Géométrie épipolaire

Pascal Romon

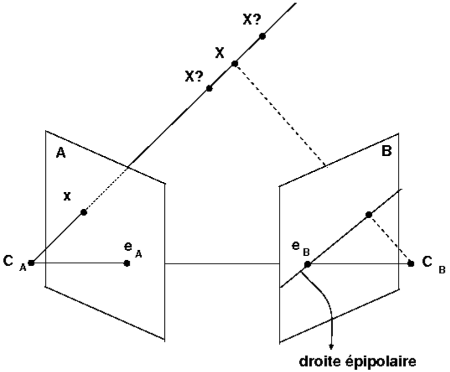
ESIPE imac ingénieur

UPEM UNIVERSITÉ PARIS-EST MARNE-LA-VALLÉE

Géométrie épipolaire

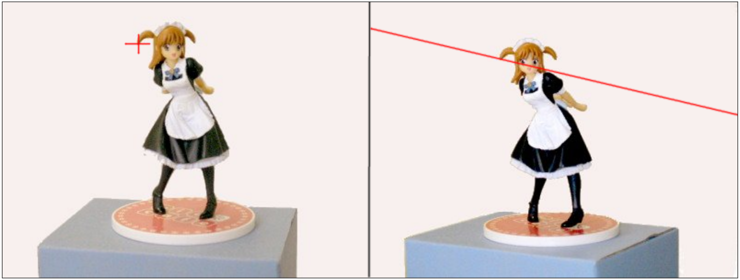
Introduction :
La géométrie épipolaire permet d'établir une relation géométrique entre 2 images d'une même scène.

Géométrie épipolaire



La droite épipolaire représente l'ensemble des projetés possibles correspondants à $\boldsymbol{x}$; elle passe nécessairement par l'épipôle $\boldsymbol{e}_B$.

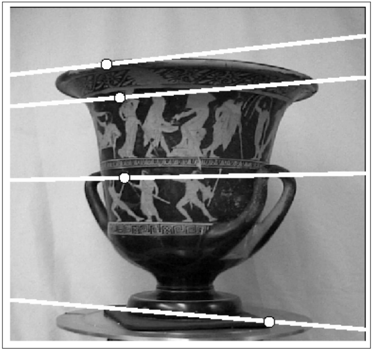
Géométrie épipolaire



La recherche d'un point se fait sur une ligne, ce qui diminue le temps de calcul.

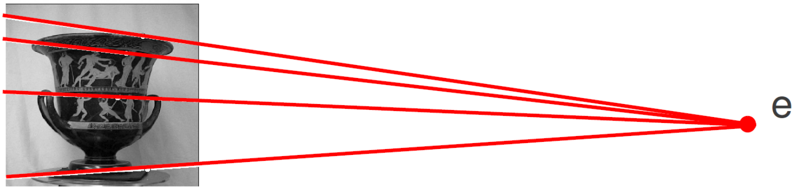
Epipoles

Epipoles :
toutes les droites épipolaires passent par les épipoles $\boldsymbol{e}$ et $\boldsymbol{e}'$.



Epipoles

Propriété :
toutes les droites épipolaires passent par les épipoles $\boldsymbol{e}$ et $\boldsymbol{e}'$.



Question

- comment trouver la droite épipolaire $\boldsymbol{l}'$, quand on connaît le point $\boldsymbol{x}$?
- comment savoir si deux points $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$ correspondent (c-à-d $\boldsymbol{x}' \in \boldsymbol{l}'$) ?

Principe

- la projection en coordonnées projectives est la multiplication par une matrice projective 3×4 de rang 3.
- de façon générale, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{X}$ en coordonnées projectives
- si $\boldsymbol{X}$ est restreint à un plan $\mathcal{H}$, alors la projection $\hat{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{P}_{|\mathcal{H}}$ est une bijection de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{R}^2$ (attention au choix de $\mathcal{H}$)
- si on a deux projections $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{P}'$, avec $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{P}'\boldsymbol{X}$, alors $\boldsymbol{x}' = \hat{\boldsymbol{P}}'\hat{\boldsymbol{P}}^{-1}\boldsymbol{x}$
- on a donc une transformation projective $\boldsymbol{H} = \hat{\boldsymbol{P}}'\hat{\boldsymbol{P}}^{-1}$ (matrice 3×3) telle que $\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}$ soit dans la droite épipolaire $\boldsymbol{l}'$ de $\boldsymbol{x}$
  ($\mathcal{H}$ n'est pas unique, donc $\boldsymbol{H}$ non plus !)
- $\boldsymbol{l}' = \boldsymbol{e}' \times \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}$

Digression sur le produit vectoriel

Rappel

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix}}_{[\boldsymbol{u}]_\times} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

on peut donc représenter l'opération produit vectoriel (à gauche) par $\boldsymbol{u}$ par la multiplication par la matrice antisymétrique $[\boldsymbol{u}]_\times$

Matrice fondamentale

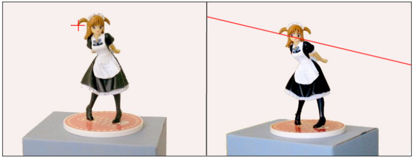
- la droite épipolaire de $\boldsymbol{x}$ est $\boldsymbol{l}' = \boldsymbol{e}' \times \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} = ([\boldsymbol{e}']_\times \boldsymbol{H})\boldsymbol{x} =: \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}$
- $\boldsymbol{F} := [\boldsymbol{e}']_\times \boldsymbol{H}$ est la matrice fondamentale ; elle est uniquement déterminée (à multiplication par une constante près), autrement dit, elle ne dépend pas du choix de $\mathcal{H}$.
- $\boldsymbol{x}' \in \boldsymbol{l}'$ ssi $\boldsymbol{x}'^\top \boldsymbol{l}' = 0$, donc $\boldsymbol{x}'^\top \boldsymbol{F}\boldsymbol{x} = 0$

Relation épipolaire

$\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{x}'$ ssi

$$\boldsymbol{x}'^\top \boldsymbol{F}\boldsymbol{x} = 0$$

Relation épipolaire



Matrice fondamentale :

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}$$

Pour 2 points de correspondance $\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{x}'$, on a :

$$\boldsymbol{x}'^{\top} \boldsymbol{F} \boldsymbol{x} = 0$$

Relation épipolaire

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}'^\top \boldsymbol{F}\boldsymbol{x} = 0$$

Droites épipolaires :

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{x}'^\top \boldsymbol{F}\boldsymbol{x} = 0 & \Rightarrow & \boldsymbol{x}'^\top \boldsymbol{l}' = 0 & \Rightarrow & \boldsymbol{x}' \in \boldsymbol{l}' = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}'^\top \boldsymbol{F}\boldsymbol{x} = 0 & \Rightarrow & \boldsymbol{l}^\top \boldsymbol{x} = 0 & \Rightarrow & \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{l} = \boldsymbol{F}^\top \boldsymbol{x}' \end{array}$$

$\hookrightarrow \boldsymbol{l}^\top = \boldsymbol{x}'^\top \boldsymbol{F} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{l} = \boldsymbol{F}^\top \boldsymbol{x}'$

$\hookrightarrow \boldsymbol{l}' = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}$

Epipoles

Propriété :
Toutes les droites épipolaires passent par leur épipoles $\boldsymbol{e}$ ou $\boldsymbol{e}'$.

Pour tout $\boldsymbol{x}$, on a :

$$\boldsymbol{e}' \in \boldsymbol{l}' \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{e}'^\top \boldsymbol{l}' = 0$$

comme $\boldsymbol{l}' = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}$, on a :

$$\boldsymbol{e}'^\top \boldsymbol{F}\boldsymbol{x} = 0$$

la seule façon d'avoir $\boldsymbol{e}'^\top \boldsymbol{F}\boldsymbol{x} = 0 \; \forall \boldsymbol{x}$, est d'avoir $\boldsymbol{e}'^\top \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$

Epipoles

Finalement, on a :

$$\boldsymbol{F}^\top \boldsymbol{e}' = \boldsymbol{0} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{F}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}$$

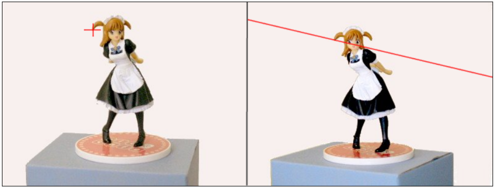
Calcul :
Pour calculer les épipoles, il suffit de calculer les noyaux de $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{F}^\top$.
(SVD et *right nullspace*)

Relation épipolaire

Propriétés de la matrice fondamentale

- $\boldsymbol{F}$ est une matrice projective 3×3 (définie à une constante multiplicative près)
- $\boldsymbol{F}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{F}^\top \boldsymbol{e}' = 0$
- $\hookrightarrow$ $\boldsymbol{F}$ est de rang 2
- $\boldsymbol{F}$ possède 7 degrés de liberté, donc est déterminée par 7 contraintes

Relation épipolaire



x $\qquad\qquad$ $l' = Fx$

Si on connait F :
la sélection d'un point sur une image nous donne la droite épipolaire sur l'autre image.

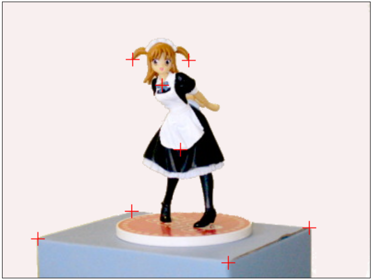
Calcul

Contrainte épipolaire :
pour chaque point de correspondance $\boldsymbol{x}_i \leftrightarrow \boldsymbol{x}'_i$ entre les 2 images, la relation épipolaire doit être satisfaite :

$$\boldsymbol{x}'^{\top}_i \boldsymbol{F} \boldsymbol{x}_i = 0$$

Calcul :
Si l'on dispose de quelques points de correspondance (au moins 8) $\boldsymbol{x}_i \leftrightarrow \boldsymbol{x}'_i$, on peut calculer $\boldsymbol{F}$.

Points de correspondance



Calcul

Pour chaque $\boldsymbol{x}_i \leftrightarrow \boldsymbol{x}'_i$, on a :

$$\boldsymbol{x}'^{\top}_i \boldsymbol{F} \boldsymbol{x}_i = 0$$

soit

$$\begin{pmatrix} x'_i & y'_i & w'_i \end{pmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ w_i \end{pmatrix} = 0$$

on développe :

$$x_i x'_i f_{11} + x_i y'_i f_{12} + x_i w'_i f_{13} + y_i x'_i f_{21} + y_i y'_i f_{22} + \ldots + w_i w'_i f_{33} = 0$$

Calcul

Renommage :

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{13} \\ f_{21} \\ f_{22} \\ f_{23} \\ f_{31} \\ f_{32} \\ f_{33} \end{pmatrix}$$

Calcul

Pour chaque $\boldsymbol{x}_i \leftrightarrow \boldsymbol{x}'_i$, on a :

$$x_i x'_i f_{11} + x_i y'_i f_{12} + x_i w'_i f_{13} + y_i x'_i f_{21} + y_i y'_i f_{22} + \ldots + w_i w'_i f_{33} = 0$$

soit

$$\begin{pmatrix} x_i x'_i & x_i y'_i & x_i w'_i & y_i x'_i & y_i y'_i & \ldots & w_i w'_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{13} \\ f_{21} \\ f_{22} \\ f_{23} \\ f_{31} \\ f_{32} \\ f_{33} \end{pmatrix} = 0$$

Calcul

Reformulation matricielle :

$$\begin{bmatrix} x_1x_1' & x_1y_1' & x_1w_1' & y_1x_1' & y_1y_1' & \dots & w_1w_1' \\ x_2x_2' & x_2y_2' & x_2w_2' & y_2x_2' & y_2y_2' & \dots & w_2w_2' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_nx_n' & x_ny_n' & x_nw_n' & y_nx_n' & y_ny_n' & \dots & w_nw_n' \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{13} \\ f_{21} \\ f_{22} \\ f_{23} \\ f_{31} \\ f_{32} \\ f_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

on résout au sens des moindres carrés (SVD et *right nullspace*)

Calcul

$$\begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{13} \\ f_{21} \\ f_{22} \\ f_{23} \\ f_{31} \\ f_{32} \\ f_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}$$

Rang de F

Bilan :

- la matrice $\boldsymbol{F}$ est une matrice de rang 2.
- mais le calcul de $\boldsymbol{F}$ (moindres carrés) ne nous assure pas cette propriété.
- si $\boldsymbol{F}$ n'est pas de rang 2, les droites épipolaires ne passent pas exactement par les épipôles.
- on peut forcer le rang de $\boldsymbol{F}$ en faisant une SVD : $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{V}^\top$

$\hookrightarrow$ $\boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{U}\boldsymbol{D}'\boldsymbol{V}^\top$ où $\boldsymbol{D}'$ correspond à $\boldsymbol{D}$ ayant sa dernière valeur singulière annulée.

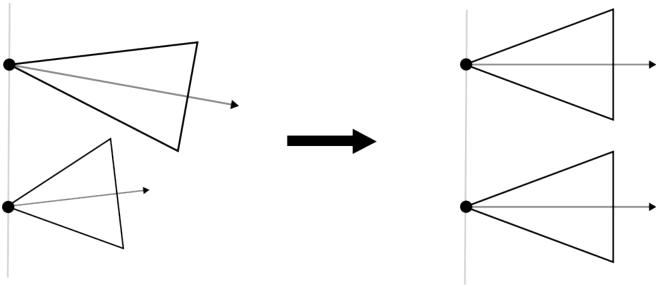
Rectification d'image

Principe :
Il s'agit de transformer les 2 images de telles sorte que:

- leurs droites épipolaires soient horizontales
- les points de correspondances aient les mêmes coordonnées verticales

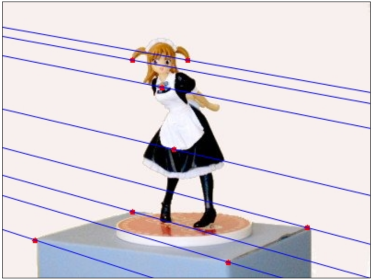
Idée générale :
trouver une homographie qui place les épipoles à l'infini.

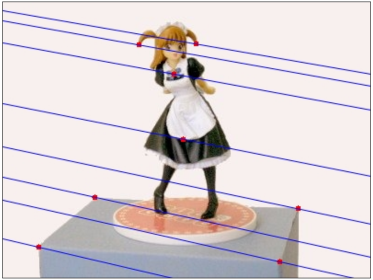
Homographie



Rectification d'image

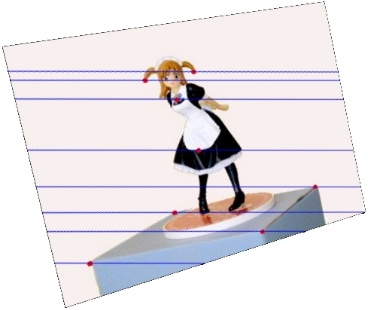
Images de départ :

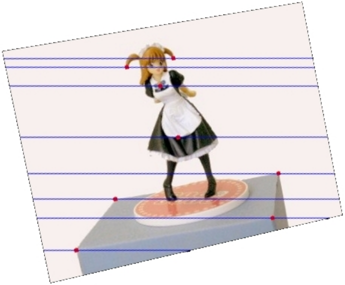




Rectification d'image

Images rectifiée :



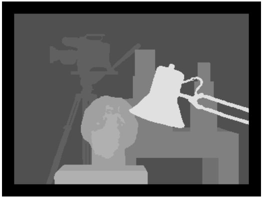


Rectification d'image

Attention : la solution n'est pas unique.

Applications

Calcul de cartes de disparité :



Applications

Images stéréoscopiques sans parallaxe verticale :