ОПИСАНИЕ МЕТОДА НЬЮТОНА

Пусть

1) Сама целевая функция, её первая и вторая производные непрерывно дифференцируемы на отрезке [a, b]:
$$f(x) \in C^2[a,b]$$
2) Вторая производная положительна на отрезке [a, b]:
$$f''(x) > 0, x \in [a,b] => f \text{– выпуклая}$$

Тогда f – унимодальна на $[a,b]$ (т.к. она дифференцируема и выпукла).

Метод Ньютона поиска минимума функции f является методом касательных Ньютона решения уравнения $f'(x) \ = \ 0$.

<u>Идея метода Ньютона решения уравнения $g(x) = 0$</u>:

Предполагается, что функция $g(x)$ 1 раз непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,b]$, т.е. $g(x) \in C^1[a,b]$. Также будем считать, что g имеет единственный корень на отрезке $[a,b]$.

За очередное приближение $\bar{x}$ неизвестного корня x^* принимают точку пересечения с осью Ox касательной к графику $g(x)$ в точке, отвечающей текущему приближению $\bar{x}'$.

Т.е. предполагается, что выбирается некоторая начальная точка $\bar{x}$ (это очередное приближение искомого корня x_0). В ней строится касательная к графику. Получаем новое приближение $\bar{x}_1$, в точке которого строится касательная и получаем некоторое очередное приближение $\bar{x}_2$ и т.д.

Условием окончания итераций служит либо $|\bar{x} - \bar{x}'| < \varepsilon$, либо $|g(\bar{x})| < \varepsilon$.

<u>Замечания</u>:

1) Метод Ньютона обладает высокой точностью и скоростью сходимости, если начальное приближение выбрано *удачно*. Если же начальное приближение выбрано *неудачно*, метод может расходиться.

   Как правило, чем **больше** значения $g'(x)$, тем **быстрее** сходится метод.
2) Расчётные соотношения метода Ньютона имеют вид:
$$x = \bar{x}' - \frac{g(\bar{x}')}{g'(\bar{x}')} \rightarrow \text{это следующее после } \bar{x}' \text{ приближение}$$
3) Метод Ньютона обладает очень хорошей, высокой скоростью сходимости, однако если начальное приближение выбрано не очень удачно, то метод может расходиться. В таком случае делают несколько итераций по какому-то другому методу (обычно это **метод золотого сечения** – этот метод выбирают из-за его надёжности и пусть небыстрой, но тем не менее надёжной сходимости)

4) Иногда, когда вычисление $g'(x)$ может быть затруднительно, используют модификацию метода Ньютона, которая называется *«методом одной касательной»*

<u>Идея модифицированного метода Ньютона («метода одной касательной»)</u>:

С геометрической точки зрения в качестве очередного приближения x_{k+1} для корня x^* используется не точка пересечения касательной в точке x_k с осью Ox, а точка пересечения прямой, проходящей через x_k и параллельной касательной в точке x_0.

Т.е. предполагается, что берётся некоторая начальная точка x_0. В начальной точке первая итерация выполняется полноценно – так, как требуется в классическом методе Ньютона (строится касательная в точке и получается очередное приближение). Дальше же для точки x_1 вычисления проходят несколько иначе – строится секущая к графику с тем же угловым коэффициентом, что и касательная на первой итерации, т.е. это прямая, параллельная касательной с первой итерации. Таким образом получаем второе приближение и в нём (как и в последующих) идея дальнейших действий аналогична.

На каждой итерации вычислений будет **меньше**, чем в классическом методе Ньютона, но этот метод сходится **гораздо** медленнее. Поэтому на одной итерации вычислений будет **меньше**, но самих вычислений – **больше**.

В целях адаптации метода Ньютона для поиска минимума функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ приходим к методу Ньютона для решения уравнения $f'(x) = 0$ на отрезке $[a, b]$.

Расчётная формула классического метода Ньютона в таком случае будет иметь вид:

$$\bar{x} = \bar{x}' - \frac{f^{'}(\bar{x}')}{f^{''}(\bar{x}')}$$

Для модифицированного метода Ньютона расчётная формула выглядит так:

$$\bar{x} = \bar{x}' - \frac{f^{'}(\bar{x}')}{f^{''}(x_0)}, \text{где } x_0 - \text{ нач. приближение (с самой } 1-\text{ой итерации)}$$

В целях аппроксимации производных можно использовать конечно-разностные формулы:

$$f'(\bar{x}) \approx \frac{f(\bar{x}+\delta) - f(\bar{x}-\delta)}{2\delta}, \qquad \delta > 0 \text{ (достаточно малая произвольная величина)}$$

$$f''(\bar{x}) \approx \frac{f(\bar{x}-\delta) - 2f(\bar{x}) + f(\bar{x}+\delta)}{\delta^2}$$