Matrices inverses

Pascal Romon

Matrice inverse

Définition :

Soit $\mathbf{M}$ une matrice, la matrice inverse $\mathbf{M}^{-1}$ de $\mathbf{M}$ est la *seule* matrice qui satisfait :

$$\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{Id}$$

(si elle existe).

Matrice inverse

Propriétés :

Certaines matrices n'ont pas d'inverse:

- soit $\mathbf{M}$ possède une inverse, on dit que $\mathbf{M}$ est **inversible**, ou **régulière**
- soit $\mathbf{M}$ est **singulière**.

En pratique, une matrice "prise au hasard" sera inversible.

Matrice inverse

Propriétés :

Soit $\mathbf{M}$ une matrice *carrée* d'ordre n.
Les énoncés suivants sont équivalents :

- $\mathbf{M}$ est inversible
- $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est la seule solution de $\mathbf{Mx} = \mathbf{0}$
- $\mathbf{M}$ est de rang n
- aucune ligne (colonne) de $\mathbf{M}$ n'est combinaison linéaire d'autres lignes (colonnes) de $\mathbf{M}$
- pour tout vecteur $\mathbf{k}$, $\mathbf{Mx} = \mathbf{k}$ admet au moins une/au plus une/exactement une solution
- $\det \mathbf{M} \neq 0$

Matrice inverse

Propriétés :

- $\mathbf{Id}^{-1} = \mathbf{Id}$
- $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
- $(\mathbf{M}^{-1})^{-1} = \mathbf{M}$
- $\left[\mathsf{diag}(m_{ii})\right]^{-1} = \left[\mathsf{diag}\left(\frac{1}{m_{ii}}\right)\right]$

Matrice inverse

Applications :

- résoudre des systèmes linéaires
- trouver des transformations inverses

Matrice inverse

Inverse et systèmes linéaires :

Résoudre le système : $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b}\\ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\\ \mathbf{Id}\,\mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\\ \mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\end{aligned}$$

Note : Pour résoudre un système linéaire, préférez les méthodes sans inversion de matrice.

Inversion

Méthode de Cramer : (méthode habituelle)

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{M}} \mathrm{Com}(\mathbf{M})^\top$$

avec :

- $\det \mathbf{M}$: le déterminant de $\mathbf{M}$
- $\mathrm{Com}(\mathbf{M})^\top$: transposée de la matrice des cofacteurs (comatrice)

Inversion

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{M}} \mathrm{Com}(\mathbf{M})^\top$$

le calcul du déterminant est long! (cf. déterminant)
(sauf dans le cas 2×2)
ici un déterminant de taille n et n^2 déterminants de taille $n-1$,
soit $n(n+1)$ déterminants de taille $n-1$

Inversion

Méthodes numériques :

- pivot de Gauss
- Gauss-Jordan
- décompositions matricielles

Inversion d'une matrice par pivot

Inverser $\mathbf{M}$ revient à trouver n vecteurs colonnes $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n$ tels que

$$\mathbf{M}\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{M}\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \ldots\ , \mathbf{M}\mathbf{c}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

c-à-d résoudre n systèmes linéaires où seulement le second membre change. Comme c'est *le même pivot*, on pose un système avec n seconds membres, et effectue un pivot de Gauss ou de Gauss–Jordan :

$$\left(\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M} & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Pivot de Gauss

Méthode : trouver $\mathbf{N}$ telle que

$$\mathbf{MN} = \mathbf{Id}$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{23} & n_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ il suffit de résoudre n systèmes en parallèle.

Pivot de Gauss

Méthode :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{23} & n_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La triangulation de la $\mathbf{M}$ est commune à tous les systèmes, avec des effets sur le second membre $(\mathbf{Id})$ mais pas $\mathbf{N}$.

Pivot de Gauss

Triangulation :

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c|c} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{23} & n_{33} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\text{ex : } \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ 0 & m'_{22} & m'_{23} \\ m_{31} & m'_{23} & m'_{33} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c|c} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{23} & n_{33} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{r|c|c} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Pivot de Gauss

Élimination :

$$\left[\begin{array}{ccc} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & 0 & k_{33} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c|c} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{23} & n_{33} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{array}\right]$$

$\hookrightarrow$ on résout par substitution (Gauss) :

$$\left[\begin{array}{ccc} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & 0 & k_{33} \end{array}\right]\begin{pmatrix} n_{11} \\ n_{21} \\ n_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \end{pmatrix}$$

et on fait pareil pour les 2 autres colonnes de $\mathbf{N}$

Algorithme

Il est inutile de noter (et stocker) la matrice $\mathbf{N}$
On peut continuer le pivot (de bas en haut, de droite à gauche)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} m_{11} & m_{12} & m_{13} & 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & 0 & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

avec uniquement des opérations sur les lignes

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} m_{11} & m_{12} & m_{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & m'_{22} & m'_{23} & u_{21} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m'_{33} & u_{31} & u_{32} & 1 \end{array}\right]$$

Algorithme

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} m_{11} & m_{12} & m_{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & m'_{22} & m'_{23} & u_{21} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m'_{33} & u_{31} & u_{32} & 1 \end{array}\right]$$

avec uniquement des opérations sur les lignes

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} m_{11} & 0 & 0 & u'_{11} & u'_{12} & u'_{13} \\ 0 & m'_{22} & 0 & u'_{21} & u'_{22} & u'_{23} \\ 0 & 0 & m'_{33} & u_{31} & u_{32} & 1 \end{array}\right]$$

Algorithme

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} m_{11} & 0 & 0 & u'_{11} & u'_{12} & u'_{13} \\ 0 & m'_{22} & 0 & u'_{21} & u'_{22} & u'_{23} \\ 0 & 0 & m'_{33} & u_{31} & u_{32} & 1 \end{array}\right]$$

avec uniquement des opérations sur les lignes

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & u''_{11} & u''_{12} & u''_{13} \\ 0 & 1 & 0 & u''_{21} & u''_{22} & u''_{23} \\ 0 & 0 & 1 & u''_{31} & u''_{32} & u''_{33} \end{array}\right]$$

À la fin : $[\mathbf{A}|\mathbf{Id}] \to [\mathbf{Id}|\mathbf{U}]$ avec $\mathbf{U} = \mathbf{A}^{-1}$.

Inversion d'une matrice par pivot

Exemple :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{L_2 -= 3L_1}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{L_2 *= -1/2}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right] \overset{L_1 -= 2L_2}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Gauss-Jordan

Remarques :

- utilise moins de mémoire que le pivot de Gauss.
- un peu moins de calculs.
- ne bénéficie pas du pivot total.

Inverse par décomposition

Il est possible d'inverser une matrice via des décompositions :

- on décompose une matrice $\mathbf{A}$ comme le produit de plusieurs matrices ayant des propriétés spéciales.

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\cdots\mathbf{M}_k$$

- on inverse ces matrices spéciales faciles à inverser :
  - matrices orthogonales
  - matrice diagonales
  - matrices triangulaires
  - ...
- on compose la matrice inverse $\mathbf{A}^{-1}$ via les inverses des matrices spéciales.

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{M}_k^{-1}\cdots\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{M}_1^{-1}$$

Inverse par décomposition

Décompositions :

- LU
- QR et RQ
- SVD
- Vecteurs propres et valeurs propres
- Cholesky
- ...

Inverse rapide

Matrice 2×2 :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{M}} \mathrm{Com}(\mathbf{M})^\top$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Inverse rapide

Matrice 3×3 :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathrm{Com}(\mathbf{A})^\top$$

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})$$

$$\mathrm{Com}(\mathbf{A})^\top = \begin{bmatrix} a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} & a_{13}a_{32} - a_{33}a_{12} & a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} \\ a_{23}a_{31} - a_{33}a_{21} & a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} & a_{13}a_{21} - a_{23}a_{11} \\ a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22} & a_{12}a_{31} - a_{32}a_{11} & a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{bmatrix}$$

Inverse rapide

Matrice 4×4 **Affine :** (en synthèse d'images)

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{3\times 3} & \mathbf{u} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix}$$

calcul de $\mathbf{A}^{-1}$ avec inversion 3×3.