СОДЕРЖАТЕЛЬНАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

СОДЕРЖАТЕЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА

В распоряжении работодателя имеется n работ и n исполнителей.

Стоимость выполнения i-й работы j-ым исполнителем составляет $c_{ij} \geq 0$ единиц.

Требуется распределить все работы между исполнителями так, чтобы:

1. Каждый исполнитель выполнил ровно 1 работу.
2. Общая стоимость выполнения всех работ была минимальна.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА

Введём управляемые переменные:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } i - \text{ю работу выполнит } j - \text{й исполнитель} \\ 0, \text{иначе} \end{cases} \qquad (i, j = \overline{1, n})$$

Стоимости $c_{ij},\ i, j = \overline{1, n}$ запишем в матрицу: $C = (c_{ij}),\ i, j = \overline{1, n}$, которую будем называть **матрицей стоимостей.**

Переменные $x_{ij},\ i, j = \overline{1, n}$ запишем в матрицу: $X = (x_{ij}),\ i, j = \overline{1, n}$, которую будем называть **матрицей назначений.**

Тогда:

1) Общая стоимость выполнения всех работ:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} .$$

2) Условие того, что i-ю работу выполняет ровно 1 исполнитель:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad i = \overline{1, n}.$$

3) Условие того, j-й исполнитель выполняет ровно 1 работу:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = \overline{1, n}.$$

Таким образом, **математическая постановка задачи** о назначениях приобретает следующий вид:

$$\begin{cases} f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to min \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1\,, \qquad i = \overline{1,n} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = \overline{1,n} \\ x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad i,j = \overline{1,n} \end{cases}$$

Замечание:

Иногда величины интерпретируют как прибыль, получаемую при назначении на i-ю работу j-ого работника.

В этом случае задача о назначениях является **задачей максимизации**:

$$\begin{cases} f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to max \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1\,, \qquad i = \overline{1,n} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = \overline{1,n} \\ x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad i,j = \overline{1,n} \end{cases}$$

Задачу максимизации можно свести к *эквивалентной задаче минимизации*.

Если задача о назначениях является задачей максимизации, т.е. имеет вид (1):

$$\begin{cases} f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to max \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1,n} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1,n} \\ x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i,j = \overline{1,n} \end{cases}$$

то рассмотрим эквивалентную задачу минимизации (2):

$$\begin{cases} f_1 = -f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (-c_{ij})x_{ij} \to min \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1,n} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1,n} \\ x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i,j = \overline{1,n} \end{cases}$$

которая НЕ является задачей о назначениях.

Выберем $M = \max\limits_{i,j = \overline{1,n}} \{c_{ij}\}$ и добавим его к каждому столбцу матрицы C.

Получим задачу о назначениях, эквивалентную задаче (2) и, следовательно, эквивалентную задаче (1):

$$\begin{cases} f_2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (M - c_{ij})x_{ij} \to min, \quad \text{где } M - c_{ij} \geq 0 \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1,n} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1,n} \\ x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i,j = \overline{1,n} \end{cases}$$

Данная задача уже является *задачей о назначениях* и её можно решать Венгерским методом.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ

НЕКОТОРЫЕ СООБРАЖЕНИЯ О МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ

I. ПЕРЕБОР ВСЕХ ДОПУСТИМЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Если в задаче указаны n работ и n исполнителей, то она имеет n! допустимых решений (корректных распределений работ по исполнителям).

Распределение работ по исполнителям можно задать с помощью перестановки длины n:

$$(x_1, \dots, x_n) \ ,$$

где $x_i \in \{1, \dots, n\}$ – номер работника, выполняющего i-ю работу

Число перестановок длины n равно n!

Мы заведомо отказываемся от этого подхода ввиду его вычислительной сложности.

II. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МАТРИЦЫ СТОИМОСТЕЙ

Рассмотрим следующие преобразования матрицы стоимостей C:

1. Ко всем элементам i-й строки матрицы C добавить число
$$\alpha_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$$
2. Ко всем элементам j-го столбца матрицы C добавить число
$$\beta_j \in \mathbb{R}, j = \overline{1, n}$$

Элементы полученной матрицы обозначим: $\widetilde{c_{ij}}$

Тогда: $\widetilde{c_{ij}} = c_{ij} + \alpha_i + \beta_j$

Т.е. $C = (c_{ij}) \xrightarrow{\text{преобразования (1) и (2)}} \tilde{C} = (\widetilde{c_{ij}})$

Как связаны между собой целевые функции задач о назначениях с матрицами C и $\tilde{C}$, т.е. $f_C(x)$ и $f_{\tilde{C}}(x)$?

$$f_{\tilde{C}}(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \widetilde{c_{ij}} x_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (c_{ij} + \alpha_i + \beta_j) x_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i x_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_{ij} =$$

$$= f_C(x) \ + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \sum_{i=1}^{n} x_{ij} =$$

$$= f_C(x) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i * 1 + \sum_{j=1}^{n} \beta_j * 1 =$$

$$= f_C(x) + \gamma, \qquad \text{где } \gamma = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \ \left(\text{при этом } \gamma \text{ не зависит от } x_{ij}\right)$$

Таким образом, в результате преобразований (1) и (2) получаем матрицу $\tilde{C}$, для которой:

$$f_{\tilde{C}}(x) \equiv f_C(x) + const$$

Можно сделать вывод, что opt-значения функций f_C и $f_{\tilde{C}}$ достигаются на одной и той же матрице. Это означает, что задачи о назначениях с матрицами C и $\tilde{C}$ эквивалентны.

Замечание:

Именно по причине *эквивалентности соответствующих задач* описанные выше преобразования называются **эквивалентными.**

III. СИСТЕМА НЕЗАВИСИМЫХ НУЛЕЙ

Системой независимых нулей (СНН) будем называть такой набор нулей матрицы стоимостей, никакие два нуля из которого не располагаются ни в общей для них строке, ни в общем для них столбце.

Если в матрице стоимостей зафиксирована СНН, содержащая n элементов, то opt-решение задачи о назначениях можно записать по правилу:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если в позиции } (i,j) \text{ матрицы стоимостей стоит } 0^* \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

В самом деле, т.к. $c_{ij} \geq 0$, $x_{ij} \geq 0$, то:

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \geq 0.$$

При этом $f(x_{opt}) = 0$, т.е. это минимально возможное значение f.

Таким образом, x_{opt} – действительно opt-решение задачи о назначениях.

IV. ПРИМЕРНАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ

Пункты II и III данного раздела наталкивают на следующий подход к решению задачи о назначениях:

1. В каждом столбце матрицы стоимостей выбирают наименьший элемент и вычитают его из соответствующего столбца.
2. В каждой строке матрицы стоимостей выбирают наименьший элемент и вычитают его из соответствующей строки.

В результате получаем матрицу, каждая строка и каждый столбец которой содержат хотя бы 1 нуль.

3. Строят начальную СНН:

   Просматривают столбцы текущей матрицы стоимостей (СВЕРХУ ВНИЗ, СЛЕВА НАПРАВО) в поисках ПЕРВОГО нуля (в каждом столбце), в одной строке с которым нет 0^*.

   Если такой нуль найден, то его отмечают *.
4. Если в построенной СНН n нулей, то записывают opt-решение (см. пункт III этого раздела).

   Иначе текущую СНН нужно улучшать.

Способ улучшения СНН основан на следующей идее: *некоторые нули со * исключаем из СНН, чтобы иметь возможность включить в СНН большее число нулей*.

1. Отметим столбцы, содержащие 0^*, символом “+” и будем их называть выделенными.
2. Если среди невыделенных элементов есть 0, то попробуем его включить в СНН и отметим его $0'$ (иначе нужно выполнить *дополнительные преобразования матрицы* – рассмотрим ниже).

   Если в одной строке с этим $0'$ есть 0^*, то этот 0^* нужно исключить из СНН и всем нулям из строки с текущим $0'$ запретить участвовать в СНН.

   Раз 0^* будет исключён из текущей СНН, то другие нули из столбца с этим 0^* могут потенциально попасть в СНН.
3. Снимаем выделение со столбца с 0^* и выделяем строку с $0'$.

   Если среди невыделенных элементов снова есть 0, то его нужно отметить $0'$. Если в одной строке с ним нет 0^*, то строим так называемую *L-цепочку*:

   $$\text{текущий } 0' \xrightarrow{\text{по столбцу}} 0^* \xrightarrow{\text{по строке}} 0' \xrightarrow{\text{по столбцу}} \ldots \xrightarrow{\text{по строке}} 0'$$

   Можно показать, что:

   a. L-цепочка всегда заканчивается $0'$.

   b. Для данного $0'$, в одной строке с котором нет 0^*, L-цепочка единственная.
4. Далее в пределах L-цепочки выполняются преобразования:
   a. $0^* \longmapsto 0$.
   b. $0' \longmapsto 0^*$.
   c. Снимаем все выделения, кроме 0^*.
5. Если в построенной СНН n нулей, то записывают opt-решение (см. пункт III этого раздела).
   Иначе текущую СНН продолжаем улучшать.

Если же среди невыделенных элементов 0 отсутствует, то необходимо преобразовать матрицу:

1. Найдём среди невыделенных элементов наименьший элемент $h > 0$.
2. Вычтем h из **невыделенных столбцов.**
3. Чтобы убрать появившиеся отрицательные элементы, добавим h к **выделенным строкам.**

После преобразования матрицы необходимо вернуться к пункту 2, описанному в рамках *способа улучшения СНН*.

ВЕНГЕРСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ (блок-схема)