Travaux dirigés 7
Recherche de racines de fonctions
Mathématiques pour l'informatique
—IMAC 2—

▸ **Exercice 1.** ***Dichotomie et position fausse***

1. *Rappeler la méthode dite 'manuelle' ou 'naive' de recherche de racines d'une fonction par encadrement. Donner son pseudo-code.*
2. *Rappeler la méthode dichotomique. Nous appliquons cette méthode sur la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$. Quelles conditions f doit-elle satisfaire sur $[a, b]$? Pourquoi ? Pourrait-on, à chaque itération, couper l'intervalle ailleurs qu'en son milieu ?*
3. *Nous considérons que nous coupons à chaque itération l'intervalle considéré en son milieu. Trouver une expression de l'erreur absolue du calcul en fonction de la taille de l'intervalle de départ et du nombre d'itérations.*
4. *Donner le pseudo-code d'une fonction réalisant une recherche de zéro par dichotomie.*
5. *On veut résoudre l'équation $cos x = 2x$. Montrer que cette équation a une solution unique x_0 sur $[-\pi, \pi]$. En déduire que l'on peut utiliser la méthode de dichotomie.*
6. *Rappeler la méthode de position fausse et en donner le pseudo-code.*

▸ **Exercice 2.** ***Méthode de Newton***

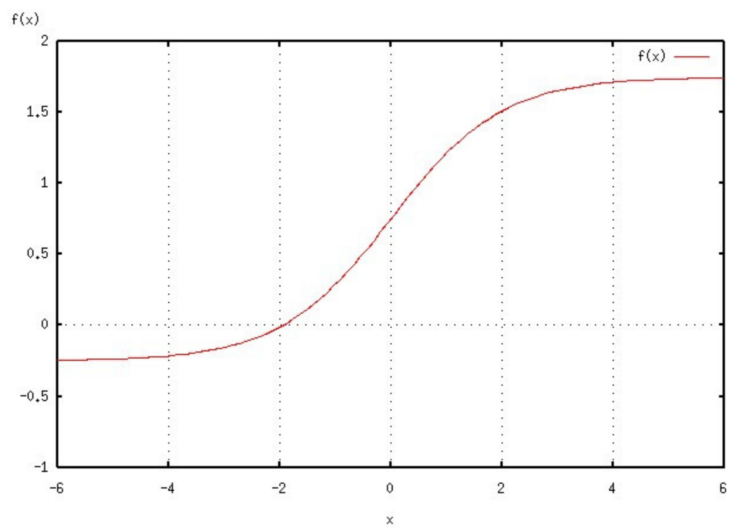
1. *Rappeler la méthode de Newton. Donner son pseudo-code.*
2. *Discuter les avantages et inconvénients de cette méthode.*
3. *Rappeler la méthode de la sécante. Quel est son intérêt ?*
4. *On veut résoudre l'équation $f(x) = 0$ avec :*

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} + \frac{3}{4}$$

$$f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

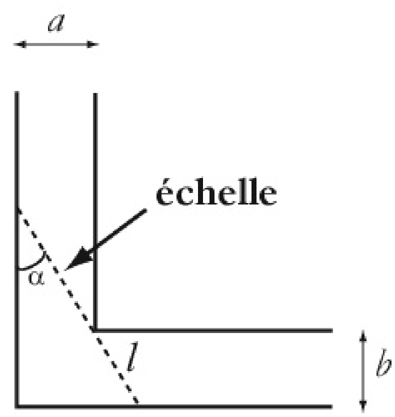
soit

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{1}{8} \cdot \frac{8xe^x - 7e^{2x} - 6e^x + 1}{e^x}$$



Utiliser (graphiquement ou analytiquement) la méthode de Newton à partir du point $x_0 = 0$ puis $x_0 = 2$. Que se passe-t-il ?

▸ **Exercice 3.** ***Application***
Un ouvrier doit faire passer une échelle de longueur l dans un couloir faisant un angle droit. Les portions de couloir de part et d'autre de l'angle ont une largeur a et b (voir schéma).



Le probléme est de chercher la taille maximale de l'échelle pouvant passer par ce couloir, connaissant a et b. Pour cela :

1. *Exprimer l en fonction de a, b et de α.*
2. *On cherche le minimum de la fonction $l(a, b, \alpha)$. Comment utiliser la méthode de dichotomie afin d'y parvenir ? La fonction $l(a, b, \alpha)$ vérifie-t-elle les conditions d'utilisation de la méthode de dichotomie ?*
3. *Calculer par la méthode de dichotomie l'angle α pour lequel $l(a, b, \alpha))$ est minimum. En déduire la taille maximale d'une échelle pouvant passer par ce couloir.*

▸ **Exercice 4.** ***Mise en situation***

Monsieur Dupond est un journaliste d'investigation qui, comme tous ses confrères, doit effectuer des recherches poussées sur des sujets sensibles. Aujourd'hui, il doit chercher des fiches triées par ordre alphabétique dans un répertoire unique où ne figurent pas les ergots de débuts de lettres.

Monsieur Dupond aime optimiser ses méthodes de recherche car il tient à être performant. Il réflechit donc à des optimisations sur son mode de recherche.

1. *Sa première idée est de parcourir linéairement les fiches en partant de la lettre a pour les fiches dont le titre commence par une lettre comprise entre a et m (1^{ere} partie de l'alphabet) et en partant de la lettre z pour les autres. En supposant que chaque lettre est équiprobale, quelle est la complexité moyenne d'une telle recherche ?*
2. *Monsieur Dupond se rend vite compte qu'il ne s'agit pas de sa meilleur idée et se rabat sur la méthode de Newton. Cependant, malgré ses très bonnes capacités en calcul mental, Monsieur Dupond ne calcule pas assez vite et abandonne cette méthode avec regrets. Dans le cas d'une distribution équiprobable, la méthode de Newton est-elle efficace ?*
3. *Finalement, Monsieur Dupond se résoud à utiliser une simple dichotomie, mais il y ajoute une optimisation de son cru : il commence sa nouvelle recherche à partir de la dernière fiche trouvée, pouvant ainsi éliminer d'office une grande partie des fiches. Cette incroyable méthode vous parait-elle être une optimisation conséquente ?*