Matrices

Pascal Romon

Les vecteurs

Un vecteur (colonne) : $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Un vecteur (ligne) : $\mathbf{x}^\top = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$

(un vecteur ligne se note *sans virgule*)

Attention : la machine ne fera pas la différence entre un vecteur-colonne et un vecteur-ligne, ce sont tous deux des `array`.

Transposition de vecteurs

$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^\top$ est la *transposition*, elle envoie vecteur-colonne sur vecteur-ligne et réciproquement. Elle est *involutive* : $(\mathbf{x}^\top)^\top = \mathbf{x}$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Addition de vecteurs

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Condition : $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont de même dimension.

Produit scalaire

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

produit scalaire :

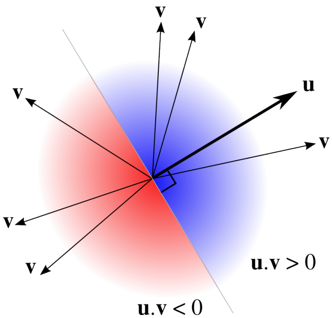
$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$= \mathbf{x}^\top \mathbf{y}$$

Condition : $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont de même dimension.

Produit scalaire

Propriété géométrique :



Le produit scalaire est l'intensité (signée) de la projection d'un vecteur sur un autre.

Produit scalaire

Propriété géométrique :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \alpha$$

où α est l'angle entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ (valable pour toutes dimensions), où

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

Applications géométriques :

$\rightarrow$ trouver l'angle entre 2 vecteurs : $\alpha = \pm \cos^{-1}\left(\dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}\right)$,

$\rightarrow$ trouver la projection de $\mathbf{u}$ sur $\mathbf{v}$: $\text{proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \dfrac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}$.

Produit vectoriel

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

Condition : défini uniquement en dimension 3 (mais applications en dimension 2).

Remarque : $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| \, \sin\alpha \, \mathbf{w}$ avec $\|\mathbf{w}\| = 1$ et $\mathbf{w} \perp \mathbf{x}, \mathbf{y}$

Norme de vecteurs

Propriétés :

- $\|\mathbf{x}\| > 0$ ssi $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ et $\|\mathbf{x}\| = 0$ ssi $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- $\|k\mathbf{x}\| = |k|.\|\mathbf{x}\|$
- $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

Norme L_1 **:** $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ (norme de Manhattan)

Norme L_2 **:** $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$ (norme euclidienne)

Norme L_p **:** $\|\mathbf{x}\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \Big)^{\frac{1}{p}}$

Norme L_∞ **:** $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\big(|x_1|, ..., |x_n|\big)$

Les matrices

Une matrice : $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$

Les matrices

Élément d'une matrice $\mathbf{M}$: $\mathbf{M}_{ij}$ ou $m_i j$

$$\mathbf{M} = \underbrace{\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}}_{j} \quad \left.\vphantom{\begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \end{bmatrix}}\right\} i$$

i : ligne
j : colonne

Addition matricielle

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{bmatrix}$$

Condition : $\mathbf{M}$ et $\mathbf{N}$ ont les mêmes dimensions.

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} + \mathbf{N} = \begin{bmatrix} m_{11} + n_{11} & m_{12} + n_{12} & m_{13} + n_{13} \\ m_{21} + n_{21} & m_{22} + n_{22} & m_{23} + n_{23} \\ m_{31} + n_{31} & m_{32} + n_{32} & m_{33} + n_{33} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{M}_{ij} + \mathbf{N}_{ij}$ $\quad \rightarrow \mathcal{O}(n^2)$ opérations élémentaires

Multiplication matricielle

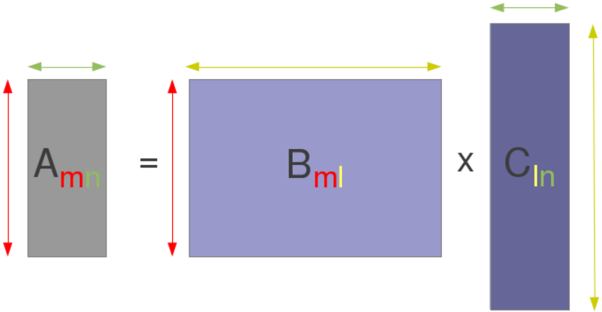
$$\mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{N} \quad = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\mathbf{m}_{1\bullet})^\top \cdot \mathbf{n}_{\bullet 1} & (\mathbf{m}_{1\bullet})^\top \cdot \mathbf{n}_{\bullet 2} & \mathbf{m}_{1\bullet})^\top \cdot \mathbf{n}_{\bullet 3} \\ (\mathbf{m}_{2\bullet})^\top \cdot \mathbf{n}_{\bullet 1} & (\mathbf{m}_{2\bullet})^\top \cdot \mathbf{n}_{\bullet 2} & (\mathbf{m}_{2\bullet})^\top \cdot \mathbf{n}_{\bullet 3} \\ (\mathbf{m}_{3\bullet})^\top \cdot \mathbf{n}_{\bullet 1} & (\mathbf{m}_{3\bullet})^\top \cdot \mathbf{n}_{\bullet 2} & (\mathbf{m}_{3\bullet})^\top \cdot \mathbf{n}_{\bullet 3} \end{bmatrix}$$

où $\mathbf{m}_{i\bullet}^\top$ correspond à la i-ème ligne de $\mathbf{M}$
et $\mathbf{n}_{\bullet j}$ correspond à la j-ème colonne de $\mathbf{N}$, soit

$$\mathbf{A}_{ij} = (\mathbf{m}_{i\bullet})^\top \cdot \mathbf{n}_{\bullet j} = \sum_{k=1}^{\ell} m_{ik} n_{kj} \, , \mathbf{A}_{23} = m_{21}n_{13} + m_{22}n_{23} + m_{23}n_{33}$$

Multiplication matricielle



Pour chacune des $m \times n$ cases de $\mathbf{A}$: 1 produit scalaire de l éléments.

complexité : $\mathcal{O}(lmn) \sim \mathcal{O}(n^3)$

Multiplication graphique de matrices

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & n_{24} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} & n_{34} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix} \end{array}$$

Multiplication matrice-vecteur

$$\mathbf{y} = \mathbf{Mx} \quad = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} m_{11}x_1 + m_{12}x_2 + m_{13}x_3 \\ m_{21}x_1 + m_{22}x_2 + m_{23}x_3 \\ m_{31}x_1 + m_{32}x_2 + m_{33}x_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Mx} = \begin{pmatrix} (\mathbf{m}_{1\bullet})^\top \cdot \mathbf{x} \\ (\mathbf{m}_{2\bullet})^\top \cdot \mathbf{x} \\ (\mathbf{m}_{3\bullet})^\top \cdot \mathbf{x} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{produit scalaire} \\ \rightarrow \text{produit scalaire} \\ \rightarrow \text{produit scalaire} \end{array}$$

où $\mathbf{m}_{i\bullet}^\top$ correspond à la i-ème ligne de $\mathbf{M}$

Multiplication vecteur-matrice

$$\mathbf{y}^\top = \mathbf{x}^\top \mathbf{M} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} m_{11}x_1 + m_{21}x_2 + m_{31}x_3 \\ m_{12}x_1 + m_{22}x_2 + m_{32}x_3 \\ m_{13}x_1 + m_{23}x_2 + m_{33}x_3 \end{pmatrix}^\top$$

donc $\mathbf{y} = (\mathbf{x}^\top \mathbf{M})^\top = \mathbf{M}^\top \mathbf{x}$

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \cdot \mathbf{m}_{\bullet 1} \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{m}_{\bullet 2} \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{m}_{\bullet 3} \end{pmatrix}^\top \begin{array}{l} \rightarrow \text{produit scalaire} \\ \rightarrow \text{produit scalaire} \\ \rightarrow \text{produit scalaire} \end{array}$$

où $\mathbf{m}_{\bullet j}$ correspond à la j-ème colonne de $\mathbf{M}$

Produit externe

Produit scalaire : $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^\top \mathbf{y} = u$

Produit externe : $\mathbf{x}\mathbf{y}^\top = \mathbf{A}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Big(y_1, y_2, \cdots, y_m \Big) = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_m \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{ij} = x_i y_j$$

Strassen

Introduction :

- multiplication matricielle standard : $\mathcal{O}(n^3)$
- avec la méthode de Strassen : $\mathcal{O}(n^{\log_2 7}) = \mathcal{O}(n^{2.81})$
- méthode récursive.
- efficace seulement sur les grosses matrices.

Strassen

Méthode :

$$\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

Strassen

Objectif :

$$\begin{array}{|c|c|}\hline ae+bg & af+bh \\ \hline ce+dg & cf+dh \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|}\hline e & f \\ \hline g & h \\ \hline \end{array}$$

8 produits de sous-matrices
4 additions de sous-matrices

Strassen

$$
\begin{array}{|c|c|}
\hline
\overset{r}{ae+bg} & \overset{s}{af+bh} \\
\hline
\overset{t}{ce+dg} & \overset{u}{cf+dh} \\
\hline
\end{array}
=
\begin{array}{|c|c|}
\hline
a & b \\
\hline
c & d \\
\hline
\end{array}
\times
\begin{array}{|c|c|}
\hline
e & f \\
\hline
g & h \\
\hline
\end{array}
$$

on définit :

$P_1 = af - ah$

$P_2 = ah + bh$

$P_3 = ce + de$

$P_4 = dg - de$

$P_5 = ae + ah + de + dh$

$P_6 = bg + bh - dg - dh$

$P_7 = ae + af - ce - cf$

tels que :

$r = P_5 + P_4 - P_2 + P_6$

$s = P_1 + P_2$

$t = P_3 + P_4$

$u = P_1 + P_5 - P_3 - P_7$

Strassen

Factorisation :

$$
\begin{aligned}
P_1 &= af - ah & &= a(f-h)\\
P_2 &= ah + bh & &= (a+b)h\\
P_3 &= ce + de & &= (c+d)e\\
P_4 &= dg - de & &= d(g-e)\\
P_5 &= ae + ah + de + dh & &= (a+d)(e+h)\\
P_6 &= bg + bh - dg - dh & &= (b-d)(g+h)\\
P_7 &= ae + af - ce - cf & &= (a-c)(e+f)
\end{aligned}
$$

Strassen

$$P_1 = a(f-h)$$
$$P_2 = (a+b)h$$
$$P_3 = (c+d)e$$
$$P_4 = d(g-e)$$
$$P_5 = (a+d)(e+h)$$
$$P_6 = (b-d)(g+h)$$
$$P_7 = (a-c)(e+f)$$

$$r = P_5 + P_4 - P_2 + P_6$$
$$s = P_1 + P_2$$
$$t = P_3 + P_4$$
$$u = P_1 + P_5 - P_3 - P_7$$

$\rightarrow$ 7 produits de sous-matrices
$\rightarrow$ 18 additions de sous-matrices

ce qui comporte moins d'opérations que 8 produits de sous-matrices et 4 additions de sous-matrices

Strassen

Remarques :

- efficace sur les grosses matrices, mais pas sur les petites.
- pas très stable numériquement.
- gestion spécifique de la mémoire.

Vérification du produit matriciel

Méthode :

Soit $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$.
Le produit de la matrice $\mathbf{A}$ avec le vecteur somme-des-colonnes $\mathbf{b}$ de la matrice $\mathbf{B}$ doit être égal au vecteur somme-des-colonnes $\mathbf{c}$ de la matrice $\mathbf{C}$.

$$\mathbf{Ab} = \mathbf{c}$$

Si $\mathbf{Ab} \neq \mathbf{c}$, alors il y a une erreur de calcul.
La réciproque n'est pas forcément vraie.

Vérification du produit matriciel

Exemple :

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 15 \\ 4 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2+15 \\ 4+22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 26 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2+3 \\ 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Vérification du produit matriciel

Exemple :

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 17 \\ 26 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Ab} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 26 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 17 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 26 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Le calcul est probablement exact}$$

Différents types de matrices

- matrices carrées (autant de lignes que de colonnes) $\neq$ matrices rectangulaires
- matrices triangulaires
- matrices diagonales
- matrices creuses
- ...

Matrice diagonale

$$\begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

(en général réservé aux matrices carrées)

Matrice triangulaire (supérieure)

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1n} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2n} \\ 0 & 0 & m_{33} & \cdots & m_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

Matrice triangulaire (inférieure)

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

Matrice transposée

La transposée $\mathbf{M}^\top$ de $\mathbf{M}$ est définie par :

$$\mathbf{M}_{ij}^\top = \mathbf{M}_{ji}$$

Le nombre de colonne est échangé avec le nombre de lignes

Remarque : $(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$

Matrice symétrique

$$\mathbf{M}_{ij} = \mathbf{M}_{ji} \quad \forall i, j$$

autrement dit : $\mathbf{M} = \mathbf{M}^\top$

($\rightarrow \mathbf{M}$ est carrée)

Matrice antisymétrique

$$\mathbf{M}_{ij} = -\mathbf{M}_{ji} \quad \forall i, j$$

autrement dit : $\mathbf{M} = -\mathbf{M}^\top$

($\rightarrow \mathbf{M}$ est carrée et $\mathbf{M}_{ii} = 0$:
la diagonale est nulle)

Matrice hermitienne

Si on prend des coefficients complexes,

$$\mathbf{M}_{ij} = \overline{\mathbf{M}}_{ji} \quad \forall i, j$$

exemple : matrice Hamiltonienne en mécanique quantique

Matrice identité

$$\mathbf{Id} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

→ matrice carrée
→ matrice diagonale

matrice : $\mathbf{Id}.\mathbf{M} = \mathbf{M}$
vecteur : $\mathbf{Id}.\mathbf{x} = \mathbf{x}$

matrice : $\mathbf{M}.\mathbf{Id} = \mathbf{M}$
vecteur : $\mathbf{x}^\top.\mathbf{Id} = \mathbf{x}^\top$

coefficients : $\mathbf{Id}_{ij} = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ (symbole de Kronecker)

Matrice de permutation

un seul 1 par ligne, un seul 1 par colonne, les autres termes sont 0

$$\mathbf{P}_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{où } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

formule générale : $(\mathbf{P}_\sigma)_{ij} = \delta_{i,\sigma(j)} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\mathbf{P}_\sigma$ est une matrice orthogonale ; $\mathbf{P}_\sigma \mathbf{P}_\tau = \mathbf{P}_{\sigma \circ \tau}$.
Exercice : Calculer $\mathbf{P}_\sigma \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}$.

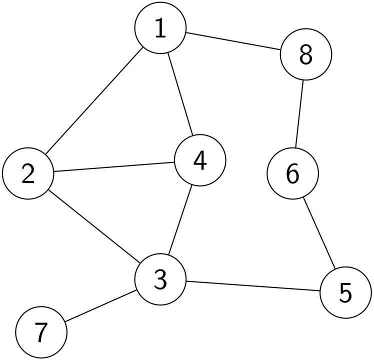
Graphes et matrices d'adjacence

Si G est un graphe à n éléments et $\sim$ est la relation entre nœuds du graphe (par ex. Facebook et la relation ≪*est ami(e) de*≫), la matrice d'adjacence $\mathbf{A}$ est la matrice $n \times n$ telle que

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \sim j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La matrice $\mathbf{A}$ est symétrique ssi la relation est symétrique (c-à-d $i \sim j \iff j \sim i$).
Le nombre d'amis de i est le nombre de coefficients non nuls sur la ligne i.
Exercice : Donner l'expression des coefficients de $\mathbf{B} = \mathbf{A}^2$; quelles sont les valeurs possibles de $\mathbf{B}_{ij}$ et quelle est leur signification ? Comment obtenir le nombre de nœuds à distance 2 (c-à-d d'amis d'amis) ?

Matrice d'adjacence



$$A = \begin{bmatrix} 0&1&0&1&0&0&0&1\\ 1&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&1&0&1&0\\ 1&1&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&1&0&0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3&1&2&1&&1&&\\ 1&3&1&2&1&&1&1\\ 2&1&4&1&&1&&\\ 1&2&1&3&1&&1&1\\ &1&&1&2&&1&1\\ 1&&1&&&2&&\\ &1&&1&1&&1&\\ &1&&1&1&&&2 \end{bmatrix}$$

Matrice inverse

Soit $\mathbf{M}$ une matrice carrée,
il existe au plus une matrice $\mathbf{M^{-1}}$ telle que :

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{M}\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{Id}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{M}\mathbf{x} \iff \mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{y}$$

Si $\mathbf{M}^{-1}$ existe, $\mathbf{M}$ est dite **inversible**, sinon $\mathbf{M}$ est **singulière**.

Matrice inverse

Propriétés :

- $\left(\mathbf{M}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{M}$
- $\left(\mathbf{M}^{\top}\right)^{-1} = \left(\mathbf{M}^{-1}\right)^{\top}$
- $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
- $[\mathsf{diag}(m_i)]^{-1} = \left[\mathsf{diag}(\frac{1}{m_i})\right]$

Matrice orthogonale

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^\top$$

exemple : une matrice de rotation $R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

Motivation : préserve la norme 2, et en fait le produit scalaire

$$\begin{aligned}(\mathbf{Mu}) \cdot (\mathbf{Mv}) = (\mathbf{Mu})^\top (\mathbf{Mv}) = \mathbf{u}^\top \mathbf{M}^\top \mathbf{M} \mathbf{v} = \mathbf{u}^\top \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{v} \\ = \mathbf{u}^\top \mathbf{v} = \mathbf{u}^\top \mathbf{Id} \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\end{aligned}$$

Produit vectoriel

Produit vectoriel :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}^\top \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}^\top$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

Forme matricielle :

$$[\mathbf{u}]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(matrice antisymétrique)}$$

avec

$$\mathbf{z} = [\mathbf{u}]_\times \mathbf{v} \quad \text{(produit matrice-vecteur)}$$

Matrice de Householder

$$\mathbf{H}_{\mathbf{u}} = \mathbf{Id}_n - 2\frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^\top}{\|\mathbf{u}\|^2}$$

$\rightarrow$ matrice de réflexion par rapport à l'hyperplan de normale $\mathbf{u}$.

Matrice creuse

Matrice qui contient beaucoup de zéros.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix}
0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \mathbf{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{6} & 0 \\
0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} & 0 \\
0 & \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{9} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \mathbf{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{7} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Rang d'une matrice

Définition :

Le rang d'une matrice est le nombre maximal de vecteurs lignes (ou colonnes) linéairement indépendants.

Rang d'une matrice

Exemple :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \text{rang } 2$$

$\rightarrow$ $L_3 = L_1 + L_2$

$\rightarrow$ $L_4 = L_1 + 2L_2$

$\rightarrow$ L_1 et L_2 sont indépendantes

$\Rightarrow$ matrice de rang 2

Trace d'une matrice

Définition :

La trace d'une matrice carrée est la somme des éléments de sa diagonale.

$$\mathsf{Tr}(\mathbf{M}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Noyau d'une matrice

Définition :

Le noyau (kernel / right null space) d'une matrice $\mathbf{M}$ est l'ensemble des vecteurs $\mathbf{x}$ tels que :

$$\mathbf{Mx} = \mathbf{0}$$