Travaux dirigés Matrices n°5

Mathématiques pour l'informatique

—IMAC 2—

▸ **Exercice 1.** ***Vecteurs propres et valeurs propres : manuel***

1. *Déterminer les valeurs propres λ_1, λ_2 de la matrice suivante :*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

2. *Vérifier avec les identités classiques $tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\det A = \lambda_1 \lambda_2$.*

3. *En déduire les vecteurs propres de A.*

▸ **Exercice 2.** ***Réduction de matrices***

Chercher le polynôme caractéristique, les valeurs propres, puis les vecteurs propres, et enfin une éventuelle diagonalisation des matrices suivantes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -30 & 30 & 7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -14 & 16 & 3 \\ -10 & 12 & 2 \\ -30 & 30 & 7 \end{bmatrix}.$$

▸ **Exercice 3.** ***Analyse en Composantes Principales***

Dans cet exercice, nous étudionts la question "Quel super héros êtes-vous?".
Pour celà, nous constituons un ensemble de questions :

1. *possède des super pouvoirs (appréciation entre 0 ou 1)*

2. *porte des collants (appréciation entre 1 et 3)*

3. *travaille en équipe (appréciation entre 1 et 10)*

4. *possède un équipement particulier (appréciation entre 1 et 10)*

5. *homme / femme (appréciation entre 1 ou 0)*

ainsi qu'un panel de super héros pour lesquels nous avons répondu aux questions précedentes et dont voici les réponses :

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
Superman	*1*	*3*	*2*	*2*	*1*
Batman	*0*	*3*	*7*	*10*	*1*
Spiderman	*1*	*3*	*2*	*2*	*1*
Hulk	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
Ironman	*0*	*1*	*3*	*10*	*1*
Catwoman	*0*	*3*	*2*	*3*	*0*
x-or	*0*	*1*	*2*	*10*	*1*
Daredevil	*0*	*3*	*2*	*3*	*1*
Wonderwoman	*1*	*2*	*3*	*9*	*0*
Bioman	*0*	*3*	*10*	*10*	*0.6*
x-men	*1*	*2*	*8*	*7*	*0.5*
Tortues Ninja	*0*	*1*	*10*	*7*	*0.8*

Ces données sont stockées dans un fichier `superHeros.mat` *disponible sur le site de l'enseignant.*

1. *A partir du template disponible sur le site de l'enseignant, faites un programme avec Eigen permettant de charger un fichier* `.mat` *et d'en afficher le contenu. Vous obtenez :*

```
1   3   2   2   1
0   3   7  10   1
1   3   2   2   1
1   1   1   1   1
0   1   3  10   1
0   3   2   3   0
0   1   2  10   1
0   3   2   3   1
1   2   3   9   0
0   3  10  10 0.6
1   2   8   7 0.5
0   1  10   7 0.8
```

2. *Centrer les données. Penser à conserver la moyenne de chaque variable (chaque question), ça pourra vous être utile pour la suite. Une fois les données centrées, vous obtenez :*

```
0.58  0.83  -2.3  -4.2  0.26
-0.42  0.83   2.7   3.8  0.26
 0.58  0.83  -2.3  -4.2  0.26
 0.58  -1.2  -3.3  -5.2  0.26
-0.42  -1.2  -1.3   3.8  0.26
-0.42  0.83  -2.3  -3.2 -0.74
-0.42  -1.2  -2.3   3.8  0.26
-0.42  0.83  -2.3  -3.2  0.26
 0.58 -0.17  -1.3   2.8 -0.74
```

```
-0.42  0.83   5.7   3.8 -0.14
 0.58 -0.17   3.7  0.83 -0.24
-0.42  -1.2   5.7  0.83 0.058
```

3. *Coder l'opération permettant de normer les données. Cette opération n'est pas "figée" et il existe plusieurs approches permettant de parvenir à un résultat équivalent. Une approche assez simple consiste à calculer la somme des valeurs absolues des données centrées, pondérée par le nombre d'individus, et ce pour chaque variable.*

$$\sigma_j = \frac{\sum_i |A_{ij}|}{nb\ individus}$$

$$A'_{i,j} = \frac{A_{ij}}{\sigma_j}$$

Le resultat de cette opération donne :

```
  1.2     1 -0.79  -1.3  0.83
-0.86     1  0.91   1.2  0.83
  1.2     1 -0.79  -1.3  0.83
  1.2  -1.4  -1.1  -1.6  0.83
-0.86  -1.4 -0.45   1.2  0.83
-0.86     1 -0.79 -0.96  -2.4
-0.86  -1.4 -0.79   1.2  0.83
-0.86     1 -0.79 -0.96  0.83
  1.2  -0.2 -0.45  0.86  -2.4
-0.86     1   1.9   1.2 -0.46
  1.2  -0.2   1.2  0.25 -0.78
-0.86  -1.4   1.9  0.25  0.19
```

Là encore, il est recommandé de conserver les valeurs ayant servi à normer les données.

4. *Calculer la matrice de covariance des données centrées et normées. Vous obtenez :*

```
  1.1 0.037 -0.36 -0.56 -0.13
0.037   1.3 0.012 -0.34 -0.24
-0.36 0.012   1.3  0.68 -0.16
-0.56 -0.34  0.68   1.2 -0.16
-0.13 -0.24 -0.16 -0.16   1.5
```

5. *Calculer les vecteurs propres et les valeurs propres de cette matrice de covariance. Vous obtenez :*

```
eigen values of cov :  2.4  1.7  1.2 0.81 0.41

eigen vectors of cov (columns) :
  0.45   0.15   0.35    0.7   0.41
```

```
  0.18   0.48  -0.79  -0.02   0.33
 -0.59   0.14  -0.22   0.67  -0.37
 -0.64 -0.037   0.15 -0.089   0.75
  0.11  -0.85  -0.43   0.23   0.17
```

Remarque *: si les valeurs propres sont dans l'ordre croissant (plutôt que décroissant), vous pouvez permuter les éléments d'une matrice ou d'un vecteur avec la commande* `A' = A.rowwise().reverse();` *ou* `A' = A.colwise().reverse();`*.*

6. *Il s'agit ensuite de choisir le nombre de vecteurs propres que nous allons conserver. Compte tenu des valeurs propres, nous proposons de conserver les 3 vecteurs propres associés aux 3 plus grandes valeurs propres. Nous créons donc une matrice de transformation T telle que :*

```
T.transpose() =
  0.45   0.18  -0.59  -0.64   0.11
  0.15   0.48   0.14 -0.037  -0.85
  0.35  -0.79  -0.22   0.15  -0.43
```

7. *Nous pouvons à présent voir comment réagissent nos données une fois projetées dans ce nouvel sous-espace $A'^{\top} = T^{\top} A^{\top}$:*

```
   2.1  -0.11  -0.74
  -1.4  -0.27   -1.5
   2.1  -0.11  -0.74
     2   -1.3    1.2
    -1   -1.6   0.72
  0.61    2.3  -0.03
 -0.82   -1.7   0.79
  0.97  -0.43   -1.4
-0.054      2    1.8
  -2.1   0.97   -1.1
 -0.48   0.92   0.67
  -1.9   -0.7   0.34
```

8. *Finalement, nous pouvons nous même répondre aux questions relatives à chaque variable, ce qui génère un vecteur* $\mathbf{x}$*. Avant de projeter ce vecteur dans le sous-espace, il faut penser à le centrer et le normer :*

$$\mathbf{x}'_j = \frac{\mathbf{x}_j - \langle \mathbf{x}_j \rangle}{\sigma_j}$$

Projeter votre vecteur dans le sous-espace et calculer sa distance avec le projeté de chaque individu des données de départ (chaque super héros). La distance la plus petite correspond à votre super héros.

▸ **Exercice 4.** ***Quelques propriétés du spectre***
*Soit A une matrice carrée d'ordre n. On note sp(A) (*spectre *de A) l'ensemble de ses valeurs propres. Établir les propriétés suivantes.*

- $|sp(A)| \leq n$,
- *A est inversible* $\iff 0 \notin$ *sp(A)*,
- *A est* nilpotente *(c'est-à-dire $A^n = 0$)* $\Rightarrow$ *sp(A)*$= \{0\}$,
- *attention: sp(A)* $= \{0\} \not\Rightarrow A$ *est* nilpotente, *en considérant le spectre* complexe.

▸ **Exercice 5.** ***Algorithme de Danilevsky pour les valeurs propres***
La méthode classique de recherche des valeurs propres d'une matrice A est le calcul de son polynôme caractéristique par le développement du déterminant $det(A - \lambda Id) = 0$. L'algorithme de Danilevsky [1] *permet de trouver le polynôme caractéristique sans calculer de déterminant. Cet algorithme utilise quelques propriétes et définitions :*

1. *On définit la* matrice compagnon d'un polynôme unitaire[2] *de degré $n \geq 1$*

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

comme étant la matrice carrée d'ordre n suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

2. *Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique (deux matrices carrées A et A' sont semblables si $A' = PAP^{-1}$ avec P inversible).*

3. *Toute matrice carrée A est semblable à une matrice triangulaire supérieure par blocs*[3] *:*

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

où les blocs diagonaux A_{ii} sont des matrices compagnons de polynômes.

---

[1] A. M. Danilevsky, mathématicien soviétique (début du XXe siècle).
[2] Un polynôme dont le coefficient du monôme de plus haut degré vaut 1, par exemple $\lambda^2 - 3\lambda + 8$.
[3] Attention : cette matrice n'est généralement pas triangulaire tout court.

4. *Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est égal au produit des déterminants des blocs diagonaux.*

5. *Le polynôme caractéristique de la matrice* compagnon *d'un polynôme unitaire $P(\lambda)$ de degré n est $(-1)^n P(\lambda)$.*

Principe de l'algorithme de Danilevsky: *il consiste à transformer, colonne par colonne, la matrice carrée A pour lui donner la forme voulue : celle d'une matrice compagnon d'un polynôme unitaire (éventuellement par blocs). À chaque transformation sur A (multiplication à gauche par une matrice inversible E_i) on applique aussi sa transformation inverse à droite. Ce processus permet d'obtenir une matrice B semblable à A telle que :*

$$B = E_m ... E_2 E_1 \ A \ E_1^{-1} E_2^{-1} ... E_m^{-1} = PAP^{-1}$$

$$\text{où l'on pose } P = E_m ... E_2 E_1$$

Pour cela, on utilise les opérations élémentaires de lignes et leur opération inverse à savoir :

- *Si l'on permute la ligne i et la ligne j, il faut aussi permuter les colonnes i et j.*
- *Si l'on effectue ligne(i) = ligne(i) + c ligne(j), il faut aussi effectuer colonne(j) = colonne(j) -c.colonne(i) (noter le changement d'indices i et j).*
- *Si l'on effectue ligne(i) = c.ligne(i), il faut aussi effectuer colonne(i) = $\frac{1}{c}$colonne(i).*

Dans le cas où A est une matrice carrée d'ordre 4, quelles sont les matrices correspondant à ces trois types de transformations? Prendre $i = 1$, $j = 3$ et $c = 2$.

Une fois la matrice A sous la forme d'une matrice compagnon*, on en déduit le polynôme caractéristique dont les racines sont les valeurs propres de A.*

- *Appliquer l'algorithme de Danilevsky aux matrices suivantes et vérifier avec la méthode habituelle :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$