлера, а затем метода Рунге-Кутта найти с точностью до 0.001 решения следующих уравнений на отрезке [0; 1].

$$y' = \frac{a(1-y^2)}{(1+m)x^2 + y^2 + 1}, \quad y(0) = 0,$$

где значения параметров a и m принимают следующие значения для вариантов k.

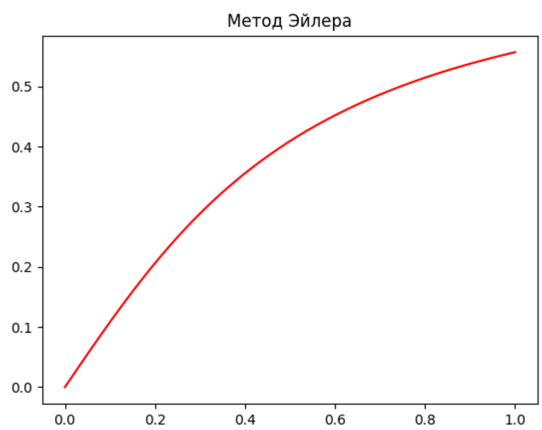
k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
m	1.0	1.5	2.0	1.0	1.5	2.0	1.0	1.5	2.0	1.0	1.5	2.0	1.0	2.0
a	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	0.5	0.7	0.9	1.0

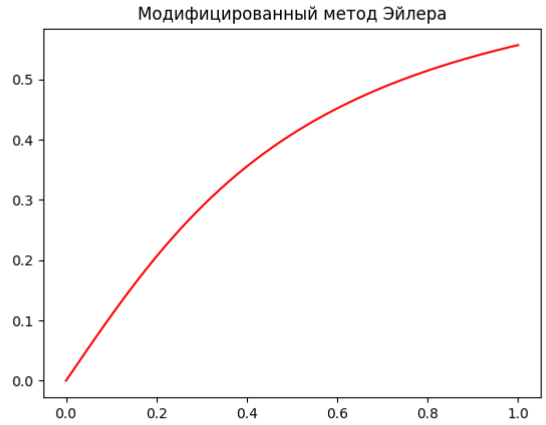
Шаг интегрирования h, обеспечивающий требуемую точность, выбирать в процессе вычисления из сравнения результатов, полученных с h и $h/2$. В случае необходимости шаг h должен быть уменьшен.

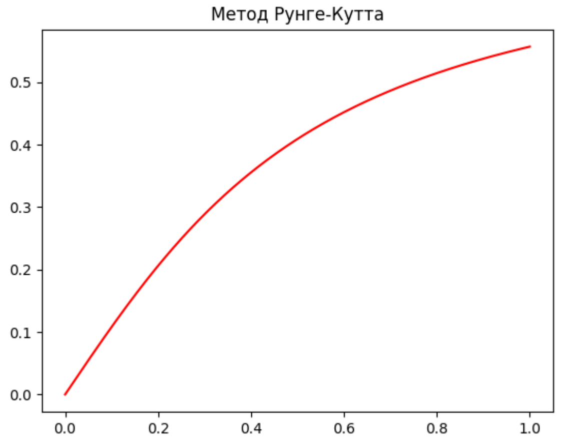
Сравнить результаты.

Результаты выполнения программы:

```
Метод Эйлера:
Число отрезков: 2048
Погрешность: 0.0005371065987385517
Модифицированный метод Эйлера:
Число отрезков: 2048
Погрешность: 0.0005371065987417555
Метод Рунге-Кутта:
Число отрезков: 2048
Погрешность: 0.0005371065987428232
```

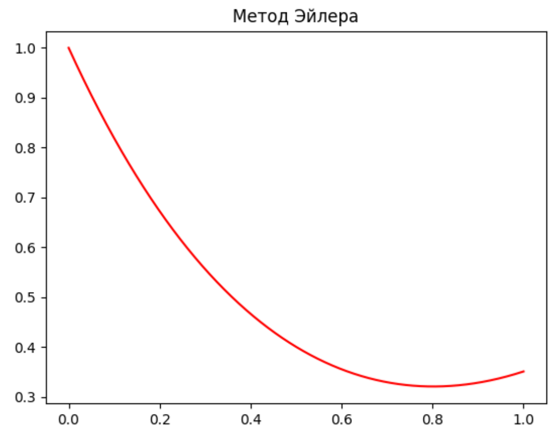


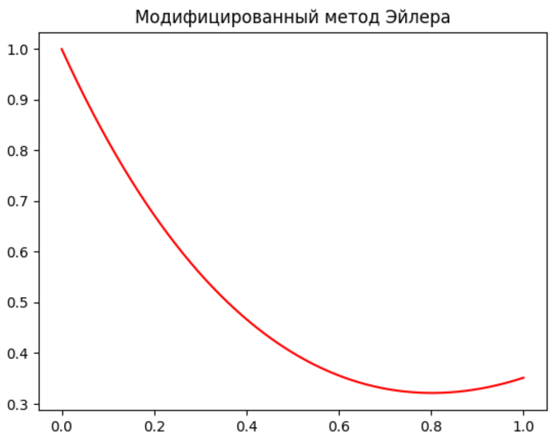


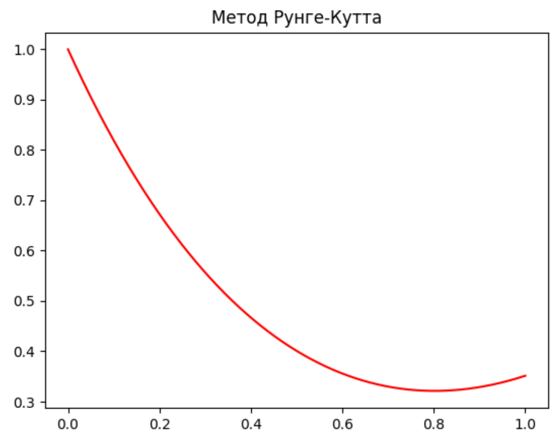


Тестовый пример 1:

```
Test 1: y' = x^2 - 2y
Метод Эйлера:
Число отрезков: 2048
Погрешность: 0.0009746546857059002
Модифицированный метод Эйлера:
Число отрезков: 2048
Погрешность: 0.0009746565485784231
Метод Рунге-Кутта:
Число отрезков: 2048
Погрешность: 0.0009746565474419988
```

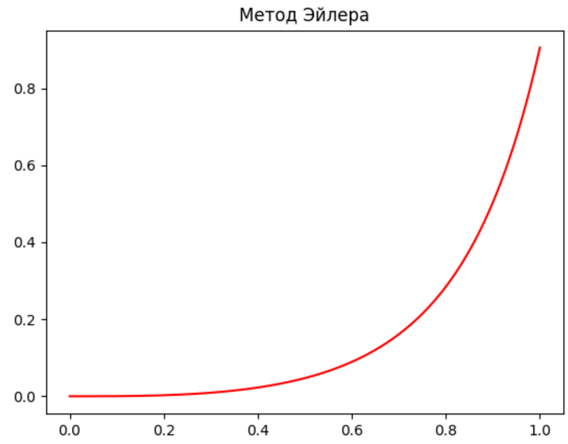


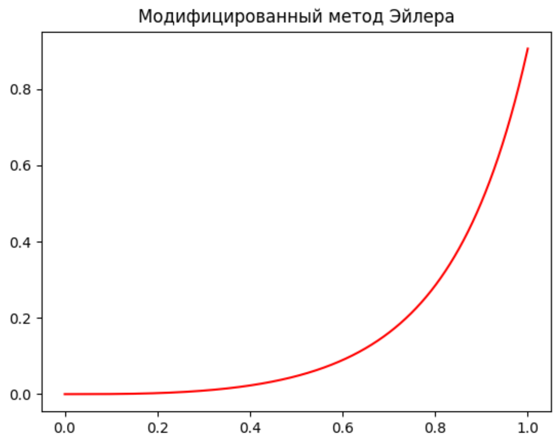


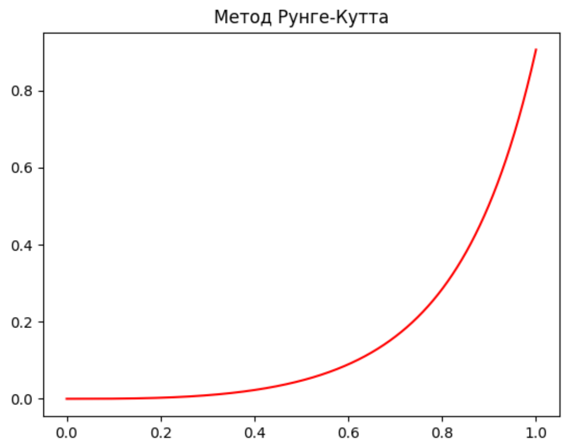


Тестовый пример 2:

```
Test 2: y' = 3x^2 + x^2 * exp(x^3)
Метод Эйлера:
Число отрезков: 8192
Погрешность: 0.0006632817820195758
Модифицированный метод Эйлера:
Число отрезков: 8192
Погрешность: 0.0006636429347942618
Метод Рунге-Кутта:
Число отрезков: 8192
Погрешность: 0.0006636430245261504
```

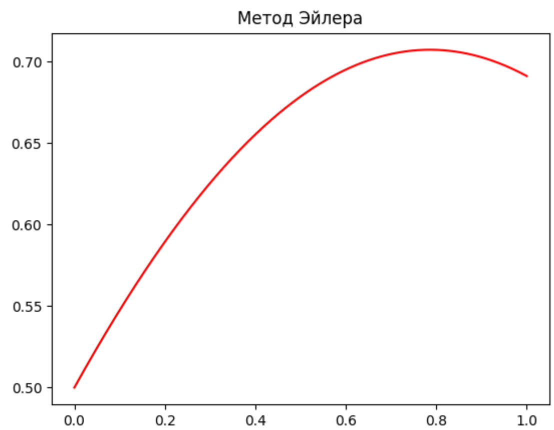


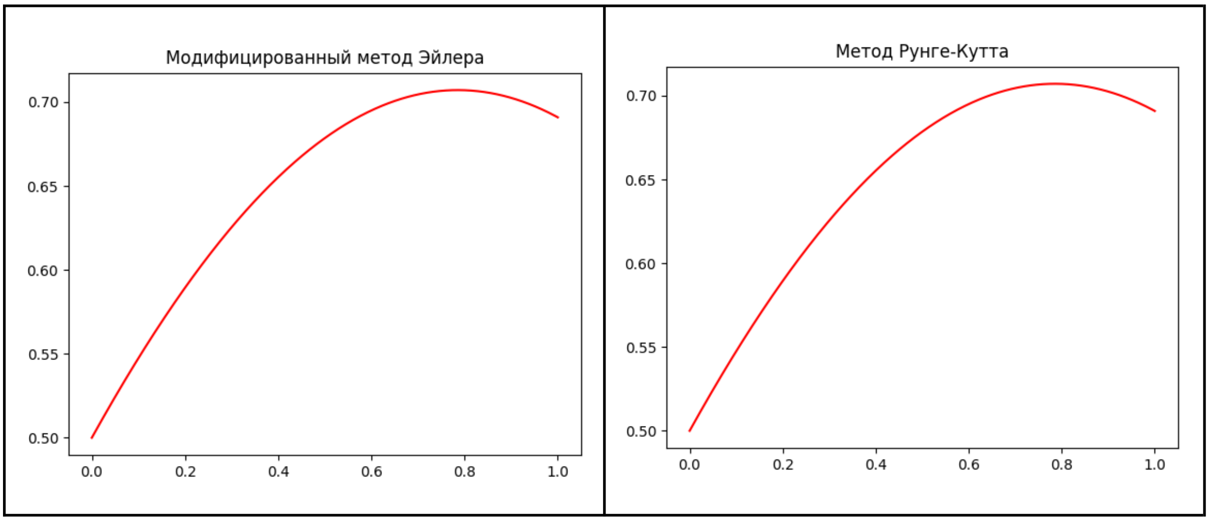




Тестовый пример 3:

```
Test 3: y' = cos(x) - y
Метод Эйлера:
Число отрезков: 512
Погрешность: 0.000972732901592166
Модифицированный метод Эйлера:
Число отрезков: 512
Погрешность: 0.0009727403667246781
Метод Рунге-Кутта:
Число отрезков: 512
Погрешность: 0.0009727403618645658
```





Вывод:

Была написана программа на языке python с использованием библиотек numpy и matplotlib для решения задачи Коши для обыкновенных ДУ методом Эйлера и методом Рунге-Кутта с заданной точностью. Также программа выводит число отрезков разбиения и погрешность методов для заданной функции.