Systèmes linéaires

Pascal Romon

Introduction

Mise en situation :
Martine achète 3 barrettes de RAM et 1 carte graphique pour u euros.
Jean achète 1 barrette de RAM et 2 cartes graphiques pour v euros.

$\rightarrow$ Quel est le prix x de la barrette de RAM et le prix y de la carte graphique ?

Système d'équations :

$$\begin{cases} 3x + y = u \\ x + 2y = v \end{cases}$$

Introduction

Système d'équations :
n équations (=lignes), p inconnues (=colonnes) ; le résultat se compose de n valeurs (=colonnes)

$$\begin{cases} 3x + y = u \\ x + 2y = v \end{cases}$$

Système linéaire sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

soit

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Introduction

Problème à résoudre :

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Qualités requises pour la résolution :

- précision (solution exacte ... autant que possible)
- rapidité
- robustesse
- simplicité
- occupation mémoire
- parallélisable

Remarques : parfois la rapidité prime sur la précision
(ex : la radiosité)

Introduction

Problème à résoudre :

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Solutions :
inverse de $\mathbf{A}$ (en supposant $\mathbf{A}$ inversible) :

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

En fait, il est préférable d'éviter le calcul de $\mathbf{A}^{-1}$ trop coûteux (surtout avec la formule des déterminants).

Pivot de Gauss

Introduction :
Si $\mathbf{A}$ est triangulaire et que les $a_{ii} \neq 0$, on peut résoudre le système directement par éliminations successives.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Si $\mathbf{A}$ est diagonale, c'est encore plus simple (l'inversion est quasiment sans calcul).

Pivot de Gauss

Méthode :
On cherche à transformer notre système en un système *équivalent* où la matrice sera triangulaire.

Notation : On travaille en général avec les données $\mathbf{A}$ et $\mathbf{b}$, rassemblées dans une seule matrice $[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & u \\ 1 & 2 & v \end{array}\right]$$

Noter que les dimensions permettent de coller $\mathbf{A}$ et $\mathbf{b}$.

Pivot de Gauss

opération légale : permutation de deux lignes $L_1 \leftrightarrow L_2$

$$\begin{cases} 3x + y = u \\ x + 2y = v \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & u \\ 1 & 2 & v \end{array}\right]$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x + 2y = v \\ 3x + y = u \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & v \\ 3 & 1 & u \end{array}\right]$$

Pivot de Gauss

opération légale : permutation de deux colonnes : $C_1 \leftrightarrow C_2$

$$\begin{cases} 3x + y = u \\ x + 2y = v \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & u \\ 1 & 2 & v \end{array} \right]$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} y + 3x = u \\ 2y + x = v \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad ??$$

Pivot de Gauss

opération légale : multiplication d'une ligne par une constante $k \neq 0 : L_2 *= k$

$$\begin{cases} 3x + y = u \\ x + 2y = v \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & u \\ 1 & 2 & v \end{array}\right]$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 3x + y = u \\ kx + 2ky = kv \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ k & 2k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ kv \end{pmatrix} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & u \\ k & 2k & kv \end{array}\right]$$

Pivot de Gauss

opération légale : ajouter à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes $L_2 \mathrel{+}= L_1$

$$\begin{cases} 3x + y = u \\ x + 2y = v \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & u \\ 1 & 2 & v \end{array}\right]$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 3x + y = u \\ 4x + 3y = u + v \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u + v \end{pmatrix} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & u \\ 4 & 3 & u + v \end{array}\right]$$

Pivot de Gauss

objectif : en utilisant des opérations légales, on veut :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a'_{33} & \cdots & a'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a'_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$$

Pivot de Gauss

récapitulatif des opérations légales :
Les opérations suivantes changent le système, mais pas les solutions

- permutation de deux lignes
- permutation de deux colonnes (☣)
- multiplication d'une ligne par une constante k ($k \neq 0$)
- ajouter à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes

Pivot de Gauss

méthode : étape 1

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & \cdots & a'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & a'_{n3} & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$$

Pivot de Gauss

méthode : étape 1

On veut annuler les éléments $a_{21} \ \cdots \ a_{n1}$

Pour i allant de 2 à n :

- $L_i \mathrel{-}= \dfrac{a_{i1}}{a_{11}} \times L_1$
- $b_i \mathrel{-}= \dfrac{a_{i1}}{a_{11}} \times b_1$

Pivot de Gauss

méthode : étape 2

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & \cdots & a'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & a'_{n3} & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a''_{33} & \cdots & a''_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a''_{n3} & \cdots & a''_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ \vdots \\ b''_n \end{pmatrix}$$

Pivot de Gauss

méthode : étape 2

On veut annuler les éléments $a_{32} \ \cdots \ a_{n2}$.

Pour i allant de 3 à n :

- $L_i \mathrel{-}= \dfrac{a_{i2}}{a_{22}} \times L_2$
- $b_i \mathrel{-}= \dfrac{a_{i1}}{a_{22}} \times b_2$

Pivot de Gauss

méthode : étape k (en général)

On veut annuler les éléments $a_{ik} \ \cdots \ a_{nk}$.

Pour i allant de $k+1$ à n :

- $L_i \mathrel{-}= \dfrac{a_{ik}}{a_{kk}} \times L_1$
- $b_i \mathrel{-}= \dfrac{a_{ik}}{a_{11}} \times b_k$

Pivot de Gauss

méthode : étape n

$$\begin{bmatrix} & & \\ & \cdots & \\ & & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \vdots \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a'_{33} & \cdots & a'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$$

Pivot de Gauss

Remarques :

- l'algorithme est récursif (sur les sous-matrices)
- Si un pivot est nul, on fait une permutation de ligne.
- Si toute la sous-colonne est nulle, alors au choix,
  - On arrête car la matrice n'est pas inversible (système singulier)
  - On passe à la colonne suivante (résolution de systèmes indéterminés)

Pivot de Gauss

Exemple :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}$$

représenté par :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 10 \\ 4 & -1 & 1 & 8 \\ 2 & -4 & 3 & -8 \end{array} \right]$$

Pivot de Gauss

Calculs :

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 1 & 10 & \\ 4 & -1 & 1 & 8 & {\color{blue}-2L_1} \\ 2 & -4 & 3 & -8 & {\color{blue}-L_1} \end{array}\right] \iff \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 1 & 10 & \\ 0 & -7 & -1 & -12 & \\ 0 & -7 & 2 & -18 & {\color{blue}-L_3} \end{array}\right]$$

$$\iff \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 10 \\ 0 & -7 & -1 & -12 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{array}\right] \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(on conclut par substitution et remontée)

Pivot de Gauss

Variante de Gauss–Jordan (matrice réduite échelonnée) :

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 3 & 1 & 10 & \\ 0 & -7 & -1 & -12 & \\ 0 & 0 & 3 & -6 & \times\frac{1}{3} \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 3 & 1 & 10 & -L_3 \\ 0 & -7 & -1 & -12 & +L_3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \end{array}\right]$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 3 & 0 & 12 & \\ 0 & -7 & 0 & -14 & \times -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 3 & 0 & 12 & -3\times L_2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \end{array}\right] \Bigg[$$

Matrices élémentaires

Principe : une opération sur une matrice (de système linéaire) revient à la multiplication *à gauche* par une matrice élémentaire $\mathbf{E}$.

- permutation des lignes i et j : comme $\mathbf{Id}$ sauf que $e_{ii} = e_{jj} = 0$ et $e_{ij} = e_{ji} = 1$
- $L_i \mathrel{+}= kL_j$: comme $\mathbf{Id}$ avec k en position (i, j)
- $L_i \mathrel{*}= k$: comme $\mathbf{Id}$ avec k en position (i, i)
- le pivot de Gauss revient donc à écrire $\mathbf{E}_k\mathbf{E}_{k-1}\cdots\mathbf{E}_1\mathbf{M} = \mathbf{T}$ avec $\mathbf{T}$ triangulaire supérieure, donc $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{E}_k\cdots\mathbf{E}_1$
- le pivot de Gauss–Jordan revient à écrire $\mathbf{E}_r\mathbf{E}_{r-1}\cdots\mathbf{E}_k\cdots\mathbf{E}_1\mathbf{M} = \mathbf{Id}$, donc $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{E}_r\cdots\mathbf{E}_1$
- Noter que dans le pivot de Gauss (sans échange de ligne) les matrices élémentaires sont triangulaires *inférieures* ; ceci sera utile pour la décomposition LU.

$$\mathbf{E}_{L_2\leftrightarrow L_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{E}_{L_2+=7L_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{E}_{L_2*=-3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pivot de Gauss

Stabilité numérique et choix du pivot :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a''_{33} & \cdots & a''_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a''_{n3} & \cdots & a''_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b''_n \end{pmatrix}$$

Dans l'opération : $\text{ligne}_i = \text{ligne}_i - \dfrac{a_{ik}}{a_{kk}} \times \text{ligne}_k$

la valeur du pivot a_{kk} a des conséquences sur la stabilité numérique.

En pratique, on veut $\left|\dfrac{a_{ik}}{a_{kk}}\right| \leq 1$

Pivot total

Méthode :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a''_{33} & \cdots & a''_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a''_{n3} & \cdots & a''_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \\ \vdots \\ b''_n \end{pmatrix}$$

On s'arrange pour avoir le pivot maximal en permutant à chaque itérations les lignes de la sous-matrice traitée.

Méthodes itératives

Méthode :

Plutôt que d'utiliser une méthode "exacte", on peut appliquer une méthode itérative.

$\rightarrow$ plus on fait d'itérations, plus on converge vers la solution.

Jacobi

Exemple :

Système à résoudre : $\mathbf{Au} = \mathbf{b}$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 5x & - & 3y & + & z & = & 10 \\ -x & + & 6y & - & 4z & = & 5 \\ 3x & - & 3y & + & 9z & = & -7 \end{array}\right.$$

Réécriture du système : $\mathbf{u} = \mathbf{A}'\mathbf{u} + \mathbf{b}'$

$$\begin{cases} x = \dfrac{10 + 3y - z}{5} \\ y = \dfrac{5 + x + 4z}{6} \\ z = \dfrac{-7 - 3x + 3y}{9} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{4}{6} \\ -\frac{3}{9} & \frac{3}{9} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{10}{5} \\ -\frac{5}{6} \\ -\frac{7}{9} \end{pmatrix}$$

Jacobi

Exemple :

On construit une suite : $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{A}'\mathbf{u}_n + \mathbf{b}'$

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{10 + 3y_n - z_n}{5} \\ y_{n+1} = \dfrac{5 + x_n + 4z_n}{6} \\ z_{n+1} = \dfrac{-7 - 3x_n + 3y_n}{9} \end{cases}$$

Sous certaines conditions (liées aux valeurs propres), la suite converge et on connaît même la rapidité de convergence.

Jacobi

Remarque :

On peut partir d'une solution quelconque (vecteur nul par exemple).

Gauss–Seidel

Méthode :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{10+3y_n-z_n}{5} \\ y_{n+1} = \dfrac{5+x_n+4z_n}{6} \\ z_{n+1} = \dfrac{-7-3x_n+3y_n}{9} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \color{red}{x_{n+1}} = \dfrac{10+3y_n-z_n}{5} \\ \color{blue}{y_{n+1}} = \dfrac{5+\color{red}{x_{n+1}}+4z_n}{6} \\ z_{n+1} = \dfrac{-7-3\color{red}{x_{n+1}}+3\color{blue}{y_{n+1}}}{9} \end{cases}$$

Converge plus rapidement que Jacobi.

Jacobi et Gauss–Seidel

Convergence :

Condition suffisante de convergence à partir de n'importe quelle condition initiale : la matrice $\mathbf{A}$ doit être **à diagonale dominante stricte** :

$$|a_{kk}| > \sum_{i=1, i\neq k}^{n} |a_{ki}|$$

Jacobi et Gauss–Seidel

Diagonale dominante stricte :

$$|a_{kk}| > \sum_{i=1, i\neq k}^{n} |a_{ki}|$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & -8 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} 4 > 2 \\ 8 > 5 \\ 5 > 3 \end{array}$$

Jacobi et Gauss-Seidel

Condition d'arrêt :

On s'arrête quand la solution numérique est suffisamment proche de la solution exacte.

$\rightarrow$ vecteur résidu : $\mathbf{r}_n = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_n$
$\rightarrow$ en pratique :

$$\frac{\|\mathbf{r}_n\|}{\|\mathbf{b}\|} = \frac{\|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_n\|}{\|\mathbf{b}\|} \leq \epsilon$$

pour une précision ϵ donnée.

Conditionnement d'une matrice

Condition d'une matrice :

On dit qu'une matrice est *mal conditionnée* si une petite variation sur les données du système entraîne une grosse variation de la solution.

Conditionnement d'une matrice

Exemple : (de R. S. Wilson)

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32,1 \\ 22,9 \\ 33,1 \\ 30,9 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 9,2 \\ -12,6 \\ 4,5 \\ -1,1 \end{pmatrix}$$

Pourtant, cette matrice a bonne allure et Det = 1

Conditionnement d'une matrice

Exemple : (de R. S. Wilson)

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8,1 & 7,2 \\ 7,08 & 5,04 & 6 & 5 \\ 8 & 5,98 & 9,89 & 9 \\ 6,99 & 4,99 & 9 & 9,98 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -81 \\ 137 \\ -34 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Conditionnement d'une matrice

Condition d'une matrice :

Soit le système : $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ $\quad$ ($\mathbf{A}$ inversible)

Une petite perturbation $\delta\mathbf{b}$ du vecteur $\mathbf{b}$ entraîne une perturbation $\delta\mathbf{x}$ du vecteur $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$$

L'erreur relative $\dfrac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$ de $\mathbf{b}$ entraîne une erreur relative $\dfrac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$ sur $\mathbf{x}$.

Conditionnement d'une matrice

Conditionnement d'une matrice :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}\delta\mathbf{x} = \delta\mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \delta\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{b}$$

Si on prend une norme N de matrice dite *subordonnée*, c-à-d telle que pour tout $\mathbf{x}$, $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leq N(\mathbf{A})\|\mathbf{x}\|$, alors :

$$\|\delta\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{b}\| \quad \text{et} \quad \|\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|$$

Conditionnement d'une matrice

Conditionnement d'une matrice :

on a

$$\|\delta\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{b}\| \quad \text{et} \quad \|\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|$$

soit

$$\|\delta\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{b}\| \quad \text{et} \quad \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{A}\|\frac{1}{\|\mathbf{b}\|}$$

soit finalement

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\|\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

Conditionnement d'une matrice

Conditionnement d'une matrice :
Puisque

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A}\| \frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

la variation de $\mathbf{b}$ influe sur $\mathbf{x}$ selon le coefficient :

$$\mathsf{Cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|.\|\mathbf{A}^{-1}\|$$

Plus $\mathsf{Cond}(\mathbf{A})$ est petit, mieux $\mathbf{A}$ est conditionnée.
Remarque : il n'est pas toujours facile de calculer une norme subordonnée (cela revient souvent à diagonaliser A), donc on utilise d'autres normes comme la norme de Frobenius : $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij^2}}$

Conditionner une matrice

Conditionner une matrice :

- soit le système : $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$
- on cherche une matrice inversible $\mathbf{P}$ pour avoir : $\mathbf{PAx} = \mathbf{Pb}$ de telle sorte que $\mathbf{PA}$ soit mieux conditionnée que $\mathbf{A}$.
- dans le cas le plus favorable, on a : $\mathbf{P} = \mathbf{A}^{-1}$
- il n'y a pas de méthode standard pour trouver $\mathbf{P}$, l'idéal étant de trouver une matrice facile à inverser assez proche de $\mathbf{A}^{-1}$.

Réduction d'erreur

Principe :
Soit le système suivant : $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$
pour lequel on trouve une solution $\mathbf{x}_0$ telle que :

$$\mathbf{Ax}_0 = \mathbf{b}_0 \simeq \mathbf{b} \qquad \text{(erreurs numériques)}$$

On a

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{Ax}_0 + \mathbf{A}\delta\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

soit

$$\mathbf{A}\delta\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}_0$$

On résout le système et on obtient : $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}$

Réduction d'erreur

Systèmes à résoudre :

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{b} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{A}\delta\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$$

Remarque :
Les méthodes de décomposition (LU, SVD, QR, Cholesky, etc.) sont particulièrement recommandées car la décomposition de $\mathbf{A}$ est utilisée pour résoudre les 2 systèmes.

Résultats :
on peut s'attendre à une erreur 3 fois plus petite.