Déterminant

Pascal Romon

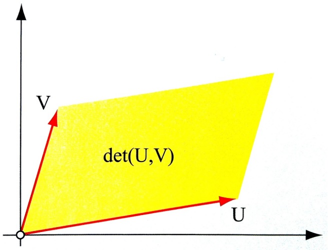
Déterminant

Introduction :
En pratique, le déterminant d'une matrice $n \times n$ mesure l'aire d'un parallélogramme ($n = 2$), le volume d'un parallélépipède ($n = 3$), ou d'un pavé de dimension supérieure. Il sert donc à mesurer les aires et volumes.

Utilisation pratique :
Détermine l'unicité de la solution d'un système linéaire.

Déterminant et parallélogramme

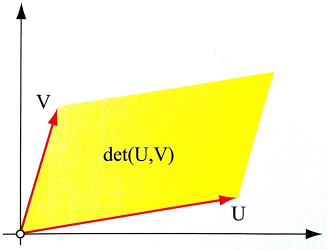
Soit le parallélogramme défini par $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$:



Le déterminant de la matrice $[\mathbf{u}|\mathbf{v}]$,noté $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, est l'aire de ce parallélogramme, affecté du signe – si le trajet de $\mathbf{u}$ à $\mathbf{v}$ se fait dans le sens des aiguilles d'une montre (contraire au sens dit *trigonométrique*).

Déterminant

Propriété :



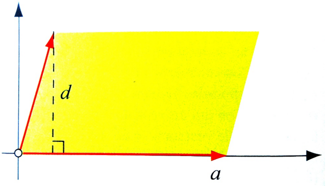
Colinéarité

$$\det(\mathbf{u}, \lambda\mathbf{u}) = 0 \quad \forall\lambda$$

l'aire d'un parallélogramme issu de 2 vecteurs colinéaires (aplati) est nulle.

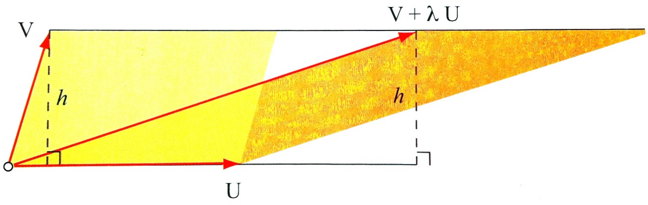
Antisymétrie

Parallélogramme



L'aire d'un parallélogramme = base $\times$ hauteur

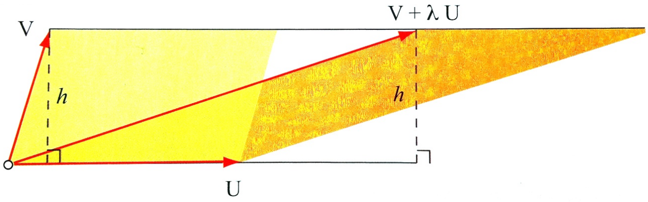
Parallélogramme



Les parallélogrammes définis par $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ et $(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \lambda\mathbf{u})$ ont la même base et la même hauteur, donc la même surface .

Déterminant

Propriété :

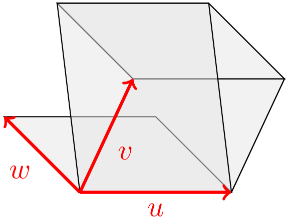


$$\det(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \det(\mathbf{u},\mathbf{v}+\lambda\mathbf{u}) \qquad \forall\lambda$$

pour une matrice, l'ajout à une colonne d'une combinaison linéaire des autres colonnes ne change pas son déterminant.

Déterminant

Propriété :

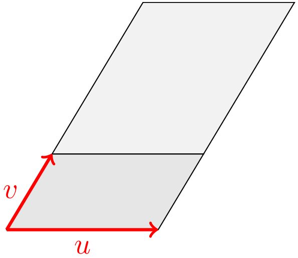


Additivité

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \det(\mathbf{u}, \mathbf{w})$$

Déterminant

Propriété :



$$\det(\mathbf{u}, \lambda\mathbf{v}) = \lambda \det(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

multiplier une colonne de la matrice par λ
multiplie aussi le déterminant par λ.

Déterminant

Propriété :

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \det(\mathbf{u}, \mathbf{w})$$

et

$$\det(\lambda\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda \det(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

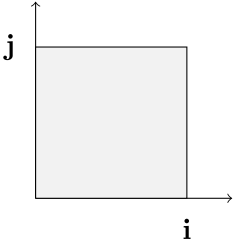
$$\Downarrow$$

Linéarité

$$\det(\mathbf{u}, \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}) = \lambda \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mu \det(\mathbf{u}, \mathbf{w})$$

Déterminant

Propriété :



$$\det(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Déterminant 2×2

Soient $\mathbf{i}$ et $\mathbf{j}$ les vecteurs unitaires du référentiel, on a :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} &= \det(a\mathbf{i} + c\mathbf{j}, b\mathbf{i} + d\mathbf{j}) \\
&= \det(a\mathbf{i} + c\mathbf{j}, b\mathbf{i}) + \det(a\mathbf{i} + c\mathbf{j}, d\mathbf{j}) \\
&= \det(a\mathbf{i}, b\mathbf{i}) + \det(c\mathbf{j}, b\mathbf{i}) + \det(a\mathbf{i}, d\mathbf{j}) + \det(c\mathbf{j}, d\mathbf{j}) \\
&= ab\det(\mathbf{i}, \mathbf{i}) + bc\det(\mathbf{j}, \mathbf{i}) + ad\det(\mathbf{i}, \mathbf{j}) + cd\det(\mathbf{j}, \mathbf{j}) \\
&= -bc\det(\mathbf{i}, \mathbf{j}) + ad\det(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = ad - bc
\end{aligned}$$

déterminant 2×2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Système linéaire

Soit le système : $\left\{ \begin{array}{ll} 4x - y & = 1 \\ 2x + 3y & = 5 \end{array} \right.$

On pose : $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Le système s'écrit alors : $\mathbf{u}x + \mathbf{v}y = \mathbf{b}$

Système linéaire

$$\mathbf{u}x + \mathbf{v}y = \mathbf{b}$$

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{b}, \mathbf{v}) &= \det(\mathbf{u}x + \mathbf{v}y, \mathbf{v}) \\ &= x \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + y \det(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \\ &= x \det(\mathbf{u}, \mathbf{v})\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\det(\mathbf{b}, \mathbf{v})}{\det(\mathbf{u}, \mathbf{v})}$$

de même ...

$$\Rightarrow y = \frac{\det(\mathbf{u}, \mathbf{b})}{\det(\mathbf{u}, \mathbf{v})}$$

Système linéaire

$$\begin{cases} 4x - y &= 1 \\ 2x + 3y &= 5 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

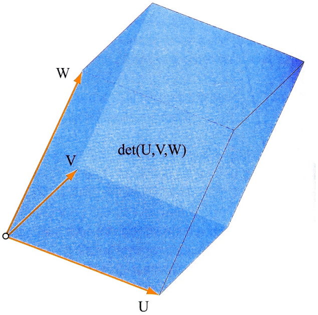
$$x = \frac{\det(\mathbf{b}, \mathbf{v})}{\det(\mathbf{u}, \mathbf{v})} \qquad y = \frac{\det(\mathbf{u}, \mathbf{b})}{\det(\mathbf{u}, \mathbf{v})}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{8}{14} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{18}{14}$$

méthode directe et rapide — attention au cas où $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$!

Déterminant 3×3

Introduction :



Le déterminant $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ correspond au volume du parallélépipède issu des vecteurs $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$.

Déterminant 3×3

Propriétés :

- Si au moins deux vecteurs parmi $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ sont colinéaires ou (plus généralement) si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ sont coplanaires, alors $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$.
- Le signe du déterminant dépend de la "règle de la main droite".

Déterminant 3×3

Calcul (rapide) par la règle de Sarrus :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{31} & m_{32} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{M}) = \quad & m_{11}\, m_{22}\, m_{33} + m_{12}\, m_{23}\, m_{31} + m_{13}\, m_{21}\, m_{32} \\ & - m_{31}\, m_{22}\, m_{13} - m_{32}\, m_{23}\, m_{11} - m_{33}\, m_{21}\, m_{12} \end{aligned}$$

Attention : ne marche qu'en dimension 3, et pas forcément plus rapide qu'un pivot.

Calcul (rapide) par le pivot :
(1) faire le pivot de Gauss (simple), (2) multiplier les coefficients diagonaux.
Attention la multiplication d'une ligne par k multiplie le déterminant par k, l'échange de ligne (ou colonne) par -1.

Déterminant $n \times n$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

Comatrice (matrice des cofacteurs)

$$\mathbf{Cof}_{i,j} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1,j-1} & m_{1,j+1} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{i-1,1} & \cdots & m_{i-1,j-1} & m_{i-1,j+1} & \vdots & m_{i-1,n} \\ m_{i+1,1} & \cdots & m_{i+1,j-1} & m_{i+1,j+1} & \vdots & m_{i+1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{n,j-1} & m_{n,j+1} & \cdots & m_{nn} \end{vmatrix}$$

Calcul récursif : $\det(\mathbf{M}) = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}.\mathbf{Cof}_{i,j}$ (i arbitraire)

Déterminant $n \times n$

Calcul récursif : exemple avec déterminant 3×3

(développement par rapport à la première colonne)

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{M}) = m_{11} \begin{vmatrix} m_{22} & m_{23} \\ m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} - m_{21} \begin{vmatrix} m_{12} & m_{13} \\ m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} + m_{31} \begin{vmatrix} m_{12} & m_{13} \\ m_{22} & m_{23} \end{vmatrix}$$

Déterminant nD

Pour calculer le déterminant d'une matrice :

$\mathbf{3 \times 3}$: 3 déterminants de matrices 2×2

$\mathbf{4 \times 4}$: 4 déterminants de matrices 3×3

$\mathbf{5 \times 5}$: 5 déterminants de matrices 4×4

$\mathbf{6 \times 6}$: 6 déterminants de matrices 5×5
$\hookrightarrow$ 120 déterminants 3×3

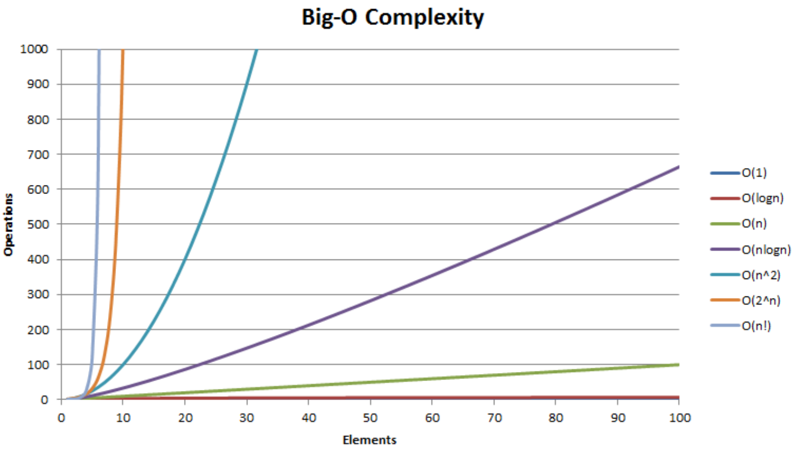
Déterminant nD

Temps de calcul :

Le calcul de l'inverse d'une matrice d'ordre n par la méthode du déterminant est en $\mathcal{O}(n^2 n!)$.

n	temps de calcul (processeur 3GHz)
10	10^{-5} s
15	11 s
20	1 an
25	11 millions d'années (trop long)

Complexité : $\mathcal{O}(n^2 n!)$



Déterminant nD

Propriétés :

- $\det(A') = -\det(A)$ si $A' = A$ avec 1 permutation de ligne
- $\det(A') = -\det(A)$ si $A' = A$ avec 1 permutation de colonne
- $\det(A)$ invariant si $L_A(i) = L_A(i) + kL_A(j) \quad (i \neq j)$
- $\det(A') = k.\det(A)$ si $L_{A'}(i) = k.L_A(i)$
- $\det(kA) = k^n \det(A)$
- $\det(A) = \det(A^\top)$
- $\det(A) = 0$ si A est singulière (c-à-d non inversible)
- $\det(A) = \prod A_{ii}$ si A est triangulaire ou diagonale

Calcul numérique

Algorithm 1: déterminant

input: une matrice carrée A

Triangulariser A pivot de Gauss

- en faisant des permutations de lignes et de colonnes
- en ajoutant aux lignes une combinaison linéaire d'autres lignes

$\rightarrow$ noter pour chaque opération le changement de signe du déterminant

return $\pm \prod A_{ii}$

Cette méthode permet aussi de calculer le rang de A.

Calcul numérique

Applications :

- savoir si un système linéaire a une solution.
- vision par ordinateur: connaître l'orientation d'une caméra à partir du signe du déterminant de sa matrice de projection.
- synthèse d'image : connaitre le facteur de changement de volume d'une transformation 3D.