

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования “Белорусский государственный
университет информатики и радиоэлектроники”

Факультет компьютерных систем и сетей
кафедра Информатики

Дисциплина: Методы численного анализа

ОТЧЕТ
к лабораторной работе
на тему:
“Интерполяционные многочлены”
БГУИР КП 1-40 04 01

Выполнил: студент гр. 953505

Красовский В.Ю.

Проверил: доцент кафедры
информатики Анисимов В.Я

Минск 2021

Вариант 9

Цели работы:

Изучить интерполяцию функций с помощью интерполяционных многочленов Лагранжа и Ньютона.

Краткие теоретические сведения

Пусть $f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке $[a,b]$. Выберем на этом отрезке точки, называемые узлами интерполяции:

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$$

Предположим, что известны значения функции в узлах интерполяции:

$$f(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Ставится задача найти многочлен $P_n(x)$ такой, что

$$P_n(x_k) = y_k, \quad \forall k = 0, 1, \dots, n.$$

Такой многочлен $P_n(x)$ называется интерполяционным многочленом, а задача его нахождения — задачей интерполяции.

Можно показать, что задача интерполяции всегда имеет решение. причем единственное.

Обозначим

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) \quad . \quad \text{Пусть} \quad f(x) \in C^{n+1}[a, b].$$

Погрешность интерполяции оценивается по формуле

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega(x)|, \quad \text{где} \quad M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|.$$

1) Интерполяционный многочлен Лагранжа

$$\text{Пусть} \quad \omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n),$$

$$\omega_j(x) = (x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_n).$$

Положим

$$l_j(x) = \frac{\omega_j(x)}{\omega_j(x_j)},$$

$$\text{т. е.} \quad l_j(x) = \frac{(x-x_0) \cdot \dots \cdot (x-x_{j-1})(x-x_{j+1}) \cdot \dots \cdot (x-x_n)}{(x_j-x_0) \cdot \dots \cdot (x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1}) \cdot \dots \cdot (x_j-x_n)}.$$

$$l_j(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{при } i \neq j \\ 1, & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Построим многочлен

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n l_j(x) y_j.$$

Такой многочлен называют интерполяционным многочленом Лагранжа.

2) Интерполяционный многочлен Ньютона

Пусть x_0, x_1, \dots, x_n - набор узлов интерполирования,

y_0, y_1, \dots, y_n значения функции $f(x)$ в узлах.

Величину $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ называют конечной разностью первого порядка в k -ом узле.

Аналогично определяются конечные разности высших порядков.

$$\Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k = y_{k+2} - y_{k+1} - (y_{k+1} - y_k) = y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k$$

.....

$$\Delta^i y_k = \Delta^{i-1} y_{k+1} - \Delta^{i-1} y_k = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} C_n^i y_{k+i} \quad \Delta^i y_k = \Delta^{i-1} y_{k+1} - \Delta^{i-1} y_k = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} C_n^i y_{k+i}.$$

Конечные разности обычно считают по схеме:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
x_0	y_0	$\Delta y_0 = y_1 - y_0$ $\Delta y_1 = y_2 - y_1$ $\Delta y_2 = y_3 - y_2$	$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$ $\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$	$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$
x_1	y_1			
x_2	y_2			
x_3	y_3			

Разделенной разностью первого порядка называется выражение

$$f_1(x_k, x_{k+1}) = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}.$$

Разделенной разностью второго порядка называется выражение

$$f_2(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}) = \frac{f_1(x_{k+1}, x_{k+2}) - f_1(x_k, x_{k+1})}{x_{k+2} - x_k} \text{ и т. д.}$$

Пусть x — любая точка отрезка, не совпадающая с узлами. Тогда

$$f_1(x, x_0) = \frac{y_0 - f(x)}{x_0 - x},$$

Откуда

$$f(x) = y_0 + f_1(x, x_0)(x - x_0).$$

Далее

$$f_2(x, x_0, x_1) = \frac{f_1(x_0, x_1) - f_1(x, x_0)}{x_1 - x},$$

Откуда

$$f_1(x, x_0) = f_1(x_0, x_1) + f_2(x, x_0, x_1)(x - x_1).$$

$$f(x) = y_0 + f_1(x_0, x_1)(x - x_0) + f_2(x, x_0, x_1)(x - x_0)(x - x_1).$$

$$f_3(x, x_0, x_1, x_2) = \frac{f_2(x_0, x_1, x_2) - f_2(x, x_0, x_1)}{x_2 - x},$$

$$f_2(x, x_0, x_1) = f_2(x_0, x_1, x_2) + f_3(x, x_0, x_1, x_2)(x - x_2).$$

$$f(x) = y_0 + f_1(x_0, x_1)(x - x_0) + f_2(x, x_0, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \\ + f_3(x, x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

$$f(x) = N_n(x) + f_{n+1}(x, x_0, \dots, x_n)(x - x_0) \dots (x - x_n),$$

Где

$$N_n(x) = y_0 + f_1(x_0, x_1)(x - x_0) + \dots + f_n(x_0, \dots, x_n)(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}).$$

Очевидно при

$$x = x_i, \quad \forall i = \overline{0, n}, \quad f(x_i) = N_n(x_i), \quad i = \overline{0, n},$$

т. е. $N_n(x)$ - интерполяционный многочлен. Его называют интерполяционным многочленом Ньютона.

Исходные данные:

Задание. Построить интерполяционные многочлены в форме Лагранжа и Ньютона, используя номер варианта k , соответствующие значения параметров m и p ; и значения x, y из таблиц:

x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
p_i	0.0	0.41	0.79	1.13	1.46	1.76	2.04	2.3	2.55	2.79	3.01

$$y_i = p_i + (-1)^k m$$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
m	0	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	1.8	2.53	3.96	5.33	1.96

Оценить погрешность. Вычислить значение f -ии в точке 0.47 с помощью интерполяционного многочлена и многочлена наилучшего приближения. Сравнить значения.

Результаты выполнения программы:

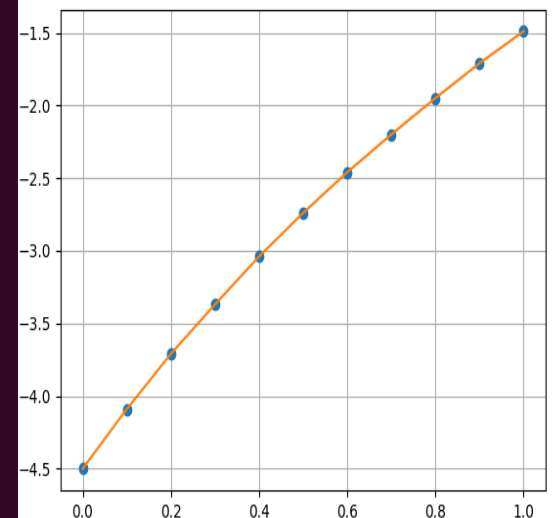
```

Многочлен Лагранжа
10      9      8      7      6
3279 x  - 1.682e+04 x + 3.714e+04 x - 4.611e+04 x + 3.532e+04 x
      5      4      3      2
- 1.719e+04 x + 5268 x - 966.3 x + 92.75 x + 0.6282 x - 4.5

Многочлен Ньютона
10      9      8      7      6
3279 x  - 1.682e+04 x + 3.714e+04 x - 4.611e+04 x + 3.532e+04 x
      5      4      3      2
- 1.719e+04 x + 5268 x - 966.3 x + 92.75 x + 0.6282 x - 4.5

Многочлен наилучшего приближения
10      9      8      7      6
3279 x  - 1.682e+04 x + 3.714e+04 x - 4.611e+04 x + 3.532e+04 x
      5      4      3      2
- 1.719e+04 x + 5268 x - 966.3 x + 92.75 x + 0.6282 x - 4.5

Значение в точке 0.47(многочлен Ньютона):
-2.8273479203688323
Значение в точке 0.47(многочлен Лагранжа):
-2.827347920291286
Значение в точке 0.47(многочлен наилучшего приближения):
-2.8273479202920253
  
```



```

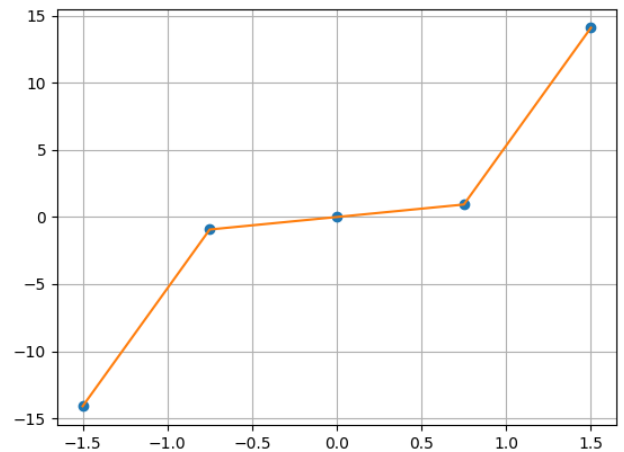
Test 1
Многочлен Лагранжа
      3
4.835 x - 1.477 x

Многочлен Ньютона
      3
4.835 x - 1.477 x + 1.776e-15

Многочлен наилучшего приближения
      3      2
4.835 x + 1.354e-16 x - 1.477 x - 3.221e-17

Значение в точке 0.47(многочлен Ньютона):
-0.19244429266804944
Значение в точке 0.47(многочлен Лагранжа):
-0.19244429266804608
Значение в точке 0.47(многочлен наилучшего приближения):
-0.19244429266804988

```



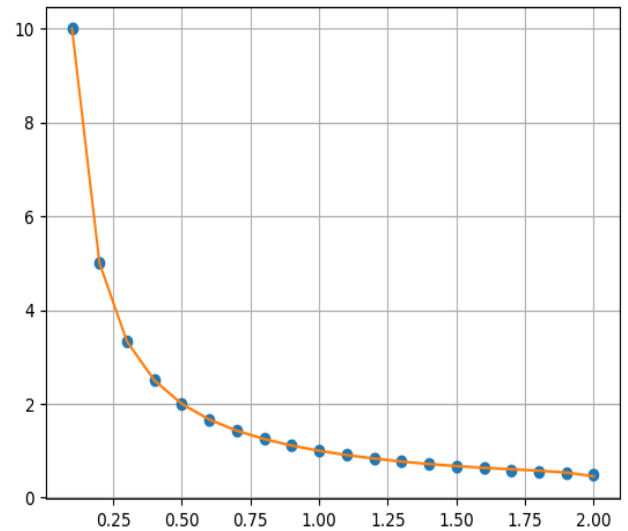
```

Test 2
Многочлен Лагранжа
      19      18      17      16      15
-41.1 x + 863.2 x - 8473 x + 5.166e+04 x - 2.192e+05 x
      14      13      12      11
+ 6.874e+05 x - 1.651e+06 x + 3.108e+06 x - 4.649e+06 x
      10      9      8      7      6
+ 5.573e+06 x - 5.374e+06 x + 4.169e+06 x - 2.591e+06 x + 1.28e+06 x
      5      4      3      2
- 4.96e+05 x + 1.48e+05 x - 3.304e+04 x + 5290 x - 567.4 x + 35.98

Многочлен Ньютона
      19      18      17      16      15
-41.1 x + 863.2 x - 8473 x + 5.166e+04 x - 2.192e+05 x
      14      13      12      11
+ 6.874e+05 x - 1.651e+06 x + 3.108e+06 x - 4.649e+06 x
      10      9      8      7      6
+ 5.573e+06 x - 5.374e+06 x + 4.169e+06 x - 2.591e+06 x + 1.28e+06 x
      5      4      3      2
- 4.96e+05 x + 1.48e+05 x - 3.304e+04 x + 5290 x - 567.4 x + 35.98

Значение в точке 0.47(многочлен Ньютона):
2.1276493720959877
Значение в точке 0.47(многочлен Лагранжа):
2.1276492024096356

```



```

Test 3
Многочлен Лагранжа
      18      17      16      15
-9.141e-12 x + 7.823e-10 x - 3.107e-08 x + 7.6e-07 x
      14      13      12      11
- 1.282e-05 x + 0.0001582 x - 0.001477 x + 0.01067 x - 0.06027 x
      9      8      7      6      5      4
+ 0.268 x - 0.9383 x + 2.576 x - 5.491 x + 8.953 x - 10.91 x
      3      2
+ 9.647 x - 5.987 x + 2.938 x

Многочлен Ньютона
      18      17      16      15
-9.141e-12 x + 7.823e-10 x - 3.107e-08 x + 7.6e-07 x
      14      13      12      11
- 1.282e-05 x + 0.0001582 x - 0.001477 x + 0.01067 x - 0.06027 x
      9      8      7      6      5      4
+ 0.268 x - 0.9383 x + 2.576 x - 5.491 x + 8.953 x - 10.91 x
      3      2
+ 9.647 x - 5.987 x + 2.938 x

Значение в точке 0.47(многочлен Ньютона):
0.6847656817499895
Значение в точке 0.47(многочлен Лагранжа):
0.6847656817713228

```

