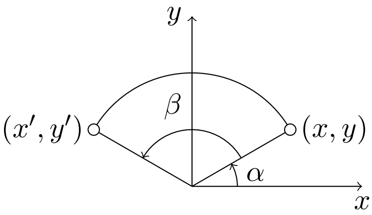
Géométrie projective

géométrie dans le plan

Pascal Romon

Rotation

coordonnées standards (non homogènes) :



$$x = r\cos\alpha$$
$$y = r\sin\alpha$$

$$x' = r\cos(\alpha+\beta)$$
$$y' = r\sin(\alpha+\beta)$$

$$x' = r\cos\alpha\cos\beta - r\sin\alpha\sin\beta$$
$$y' = r\sin\alpha\cos\beta + r\cos\alpha\sin\beta$$

$$x' = x\cos\beta - y\sin\beta$$
$$y' = y\cos\beta + x\sin\beta$$

Rotation

Matrice de rotation :

$$x' = x\cos\beta - y\sin\beta$$
$$y' = y\cos\beta + x\sin\beta$$

s'exprime matriciellement :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

et en 3D autour de l'axe des z :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

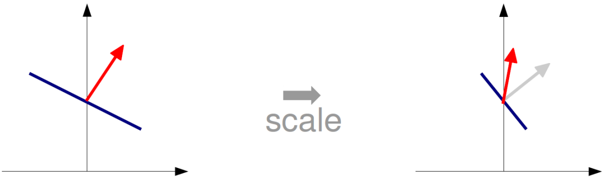
Homothétie

Matrice de scale :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\alpha = \beta = \gamma \quad \Leftrightarrow \quad$ changement d'échelle (scale isotrope).

Attention aux normales :



Translation

Et pour la translation ?

$$\begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ pas sous forme matricielle (*ce n'est pas linéaire*)
$\Rightarrow$ pas de combinaison de transformations.

Translation

Coordonnées homogènes :

En remplaçant (x, y, z) par $(x, y, z, 1)$, on constate que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ z + t_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ et là, ça fonctionne !

Rotation

Coordonnées homogènes : la rotation

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ ça fonctionne encore.

Homothétie

Coordonnées homogènes : le scale

$$\begin{pmatrix}\alpha x\\ \beta y\\ \gamma z\\ 1\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha & 0 & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0 & 0\\ 0 & 0 & \gamma & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ 1\end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ ça fonctionne encore.

Combinaisons de transformations

Produit des matrices de transformations :

$$\mathbf{M} = \mathbf{SRT}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos & -\sin & 0 & 0 \\ \sin & \cos & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

une translation, puis une rotation, puis un scale.

Combinaisons inverse

Inverse du produit des matrices de transformations :

$$\mathbf{M}^{-1} = \left(\mathbf{SRT}\right)^{-1} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}^{-1}$$

les transformations inverses ... dans l'ordre inverse.

Translation inverse

$$\begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ z + t_z \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x - t_x \\ y - t_y \\ z - t_z \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & 0 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 & -t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}^{-1}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rotation inverse

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos & -\sin & 0 & 0 \\ \sin & \cos & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos & \sin & 0 & 0 \\ -\sin & \cos & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}^{-1}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les matrices de rotations sont orthogonales $\Rightarrow \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^\top$.

Scale inverse

$$\begin{pmatrix}\alpha x\\ \beta y\\ \gamma z\\ 1\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}\alpha & 0 & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0 & 0\\ 0 & 0 & \gamma & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ 1\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}\frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\beta} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{\mathbf{S}^{-1}} \begin{pmatrix}\alpha x\\ \beta y\\ \gamma z\\ 1\end{pmatrix}$$

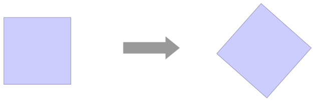
Interdiction de faire un scale avec un coefficient nul :

- il s'agit d'une projection
- opération non inversible

Isométrie

transformation isométrique :

- **iso** (identique) - **métrie** (mesure)
- conserve les distances euclidiennes



Isométrie

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon \cos\alpha & -\sin\alpha & t_x \\ \epsilon \sin\alpha & \cos\alpha & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \epsilon = \pm 1$$

forme générale :

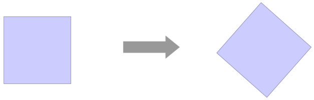
$$\mathbf{H_E} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{2\times 2} & \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{0}_2^\top & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où $\mathbf{R}$ est une matrice de rotation, et $\mathbf{t}$ un vecteur translation.

Isométrie 2D

isométrie :

$$\mathbf{H_E} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{2\times 2} & \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{0}_2^\top & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



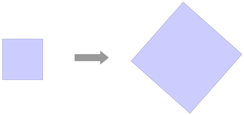
invariants :

- distances
- angles
- aires

Similitudes

transformation de similarité :

- appelées similitudes (*similarity* en anglais)
- transformation isométrique conjuguée avec un scaling isotrope (homothétie)



Similitudes 2D

Similitudes :

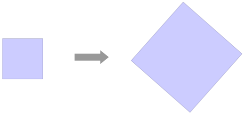
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon k \cos\alpha & -k\sin\alpha & t_x \\ \epsilon k \sin\alpha & k\cos\alpha & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \epsilon = \pm 1, k \neq 0$$

forme générale :

$$\mathbf{H_S} = \begin{bmatrix} k\mathbf{R}_{2\times 2} & \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{0}_2^\top & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{2\times 2} & \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{0}_2^\top & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Similitudes 2D

$$\mathbf{H_S} = \begin{bmatrix} k\mathbf{R}_{2\times 2} & \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{0}_2^\top & 1 \end{bmatrix}$$



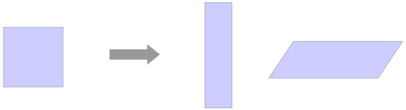
invariants :

- angles
- parallélisme
- rapport des longueurs
- rapport des aires

Transformation affine

transformation affine :

- transformation linéaire régulière, suivie d'une translation



Transformation affine 2D

Transformation affine :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

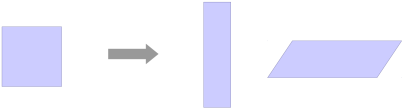
forme générale :

$$\mathbf{H_A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{2\times 2} & \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{0}_2^\top & 1 \end{bmatrix}$$

où $\mathbf{A}$ est une matrice régulière.

Transformation affine

$$\mathbf{H_A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{2\times 2} & \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{0}_2^\top & 1 \end{bmatrix}$$



invariants :

- parallélisme
- rapport de longueurs sur des droites parallèles
- rapport des aires

inverse : (calcul par blocs)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}_2^\top & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{t} \\ \mathbf{0}_2^\top & 1 \end{bmatrix}$$

Coordonnées homogènes

Représentation homogène:

coordonnées cartésiennes $\hookrightarrow \mathbb{R}^2$	coordonnées homogènes $\hookrightarrow \mathbb{P}^2$
$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

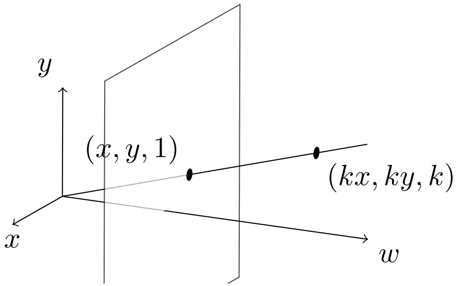
Mais ce n'est pas aussi simple !

Coordonnées homogènes

Le plan projectif $\mathbb{P}^2$

C'est l'ensemble des *droites* de $\mathbb{R}^3$ (passant par l'origine).
Toute droite est repérée par n'importe lequel de ses vecteurs (x, y, w) (du moment que $(x, y, w) \neq (0, 0, 0)$).

À un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on associe la droite passant par $(x, y, 1)$. Mais (kx, ky, k) désigne aussi la même droite. On dira que c'est *le même point projectif*.

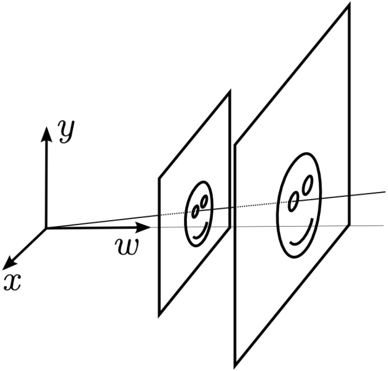


Coordonnées homogènes

Passage de $\mathbb{P}^2$ et $\mathbb{R}^2$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix}}_{\text{homogène}} \underset{\text{si } w \neq 0}{\doteq} \underbrace{\begin{pmatrix} x/w \\ y/w \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{homogène}} \longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x/w \\ y/w \end{pmatrix}}_{\text{cartésien}}$$

Qui est w ?



Up to scale

Facteur d'échelle :
En géométrie projective, les vecteurs sont définis à un facteur d'échelle près et les matrices aussi !

coordonnées homogènes	coordonnées cartésiennes
$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ k \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} kx/k \\ ky/k \\ k/k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$	$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx/k \\ ky/k \end{pmatrix}$

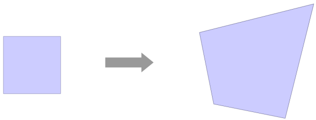
$k \neq 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{M}\mathbf{x} \\ (k\mathbf{M})\mathbf{x} &= k(\mathbf{M})\mathbf{x} \end{aligned}$$

Homographie

Homographie :

- transformation perspective
- inversible
- n'envoie plus forcément le plan $\{w = 1\}$ sur lui-même



Homographie

Homographie :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \\ 1 \end{pmatrix}$$

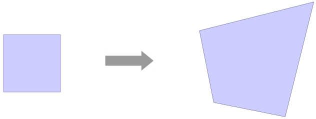
forme générale :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \quad \text{au lieu de} \quad \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les applications affines sont des cas particuliers d'homographies.

Homographie

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}$$



invariants :

- alignement des points
- birapport (*cross ratio*) entre 4 points

Calcul d'une homographie

il faut au moins 4 points de correspondance : $\mathbf{x}_i \leftrightarrow \mathbf{x}'_i$
(au lieu de 3 pour les transformations affines)

Calcul d'une homographie

Notation :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^\top \\ \mathbf{h}_2^\top \\ \mathbf{h}_3^\top \end{bmatrix}$$

mis sous forme de vecteur : $\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \\ h_{31} \\ h_{32} \\ h_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \\ \mathbf{h}_2 \\ \\ \mathbf{h}_3 \end{pmatrix}$

Calcul d'une homographie

Méthode :
pour chaque $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$, on a :

$$\mathbf{x}' \doteq \mathbf{H}\mathbf{x}$$

soit

$$\mathbf{x}' \times \mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

où $\times$ est le produit vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (souvent noté $\wedge$).
Soit

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1^\top \mathbf{x} \\ \mathbf{h}_2^\top \mathbf{x} \\ \mathbf{h}_3^\top \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'\mathbf{h}_3^\top \mathbf{x} - w'\mathbf{h}_2^\top \mathbf{x} \\ w'\mathbf{h}_1^\top \mathbf{x} - x'\mathbf{h}_3^\top \mathbf{x} \\ x'\mathbf{h}_2^\top \mathbf{x} - y'\mathbf{h}_1^\top \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calcul d'une homographie

pour chaque $\mathbf{x}_i \leftrightarrow \mathbf{x'}_i$, on a :

$$\begin{pmatrix} y'\mathbf{h}_3^\top\mathbf{x} - w'\mathbf{h}_2^\top\mathbf{x} \\ w'\mathbf{h}_1^\top\mathbf{x} - x'\mathbf{h}_3^\top\mathbf{x} \\ x'\mathbf{h}_2^\top\mathbf{x} - y'\mathbf{h}_1^\top\mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

en utilisant la symétrie du produit scalaire

$$\begin{pmatrix} y'\mathbf{x}^\top\mathbf{h}_3 - w'\mathbf{x}^\top\mathbf{h}_2 \\ w'\mathbf{x}^\top\mathbf{h}_1 - x'\mathbf{x}^\top\mathbf{h}_3 \\ x'\mathbf{x}^\top\mathbf{h}_2 - y'\mathbf{x}^\top\mathbf{h}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit, sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 0\ 0\ 0 & -w'\mathbf{x}^\top & y'\mathbf{x}^\top \\ w'\mathbf{x}^\top & 0\ 0\ 0 & -x'\mathbf{x}^\top \\ -y'\mathbf{x}^\top & x'\mathbf{x}^\top & 0\ 0\ 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 \\ \mathbf{h}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Attention : la matrice possède 9 colonnes !

Calcul d'une homographie

pour chaque $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$, on a :

$$\begin{bmatrix} 0\ 0\ 0 & -w'\mathbf{x}^\top & y'\mathbf{x}^\top \\ w'\mathbf{x}^\top & 0\ 0\ 0 & -x'\mathbf{x}^\top \\ -y'\mathbf{x}^\top & x'\mathbf{x}^\top & 0\ 0\ 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 \\ \mathbf{h}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(x'L_1 + y'L_2 + w'L_3 = 0)$

Cette matrice est de rang 2 $\rightarrow$ on peut retirer une ligne :

$$\begin{bmatrix} 0\ 0\ 0 & -w'\mathbf{x}^\top & y'\mathbf{x}^\top \\ w'\mathbf{x}^\top & 0\ 0\ 0 & -x'\mathbf{x}^\top \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 \\ \mathbf{h}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calcul d'une homographie

pour chaque $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$, on a :

$$\begin{bmatrix} 0\ 0\ 0 & -w'\mathbf{x}^\top & y'\mathbf{x}^\top \\ w'\mathbf{x}^\top & 0\ 0\ 0 & -x'\mathbf{x}^\top \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 \\ \mathbf{h}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

on obtient alors le système suivant ($2n$ lignes, 9 colonnes) :

$$\begin{bmatrix} 0\ 0\ 0 & -w'_1\mathbf{x}_1^\top & y'_1\mathbf{x}_1^\top \\ w'_1\mathbf{x}_1^\top & 0\ 0\ 0 & -x'_1\mathbf{x}_1^\top \\ 0\ 0\ 0 & -w'_2\mathbf{x}_2^\top & y'_2\mathbf{x}_2^\top \\ w'_2\mathbf{x}_2^\top & 0\ 0\ 0 & -x'_2\mathbf{x}_2^\top \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0\ 0\ 0 & -w'_n\mathbf{x}_n^\top & y'_n\mathbf{x}_n^\top \\ w'_n\mathbf{x}_n^\top & 0\ 0\ 0 & -x'_n\mathbf{x}_n^\top \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 \\ \mathbf{h}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calcul d'une homographie

$$\begin{bmatrix} 0\ 0\ 0 & -w_1'\mathbf{x}_1^\top & y_1'\mathbf{x}_1^\top \\ w_1'\mathbf{x}_1^\top & 0\ 0\ 0 & -x_1'\mathbf{x}_1^\top \\ 0\ 0\ 0 & -w_2'\mathbf{x}_2^\top & y_2'\mathbf{x}_2^\top \\ w_2'\mathbf{x}_2^\top & 0\ 0\ 0 & -x_2'\mathbf{x}_2^\top \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0\ 0\ 0 & -w_n'\mathbf{x}_n^\top & y_n'\mathbf{x}_n^\top \\ w_n'\mathbf{x}_n^\top & 0\ 0\ 0 & -x_n'\mathbf{x}_n^\top \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \\ h_{31} \\ h_{32} \\ h_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec au moins 4 points, on résout au sens des moindres carrés : noyau de la matrice (*right nullspace*) avec une SVD.

Calcul d'une homographie

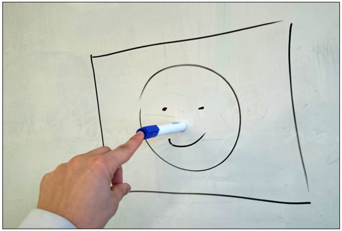
$$\begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \\ h_{31} \\ h_{32} \\ h_{33} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{H}$$

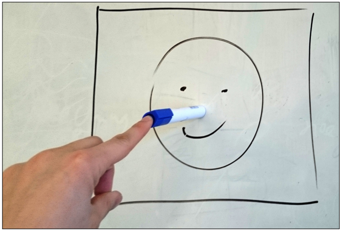
Calcul d'une homographie

- on applique $\mathbf{H}$ à chaque pixel de l'image de départ
- ... ou plutôt $\mathbf{H}^{-1}$ à chaque pixel de l'image d'arrivée.

Homographie

Homographie en pratique :





$\rightarrow$ transforme les perspectives d'un plan.

Homographie

La coordonnée homogène :

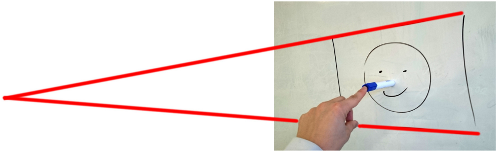
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ h_{31}x + h_{32}y + h_{33}w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x'}{h_{31}x+h_{32}y+h_{33}w} \\ \frac{y'}{h_{31}x+h_{32}y+h_{33}w} \\ 1 \end{pmatrix}$$

et si : $\quad h_{31}x + h_{32}y + h_{33}w = 0 \quad$?

Homographie

originale : intersection sur un point fini $\mathbf{x} = (x, y, 1)^\top$



homographie : intersection à l'infini $\mathbf{x}' = (x', y', 0)^\top$

Point à l'infini

coordonnée homogène :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix}$$

- si $w \neq 0$: point fini
- si $w = 0$: point à l'infini / vecteur

Points et droites de $\mathbb{P}^2$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} \qquad \mathbf{l} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

point droite

Un point $\mathbf{x} \in \mathbf{l}$:

dans $\mathbb{R}^2$: $ax + by + c = 0$
dans $\mathbb{P}^2$: $ax + by + cw = 0$ soit $\mathbf{x}^\top.\mathbf{l} = \mathbf{l}^\top.\mathbf{x} = 0$

Rappels de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{P}^2$

Intersection $\mathbf{x}$ de 2 droites :

$$\mathbf{l}_1 = (a_1, b_1, c_1) \qquad \mathbf{l}_2 = (a_2, b_2, c_2)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2$$

où $\times$ est le produit vectoriel de $\mathbb{R}^3$

Démonstration :

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{x} \overset{?}{\in} \mathbf{l}_1 : \quad \mathbf{l}_1^\top \mathbf{x} = \mathbf{l}_1^\top \big(\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2\big) = 0 \\ \mathbf{x} \overset{?}{\in} \mathbf{l}_2 : \quad \mathbf{l}_2^\top \mathbf{x} = \mathbf{l}_2^\top \big(\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2\big) = 0 \end{array}\right\} \mathbf{x} \in \mathbf{l}_1 \text{ et } \mathbf{l}_2$$

$$\Rightarrow \mathbf{x} \text{ intersection de } \mathbf{l}_1 \text{ et } \mathbf{l}_2$$

Deux droites (projectives) sont toujours sécantes !

Points à l'infini

Intersection de 2 droites parallèles :

$$\mathbf{l}_1 = (a, b, c_1) \qquad \mathbf{l}_2 = (a, b, c_2)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2 = \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \longleftarrow \text{point à l'infini}$$

Propriétés :

- 2 droites parallèles s'intersectent à l'infini.
- le vecteur $(b, -a)^\top$ indique la direction du point à l'infini.

Rappels de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{P}^2$

Droite $\mathbf{l}$ passant par 2 points :

$$\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, w_1) \qquad \mathbf{x}_2 = (x_2, y_2, w_2)$$

$$\mathbf{l} = \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$$

où $\times$ est le produit vectoriel de $\mathbb{R}^3$

Démonstration :

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{x}_1 \overset{?}{\in} \mathbf{l} : & \mathbf{x}_1^\top \mathbf{l} = \mathbf{x}_1^\top (\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2) = 0 \\ \mathbf{x}_2 \overset{?}{\in} \mathbf{l} : & \mathbf{x}_2^\top \mathbf{l} = \mathbf{x}_2^\top (\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2) = 0 \end{array}\right\} \mathbf{x}_1 \text{ et } \mathbf{x}_2 \in \mathbf{l}$$

$\Rightarrow \mathbf{l}$ passe par $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$

Droite à l'infini

Droite passant par 2 points à l'infini :

$$\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, 0) \qquad \mathbf{x}_2 = (x_2, y_2, 0)$$

$$\mathbf{l} = \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{l}_\infty$$

Droite à l'infini

$$\mathbf{l}_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

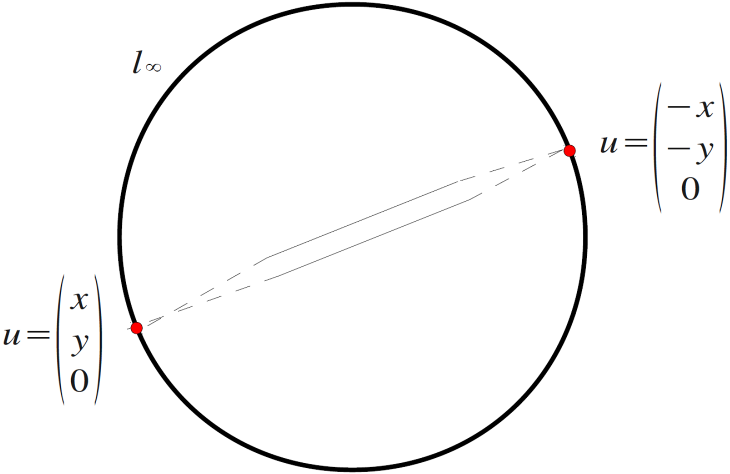
Droite à l'infini :
L'ensemble des points à l'infini reposent sur la droite à l'infini.

$$\mathbf{x} = (x, y, 0) \quad \text{et} \quad \mathbf{l}_\infty = (0, 0, 1)$$

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{l}_\infty = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} \in \mathbf{l}_\infty$$

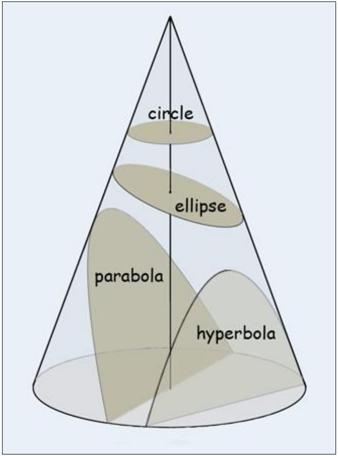
Intersection :
L'intersection d'une droite $\mathbf{l} = (a, b, c)$ avec $\mathbf{l}_\infty$ donne le point à l'infini $\mathbf{x} = (b, -a, 0)^\top$.

Points et droites à l'infini dans $\mathbb{P}^2$



Les coniques

Conique :
intersection entre un plan et un cône.



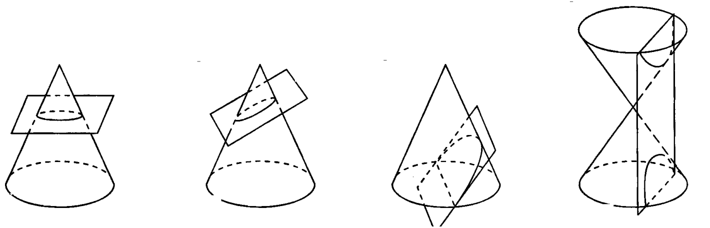
Les coniques

Équation générale d'une conique : (dans son plan)

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Les coniques

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$



cercle	ellipse	parabole	hyperbole
$a = c$ et $b = 0$	$b^2 - 4ac < 0$	$b^2 - 4ac = 0$	$b^2 - 4ac > 0$

Les coniques

équation générale d'une conique :

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

en coordonnées homogènes : (polynôme homogène de degré 2)

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dxw + eyw + fw^2 = 0$$

sous forme matricielle :

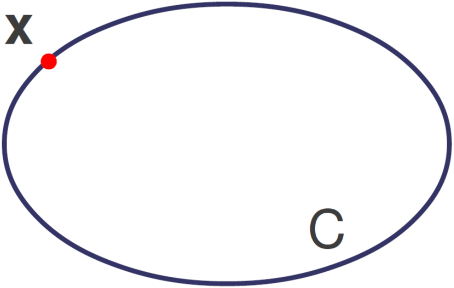
$$\begin{pmatrix} x & y & w \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} = 0$$

soit

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{C} \mathbf{x} = 0 \qquad \mathbf{C}^\top = \mathbf{C}$$

Coniques et points

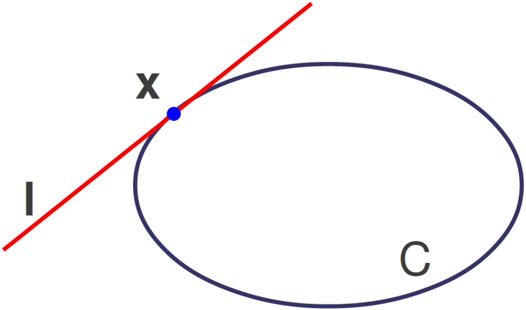
Autrement dit :
un point $\mathbf{x}$ appartient à une conique $\mathbf{C}$ ssi : $\mathbf{x}^\top \mathbf{C}\mathbf{x} = 0$



Coniques, droites et points

Tangente :
la tangente $\mathbf{l}$ d'une conique $\mathbf{C}$ passant par le point $\mathbf{x} \in \mathbf{C}$ est :

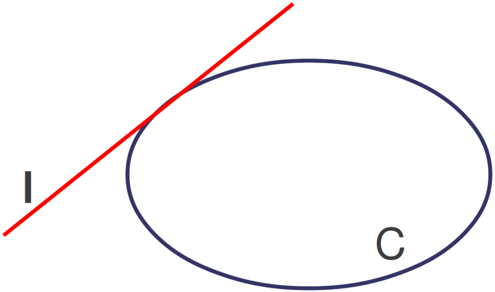
$$\mathbf{l} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$



Coniques et droites

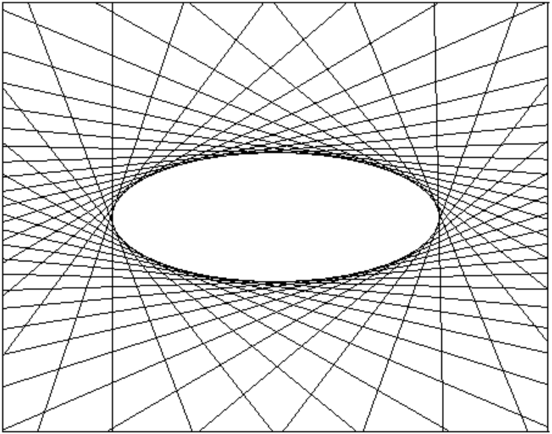
Et les droites ?

une droite $\mathbf{l}$ est tangente à la conique $\mathbf{C}$ ssi : $\mathbf{l}^\top \mathbf{C}^{-1} \mathbf{l} = 0$.



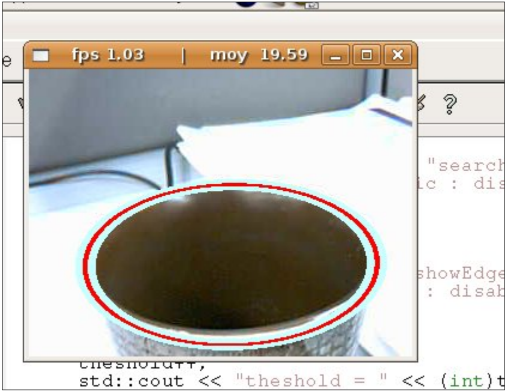
Coniques et droites

$$\mathbf{l}^\top \mathbf{C}^{-1} \mathbf{l} = 0$$



Trouver une conique

Détection d'ellipses :



Trouver une conique

Peut-on trouver une conique conique passant par un ou plusieurs points ?

si $\mathbf{x} \in \mathbf{C}$, alors :

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dxw + eyw + fw^2 = 0$$

soit, sous forme de produit scalaire :

$$\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^2 & xw & yw & w^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = 0$$

Trouver une conique

Si $\mathbf{x} \in \mathbf{C}$, alors :

$$\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^2 & xw & yw & w^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = 0$$

pour plusieurs points :

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1w_1 & y_1w_1 & w_1^2 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2w_2 & y_2w_2 & w_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_ny_n & y_n^2 & x_nw_n & y_nw_n & w_n^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Trouver une conique

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1w_1 & y_1w_1 & w_1^2 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2w_2 & y_2w_2 & w_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_ny_n & y_n^2 & x_nw_n & y_nw_n & w_n^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- avec 5 points, on trouve une unique conique
- avec 6 points ou plus, on résout au sens des moindres carrés : noyau de la matrice (*right nullspace*) avec une SVD.