

高等数学

高等学校教材 GAODENG
SHUXUE

下册

叶宗泽

蔡高厅 主编

tosz 制作

李士珍

才飲多沙水，長安未飲魚。
江上橫波，極目蒼天。
舒卷風吹浪打，幾時休。
雨後清波，今日得寬。
歸子在此，上曰：越名如斯，
大風播，字以爲地。
南北天竺，交一掃，
立西江石壁，亂峰如畫，
重雨，元峰出平湖。神女
座無言，萬象不爲世界。

天津大学出版社

内 容 提 要

本书系高等工业院校适用的数学教材，是在本社1987年版《高等数学》基础上重新组织编写的。全书参照高等工业院校“高等数学课程教学基本要求”，充分注意1987年版《高等数学》中的不足，并吸取多年教学中积累的经验，做到结构进一步合理，论述更简明通顺，内容愈臻完善。

该书分上、下册，下册包括多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、级数、微分方程等5章。

DV50/12

高 等 数 学 (下册)

叶宗泽 蔡高厅
邱忠文 梁立华 编

*

天津大学出版社出版
(天津大学内)
河北省邮电印刷厂印刷
新华书店天津发行所发行

*

开本：850×1168毫米 1/32 印张：12 5/8 字数：326千
1994年8月第一版 1996年9月第二次印刷
印数：10 101—16 100

ISBN 7-5618-0604-3

O·61 定价：16.50元

目 录

第八章 多元函数微分学	(1)
§ 1 多元函数的概念	(1)
一 平面点集与区域	(1)
二 多元函数的概念	(4)
三 二元函数的极限与连续性	(7)
§ 2 偏导数	(13)
一 偏导数的概念	(13)
二 高阶偏导数	(18)
§ 3 全微分及其应用	(22)
一 全微分的概念	(22)
二 全微分在近似计算中的应用	(28)
§ 4 多元复合函数微分法	(32)
一 多元复合函数微分法	(32)
二 全微分形式不变性	(39)
三 多元复合函数的高价偏导数	(40)
§ 5 隐函数微分法	(43)
一 一个方程所确定的隐函数的微分法	(43)
二 方程组所确定的隐函数的微分法	(46)
§ 6 方向导数与梯度	(52)
一 方向导数	(52)
二 梯度	(54)
§ 7 偏导数在几何上的应用	(57)
一 空间曲线的切线与法平面	(57)
二 曲面的切平面与法线	(62)

§ 8 多元函数的极值及求法.....	(66)
一 多元函数的极值及求法.....	(66)
二 条件极值——拉格朗日乘数法.....	(74)
§ 9* 二元函数的台劳公式.....	(79)
一 二元函数的台劳公式.....	(79)
二 二元函数极值充分条件的证明.....	(84)
第九章 重积分	(88)
§ 1 二重积分的概念及性质.....	(88)
一 二重积分问题的引例.....	(88)
二 二重积分的定义.....	(90)
三 二重积分的性质.....	(91)
§ 2 二重积分的计算.....	(93)
一 直角坐标系中二重积分的计算方法.....	(93)
二 极坐标系中二重积分的计算方法.....	(103)
*三 二重积分的一般变量代换	(109)
§ 3 三重积分的概念及性质.....	(112)
一 三重积分的定义.....	(112)
二 三重积分的性质.....	(113)
§ 4 三重积分的计算.....	(115)
一 直角坐标系中三重积分的计算法.....	(115)
二 柱面坐标系中三重积分的计算法.....	(121)
三 球面坐标系中三重积分的计算法.....	(123)
*四 三重积分的一般变量代换	(127)
§ 5 重积分的应用.....	(130)
一 几何方面的应用.....	(130)
二 物理、力学方面的应用.....	(134)
第十章 曲线积分及曲面积分	(140)

§ 1	第一类曲线积分	(140)
一	第一类曲线积分的概念及性质	(140)
二	第一类曲线积分的计算	(143)
§ 2	第二类曲线积分	(146)
一	矢量场的概念	(147)
二	第二类曲线积分的概念及性质	(147)
三	第二类曲线积分的计算法	(151)
四	第一、二类曲线积分之间的关系	(158)
§ 3	格林公式	(159)
一	格林 (Green) 公式	(160)
二	平面曲线积分与路径无关的条件	(168)
§ 4	第一类曲面积分	(174)
一	第一类曲面积分的概念及性质	(174)
二	第一类曲面积分的计算法	(176)
§ 5	第二类曲面积分	(178)
一	有向曲面	(178)
二	第二类曲面积分的概念及性质	(179)
三	第二类曲面积分的计算法	(184)
§ 6	高斯公式 曲面积分与曲面无关的条件	(189)
一	高斯 (Gauss) 公式	(189)
二	曲面积分与曲面无关的条件	(194)
§ 7	斯托克斯公式 空间曲线积分与路径无关的条件	(196)
一	斯托克斯 (Stokes) 公式	(196)
二	空间曲线积分与路径无关的条件	(201)
§ 8	矢量场的散度与旋度	(202)
一	矢量场的散度	(202)
二	矢量场的旋度	(205)
三	哈密尔顿 (Hamilton) 算子	(209)

第十一章 级数..... (213)

§ 1 数项级数..... (213)

一 无穷级数的基本概念..... (213)

二 级数的基本性质..... (216)

三 正项级数敛散性的判别法..... (220)

四 任意项级数敛散性的判别法..... (231)

§ 2 幂级数..... (240)

一 幂级数的收敛区间与收敛半径..... (241)

二 幂级数的性质..... (247)

§ 3 函数的幂级数展开..... (255)

一 台劳级数..... (255)

二 函数展开成幂级数..... (258)

三 台劳级数的应用..... (265)

§ 4* 函数项级数的一致收敛性和一致收敛级数的基本性质..... (274)

一 函数项级数的一致收敛性..... (276)

二 一致收敛级数的基本性质..... (281)

§ 5 傅立叶级数..... (286)

一 三角函数系的正交性..... (288)

二 傅立叶级数..... (290)

三 正弦级数与余弦级数..... (298)

四 一般周期函数的傅立叶级数..... (304)

五* 傅立叶级数的复数形式..... (310)

第十二章 微分方程..... (315)

§ 1 微分方程的基本概念..... (315)

一 引例..... (315)

二 微分方程的基本概念..... (318)

§ 2 一阶微分方程..... (320)

一	可分离变量方程.....	(320)
二	齐次方程.....	(324)
三	一阶线性方程.....	(327)
四	全微分方程.....	(332)
五	一阶微分方程应用举例.....	(338)
*六	一阶微分方程的近似解法	(345)
§ 3	可降阶的高阶微分方程.....	(350)
一	$y^{(n)} = f(x)$ 型	(351)
二	$y'' = f(x, y')$ 型	(352)
三	$y'' = f(y, y')$ 型	(353)
四	可降阶的高阶微分方程应用举例.....	(354)
§ 4	线性微分方程解的结构.....	(357)
一	线性齐次微分方程解的结构.....	(358)
二	线性非齐次微分方程解的结构.....	(360)
§ 5	常系数线性微分方程.....	(361)
一	常系数线性齐次微分方程.....	(361)
二	常系数线性非齐次微分方程.....	(366)
三	常系数线性微分方程的应用举例.....	(375)
§ 6	变系数线性微分方程.....	(382)
一	二阶变系数线性齐次方程.....	(383)
二	二阶变系数线性非齐次方程.....	(386)
三	欧拉方程.....	(388)
§ 7	常微分方程的幂级数解法简介.....	(390)

第八章 多元函数微分学

到现在为止，本书研究过的函数都是仅有一个自变量的函数，叫做一元函数或单元函数。在自然科学与工程技术中的许多问题，往往是与多种因素有关，而这些因素之间在数量方面又存在着相互联系、相互制约的规律，这种客观存在的规律反映到数学上，就是一个变量依赖于多个变量的关系，这就是本章将要介绍的多元函数微分学的内容。

本章以二元函数为主，讨论它的微分法和应用，而二元以上的函数则可以类推。多元函数微分学是在一元函数微分学的基础上发展起来的。它的一些基本概念及研究问题的思想方法虽然与一元函数的情形相仿，但是由于自变量个数的增加，将会产生一些新的问题。因此学习本章内容时应注意与一元函数对照，比较它们的异同，掌握多元函数的特点。

§ 1 多元函数的概念

一 平面点集与区域

在讨论一元函数的有关概念时，要考虑变量的变化范围，经常用到区间与邻域的概念。由于研究二元函数的需要，我们首先介绍平面点集与区域的基本知识，把邻域的概念推广到平面上。

当考虑两个变量 x 与 y 时， x 与 y 的一组值 (x, y) 可以看作平面上一点 P ， x 、 y 为该点的直角坐标，于是两个变量 x 与 y 的变化范围（或取值范围）就相当于平面上某个点集。数学中常用 D 、 E 、 F 、…等大写英文字母表示平面上的点集。例如

$$D = \{(x, y) | x > 0, y > 0\},$$

$$E = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

D 表示平面上所有满足 $x > 0$ 、 $y > 0$ 的点 (x, y) 所组成的集合，即由直角坐标平面上第一象限的一切点所组成的集合。 E 表示平面上所有满足 $x^2 + y^2 \leq 1$ 的点 (x, y) 所组成的集合，即由圆心在原点的单位圆内及圆周上的一切点所组成的集合。

1 邻域

设 $P_0(x_0, y_0)$ 是平面上一点， δ 是某一正数，那么点集 $\{(x, y) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2\}$ 称为点 P_0 的 δ 邻域，记为 $U(P_0, \delta)$ ，即

$$U(P_0, \delta) = \{(x, y) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2\}.$$

在几何上，邻域 $U(P_0, \delta)$ ($\delta > 0$)就是平面上以点 $P_0(x_0, y_0)$ 为圆心、 δ 为半径的圆内的点 $P(x, y)$ 的全体。

δ 称为邻域 $U(P_0, \delta)$ 的半径。如果不需要特别强调邻域的半径 δ ，就用 $U(P_0)$ 来表示 P_0 的某一邻域。

2 区域

设 E 为平面上的点集，点 $P \in E$ 。如果存在点 P 的某个邻域 $U(P)$ ，使 $U(P)$ 内的点都属于 E ，则称 P 为 E 的一个内点（见图8-1）。纯由内点组成的点集称为开集。

例如点集 $E_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ 中的每一个点都是 E_1 的内点，因此 E_1 为开集。

设 E 为平面上的点集，如果点 P 的任意邻域内既有属于 E 的点，也有不属于 E 的点，则称 P 为 E 的一个边界点（见图8-2）。至于点

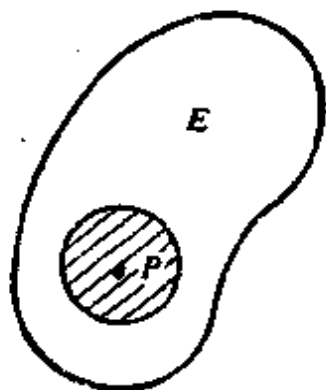


图 8-1

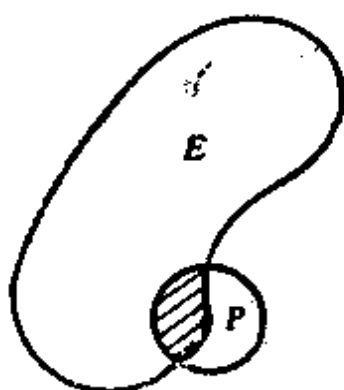


图 8-2

P 本身可以属于 E ，也可以不属于 E 。点集 E 的边界点的全体便称为 E 的边界。

例如上例的点集 E_1 ，圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 上的每一点都是 E_1 的边界点，此圆周是 E_1 的边界。

设 E 是开集，如果对于 E 内的任意两点 P_1 与 P_2 ，都能用折线把它们连接起来，而该折线上的点都属于 E ，则称开集 E 是连通的。连通的开集就称为区域或开区域。开区域连同它的边界一起称为闭区域。

例如， $\{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ ， $\{(x, y) | x - y > 0\}$ 都是区域。 $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ ， $\{(x, y) | x - y \geq 0\}$ 都是闭区域。

如果存在正数 M ，使得对于区域 D 中任何点 $P(x, y)$ ，皆有 $|x| \leq M$ ， $|y| \leq M$ ，就称区域 D 是有界的，否则区域就称为无界的。

例如 $\{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ 是有界区域，而 $\{(x, y) | x - y > 0\}$ 是无界区域。

3 聚点

设 E 是平面上的点集， P 是平面上一点，它可以属于 E ，也可以不属于 E 。如果在点 P 的任意邻域内总有无限多个点属于点集 E ，则称 P 为点集 E 的聚点。

显然，如果 E 是一个区域，则 E 的内点及边界点都是 E 的聚点。

又如，点集 $D = \{(x, y) | 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ ，点 $O(0, 0)$ 既是 D 的边界点又是 D 的聚点，但是 O 不属于 D 。又圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 上的每一点既是 D 的边界点，也是 D 的聚点，然而这些聚点都属于 D 。

4 n 维空间

在数轴上的点 M 与实数 x 是一一对应的，那么实数的全体就表示数轴上一切点的集合，记为 R^1 ，叫做一维空间。类似地，在平面上建立直角坐标系后，平面上的点 M 与二元有序数组 (x, y) 是一一对应的，那么二元有序数组 (x, y) 的全体就表示平面上一切

点的集合，记为 R^2 ，叫做二维空间。在空间中建立直角坐标系后，空间中的点 M 与三元有序数组 (x, y, z) 是一一对应的，那么三元有序数组 (x, y, z) 的全体就表示空间中一切点的集合，记为 R^3 ，叫做三维空间。如此加以推广，我们把 n 元有序数组 (x_1, x_2, \dots, x_n) 的全体所组成的集合记为 R^n ，叫做 n 维空间，而每一个 n 元有序数组 (x_1, x_2, \dots, x_n) 表示 n 维空间中一个点 M ，常记为 $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，数 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 叫做点 M 的第 i 个坐标。

设点 $M(x_1, x_2, \dots, x_n), N(y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n$ ，我们规定 M, N 两点间的距离为

$$|MN| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}.$$

显然，当 $n=1, 2, 3$ 时，上式就是解析几何中在直线上、平面上、空间中两点间的距离公式。

有了两点间的距离规定之后，就可以把平面点集中邻域的概念推广到 R^n 中去。设 $P_0 \in R^n$ ， δ 是某一正数，那么 R^n 中的点集

$$U(P_0, \delta) = \{P \mid |PP_0| < \delta, P \in R^n\}$$

就称为点 P_0 的 δ 邻域。有了邻域的概念，就可以定义 R^n 中点集的内点、边界点、区域、聚点等概念，这里不一一赘述。

二 多元函数的概念

我们着重介绍二元函数的概念。三元或更多元的函数，可以作类似的推广。

在很多具体问题的数量方面，经常会遇到一个变量依赖于多个变量的关系，下面先看几个例子。

例1 设由电阻 R_1, R_2 并联的电路，其总电阻为 R 。据电学知识可知 R 与 R_1, R_2 之间具有以下关系

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

对于点集 $A = \{(R_1, R_2) \mid R_1 > 0, R_2 > 0\}$ 中的每一点 $P(R_1, R_2)$ ，通过上式都有一个确定的数 R 与之对应。

例2 中心在原点 $O(0, 0)$ ，在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的半轴依次

$T \mid p > 0, T > T_0\}$ 上的函数, 其定义域是区域 $p > 0, T > T_0$.

从映射的概念看, 二元函数 f 实质上就是一个由点集 A 到数集 B 的映射, 数 z 就是点 $P(x, y)$ 在映射 f 下的象, 而点 $P(x, y)$ 是 z 的原象.

类似地可以定义三元函数 $u = f(x, y, z)$ 及三元以上的函数. 一般地, 如果把函数定义中的平面点集 A 换成 n 维空间 R^n 中的点集 A , 则可类似地定义 n 元函数 $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 也可记为 $u = f(P)$, 这里点 $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$. 显然, $n = 1$ 时, 就得到一元函数. 二元及二元以上的函数统称为多元函数.

设已给二元函数 $z = f(x, y)$, 其定义域为 D . 对任意取定的点 $P_0(x_0, y_0) \in D$, 对应的函数值记为 $z_0 = f(x_0, y_0)$, 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中就确定了一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$. 在一般情况下, 当点 $P(x, y)$ 遍取函数定义域 D 的一切点时, 对应的点 $M(x, y, z)$ 的全体组合成一个空间点集 $\{(x, y, z) \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$, 这个点集称为二元函数的图形, 其图形一般是一张曲面 (见图 8-3).

如例 2 中的二元函数

$$z = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

的图形是中心在原点, 三个半轴为 a, b, c 的上半椭球面 (见图 8-4).

在上面的函数定义中, 规定对点集 A 中的每一点 P , 通过确定的规律 f 都只有唯一的实数 z 与之对应, 这样定义的函数是单值函数. 有时在点集 A 中有这样的点 P , 它通过 f 有多个实数 z 与之对应, 例如由方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

在闭区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ 上, 除在圆周 $x^2 + y^2 = R^2$ 上的点而外对任意的点 $P(x, y) \in D$, 通过上述方程有两个实数 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 与 $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 与之对应, 这时我们

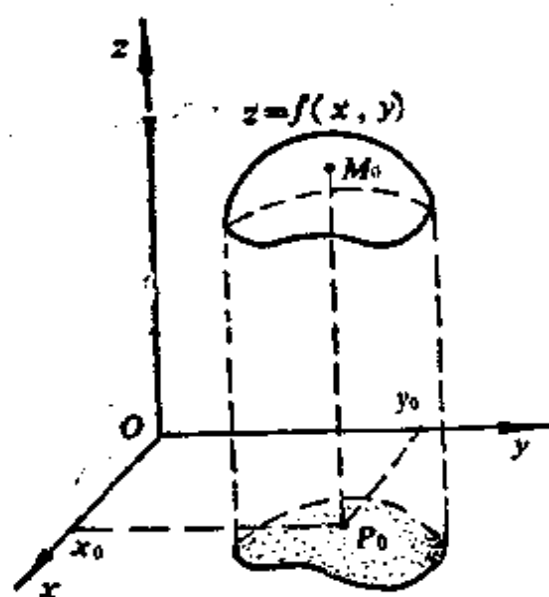


图 8-3

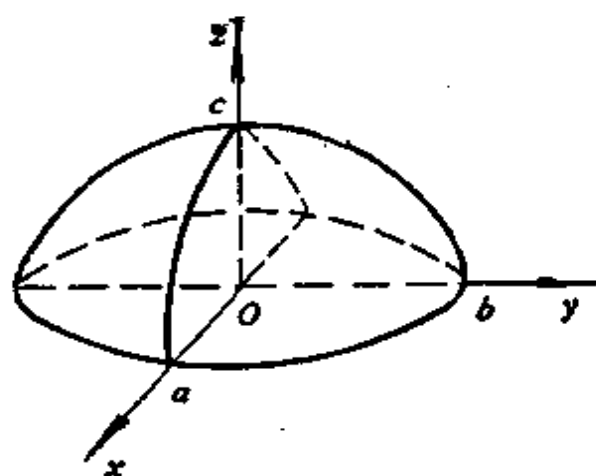


图 8-4

称由该方程确定了多值函数。通常把多值函数分成几个单值函数来讨论，如上例可以分为两个单值函数：

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \text{ 与 } z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

以后如不作特别声明，本书所讨论的函数都是指单值函数。

三 二元函数的极限与连续性

1 二元函数的极限

设函数 $z = f(x, y)$ 定义在平面点集 E 上，点 $P_0(x_0, y_0)$ 为点集 E 的聚点，我们来讨论 $P(x, y) \rightarrow P_0(x_0, y_0)$ (其中 $P \in E$)，即 $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ 时函数 $z = f(x, y)$ 的极限。

这里必须指出， $P \rightarrow P_0$ 是指点 P 以任意的方式趋于 P_0 ，亦即两点 P 与 P_0 之间的距离趋于零，也就是

$$|P_0 P| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \rightarrow 0.$$

其中 $P \in E$ ，因为 P_0 是点集 E 的聚点，那么在点 P_0 的任意邻域内都有属于 E 的无限多个点，所以点 P 以任意方式趋于 P_0 总是可能的。

如果在点 $P(x, y) \rightarrow P_0(x_0, y_0)$ 的过程中， $P(x, y)$ 所对应的函数值 $f(x, y)$ 无限接近于一个常数 A ，就说当 $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ 时，函数 $z = f(x, y)$ 以 A 为极限。下面仿照一元函数极限的定义，

用“ $\varepsilon-\delta$ ”的语言方式来描述二元函数的极限.

定义 设二元函数 $z=f(x, y)$ 定义在点集 E 上, $P_0(x_0, y_0)$ 是 E 的聚点, A 为一常数. 如果对于任意给定的正数 ε , 都存在正数 δ , 使得满足不等式

$$0 < |PP_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$$

的一切点 $P(x, y) \in E$, 恒有

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

成立, 则称当 $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ 时, 函数 $z=f(x, y)$ 以 A 为极限, 记为

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A,$$

或 $f(x, y) \rightarrow A (\rho = |PP_0| \rightarrow 0)$.

二元函数的极限也叫做二重极限.

例 4 证明 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left[(x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \right] = 0$.

证明 由于

$$|(x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - 0| =$$

$$|x^2 + y^2| \cdot \left| \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \right| \leq x^2 + y^2,$$

因此, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \sqrt{\varepsilon} > 0$, 当

$$0 < \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta$$

时, 恒有

$$\left| (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq x^2 + y^2 < \varepsilon$$

成立, 依二元函数极限的定义, 证得

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left[(x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \right] = 0.$$

根据二元函数极限的定义，所谓二重极限

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A,$$

其中 A 为常数，系指点 $P(x, y) \in E$ 按任何方式趋近于 $P_0(x_0, y_0)$ 时，函数 $f(x, y)$ 都无限接近于同一常数 A 。如果当 $P(x, y)$ 以不同的方式趋近于 $P_0(x_0, y_0)$ 时，函数 $f(x, y)$ 趋近于不同的常数，就可以断定这函数的极限不存在。而且当 $P(x, y)$ 以某一种特殊的方式趋近于 $P_0(x_0, y_0)$ 时，即使函数 $f(x, y)$ 无限接近于某一常数，也不能据此断定函数的极限存在。请看下面的例子。

例5 讨论当 $P(x, y) \rightarrow O(0, 0)$ 时，函数

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

的极限是否存在。

解 显然，如果点 $P(x, y)$ 沿着过原点 $O(0, 0)$ 的直线 $y = kx$ 趋近于点 $O(0, 0)$ 时，则有

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

其值因 k 而异，这与极限定义中 $P(x, y)$ 按任何方式趋近于 $P_0(x_0, y_0)$ 时， $f(x, y)$ 都无限接近于同一数值的要求相违背，因此当 $P(x, y) \rightarrow O(0, 0)$ 时，函数的极限不存在。

如果 R^n 空间中的 n 元函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，看作 n 维空间点 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的函数 $f(P)$ ，那么 n 元函数的极限定义可叙述如下。

定义 设 n 元函数 $u = f(P)$ 定义在 R^n 中的点集 E 上， P_0 为 E 的聚点， A 为一常数。如果对于任意给定的正数 ε ，都存在正数 δ ，使得满足不等式

$$0 < |PP_0| < \delta$$

的一切点 $P \in E$, 恒有

$$|f(P) - A| < \varepsilon$$

成立, 则称当 $P \rightarrow P_0$ 时, 函数 $f(P)$ 以 A 为极限, 记为

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A.$$

这是一种统一的书写形式, 当 $n=1$ 时, 就得一元函数的极限定义; 当 $n=2$ 时, 就得到二元函数的极限定义; 依此类推. 因此关于一元函数的极限运算法则也可以推广到多元函数方面. 即

$$\text{设 } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} g(x, y) = B,$$

则

$$(1) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \{f(x, y) \pm g(x, y)\} = A \pm B,$$

$$(2) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \{f(x, y) \cdot g(x, y)\} = A \cdot B;$$

$$(3) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{A}{B}, \quad (B \neq 0).$$

例 6 求极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin(xy)}{x}$.

解 因为当 $(x, y) \rightarrow (0, 2)$ 时, $xy \rightarrow 0$, 从而有

$$\frac{\sin(xy)}{xy} \rightarrow 1,$$

所以

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin(xy)}{x} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \left(\frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y \right) \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} y = 2. \end{aligned}$$

2 二元函数的连续性

有了二元函数极限的概念，仿照一元函数连续性的定义，不难得出二元函数连续性的定义。

定义 设二元函数 $z=f(x, y)$ 定义在点集 E 上，点 $P_0(x_0, y_0)$ 是 E 的聚点，且 $P_0 \in E$ ，如果

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0), \quad (1.1)$$

则称二元函数 $f(x, y)$ 在 P_0 点处连续。

如果函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 无定义；或虽有定义；但当 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 时函数 $f(x, y)$ 的极限不存在；或虽极限存在，但极限值不等于该点处的函数值，则称函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处间断，并称 $P_0(x_0, y_0)$ 为函数 $f(x, y)$ 的间断点。

若记 $x-x_0=\Delta x$ ， $y-y_0=\Delta y$ ，则(1.1)式相当于

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0).$$

设函数 $f(x, y)$ 的定义域 D 是开区域或闭区域，如果函数 $f(x, y)$ 在 D 上各点处都连续，则称函数 $f(x, y)$ 在域 D 上连续，或称 $f(x, y)$ 是域 D 上的连续函数。

例7 设

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{当 } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{当 } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

试讨论 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的连续性。

解 在本节的例5已经讨论过，当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时，函数 $f(x, y)$ 的极限不存在，所以点 $(0, 0)$ 是该函数的一个间断点。

二元函数的间断点可以组成一条曲线，如函数

$$z = \frac{1}{y-x^2},$$

在抛物线 $y=x^2$ 上没有定义，因此该抛物线上各点都是函数的间断

点.

前面已经指出,一元函数的极限运算法则可以推广到多元函数的极限运算中来,那末根据这些法则和二元函数连续性的定义,不难证明二元连续函数的和、差、积、商(分母不等于零)也都是连续函数.二元函数的复合函数也有与一元函数的复合函数相类似的性质:如果 $u=\varphi(x, y)$, $v=\psi(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续, $u_0=\varphi(x_0, y_0)$, $v_0=\psi(x_0, y_0)$, 又 $f(u, v)$ 在点 (u_0, v_0) 处连续, 则复合函数 $f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ 在点 (x_0, y_0) 处连续.

用 x, y 的一个数学式子所表示, 而这个式子是由 x, y 的基本初等函数及常数经过有限次四则运算与复合步骤而构成的函数称为二元初等函数. 例如

$$\sin(x^2+y), \ln(1+x^2+y^2), e^{x^2y} \cdot \frac{x^2-y^2}{2\arcsin(x+y)},$$

都是初等函数. 根据以上所述二元初等函数在其定义域内是连续的.

类似于在闭区间上一元连续函数的性质, 在有界闭域上多元连续函数具有以下性质:

(1) 设多元函数 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则它在 D 上必定取得最大值和最小值, 也就是说在 D 上至少存在一点 P_1 与一点 P_2 , 使得 $f(P_1)$ 是函数 $f(P)$ 在 D 上的最小值, 而 $f(P_2)$ 是函数 $f(P)$ 在 D 上的最大值, 即对于任一点 $P \in D$, 皆有

$$f(P_1) \leq f(P) \leq f(P_2).$$

(2) 设多元函数 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续, m 和 M 分别是函数 $f(P)$ 在 D 上的最小值和最大值, $m < M$. 又设 μ 是介于 m 与 M 之间的任一实数, $m < \mu < M$, 则在 D 上至少存在一点 P_0 , 使得 $f(P_0) = \mu$.

*(3) 设多元函数 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则它在 D 上必定一致连续, 即对于任意给定的正数 ε , 总存在正数 δ , 使得对于 D 上的任意两点 P_1 及 P_2 , 只要满足 $|P_1 P_2| < \delta$ 时, 就都有

$$|f(P_1) - f(P_2)| < \varepsilon$$

成立.

§ 2 偏导数

一 偏导数的概念

在一元函数中, 导数概念描述了函数对于自变量的变化率. 而多元函数的自变量不止一个, 函数关系也比较复杂. 在这里, 我们首先考虑多元函数关于其中一个自变量的变化率, 即讨论只有一个自变量变化, 而其余自变量固定不变(视为常量)时函数的变化率. 如下面的例子.

例1 一定量的理想气体的体积 V 、压强 p 和绝对温度 T 之间的函数关系为

$$V = R \frac{T}{p},$$

其中 R 为常数. 当温度 T 和压强 p 两个因素同时变化时, 体积 V 变化的情况比较复杂, 通常分成两种特殊情形进行研究:

(1) 等温过程 即温度一定($T = \text{常数}$), 考虑因压强 p 的变化引起的体积 V 的变化率, 从而得到

$$\frac{dV}{dp} = -R \frac{T}{p^2}.$$

(2) 等压过程 即压强一定($p = \text{常数}$), 考虑因温度 T 的变化引起的体积 V 的变化率, 从而得到

$$\frac{dV}{dT} = R \frac{1}{p}.$$

这样分别考虑以上两种特殊的变化, 有助于对复杂的整体过程的综合研究. 上面所说的只让一个自变量变动, 而其余自变量保持不变的方法是研究多元函数的常用手段. 下面以二元函数 $z = f(x, y)$

为例, 只有自变量 x 变化, 而自变量 y 固定, 这时 z 就是 x 的一元函数, 可以仿照一元函数导数的概念, 引进二元函数 $z = f(x, y)$ 对于 x 的偏导数的定义.

定义 设二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某一邻域 $U(P_0, \delta)$ 内有定义, 当自变量 y 固定在 y_0 , 而自变量 x 在 x_0 点处有增量 Δx 时 ($x_0 + \Delta x \in U(P_0, \delta)$), 函数相应的增量, 记为 $\Delta_x z$, 即

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

称为函数 z 对 x 的偏增量. 如果极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad (2.1)$$

存在, 则称此极限为函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处对

x 的偏导数, 记为 $f_x(x_0, y_0)$, $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$, $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$,

$z_x \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$, 即

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

同样, 如果极限

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \quad (2.2)$$

存在, 则称此极限为函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处对

y 的偏导数, 记为 $f_y(x_0, y_0)$, $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$, $\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$,

$z_y \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$, 即

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sin(xy) + xy \cos(xy) + e^{x+y},$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=1 \\ y=0}} = e.$$

同理，求 z 对 y 的偏导数时，将 x 看作常量，而 z 只是 y 的一元函数，按一元函数微分法，得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos(xy) + 2e^{x+y}.$$

例3 设 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ，求证

$$x \frac{\partial r}{\partial x} + y \frac{\partial r}{\partial y} + z \frac{\partial r}{\partial z} = r.$$

证明 把 y 和 z 看作常量，得

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r};$$

类似地，有 $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$ ， $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$ ，于是有

$$x \frac{\partial r}{\partial x} + y \frac{\partial r}{\partial y} + z \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r} = r. \quad \text{证毕.}$$

例4 设 $z = x^y$ ($x > 0$, $x \neq 1$)，求证

$$\frac{x}{y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x} \frac{\partial z}{\partial y} = 2z.$$

证明 由于

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x,$$

所以

$$\frac{x}{y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y} \cdot yx^{y-1} + \frac{1}{\ln x} \cdot x^y \ln x$$

$$= x^2 + x^2 = 2x.$$

证毕.

$$\text{例 5 设 } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{当 } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{当 } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

求偏导数 $f_x(0, 0)$ 及 $f_y(0, 0)$.

$$\text{解 } f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+\Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} = 0.$$

值得指出的是, 在一元函数中, 如果函数在某点处可导, 则它在该点处必定连续. 但是对多元函数来说, 即使各个偏导数在某点处都存在, 也不能保证函数在该点处连续, 例如上面例 5 中的函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点处两个偏导数 $f_x(0, 0)$, $f_y(0, 0)$ 都存在, 但在 § 1 例 7 中已经证明它在点 $(0, 0)$ 处是不连续的. 这是因为 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的两个偏导数存在只能保证动点 (x, y) 沿着平行于坐标轴的方向趋于点 $(0, 0)$ 时, 函数 $f(x, y) \rightarrow f(0, 0)$, 但不能保证动点 (x, y) 按任何方式趋于点 $(0, 0)$ 时, 函数 $f(x, y)$ 都趋于 $f(0, 0)$.

二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的偏导数有以下简单的几何意义.

图 8-5 中的曲面表示函数 $z = f(x, y)$ 的图形, $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 为曲面上一点.

当 $y = y_0$ 时, 曲面 $z = f(x, y)$ 与平面 $y = y_0$ 的交线方程为

$$\begin{cases} z = f(x, y), \\ y = y_0. \end{cases}$$

此交线在点 $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 处的切线对 Ox 轴的斜率为

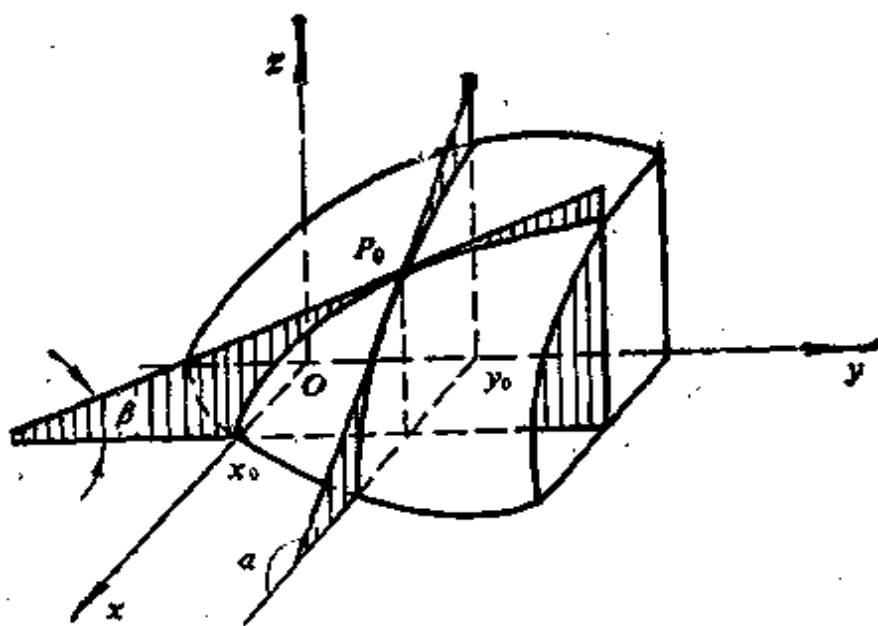


图 8-5

$$\operatorname{tg} \alpha = \left. \frac{df(x, y_0)}{dx} \right|_{x=x_0} = f_x(x_0, y_0).$$

同理，曲线 $\begin{cases} z = f(x, y), \\ x = x_0, \end{cases}$ 在点 $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

处的切线对 Oy 轴的斜率为

$$\operatorname{tg} \beta = \left. \frac{df(x_0, y)}{dy} \right|_{y=y_0} = f_y(x_0, y_0).$$

要注意的是，对一元函数的导数记号 $\frac{dy}{dx}$ ，可以看作函数的微

分 dy 与自变量的微分 dx 之商，而多元函数的偏导数记号 $\frac{\partial z}{\partial x}$ ，

$\frac{\partial z}{\partial y}$ 是一个整体记号，不能看作 ∂z 与 ∂x ， ∂z 与 ∂y 之商，事实上 ∂z ， ∂x 与 ∂y 是没有定义的。

二 高阶偏导数

设二元函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 上具有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x, y).$$

一般地说, 这两个偏导数 $f_x(x, y)$ 、 $f_y(x, y)$ 仍然是 x 、 y 在域 D 上的二元函数. 如果 $f_x(x, y)$ 、 $f_y(x, y)$ 也有偏导数, 例如, 若极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_x(x + \Delta x, y) - f_x(x, y)}{\Delta x}$$

存在, 则称此极限值为二元函数 $z = f(x, y)$ 对 x 的二阶偏导数, 记为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y).$$

用类似的方法可以定义 z 对 y 的二阶偏导数, 记为

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y),$$

而记号

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x, y),$$

称为二阶混合偏导数.

一般地, 二阶偏导数也是 x 、 y 的二元函数, 仿照上面的极限式, 可以定义出 $z = f(x, y)$ 的三阶、甚至更高阶的偏导数. 二阶及二阶以上的偏导数称为高阶偏导数.

例 6 设, $z = x^3 y + 3x^2 y^3 - xy + 2$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 、 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 、

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$
、 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y + 6xy^3 - y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + 9x^2y^2 - x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy + 6y^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 18x^2y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3x^2 + 18xy^2 - 1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 3x^2 + 18xy^2 - 1.$$

在上例中可以看到，两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 、 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 与求偏导数的先后次序不同，但是它们相等。这并非必然，例如函数

$$z = f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{当 } x^2 + y^2 \neq 0 \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } x^2 + y^2 = 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

求 $f_{xy}(0, 0)$ 、 $f_{yx}(0, 0)$ 。

在 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时，容易求得

$$f_x(x, y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$f_y(x, y) = \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

在 $x^2 + y^2 = 0$ 时，有

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

$$\begin{aligned} f_{xy}(0, 0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f_x(0, 0 + \Delta y) - f_x(0, 0)}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y \left[\frac{-(\Delta y)^4}{(\Delta y)^2} \right]}{\Delta y} = -1. \end{aligned}$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} = 0,$$

$$\begin{aligned}
 f_{yz}(0,0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_y(0+\Delta x, 0) - f_y(0, 0)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y \frac{(\Delta x)^4}{(\Delta x)^6}}{\Delta x} = 1,
 \end{aligned}$$

因此 $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$.

上例说明二元函数的两个混合偏导数相等是需要一定条件的.

定理 如果函数 $z = f(x, y)$ 的两个混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 及

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 在点 (x, y) 的某邻域内连续, 则有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

即二阶混合偏导数与求导的次序无关. (证明略)

这个定理可以推广到 n 元函数高阶混合偏导数的情形. 例如, 三元函数 $u = f(x, y, z)$ 的六个三阶混合偏导数:

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}, \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x \partial z}, \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x}, \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z \partial y}, \\
 &\frac{\partial^3 u}{\partial z \partial x \partial y}, \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial y \partial x}
 \end{aligned}$$

如果它们都连续就相等.

例 7 验证函数 $u = \frac{1}{r}$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

证明
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x}{r^5} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}.$$

同理可求得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}.$$

因此

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ &= -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3r^2}{r^5} = 0. \end{aligned}$$

§ 3 全微分及其应用

一 全微分的概念

在上册一元函数微分学中, 已经知道一元函数 $y = f(x)$ 的微分, 当 $f'(x) \neq 0$ 时, 它是函数增量 Δy 的线性主部. 用函数的微分 dy 来近似代替函数的增量 Δy , 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 其差值是 Δx 的高阶无穷小.

对于多元函数, 也有类似的情形.

设二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 的某邻域内有定义, 当自变量在点 (x, y) 处分别有增量 Δx 与 Δy 时, 函数的增量

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

称为 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 对应于增量 Δx 、 Δy 的全增量.

一般地说, 全增量 Δz 的计算比较复杂, 类似于一元函数, 希望能分离出自变量的增量 Δx 、 Δy 的线性函数来作为它的近似值.

例 1 设有一块矩形的金属薄板, 长为 x , 宽为 y . 金属薄板受热膨胀, 长增加 Δx , 宽增加 Δy , 求金属薄板的面积增加了多少?

解 记金属薄板的面积为 S , 则

$$S = xy.$$

由于金属薄板的长、宽分别增加 Δx 和 Δy ，故面积 S 增加了

$$\begin{aligned}\Delta S &= (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy \\ &= y\Delta x + x\Delta y + \Delta x \cdot \Delta y.\end{aligned}$$

从二元函数的观点看，函数 $S = xy$ 的全增量 ΔS 由 $y\Delta x$ 、 $x\Delta y$ 及 $\Delta x \cdot \Delta y$ 三项组成（见图8-6）。当 Δx 、 Δy 很小时，这三部分都很小，而第三部分 $\Delta x \cdot \Delta y$ 则更小，当 $\Delta x \rightarrow 0$ ， $\Delta y \rightarrow 0$ 时，第三项 $\Delta x \cdot \Delta y$ 是比 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ 高阶的无穷小，因此，在计算 ΔS 时，起主要作用的是前两项，略去第三项，便得到 ΔS 的一个较简单的近似式

$$\Delta S \approx y\Delta x + x\Delta y.$$

当金属薄板的长 x 、宽 y 为已知常数时，面积的增量 ΔS 只是 Δx 和 Δy 的函数，若记 $y = A$ ， $x = B$ ，则金属薄板面积的增量可以表示为

$$\Delta S = A\Delta x + B\Delta y + \omega,$$

其中 $\omega = \Delta x \cdot \Delta y$ 。这里就与一元函数类似，将函数 $S = xy$ 的全增量 ΔS 分离出关于 Δx 、 Δy 的线性部分和对于 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ 的高阶无穷小部分 ω 。

对一般的二元函数有下面全微分的定义。

定义 设二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 的某邻域有定义。如果 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 的全增量

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

可表示为

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \omega, \quad (3.1)$$

其中 A 、 B 不依赖于 Δx 、 Δy 而仅与 x 、 y 有关， $\omega = \omega(\Delta x, \Delta y)$ ，当 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0$ 时， ω 是比 ρ 高阶的无穷小，

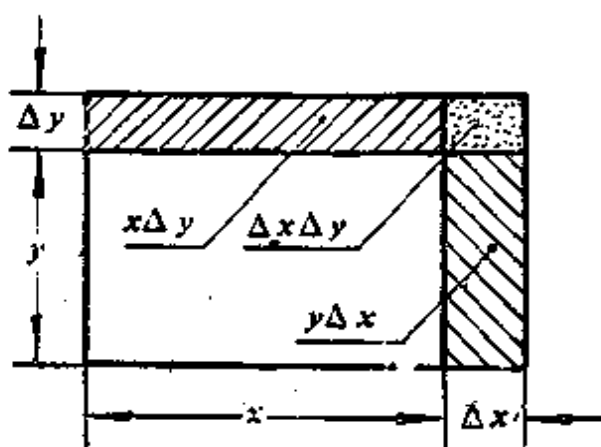


图 8-6

则称函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微, 而 $A\Delta x + B\Delta y$ 称为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处的全微分, 记为 dz 或 $df(x, y)$, 即

$$dz = df(x, y) = A\Delta x + B\Delta y.$$

如果函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 内各点处都可微, 则称这函数在区域 D 内可微.

在本章 § 2 例 5 曾经指出, 对多元函数, 即使各偏导数在某点处都存在, 也不能保证函数在该点处连续. 但是, 如果函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微, 由 (3.1) 式可得

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} (A\Delta x + B\Delta y + \omega) = 0,$$

从而有

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f(x + \Delta x, y + \Delta y) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} [f(x, y) + \Delta z] = f(x, y).$$

因此, 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处连续.

下面进一步讨论函数 $z = f(x, y)$ 可微的必要条件与充分条件.

定理 1 (必要条件) 如果函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微, 则该函数在点 (x, y) 处的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 必定存在, 而且 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处的全微分为

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y.$$

证明 由于函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 处可微, 那么对点 P 的某邻域 $U(P)$ 内的任意一点 $(x + \Delta x, y + \Delta y)$, (3.1) 式恒成立, 即有

$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = A\Delta x + B\Delta y + \omega(\Delta x, \Delta y)$, 其中 Δx 、 Δy 是任意增量, 特别是当 $\Delta y = 0$ 时, 上式也应成立, 即

如果考虑点 $(\Delta x, \Delta y)$ 按照 $\Delta y = \Delta x$ 的方式趋向于点 $(0, 0)$, 这时有

$$\frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \frac{\Delta x \cdot \Delta x}{(\Delta x)^2 + (\Delta x)^2} = \frac{1}{2},$$

显然当 $\rho \rightarrow 0$ 时, 上式不能趋于 0, 这就表明: 当 $\rho \rightarrow 0$ 时, 差值

$$\Delta z - (f_x(0, 0)\Delta x + f_y(0, 0)\Delta y)$$

并不是一个比 ρ 高阶的无穷小, 故函数 $z = f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处不可微.

由定理 1 及例 2 说明, 函数的偏导数存在只是函数可微的必要条件, 而不是充分条件. 下面将证明函数可微的一个充分条件.

定理 2 (充分条件) 如果函数 $z = f(x, y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$

$= f_x(x, y)$ 、 $\frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x, y)$ 在点 (x, y) 处连续, 则函数 $z = f(x, y)$ 在该点处可微.

证明 函数 $z = f(x, y)$ 的偏导数 $f_x(x, y)$ 、 $f_y(x, y)$ 在点 (x, y) 处连续, 就意味着偏导数在点 (x, y) 的某邻域内存在而且在该点处连续. 现在设点 $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ 是点 (x, y) 的这邻域内任意一点, 函数的全增量为

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] \\ &\quad + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]. \end{aligned} \quad (1)$$

在第一个方括号中, 变量 $y + \Delta y$ 保持不变, 因此可以把方括号中的表达式看作 x 的一元函数 $f(x, y + \Delta y)$ 的增量, 应用一元函数的拉格朗日中值定理, 得

$$\begin{aligned} &f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) \\ &= f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) \Delta x, \quad (0 < \theta_1 < 1). \end{aligned}$$

由定理所设, 偏导数 $f_x(x, y)$ 在点 (x, y) 处连续, 即

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f_z(x+\theta_1 \Delta x, y+\Delta y) = f_z(x, y).$$

从而有

$$f_z(x+\theta_1 \Delta x, y+\Delta y) = f_z(x, y) + \varepsilon_1, \quad (2)$$

其中 ε_1 依赖于 $\Delta x, \Delta y$, 且当 $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ 时, $\varepsilon_1 \rightarrow 0$.

同理, 在第二个方括号中, 变量 x 保持不变, 因此可以把方括号中的表达式看作 y 的一元函数 $f(x, y)$ 的增量, 同样可以得到

$$\begin{aligned} & f(x, y+\Delta y) - f(x, y) \\ &= f_z(x, y+\theta_2 \Delta y) \Delta y, \quad (0 < \theta_2 < 1). \end{aligned}$$

以及

$$f_z(x, y+\theta_2 \Delta y) = f_z(x, y) + \varepsilon_2, \quad (3)$$

其中 ε_2 依赖于 Δy , 且当 $\Delta y \rightarrow 0$ 时, $\varepsilon_2 \rightarrow 0$.

由(2)、(3)两式, (1)式可以写成

$$\Delta z = f_x(x, y) \Delta x + f_z(x, y) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y, \quad (4)$$

令 $\omega = \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$, 由于

$$\begin{aligned} \frac{|\omega|}{\rho} &= \frac{|\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y|}{\rho} \leq \frac{|\Delta x|}{\rho} |\varepsilon_1| + \frac{|\Delta y|}{\rho} |\varepsilon_2| \leq |\varepsilon_1| \\ &\quad + |\varepsilon_2|, \end{aligned}$$

所以
$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{|\omega|}{\rho} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{|\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y|}{\rho} = 0.$$

依函数全微分的定义, 这就证明了函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微. 证毕

应当指出, 定理 2 只是函数 $z = f(x, y)$ 可微的一个充分条件, 而不是必要条件.

以上二元函数全微分的定义及可微的必要条件与充分条件, 可以类似地推广到三元及三元以上的多元函数.

象一元函数一样, 规定自变量的增量等于自变量的微分, 即 $\Delta x = dx, \Delta y = dy$, 这样二元函数 $z = f(x, y)$ 的全微分就可表

示为

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

通常把 $\frac{\partial z}{\partial x} dx$ 、 $\frac{\partial z}{\partial y} dy$ 称为函数 $z = f(x, y)$ 对 x 和对 y 的偏微分, 那么二元函数的全微分等于它的两个偏微分之和, 这一事实叫做微分的叠加原理, 它也适用于二元以上的函数, 例如三元函数 $u = f(x, y, z)$ 在点 (x, y, z) 可微, 则有

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

例 3 求函数 $z = 2x^2y + xy^2$ 在点 $(1, 2)$ 处的全微分.

解 因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = 4xy + y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 + 2xy$,

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = 12, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = 6,$$

所以 $dz \Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = 12dx + 6dy.$

例 4 求函数 $u = e^{xyz} + xy + z^2$ 的全微分.

解 因为

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yze^{xyz} + y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xze^{xyz} + x, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xye^{xyz} + 2z$$

所以

$$du = (yze^{xyz} + y)dx + (xze^{xyz} + x)dy + (xye^{xyz} + 2z)dz.$$

二 全微分在近似计算中的应用

设 $z = f(x, y)$ 是可微函数, 它在点 (x, y) 处的全增量为

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \omega \\ &= dz + \omega, \end{aligned}$$

其中 ω 当 $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ 时是 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ 的高阶无穷小. 因此, 当 $|\Delta x|$ 、 $|\Delta y|$ 都很小时, 略去 ω , 就用 dz 近似代替 Δz , 得到

$$\Delta z \approx dz = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y.$$

上式有时也写成

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y. \quad (3.2)$$

利用上面的近似等式可以计算函数的近似值和估计误差.

例5 计算 $(1.04)^{2.02}$ 的近似值.

解 把 $(1.04)^{2.02}$ 看作是函数 $z = x^y$ 在 $x = 1.04$, $y = 2.02$ 时的函数值 $f(1.04, 2.02)$.

设 $z = f(x, y) = x^y$, 取 $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = 0.04$, $\Delta y = 0.02$, 由于

$$f_x(x, y) = yx^{y-1}, \quad f_x(1, 2) = 2,$$

$$f_y(x, y) = x^y \ln x, \quad f_y(1, 2) = 0,$$

$$f(1, 2) = 1,$$

应用公式(3.2), 得

$$\begin{aligned} (1.04)^{2.02} &\approx f(1, 2) + f_x(1, 2) \times 0.04 \\ &\quad + f_y(1, 2) \times 0.02 \\ &= 1^2 + 2 \times 0.04 + 0 \times 0.02 = 1.08. \end{aligned}$$

例6 设有无盖的圆柱形容器, 其底面的内半径为2 m, 内侧高为5 m, 侧壁厚为1 cm, 底厚为1.5 cm (见图8-7), 求其外壳材料体积的近似值.

解 圆柱形的剖面图如图8-7. 记底面内半径为 R , 侧壁厚为 ΔR , 内侧高为 H , 底厚为 ΔH , 则该容器外壳材料的体积为

$$\Delta V = \pi(R + \Delta R)^2(H + \Delta H) - \pi R^2 H,$$

显然 ΔV 是函数 $V = \pi R^2 H$ 在 $R = 2$, $H = 5$ 处, 当 $\Delta R = 0.01$, $\Delta H = 0.015$ 时的全增量.

$$\frac{\partial V}{\partial R} = 2\pi RH, \quad \left. \frac{\partial V}{\partial R} \right|_{\substack{R=\frac{1}{2} \\ H=\frac{1}{3}}} = 20\pi,$$

$$\frac{\partial V}{\partial H} = \pi R^2, \quad \left. \frac{\partial V}{\partial H} \right|_{\substack{R=\frac{1}{2} \\ H=\frac{1}{3}}} = 4\pi.$$

$$\Delta V \approx dV = \left. \frac{\partial V}{\partial R} \right|_{\substack{R=\frac{1}{2} \\ H=\frac{1}{3}}} \cdot \Delta R + \left. \frac{\partial V}{\partial H} \right|_{\substack{R=\frac{1}{2} \\ H=\frac{1}{3}}} \cdot \Delta H$$

$$= 20\pi \times 0.01 + 4\pi \times 0.015$$

$$= 0.26\pi (\text{m}^3) \approx 0.82 (\text{m}^3).$$

对一般的二元函数 $z = f(x, y)$ ，如果已知自变量 x 、 y 的绝对误差限分别为 δ_x 、 δ_y ，即

$$|\Delta x| \leq \delta_x, \quad |\Delta y| \leq \delta_y,$$

则由 $z = f(x, y)$ 来计算函数值 z 所产生的误差为

$$\begin{aligned} |\Delta z| \approx |dz| &= \left| \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y \right| \\ &\leq \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \cdot |\Delta x| + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| \cdot |\Delta y| \end{aligned}$$

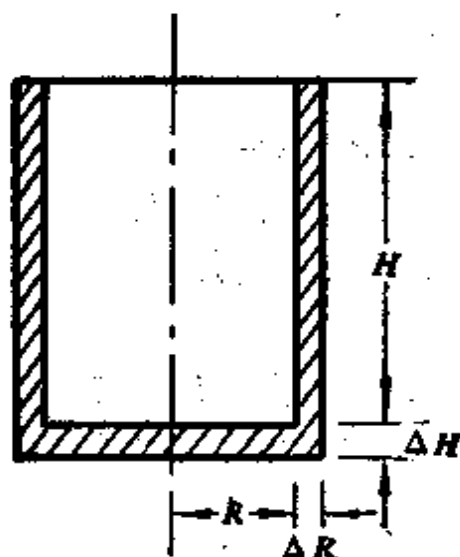


图 8-7

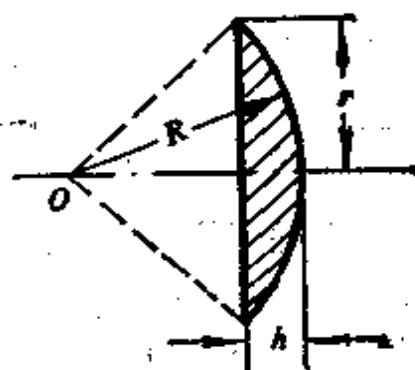


图 8-8

$$\leq \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \delta_x + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| \delta_y.$$

即变量 z 的绝对误差限为

$$\delta_z = \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \delta_x + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| \delta_y. \quad (3.3)$$

而 z 的相对误差限为

$$\frac{\delta_z}{|z|} = \left| \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x} \right| \delta_x + \left| \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial y} \right| \delta_y. \quad (3.4)$$

例 7 生产球面透镜(图 8-8)的工厂,通过测量透镜的 h 、 r 长度,来检验球面半径 R 的长度,现测得 $h = 10 \pm 0.01(\text{cm})$, $r = 25 \pm 0.02(\text{cm})$,问由于测量 h 、 r 的误差而引起 R 的绝对误差与相对误差是多少?

解 由球面透镜的剖面图(图 8-8)的几何关系,不难推得

$$R^2 = (R-h)^2 + r^2,$$

从而有

$$R = \frac{1}{2} \left(h + \frac{r^2}{h} \right)$$

现取 $h = 10$, $\delta_h = 0.01$, $r = 25$, $\delta_r = 0.02$, 有

$$\frac{\partial R}{\partial h} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r^2}{h^2} \right), \quad \frac{\partial R}{\partial r} = \frac{r}{h}.$$

从而有 R 的绝对误差

$$\begin{aligned} \delta_R &= \left| \frac{\partial R}{\partial h} \right| \delta_h + \left| \frac{\partial R}{\partial r} \right| \delta_r \\ &= \left| \frac{1}{2} \left(1 - \frac{25^2}{10^2} \right) \right| \times 0.01 + \frac{25}{10} \times 0.02 \\ &\approx 0.076(\text{cm}) \end{aligned}$$

由 $h = 10$, $r = 25$, 可计算 R 的近似值

$$R \approx \frac{1}{2} \left(10 + \frac{25^2}{10} \right) = 36.25 (\text{cm}).$$

于是 R 的相对误差为

$$\frac{\delta_R}{R} = \frac{0.076}{36.25} = 0.21\%.$$

§ 4 多元复合函数微分法

一 多元复合函数微分法

对于一元函数的复合函数 $y = f(\varphi(x))$, 如果函数 $y = f(u)$ 在点 u 处可导, 而 $u = \varphi(x)$ 又在点 x 处可导, 则有一元复合函数的微分法则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

现在要把这一微分法则推广到多元复合函数的情形, 建立多元复合函数的微分法则.

定理 1 设函数 $u = \varphi(t)$, $v = \psi(t)$ 在点 t 可导, 而函数 $z = f(u, v)$ 在对应点 (u, v) 可微, 则复合函数 $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ 在点 t 可导, 并且有

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt}. \quad (4.1)$$

证明 当变量 t 有增量 Δt 时, 变量 u 、 v 的对应增量为 Δu 、 Δv , 从而函数 $z = f(u, v)$ 有增量 Δz . 因为函数 $z = f(u, v)$ 在点 (u, v) 可微, 故有

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial z}{\partial v} \Delta v + \omega,$$

这里, 当 $\Delta u \rightarrow 0$, $\Delta v \rightarrow 0$ 时, ω 是比 $\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}$ 高阶的无

无穷小.

上式两边各项都除以 Δt , 得

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\Delta u}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\Delta v}{\Delta t} + \frac{\omega}{\Delta t},$$

因为函数 $u = \varphi(t)$ 、 $v = \psi(t)$ 在 t 点可导, 故它们必在 t 点处连续, 从而当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时有 $\Delta u \rightarrow 0$, $\Delta v \rightarrow 0$.

注意到

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\Delta t} &= \frac{\omega}{\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}} \cdot \frac{\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}}{\Delta t} \\ &= \frac{\omega}{\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}} \cdot \frac{|\Delta t|}{\Delta t} \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)^2} \end{aligned}$$

因为当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\Delta u \rightarrow 0$, $\Delta v \rightarrow 0$, 故有

$$\frac{\omega}{\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}} \rightarrow 0,$$

$$\sqrt{\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)^2} \rightarrow \sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2},$$

从而可知 $\frac{|\Delta t|}{\Delta t} \sqrt{\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)^2}$ 有界, 所以

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega}{\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}} \\ &\quad \cdot \frac{|\Delta t|}{\Delta t} \sqrt{\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)^2} = 0, \end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\Delta u}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\Delta v}{\Delta t} + \frac{\omega}{\Delta t} \right] \\ &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt}, \end{aligned}$$

即
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt}. \quad \text{证毕.}$$

公式(4.1)称为全导数公式.

公式(4.1)可以推广到复合函数的中间变量多于两个的情形. 例如, 设 $z=f(u, v, w)$, 而 $u=\varphi(t)$, $v=\psi(t)$, $w=\omega(t)$ 复合而成的复合函数 $z=f(\varphi(t), \psi(t), \omega(t))$, 在与定理1类似的条件下, 有全导数公式

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{dw}{dt}. \quad (4.2)$$

例1 设 $z=u^3v^3$, $u=\sin t$, $v=\cos t$, 求 $\frac{dz}{dt}$.

解 由全导数公式(4.1), 有

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt} = 3u^2v^3 \cos t + 3u^3v^2(-\sin t) \\ &= 3\sin^2t \cos^4t - 3\sin^4t \cos^2t = \frac{3}{8} \sin 2t \sin 4t. \end{aligned}$$

例2 设 $z=u^2v^2+e^t$, $u=\sin t$, $v=\cos t$, 求 $\frac{dz}{dt}$.

解 由全导数公式, 有

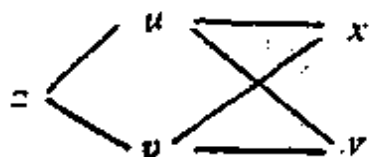
$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{dt}{dt} \\ &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \frac{\partial z}{\partial t} \\ &= 2uv^2 \cos t + 2u^2v(-\sin t) + e^t \\ &= 2\sin t \cos^3t - 2\sin^3t \cos t + e^t \\ &= \frac{1}{2} \sin 4t + e^t. \end{aligned}$$

全导数实际上是一元函数, 不过这里不是把 z 直接表示为 t 的

由 $z = f(u, v)$ 及 $u = \varphi(x, y)$ 、 $v = \psi(x, y)$ 复合而成的函数

$$z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y)),$$

用示意图:



来分清哪些是中间变量, 哪些是自变量以及中间变量和自变量个数. 把这个示意图与公式(4.3)、(4.4)对照看看, 也象是公式(4.3)、(4.4)的“结构”示意图. 例如, z 对 x 的偏导数

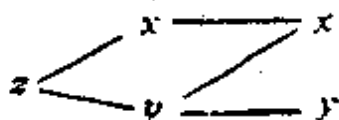
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x},$$

就好象沿着图中的两条途径到达 x , 即 z 先沿 u 到达 x , 再加上沿 v 到达 x .

下面各例中所给的函数都假定有连续的一阶偏导数.

例 4 设 $z = f(x, v)$, 而 $v = \psi(x, y)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 这是公式(4.3)、(4.4)中, 当 $u = \varphi(x, y) = x$ 的特殊情形, 用示意图表示



按公式(4.3)、(4.4)有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (4.6)$$

为了避免混淆, 将公式(4.5)、(4.6)右端的 z 换成 f , 要注意这里 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 是不同的. $\frac{\partial f}{\partial x}$ 是把 $f(x, v)$ 看作两个独立变量 x 、 v 的函数对 x 求偏导数; 而 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 则是在复合函数 $z = f(x, \varphi(x, y))$ 中, 把 y 看作常量而对 x 求偏导数.

例5 设 $z=f(x, v)=x^2e^v+x^3+\cos v$, 而 $v=x^2+y^2$,

求 $\frac{\partial z}{\partial x}$.

解 $\frac{\partial f}{\partial x}=2xe^v+3x^2,$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= 2xe^v + 3x^2 + 2x(x^2e^v - \sin v) \\ &= 3x^2 + 2x(1+x^2)e^v - 2x\sin v.\end{aligned}$$

复合函数的微分法则(4.3)、(4.4)可以推广到中间变量或自变量多于两个的情形. 例如, 设 $u=\varphi(x, y)$ 、 $v=\psi(x, y)$ 及 $w=\omega(x, y)$ 在点 (x, y) 都具有偏导数, 而函数 $z=f(u, v, w)$ 在对应点 (u, v, w) 可微, 则复合函数

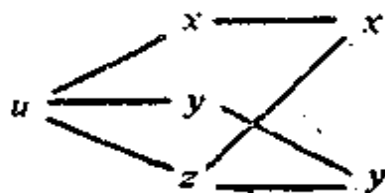
$$z=f(\varphi(x, y), \psi(x, y), \omega(x, y))$$

在点 (x, y) 的两个偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 都存在, 并且

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y}.\end{aligned}$$

例6 设 $u=f(x, y, z)=e^{x^2+y^2+z^2}$, 而 $z=x^2\sin y$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$

与 $\frac{\partial u}{\partial y}$.



解 函数 u 的结构示意图

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2+z^2} + 2ze^{x^2+y^2+z^2}$$

$$= 2x \sin y$$

$$= 2x(1 + 2x^2 \sin^2 y) e^{x^2 + y^2 + x^4 \sin^2 y}.$$

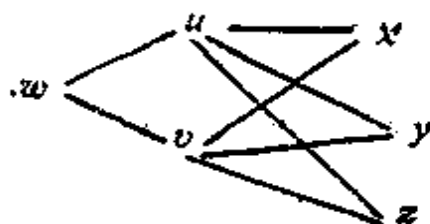
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^{x^2 + y^2 + z^2} + 2ze^{x^2 + y^2 + z^2} \cdot x^2 \cos y$$

$$= 2(y + x^4 \sin y \cos y) e^{x^2 + y^2 + x^4 \sin^2 y}.$$

例 7 设 $w = f(x + y + z, xyz)$, 求 $\frac{\partial w}{\partial x}$.

解 令 $u = x + y + z$, $v = xyz$,

函数 w 的结构示意图



$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + yz \frac{\partial f}{\partial v}.$$

例 8 设函数 $z = f(x, y)$ 可微, 在极坐标 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ 变换下, 证明:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2.$$

证明 因为 z 是 x 、 y 的可微函数, 而 x 、 y 又是 r 、 θ 的可微函数, 所以 z 是 r 、 θ 的复合函数, 由复合函数的微分法则, 有

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial z}{\partial y} (r \cos \theta)$$

$$= r \left(\frac{\partial z}{\partial y} \cos \theta - \frac{\partial z}{\partial x} \sin \theta \right),$$

从而

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \left(\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta - \frac{\partial z}{\partial x}\sin\theta\right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.\end{aligned}\quad \text{证毕.}$$

二 全微分形式不变性

设函数 $z = f(u, v)$ 具有连续偏导数, 当 u, v 是自变量时, 函数的全微分存在, 且有

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv.$$

现在来求复合函数 $z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ 的全微分. 设 $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$, $z = f(u, v)$ 都具有连续偏导数, 则复合函数 $z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ 也有连续偏导数, 因而可微, 且

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

其中 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 由复合函数微分公式给出, 把它们代入上式右端, 得

$$\begin{aligned}dz &= \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx \\ &\quad + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy \\ &= \frac{\partial z}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right) \\ &\quad + \frac{\partial z}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right),\end{aligned}$$

注意到 u, v 都是可微函数, 并且有

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy,$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy,$$

从而上式右端又可表示为

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv.$$

由此可推知, z 无论是自变量 u 、 v 或是中间变量 u 、 v 的函数, 其全微分的形式是一样的, 此性质称为全微分形式不变性. 类似地可以证明三元及三元以上的函数的全微分也具有这个性质.

设 u 、 v 是可微的多元函数, 应用全微分形式不变性容易证明

$$(1) \quad d(u \pm v) = du \pm dv;$$

$$(2) \quad d(uv) = vdu + u dv;$$

$$(3) \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}.$$

下面证明(3)

$$\begin{aligned} d\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u}{v}\right) du + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u}{v}\right) dv \\ &= \frac{1}{v} du - \frac{u}{v^2} dv \\ &= \frac{vdu - u dv}{v^2}. \end{aligned}$$

三 多元复合函数的高阶偏导数

在 §2 已经给出高阶偏导数的定义, 这里通过一些具体的例子来说明求复合函数高阶偏导数的方法.

例 9 设 $z = f(2x + 3y, xy)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解 设 $u = 2x + 3y$, $v = xy$, 则 $z = f(2x + 3y, xy)$ 是由 $z = f(u, v)$, $u = 2x + 3y$, $v = xy$ 复合而成的函数, 于是

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 2f_u + yf_v,$$

再求二阶偏导数时注意到 f_u 及 f_v 仍是 u 、 v 的函数, 而 u 、 v 又仍是 x 、 y 的函数, 再应用复合函数的微分法则, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (2f_u + yf_v) \\ &= 2 \frac{\partial}{\partial y} (f_u) + \frac{\partial}{\partial y} (yf_v) \\ &= 2 \left(f_{uv} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + f_{vv} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &\quad + f_v + y \left(f_{vu} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + f_{vv} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= 2(3f_{uv} + xf_{vv}) + f_v + y(3f_{vu} + xf_{vv}) \\ &= 6f_{uv} + (2x + 3y)f_{vv} + xyf_{vv} + f_v. \end{aligned}$$

注意, 这里因为 f_{uv} 及 f_{vu} 存在且连续, 所以 $f_{uv} = f_{vu}$, 可以合并为 $2xf_{uv} + 3yf_{uv} = (2x + 3y)f_{uv}$.

例10 设 $z = f(x, y)$ 具有直到二阶的连续偏导数, 在极坐标 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ 变换下, 证明

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}.$$

证明 因为 z 是 x 、 y 的函数, 而 x 、 y 又是 r 、 θ 的函数, 所以 z 是 r 、 θ 的复合函数由复合函数微分法则, 得

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta, \quad (1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}(-r \sin \theta) + \frac{\partial z}{\partial y}(r \cos \theta).$$

再求二阶偏导数，得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cos \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \sin \theta \right) \cos \theta \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \cos \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \sin \theta \right) \sin \theta \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cos^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \sin^2 \theta, \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial z}{\partial x}(-r \sin \theta) + \frac{\partial z}{\partial y}(r \cos \theta) \right] \\ &= \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(-r \sin \theta) + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(r \cos \theta) \right](-r \sin \theta) \\ &\quad - r \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \left[\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(-r \sin \theta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(r \cos \theta) \right](r \cos \theta) - r \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} r^2 \sin^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} r^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} r^2 \cos^2 \theta \\ &\quad - r \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta - r \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta. \quad (3) \end{aligned}$$

(1)式的两端除以 r ，(3)式两端除以 r^2 ，再与(2)相加，最后便得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}.$$

§ 5 隐函数微分法

一 一个方程所确定的隐函数的微分法

在上册第三章导数与微分中已经给出隐函数的概念，并且指出所谓隐函数，是由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的一个函数 $y = f(x)$ ，此函数在某一区间 I 上满足

$$F(x, f(x)) \equiv 0.$$

这里，有些问题尚待解决：在什么条件下，方程 $F(x, y) = 0$ 可以定义一个隐函数；在什么条件下，方程 $F(x, y) = 0$ 所定义的隐函数 $y = f(x)$ 是连续且可微的，以及怎样计算导数 $f'(x)$ 。下面先介绍隐函数存在定理，而不加证明。然后再根据多元复合函数微分法来导出隐函数的导数公式。

隐函数存在定理 1 设函数 $F(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内具有连续的偏导数 $F_x(x, y)$ 、 $F_y(x, y)$ ，并且 $F(x_0, y_0) = 0$ ， $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ ，则方程 $F(x, y) = 0$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内能唯一确定一个单值连续且具有连续导数的函数 $y = f(x)$ ，并满足 $y_0 = f(x_0)$ ，其导数为

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}. \quad (5.1)$$

证明略。

公式(5.1)是隐函数的求导数公式。

虽然隐函数存在定理这里不证，但是对求导公式(5.1)的推导可以利用复合函数的求导法则来解决。

如果函数 $F(x, y)$ 满足隐函数存在定理 1 的条件，则由方程 $F(x, y) = 0$ 定义了隐函数 $y = f(x)$ ，将它代入方程中，就得到恒等式

$$F(x, f(x)) \equiv 0,$$

其左端是 x 的一个复合函数, 它的全导数应恒等于右端零的导数, 即

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

或
$$F_x(x, y) + F_y(x, y) \frac{dy}{dx} = 0.$$

因为 $F_y(x, y)$ 连续, 且 $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, 所以存在点 (x_0, y_0) 的某一邻域, 使得在此邻域内 $F_y(x, y) \neq 0$, 于是有

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

例 1 说明由方程 $F(x, y) = xy - e^x + e^y = 0$ 在点 $(0, 0)$ 的某邻域内确定一个单值的隐函数 $y = f(x)$, 并求出 y' .

解 函数 $F(x, y) = xy - e^x + e^y$ 在点 $(0, 0)$ 的某一邻域内具有连续的偏导数

$$F_x(x, y) = y - e^x, \quad F_y(x, y) = x + e^y,$$

并且 $F_y(0, 0) = 1 \neq 0$, 即 $F(x, y)$ 满足隐函数存在定理 1 的条件, 所以方程 $F(x, y) = 0$ 在点 $(0, 0)$ 的某邻域内确定一个单值的隐函数 $y = f(x)$, 由公式 (5.1), 得

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = \frac{e^x - y}{e^y + x}.$$

例 2 设函数 $F(x, y)$ 满足隐函数存在定理 1 的条件, 并且它具有二阶连续的偏导数, 求由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的隐函数 $y = f(x)$ 的二阶导数 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

解 把偏导数 $F_x(x, y)$ 、 $F_y(x, y)$ 仍然看作是 x 的复合函数 $F_x(x, f(x))$ 及 $F_y(x, f(x))$, 把公式 (5.1) 再对 x 求一次导数, 得

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{d}{dx} \left(\frac{F_x}{F_y} \right) = - \frac{\frac{dF_x}{dx} \cdot F_y - F_x \cdot \frac{dF_y}{dx}}{F_y^2}$$

有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}.$$

例 3 设由方程 $2x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$ 确定隐函数 $z = f(x, y)$,

求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 设 $F(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2z$, 则有

$$F_x = 4x, \quad F_z = 2z - 2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{4x}{2z-2} = \frac{2x}{1-z}.$$

再对 x 求一次偏导数, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{2(1-z) + 2x \frac{\partial z}{\partial x}}{(1-z)^2} \\ &= \frac{2(1-z) + 2x \cdot \frac{2x}{1-z}}{(1-z)^2} = \frac{2(1-z)^2 + 4x^2}{(1-z)^3}. \end{aligned}$$

二 方程组所确定的隐函数的微分法

上面讨论了一个方程所确定的隐函数的微分法, 现在把隐函数存在定理推广到方程组的情形.

隐函数存在定理 3 设函数 $F(x, y, u, v)$ 及 $G(x, y, u, v)$ 在点 (x_0, y_0, u_0, v_0) 的某邻域内对各个变量具有连续的偏导数, 及 $F(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$ 、 $G(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$, 且行列式

$$J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$$

(称为雅可比(Jacobi)行列式)在点 (x_0, y_0, u_0, v_0) 不等于零, 则由方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0, \end{cases}$$

在点 (x_0, y_0, u_0, v_0) 的某邻域内能唯一确定一组单值连续且具有连续偏导数的函数 $u = u(x, y), v = v(x, y)$, 它们满足 $u_0 = u(x_0, y_0), v_0 = v(x_0, y_0)$, 并有偏导数

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

证明略.

如果函数 $F(x, y, u, v), G(x, y, u, v)$ 满足隐函数存在定理3的条件, 则由方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0, \end{cases}$$

可唯一确定一组函数 $u = u(x, y), v = v(x, y)$, 把它们代入上面方程组, 得到恒等式组

$$\begin{cases} F(x, y, u(x, y), v(x, y)) = 0, \\ G(x, y, u(x, y), v(x, y)) = 0, \end{cases}$$

应用复合函数求导法则, 将恒等式两端分别对 x 求偏导数, 得到关于 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ 的线性方程组

$$\begin{cases} F_x + F_u \frac{\partial u}{\partial x} + F_v \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ G_x + G_u \frac{\partial u}{\partial x} + G_v \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

由定理 3 的条件在点 (x_0, y_0, u_0, v_0) 的某邻域内系数行列式

$$J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} \neq 0,$$

从而可得到唯一的一组解

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)}.$$

同理, 可求得 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial v}{\partial y}$.

例 4 设 $\begin{cases} xu - yv = 0, \\ yu + xv = 1, \end{cases}$ 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

解 注意到 u, v 都是 x, y 的函数, 将所给的方程组的两边对 x 求偏导数, 整理移项后得

$$\begin{cases} x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial v}{\partial x} = -u, \\ y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial v}{\partial x} = -v, \end{cases}$$

对 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ 的线性非齐次方程组的系数行列式

$$J = \begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2 + y^2,$$

当 $J \neq 0$ 时, 方程组有唯一的一组解

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{J} \cdot \begin{vmatrix} -u & -y \\ -v & x \end{vmatrix} = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} x & -u \\ y & -v \end{vmatrix} = \frac{yu - xv}{x^2 + y^2}.$$

同理, 将所给方程组的两边对 y 求偏导数, 得

$$\begin{cases} x \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial v}{\partial y} = v, \\ y \frac{\partial u}{\partial y} + x \frac{\partial v}{\partial y} = -u, \end{cases}$$

当 $J \neq 0$ 时, 方程组有唯一的一组解

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} v & -y \\ -x & x \end{vmatrix} = \frac{xv - uy}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} x & v \\ y & -u \end{vmatrix} = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2}.$$

推论 设函数 $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ 在点 (u_0, v_0) 的某邻域内连续且有连续的偏导数, 又设 $x_0 = f(u_0, v_0)$, $y_0 = g(u_0, v_0)$, 行列式

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则方程组

$$\begin{cases} x = f(u, v), \\ y = g(u, v), \end{cases}$$

在点 (x_0, y_0) 的某邻域内能唯一确定一组单值连续且具有连续偏导数的反函数组 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, 并满足 $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$.

事实上, 可将上面的方程组改写为

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = x - f(u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = y - g(u, v) = 0, \end{cases}$$

依假设行列式

$$J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0,$$

根据隐函数存在定理 3，即得推论的结果。

反函数组 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 的偏导数可按下面方法求得。

因为

$$\begin{cases} x = f(u(x, y), v(x, y)), \\ y = g(u(x, y), v(x, y)), \end{cases}$$

应用复合函数求偏导数法则，将上面恒等式两端对 x 求导，得

$$\begin{cases} 1 = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \\ 0 = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

由于行列式

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0,$$

所以方程组有唯一的一组解，可解得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{J} \begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial f}{\partial v} \\ 0 & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{1}{J} \frac{\partial g}{\partial v}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{J} \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & 1 \\ \frac{\partial g}{\partial u} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{J} \frac{\partial g}{\partial u}. \end{aligned}$$

同理，可求得 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial v}{\partial y}$ 。

例5 设 $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$,

$$\frac{\partial v}{\partial y}.$$

解 因为

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} e^u \cos v & -e^u \sin v \\ e^u \sin v & e^u \cos v \end{vmatrix} = e^{2u} \neq 0,$$

推论的其它条件都满足, 所以推论的结论成立. 下面求其反函数组的偏导数.

在恒等式组

$$\begin{cases} x = e^u \cos v, \\ y = e^u \sin v, \end{cases}$$

的两端分别对 x 求导数, 得

$$\begin{cases} 1 = e^u \cos v \frac{\partial u}{\partial x} - e^u \sin v \frac{\partial v}{\partial x}, \\ 0 = e^u \sin v \frac{\partial u}{\partial x} + e^u \cos v \frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

由于系数行列式

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = e^{2u} \neq 0,$$

可解得唯一的一组解

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-u} \cos v, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -e^{-u} \sin v.$$

同理, 可求得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-u} \sin v, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^{-u} \cos v.$$

§ 6 方向导数与梯度

一 方向导数

函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 的偏导数 $f_x(x, y)$ 与 $f_y(x, y)$ 分别表示函数在点 P 沿着 x 轴方向与 y 轴方向的变化率。它们只描述了函数沿着特殊方向的变化情况。现在要考虑函数 $z = f(x, y)$ 在点 P 沿任一给定方向的变化率。

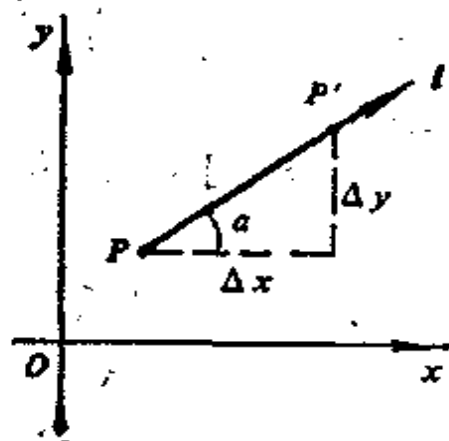


图 8-9

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 的某邻域内有定义。从点 P 引射线 l ，设 Ox 轴正向到射线 l 的转角为 α ， $P'(x + \Delta x, y + \Delta y)$ 为 l 上的另一点（见图 8-9），记

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

考虑函数的增量 $f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ 与 ρ 的比值，当 P' 沿着 l 趋于 P 时，如果这个比值的极限

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\rho}$$

存在，则称此极限为函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 沿方向 l 的方向导数，记作 $\frac{\partial f}{\partial l}$ ，即

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\rho}.$$

显然，函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 的偏导数 $f_x(x, y)$ ， $f_y(x, y)$ 是函数在点 P 分别沿方向 $e_1 = \{1, 0\}$ ， $e_2 = \{0, 1\}$ 的方向导数。

定理 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 可微，则函数在该点沿

任一方向 l 的方向导数都存在, 且有

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \alpha,$$

其中 α 是 Ox 轴正向到方向 l 的转角.

证明 因为函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 可微, 所以函数在点 P 的增量可表示为

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \omega,$$

其中 ω 满足当 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0$ 时, $\frac{\omega}{\rho} \rightarrow 0$.

上式两端分别除以 ρ , 得

$$\begin{aligned} & \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\rho} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\rho} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\rho} + \frac{\omega}{\rho} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \alpha + \frac{\omega}{\rho}. \end{aligned}$$

于是有极限

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\rho} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \alpha. \end{aligned}$$

这就证明了函数 $z = f(x, y)$ 在点 P 沿方向 l 的方向导数存在, 其值为

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \alpha.$$

如果记 Oy 轴正向到射线 l 的转角为 β , 则 $\sin \alpha = \cos \beta$, 上式也可以写成

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta.$$

类似地, 可以证明对于可微的三元函数 $u = f(x, y, z)$, 在点 $P(x, y, z)$ 沿着任一方向 l 的方向导数也存在, 且有

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma,$$

其中 $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 、 $\cos \gamma$ 是 l 的方向余弦.

例 1 已知一点电荷 q 位于坐标原点 O , 它所产生的电场中任一点 $P(x, y, z)$ (x 、 y 、 z 不同时为零) 的电位为

$$u = \frac{kq}{r},$$

其中 k 为常数, r 为原点到点 P 的距离. 求在 P 点处电位沿某一方向 $l^0 = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ 的变化率.

解 因为 $u = \frac{kq}{r}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{kq}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{kq}{r^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &= -\frac{kqx}{r^3}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{kqy}{r^3}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{kqz}{r^3},$$

$$\text{于是 } \frac{\partial u}{\partial l} = -\frac{kq}{r^3} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma).$$

二 梯度

设函数 $u = f(x, y, z)$ 在点 $P(x, y, z)$ 可微, 那么函数在该点处沿方向 l 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma,$$

其中 θ 是 l 与 $\text{grad}f(x, y, z)$ 的夹角, 上式表明函数在点 P 沿方向 l 的方向导数是梯度在 l 方向上的投影.

根据梯度的定义, 不难验证梯度具有以下性质:

$$(1) \quad \text{grad}(u+v) = \text{grad}u + \text{grad}v;$$

$$(2) \quad \text{grad}(uv) = u\text{grad}v + v\text{grad}u;$$

$$(3) \quad \text{grad}f(u) = f'(u)\text{grad}u,$$

其中, $f(u)$ 是可微函数.

例2 求函数 $u = xy^2 + yz^3$ 在点 $P(2, -1, 1)$ 处的梯度及沿方向 $l = \{2, 2, -1\}$ 的方向导数.

$$\text{解} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy + z^3, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3yz^2,$$

$$\text{因为} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(2, -1, 1)} = 1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(2, -1, 1)} = -3,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{(2, -1, 1)} = -3.$$

$$\text{所以} \quad \text{grad}u|_{2, -1, 1} = \{1, -3, -3\}.$$

$$\text{由于} \quad \frac{\partial u}{\partial l} = |\text{grad}u| \cos\theta = \frac{l \cdot (\text{grad}u)}{|l|}$$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{(2, -1, 3)} &= \frac{(2i + 2j - k) \cdot (i - 3j - 3k)}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} \\ &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

例3 已知一点电荷 q 位于坐标原点 O , 它所产生的电场中任一点 $P(x, y, z)$ (x, y, z 不同时为零) 的电位为

$$u = \frac{kq}{r},$$

其中 k 为常数, r 为原点到点 P 的距离. 求电位 u 的梯度.

解 根据梯度的计算公式, 有

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} u &= \operatorname{grad} \left(\frac{kq}{r} \right) = kq \operatorname{grad} \frac{1}{r} \\ &= -\frac{kq}{r^2} \operatorname{grad} r,\end{aligned}$$

由于 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 故

$$\operatorname{grad} r = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\mathbf{r}}{r},$$

这里 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, 于是

$$\operatorname{grad} u = -\frac{kq}{r^3} \mathbf{r}.$$

由于此点电荷所产生的静电场在点 $P(x, y, z)$ 的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{kq}{r^3} \mathbf{r}$$

所以

$$\operatorname{grad} u = -\mathbf{E},$$

这就说明, 电位在电场强度相反的方向增加得最快.

§ 7 偏导数在几何上的应用

一 空间曲线的切线与法平面

设空间曲线 Γ 的参量方程为

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

其中 $x(t)$ 、 $y(t)$ 、 $z(t)$ 皆为可微函数, 且其导数 $x'(t)$ 、 $y'(t)$ 、 $z'(t)$ 不同时为零.

现在考虑当 $t = t_0$ 时, 在曲线 Γ 上对应点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切线, 这里 $x_0 = x(t_0)$ 、 $y_0 = y(t_0)$ 、 $z_0 = z(t_0)$. 设参变量 t 在 t_0 点有增量 Δt , 于是在曲线 Γ 上对应于 $t = t_0 + \Delta t$ 的点为

$M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$, 由空间解析几何可知, 曲线上过点 M_0 及 M 的割线方程为

$$\frac{x-x_0}{\Delta x} = \frac{y-y_0}{\Delta y} = \frac{z-z_0}{\Delta z},$$

用 Δt 除上式的各分母, 得

$$\frac{x-x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{y-y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}} = \frac{z-z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}.$$

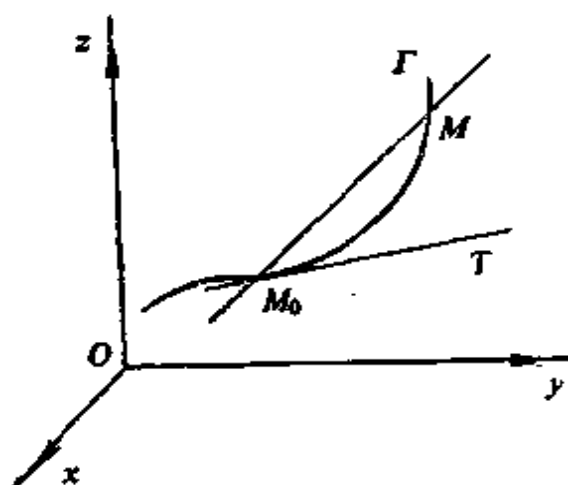


图 8-10

当点 M 沿着曲线 Γ 趋于点 M_0 时, 割线 M_0M 的极限位置 M_0T 就是曲线 Γ 在 M_0 点处的切线, 为此, 令 $M \rightarrow M_0$ (这时 $\Delta t \rightarrow 0$), 对上式取极限, 就得到曲线 Γ 在点 M_0 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} = \frac{z-z_0}{z'(t_0)}. \quad (7.1)$$

切线的方向矢量为

$$s = \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\} \quad (7.2)$$

称为曲线 Γ 在点 M_0 处的一个切矢量.

通过点 M_0 而与切线垂直的平面称为曲线 Γ 在点 M_0 处的法平面. 显然它是通过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 以 s 为法矢量的平面, 因此这法平面的方程为

$$x'(t_0)(x-x_0) + y'(t_0)(y-y_0) + z'(t_0)(z-z_0) = 0. \quad (7.3)$$

例1 求螺旋线 $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $z = bt$ (其中 R , b 为正常数) 在点 $M_0(\frac{\sqrt{2}}{2}R, \frac{\sqrt{2}}{2}R, \frac{\pi b}{4})$ 处的切线和法平面的方程.

解 参量 $t_0 = \frac{\pi}{4}$ 时对应于螺旋线上一点 M_0 , 在 M_0 点有

$$x'(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}R, \quad y'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}R, \quad z'(\frac{\pi}{4}) = b.$$

曲线在 M_0 点的切矢量为

$$\mathbf{s} = \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}R, \frac{\sqrt{2}}{2}R, b \right\},$$

因此螺旋线在点 M_0 处的切线方程为

$$\frac{x - \frac{\sqrt{2}}{2}R}{-\frac{\sqrt{2}}{2}R} = \frac{y - \frac{\sqrt{2}}{2}R}{\frac{\sqrt{2}}{2}R} = \frac{z - \frac{\pi b}{4}}{b}.$$

法平面的方程为

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}R \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}R \right) + \frac{\sqrt{2}}{2}R \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}R \right) + b \left(z - \frac{\pi b}{4} \right) = 0,$$

$$\text{或 } \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}R \right) - \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}R \right) - \frac{\sqrt{2}b}{R} \left(z - \frac{\pi b}{4} \right) = 0.$$

如果空间曲线 Γ 的方程是以两柱面的交线

$$\begin{cases} y = f(x), \\ z = g(x) \end{cases}$$

的形式给出, 那么可取参量 $x = t$, 这时 Γ 的方程可化为参量方程

$$\begin{cases} x = t, \\ y = f(t), \\ z = g(t). \end{cases}$$

设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, 则曲线 Γ 在点 $M_0(x_0, f(x_0), g(x_0))$ 的切矢量为

$$\mathbf{s} = \{1, f'(x_0), g'(x_0)\}$$

因此曲线 Γ 在点 M_0 的切线方程和法平面方程分别为

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{z - g(x_0)}{g'(x_0)},$$

$$(x-x_0)+f'(x_0)(y-f(x_0))+g'(x_0)(z-g(x_0))=0.$$

如果空间曲线 Γ 的方程是以两曲面的交线

$$\begin{cases} F(x, y, z)=0, \\ G(x, y, z)=0 \end{cases}$$

的形式给出, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 是曲线 Γ 上的一点, 并设 F, G 具有连续偏导数及行列式

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \bigg|_{(x_0, y_0, z_0)} \neq 0.$$

根据隐函数存在定理 3, 上面的方程组在点 M_0 的某邻域内确定了可微函数 $y=f(x), z=g(x)$. 为了求出曲线 Γ 在点 M_0 的切向量

$$s=\{1, f'(x_0), g'(x_0)\},$$

只需求出导数 $f'(x_0), g'(x_0)$ 就行了. 为此对上面方程组的两个方程分别求全导数, 得

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0. \end{cases}$$

由假设, 在点 M_0 的某邻域内有

$$J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \neq 0,$$

从而可解出

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = f'(x) &= \frac{1}{J} \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}, \\ \frac{dz}{dx} = g'(x) &= \frac{1}{J} \begin{vmatrix} F_y & F_x \\ G_y & G_x \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

那么, 曲线 Γ 在点 M_0 的切向量为

$$s = \left\{ 1, \frac{1}{J} \begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_{M_0}, \frac{1}{J} \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_{M_0} \right\},$$

或取切矢量为

$$s_1 = \left\{ \begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_{M_0}, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_{M_0}, \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_{M_0} \right\}.$$

因此, 曲线 Γ 在点 M_0 的切线和法平面方程分别为

$$\begin{aligned} \frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_{M_0}} &= \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_{M_0}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_{M_0}}, \\ \begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_{M_0} (x-x_0) + \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_{M_0} (y-y_0) \\ + \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_{M_0} (z-z_0) &= 0. \end{aligned}$$

例2 求曲线 $\Gamma: \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $M_0(-1, 0, 1)$

处的切线与法平面方程.

解 将所给方程组的两个方程的两端对 x 求导并整理移项, 得

$$\begin{cases} 2y \frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx} = -2x, \\ \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = -1. \end{cases}$$

解此方程组, 求得

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{2x+1}{2y+1}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{2x-2y}{2y+1}, \\ \frac{dy}{dx} \Big|_{(-1,0,1)} &= 1, \quad \frac{dz}{dx} \Big|_{(-1,0,1)} = -2. \end{aligned}$$

曲线 Γ 在点 $M_0(-1, 0, 1)$ 的切向量

$$s = \{1, 1, -2\}$$

因此, 曲线 Γ 在点 M_0 的切线与法平面方程分别为

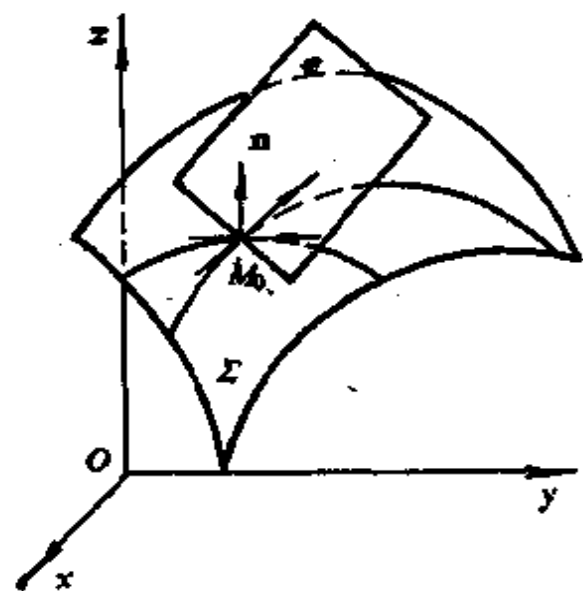


图 8-11

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-1}{-2},$$

$$(x+1) + y - 2(z-1) = 0,$$

即 $x + y - 2z + 3 = 0.$

二 曲面的切平面与法线

设 M_0 是曲面 Σ 上的一点, 如果曲面 Σ 上任何一条过 M_0 点的曲线, 在 M_0 点的切线都在同一平面上, 则这个平面称为曲面在点 M_0 的切平面.

设曲面 Σ 的方程为

$$F(x, y, z) = 0,$$

而 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 是 Σ 上的一点, 又设函数 $F(x, y, z)$ 的偏导数 $F_x(x, y, z)$ 、 $F_y(x, y, z)$ 、 $F_z(x, y, z)$ 在 M_0 点处连续且不同时为零.

下面证明曲面 Σ 在 M_0 点的切平面存在, 并求出切平面方程.

在曲面 Σ 上, 通过 M_0 点任意作一条曲线 Γ , 设其参量方程为

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

当 $t = t_0$ 时, 对应于曲线 Γ 上一点 $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ (即 $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$), 且 $x'(t_0)$, $y'(t_0)$, $z'(t_0)$ 不同时为零, 则曲线 Γ 在 M_0 点的切向量为

$$s = \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}. \quad (1)$$

另一方面, 由于曲线 Γ 在曲面 Σ 上, 故 Γ 上的所有点的坐标都满足 Σ 的方程, 因此有恒等式

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0,$$

求全导数, 得

$$\left. \frac{dF}{dt} \right|_{t=t_0} = F_x(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)z'(t_0) = 0. \quad (2)$$

若记矢量 n 为

$$n = \{F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0)\} \quad (3)$$

由(2)式 $\left. \frac{dF}{dt} \right|_{t=t_0} = 0$, 可知 $n \cdot s = 0$, 即 n 与 s 互相垂直.

过点 M_0 , 以 n 为法矢量作一平面, 此平面的方程为

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0) = 0. \quad (7.4)$$

因为曲线 Γ 在 M_0 点的切矢量(1)与平面(7.4)的法矢量 n 互相垂直, 故曲线 Γ 在 M_0 点的切线必在平面(7.4)上. 由于 Γ 是曲面 Σ 上过 M_0 点的任意一条曲线, 所以在 Σ 上过 M_0 点的所有曲线在该点的切线都在平面(7.4)上. 因此, 方程(7.4)就是曲面 Σ 在 M_0 点的切平面方程.

过表面上的 M_0 点且与切平面垂直的直线称为曲面在该点的法线. 由解析几何可知法线的方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y-y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z-z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}. \quad (7.5)$$

曲面 Σ 在 M_0 点的切平面的法矢量通常也称为曲面在该点的法矢量.

若简记

$$F_x(x_0, y_0, z_0) = F_x(M_0), \quad F_y(x_0, y_0, z_0) = F_y(M_0),$$

$$F_z(x_0, y_0, z_0) = F_z(M_0),$$

则曲面 Σ 在 M_0 点法线的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{F_x(M_0)}{\pm \sqrt{F_x^2(M_0) + F_y^2(M_0) + F_z^2(M_0)}},$$

$$\cos\beta = \frac{F_y(M_0)}{\pm\sqrt{F_x^2(M_0) + F_y^2(M_0) + F_z^2(M_0)}},$$

$$\cos\gamma = \frac{F_z(M_0)}{\pm\sqrt{F_x^2(M_0) + F_y^2(M_0) + F_z^2(M_0)}}.$$

这里分母根号前的正负号依法线正向的选择而定，或同取正号，或同取负号。

如果曲面 Σ 的方程是由显函数

$$z = f(x, y)$$

的形式给出，则可令

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0.$$

这时有

$$F_x(x, y, z) = f_x(x, y), \quad F_y(x, y, z) = f_y(x, y),$$

$$F_z(x, y, z) = -1.$$

如果函数 $z = f(x, y)$ 的偏导数 $f_x(x, y)$ 、 $f_y(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续，则曲面 Σ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的切平面方程与法线方程分别为

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0), \quad (7.6)$$

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \quad (7.7)$$

曲面 Σ 在点 M_0 的法线的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{f_x}{\pm\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad \cos\beta = \frac{f_y}{\pm\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{-1}{\pm\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

这里记 $f_x = f_x(x_0, y_0)$ ， $f_y = f_y(x_0, y_0)$ 。

有了曲面 Σ ： $z = f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的切平面方程

例 4 求抛物面 $z = 1 - x^2 - y^2$ 在点 $M_0(1, 1, -1)$ 处的切平面和法线方程.

解 设 $z = f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, 则

$$f_x(x, y) = -2x, \quad f_y(x, y) = -2y,$$

$$f_x(1, 1) = -2, \quad f_y(1, 1) = -2.$$

抛物面在点 M_0 的法矢量为

$$\mathbf{n} = \{-2, -2, -1\},$$

因此其切平面方程为

$$z + 1 = -2(x - 1) - 2(y - 1),$$

法线方程为
$$\frac{x - 1}{-2} = \frac{y - 1}{-2} = \frac{z + 1}{-1}.$$

§ 8 多元函数的极值及求法

一 多元函数的极值及求法

多元函数的极值在许多实际问题中有广泛的应用. 现以二元函数为主, 介绍多元函数的极值概念、极值存在的必要条件和充分条件.

定义 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 的某邻域内有定义, 如果对于该邻域内异于 M_0 的一切点 $M(x, y)$, 恒有

$$f(x, y) < f(x_0, y_0),$$

则称函数在点 M_0 有极大值 $f(x_0, y_0)$; 如果对于该邻域内异于 M_0 的一切点 $M(x, y)$, 恒有

$$f(x, y) > f(x_0, y_0),$$

则称函数在点 M_0 有极小值 $f(x_0, y_0)$. 极大值、极小值统称为极值, 使函数取得极值的点 $M_0(x_0, y_0)$ 称为极值点.

例如函数 $z = x^2 + y^2$ 在点 $(0, 0)$ 处有极小值. 因为对于点 $(0, 0)$ 的任一邻域内一切异于 $(0, 0)$ 的点, 函数值皆为正, 而在点 $(0, 0)$ 的函数值为零, 即

$$z = x^2 + y^2 > 0, (x, y) \neq (0, 0).$$

又例如函数 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 在点 $(0, 0)$ 处有极大值. 事实上在点 $(0, 0)$ 的充分小的邻域内一切异于 $(0, 0)$ 的点之函数值都小于 1, 而在点 $(0, 0)$ 处的函数值为 1, 即

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} < 1, (x, y) \neq (0, 0).$$

对于可导的一元函数的极值, 可以用一阶、二阶导数来解决. 对于偏导数存在的二元函数的极值问题, 也可以利用偏导数来解决.

定理 1 (极值的必要条件) 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 具有偏导数, 且在该点处有极值, 则必有

$$f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0. \quad (8.1)$$

证明 为了确定起见, 不妨设函数在点 (x_0, y_0) 处有极大值. 由极大值的定义, 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内异于 (x_0, y_0) 的一切点 (x, y) 皆有

$$f(x, y) < f(x_0, y_0).$$

特殊地在该邻域内取 $y = y_0, x \neq x_0$, 仍有不等式

$$f(x, y_0) < f(x_0, y_0),$$

这就表明一元函数 $f(x, y_0)$ 在 $x = x_0$ 点处取得极大值, 所以

$$\left. \frac{d}{dx} f(x, y_0) \right|_{x=x_0} = 0,$$

即 $f_x(x_0, y_0) = 0.$

同理可证 $f_y(x_0, y_0) = 0.$ 证毕

由于曲面 $z = f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的切平面方程为

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

当点 (x_0, y_0) 为函数的极值点时, 由定理 1 有

$$f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0.$$

这时切平面的方程为 $z - z_0 = 0$, 这就表明曲面在点 $M_0(x_0, y_0,$

z_0) 的切平面平行于 xOy 坐标面.

使得 $f_x(x, y) = 0$ 与 $f_y(x, y) = 0$ 同时成立的点称为函数 $f(x, y)$ 的驻点.

极值的必要条件提供了寻找极值点的途径. 对于偏导数存在的函数来说, 如果它有极值点的话, 则极值点一定是驻点. 但上面的条件并不充分, 即函数的驻点不一定是极值点. 例如点 $(0, 0)$ 是函数 $z = xy$ 的驻点, 但函数在这点处不是极值, 事实上,

$$z \Big|_{(0,0)} = xy \Big|_{(0,0)} = 0,$$

而在原点 $(0, 0)$ 的任一邻域内, 如取 $y = x$ 而 $x \neq 0$ 时, 则有 $z = x^2 > 0$; 如取 $y = -x$ 而 $x \neq 0$ 时, 有 $z = -x^2 < 0$, 于是函数在原点 $(0, 0)$ 既不取极大值, 也不取极小值.

怎样判定一个驻点是不是极值点呢? 下面的极值的充分条件回答了这个问题.

定理 2 (极值的充分条件) 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内连续, 且具有一阶及二阶连续偏导数, 又 $f_x(x_0, y_0) = 0$, $f_y(x_0, y_0) = 0$.

令 $A = f_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f_{yy}(x_0, y_0)$, 则

(1) 当 $B^2 - AC < 0$, 且 $A < 0$ (或 $C < 0$) 时, $f(x_0, y_0)$ 为极大值; 当 $B^2 - AC < 0$, 且 $A > 0$ (或 $C > 0$) 时, $f(x_0, y_0)$ 为极小值;

(2) 当 $B^2 - AC > 0$ 时, $f(x_0, y_0)$ 不是极值;

(3) 当 $B^2 - AC = 0$ 时, $f(x_0, y_0)$ 可能是极值, 也可能不是极值.

证明略.

综合定理 1、2 的结果, 可以把具有二阶连续偏导数的函数 $z = f(x, y)$ 的极值求法叙述如下:

(1) 求方程组

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

的一切实数解，得到所有驻点：

(2) 求出二阶偏数 $f_{xx}(x, y)$ 、 $f_{yy}(x, y)$ 及 $f_{xy}(x, y)$ ，并对每一个驻点，求出二阶偏导数的值 A 、 B 及 C ：

(3) 对每一个驻点，定出 $B^2 - AC$ 的符号，按定理 2 的结论判断驻点是否为极值点，是极大值还是极小值：

(4) 求极值点处的函数值，即得所求的极值。

例 1 求函数 $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$ 的极值。

解 求方程组

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 3x^2 - 6y = 0, \\ f_2(x, y) = 24y^2 - 6x = 0 \end{cases}$$

的一切实际解，求得驻点 $M_1(0, 0)$ 及 $M_2(1, \frac{1}{2})$ ：

求函数 $f(x, y)$ 的二阶偏导数：

$$f_{xx}(x, y) = 6x, \quad f_{yy}(x, y) = -6, \quad f_{xy}(x, y) = 48y,$$

在 $M_1(0, 0)$ 点处， $A = 0$ ， $B = -6$ ， $C = 0$ ，

$$B^2 - AC = 36 > 0,$$

依极值的充分条件知， $f(0, 0) = 5$ 不是函数的极值。

在 $M_2(1, \frac{1}{2})$ 处， $A = 6$ ， $B = -6$ ， $C = 24$ ，

$$B^2 - AC = -108 < 0,$$

而 $A = 6 > 0$ ，依极值的充分条件知， $f(1, \frac{1}{2}) = 4$ 为函数的极小值。

作为多元函数极值的应用——求函数的最小值和最大值，是在实践中常常遇到的问题。在本章 § 1 中已经指出，如果函数在有界闭区域上连续，则在该区域上函数一定有最小值和最大值，而取得最小值或最大值的点既可能是在区域内部的点，也可能是在区域边

界上的点。现在假设函数在有界闭区域上连续，在该区域内可微，而且只有有限个驻点。如果函数在区域的内部取得最小值或最大值，则这个最小值或最大值必定是函数的极小值或极大值。由此可得到求函数最小值和最大值的一般方法：先求出函数在有界闭区域内的所有驻点处的函数值及函数在该区域的边界上的最小值和最大值，然后比较这些数值的大小，其中最大者就是函数的最大值，最小者就是函数的最小值。

例2 在以点 $O(0, 0)$ ， $A(1, 0)$ ， $B(0, 1)$ 为顶点的三角形所围成的有界闭域 D 上求一点，使该点到三个顶点的距离平方和最大，并求出其最大值。

解 如图8-12，在 $\triangle OAB$ 上任取一点 $M(x, y)$ ，该点到三个顶点 O 、 A 及 B 的距离的平方和为

$$z = x^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 + x^2 + (y-1)^2$$

或 $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2, (x, y) \in D.$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 6x - 2 = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 6y - 2 = 0. \end{cases}$$

求得函数 z 在 D 内的驻点 $P(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ 及 $z|_{(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})} = \frac{4}{3}$ 。

再求函数 z 在 D 的边界上的最大值。

在 OA 边上， $y = 0$ ，得 $z = 3x^2 - 2x + 2$ ($0 \leq x \leq 1$)，按一元函数求最大值方法，易求得当 $x = 1$ 时，函数有最大值 $z|_{x=1} = 3$ 。

在 OB 边上， $x = 0$ ，得 $z = 3y^2 - 2y + 2$ ($0 \leq y \leq 1$)，同理可求得当 $y = 1$ 时，函数有最大值 $z|_{y=1} = 3$ 。

在 AB 边上， $x + y = 1$ ，得 $z = 6x^2 - 6x + 3$ ($0 \leq x \leq 1$)，可求得当 $x = 0$ 及 $x = 1$ 时，函数有最大值 $z|_{x=0} = z|_{x=1} = 3$ 。

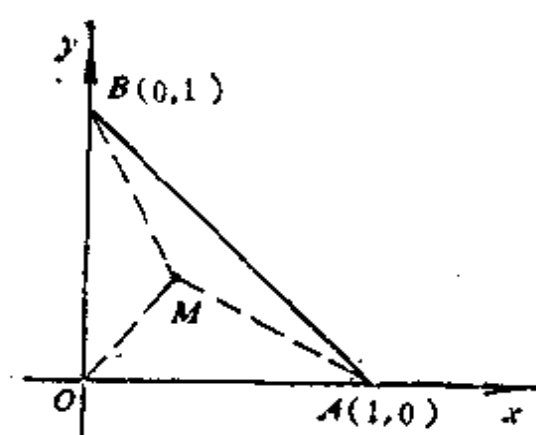


图 8-12

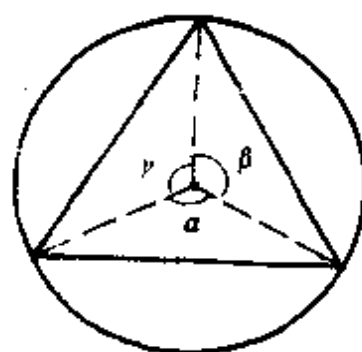


图 8-13

综合比较区域 D 内极值点处的函数值与在 D 的边界上函数最大值的大小，可得在 $\triangle OAB$ 上，以 A 、 B 两点到三顶点距离平方和为最大，最大值为 3。

从本例可以看出，计算函数在有界闭域 D 的边界上的最大或最小值比较麻烦。但是在通常遇到的实际问题中，根据问题的性质，往往可以判定函数的最大（最小）值一定在区域的内部取得。此时

$$(\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta < 2\pi)$$

圆内接三角形的面积 S 是 α 、 β 的二元函数，其中 $\alpha > 0$ ， $\beta > 0$ ， $\alpha + \beta < 2\pi$ 。

令

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{1}{2}R^2[\cos \alpha - \cos(\alpha + \beta)] = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial \beta} = \frac{1}{2}R^2[\cos \beta - \cos(\alpha + \beta)] = 0, \end{cases}$$

解得 $\alpha = \beta = \frac{2\pi}{3}$ ，得唯一驻点 $(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ 。

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{2}R^2(-\sin \alpha + \sin(\alpha + \beta)),$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{1}{2}R^2 \sin(\alpha + \beta),$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \beta^2} = \frac{1}{2}R^2(-\sin \beta + \sin(\alpha + \beta)),$$

将驻点 $(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ 的坐标代入二阶偏导数中，得

$$A = \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha^2} \bigg|_{(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})} = -\frac{\sqrt{3}}{2}R^2,$$

$$B = \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha \partial \beta} \bigg|_{(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})} = -\frac{\sqrt{3}}{4}R^2,$$

$$C = \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^2} \bigg|_{(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})} = -\frac{\sqrt{3}}{2}R^2.$$

因为 $B^2 - AC = -\frac{9}{16}R^4 < 0$ ，且 $A = -\frac{\sqrt{3}}{2}R^2 < 0$ ，所以根

据极值的充分条件可知 $(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ 是面积函数的极大点。

根据问题的几何意义可知,面积最大的圆内接三角形一定存在,并在开区域 $D: \alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta < 2\pi$ 内取得,又面积函数在 D 内只有唯一的驻点 $(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ 而该驻点又是极大点,因此可以断定当 $\alpha = \frac{2\pi}{3}, \beta = \frac{2\pi}{3}$ 时, S 取得最大值.也就是说,在圆的内接三角形中,以等边三角形的面积最大.

例4 设有断面面积为 S (常数)的等腰三角形渠道,当两腰的倾角 α ,高 x ,底边长 y 为多少时,才能使湿周最小(图8-14)?

解 所谓“湿周”就是渠道的断面与水接触的周界的长度,记为 u (如图8-14).

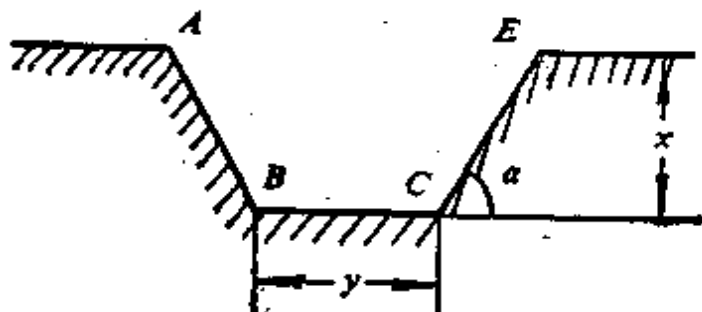


图8-14

$$u = AB + BC + CE,$$

即

$$u = y + \frac{2x}{\sin \alpha},$$

又因

$$S = (y + x \cot \alpha)x,$$

从而解得

$$y = \frac{S}{x} - x \cot \alpha,$$

所以

$$u = \frac{S}{x} + \frac{2 - \cos \alpha}{\sin \alpha} x,$$

$$(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < x < +\infty).$$

即湿周 u 是 α, x 的二元函数。

令

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{1-2\cos\alpha}{\sin^2\alpha} x = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{S}{x^2} + \frac{2-\cos\alpha}{\sin\alpha} = 0, \end{cases}$$

解此方程组得唯一驻点 $\alpha = \frac{\pi}{3}, x = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}$ 。

根据问题的实际意义，在 $D: 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < x < +\infty$ 内，湿

周的最小值一定存在，而在该区域内只有唯一驻点 $(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}})$ ，

故在 $\alpha = \frac{\pi}{3}, x = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}$ 时，湿周 u 取得最小值。

二 条件极值——拉格朗日乘数法

在多元函数的极值问题中，经常还会遇到所谓条件极值，例如，在周长等于 $2a$ 的条件下，求面积最大的矩形，这就是条件极值问题。

如果以 x, y 表示矩形的长和宽，这就相当于在 $x + y = a$ 的条件下，求面积函数 $z = xy$ 的极值。

这类问题的一般提法是：在 $\varphi(x, y) = 0$ 的条件下，求函数 $z = f(x, y)$ 的极值。

以前讨论的多元函数的极值问题，对自变量除了限制在函数的定义域内变化之外，别无其它附加条件的函数的极值问题，称为无条件极值问题。因此无条件极值与条件极值的区别在于前者的变量 x, y 是相互独立的，而后者的变量 x, y 不是互相独立的。

现在的问题是怎样求函数 $z = f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极值。

在有些情况下，如果能从方程 $\varphi(x, y) = 0$ 直接解得 $y = y(x)$ ，

由(4)式就得到

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) + \lambda \varphi_x(x_0, y_0) = 0, \\ f_y(x_0, y_0) + \lambda \varphi_y(x_0, y_0) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

把(1)式与(5)式合并在一起, 就得到条件极值的必要条件为

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) + \lambda \varphi_x(x_0, y_0) = 0, \\ f_y(x_0, y_0) + \lambda \varphi_y(x_0, y_0) = 0, \\ \varphi(x_0, y_0) = 0. \end{cases} \quad (8.2)$$

容易发现(8.2)式中的前两式的左端是函数

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$$

的两个一阶偏导数在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的值, 而 λ 是待定的常数.

综上所述, 可得到求条件极值的拉格朗日乘数法.

拉格朗日乘数法 求函数 $z = f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的可能极值点, 按以下方法进行:

构造函数

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y),$$

其中 λ 是一个待定常数;

求函数 $F(x, y)$ 的偏导数, 并建立方程组:

$$\begin{cases} f_x(x, y) + \lambda \varphi_x(x, y) = 0, \\ f_y(x, y) + \lambda \varphi_y(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0; \end{cases}$$

解此方程组求得 x 、 y 及 λ , 其中 x 、 y 就是可能极值点的坐标.

以上方法可以推广到自变量多于两个的函数及附加条件多于一个的情形, 下面通过具体例子加以说明.

至于如何判定所求得的可能极值点是否极值点, 已超出本书的要求, 这里不再详述. 但是在实际问题中, 通常可根据问题本身的性质来判定.

例5 要建造一个表面积为 $k(k > 0)$ m^2 的长方形无盖水池, 应

如何选择尺寸,才能使其容积最大.

解 设水池的长、宽和深分别为 $x(\text{m})$ 、 $y(\text{m})$ 和 $z(\text{m})$, 那么水池的容积为

$$V = xyz,$$

表面积为

$$xy + 2xz + 2yz = k.$$

现在的问题是: 求函数 $V = f(x, y, z) = xyz$ 在附加条件 $xy + 2xz + 2yz - k = 0$ 下的最大值.

构造函数

$$F(x, y, z) = xyz + \lambda(xy + 2xz + 2yz - k);$$

求 $F(x, y, z)$ 的偏导数, 并建立方程组

$$\begin{cases} yz + \lambda(y + 2z) = 0, \\ xz + \lambda(x + 2z) = 0, \\ xy + \lambda(2x + 2y) = 0, \\ xy + 2xz + 2yz - k = 0. \end{cases}$$

由于 x 、 y 、 z 均为正数, 由第 1, 3 两个方程消去 λ , 得

$$\frac{z}{x} = \frac{y + 2z}{2x + 2y}, \quad y = 2z.$$

由第 1, 2 两个方程消去 λ , 得

$$\frac{y}{x} = \frac{y + 2z}{x + 2z},$$

由于 $y = 2z$ 代入上式可推得 $y = x$, 从而有

$$x = y = 2z.$$

再由条件 $xy + 2xz + 2yz - k = 0$, 得

$$x = y = \frac{\sqrt{3k}}{3}, \quad z = \frac{\sqrt{3k}}{6}.$$

从实际问题本身, 确知最大值一定存在, 所以最大值必定在上面所求得的最唯一可能极值点 $(\frac{\sqrt{3k}}{3}, \frac{\sqrt{3k}}{3}, \frac{\sqrt{3k}}{6})$ 处取得, 所以当

$x = y = \frac{\sqrt{3k}}{3}(\text{m})$, $z = \frac{\sqrt{3k}}{6}(\text{m})$ 时, 水池的容积最大.

例6 在两曲面 $x^2 + y^2 = z$, $x + y + z = 1$ 的交线上, 求到原点最长和最短的距离.

解 设两曲面的交线 $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ x + y + z = 1, \end{cases}$ 上任一点为

$M(x, y, z)$, 则点 M 到原点的距离为

$$l(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

问题可归结为求 l^2 在条件 $x^2 + y^2 = z$ 及 $x + y + z = 1$ 下的极值点.

构造函数

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z) + \mu(x + y + z - 1).$$

解方程组

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda x + \mu = 0, \\ 2y + 2\lambda y + \mu = 0, \\ 2z - \lambda + \mu = 0, \\ x^2 + y^2 - z = 0, \\ x + y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

得 $x_1 = y_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}, z_1 = 2 - \sqrt{3},$

$$x_2 = y_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}, z_2 = 2 + \sqrt{3}.$$

代入函数 $l(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 中, 得

$$l(x_1, y_1, z_1) = \sqrt{9 - 5\sqrt{3}}.$$

$$l(x_2, y_2, z_2) = \sqrt{9 + 5\sqrt{3}}.$$

由于几何问题确实存在最大值和最小值, 所以所求的最短距离为

$$\sqrt{9 - 5\sqrt{3}}, \text{ 最长距离为 } \sqrt{9 + 5\sqrt{3}}.$$

§ 9* 二元函数的台劳公式

一 二元函数的台劳公式

在本章 § 3 二元函数全微分的定义中, 已经知道若函数 $z = f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 可微, 则有

$$\begin{aligned} & f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) \\ &= f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + \omega, \end{aligned}$$

其中 ω 当 $\rho = \sqrt{h^2 + k^2} \rightarrow 0$ 时, 是比 ρ 高阶的无穷小. 这就说明, 当 $|h|$ 、 $|k|$ 充分小时, 在点 M_0 的某邻域内可以用 h 、 k 的一个一次多项式来近似代替 $f(x_0+h, y_0+k)$, 即

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) &\approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)h \\ &\quad + f_y(x_0, y_0)k. \end{aligned}$$

当上式的近似代替的准确程度达不到需要的要求时, 自然会考虑用 h 、 k 的高次多项式来近似代替 h 、 k 的函数 $f(x_0+h, y_0+k)$, 并且能具体估计出误差的大小. 为了解决这一问题, 下面把一元函数的台劳中值定理推广到多元函数的情形.

定理 设二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内具有直到 $n+1$ 阶连续偏导数, (x_0+h, y_0+k) 是该邻域内任一点, 则有

$$\begin{aligned} & f(x_0+h, y_0+k) \\ &= f(x_0, y_0) + \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0, y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x_0, y_0) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x_0, y_0) + R_n, \end{aligned} \quad (9.1)$$

其中

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k),$$

$$(0 < \theta < 1), \quad (9.2)$$

上式的记号

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0, y_0) \text{ 表示 } hf_x(x_0, y_0) + kf_y(x_0, y_0);$$

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x_0, y_0) \text{ 表示 } h^2 f_{xx}(x_0, y_0)$$

$$+ 2hkf_{xy}(x_0, y_0) + k^2 f_{yy}(x_0, y_0);$$

$$\text{一般地, 记号 } \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^m f(x_0, y_0) \text{ 表示}$$

$$\sum_{r=0}^m C_m^r h^r k^{m-r} \left. \frac{\partial^m f(x, y)}{\partial x^r \partial y^{m-r}} \right|_{(x_0, y_0)},$$

$$\text{其中 } C_m^r = \frac{m!}{r!(m-r)!}.$$

证明 为了能利用一元函数的台劳中值定理来证明本定理, 下面考虑一元函数

$$F(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk), \quad (0 \leq t \leq 1).$$

显然有 $F(0) = f(x_0, y_0)$, $F(1) = f(x_0 + h, y_0 + k)$. 由定理所设可知函数 $F(t)$ 在区间 $(0, 1)$ 上具有直至 $n+1$ 阶连续导数, 利用多元复合函数微分法, 并令 $x = x_0 + th$, $y = y_0 + tk$, 得

$$F'(t) = h \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} k = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0 + th, y_0 + tk),$$

$$F''(t) = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$= \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x_0 + th, y_0 + tk),$$

.....

$$\begin{aligned} F^{(n)}(t) &= \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(n)} f(x_0 + th, y_0 + tk) \\ &= \sum_{r=0}^n C_n^r h^r k^{n-r} \frac{\partial^n}{\partial x^r \partial y^{n-r}} f(x_0 + th, y_0 + tk). \end{aligned}$$

从而得

$$F'(0) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0, y_0),$$

$$F''(0) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x_0, y_0),$$

.....

$$F^{(n)}(0) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(n)} f(x_0, y_0),$$

$$F^{(n+1)}(\theta) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(n+1)} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k).$$

利用一元函数的麦克劳林公式, 得

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}t^n + R_n,$$

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} F^{(n+1)}(\theta t), \quad 0 < \theta < 1.$$

令 $t = 1$, 得

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + \dots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + R_n,$$

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} F^{(n+1)}(\theta), \quad (0 < \theta < 1.)$$

于是得到

$$\begin{aligned}
 f(x_0+h, y_0+k) &= f(x_0, y_0) + \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0, y_0) \\
 &\quad + \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x_0, y_0) + \cdots \\
 &\quad + \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x_0, y_0) + R_n, \\
 R_n &= \frac{1}{(n+1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k),
 \end{aligned}$$

$$0 < \theta < 1.$$

公式(9.1)称为函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的 n 阶台劳公式, 而公式(9.2)的 R_n 称为拉格朗日型余项.

若记点 $M_0(x_0, y_0)$ 与 $M(x_0+h, y_0+k)$ 的距离为 ρ ,

$$\rho = \sqrt{h^2 + k^2},$$

由定理假设函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内的各 $n+1$ 阶偏导数都连续, 故它们的绝对值在点 (x_0, y_0) 的某邻域内都不超过某一正数 K , 于是

$$\begin{aligned}
 |R_n| &= \frac{1}{(n+1)!} \left| \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \right| \\
 &= \frac{1}{(n+1)!} \rho^{n+1} \left| \left(\frac{h}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{k}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} \right. \\
 &\quad \left. \cdot f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \right| \\
 &\leq \frac{K}{(n+1)!} \rho^{n+1} \left(\frac{|h|}{\rho} + \frac{|k|}{\rho} \right)^{n+1},
 \end{aligned}$$

由于 $\frac{|h|}{\rho} \leq 1$, $\frac{|k|}{\rho} \leq 1$, 那么 $\left(\frac{|h|}{\rho} + \frac{|k|}{\rho} \right) \leq 2$, 于是

$$|R_n| \leq \frac{2^{n+1}K}{(n+1)!} \rho^{n+1},$$

故知当 $\rho \rightarrow 0$ 时, R_n 是比 ρ^n 高阶的无穷小.

在台劳公式(9.1)中, 如果取 $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, 则 $f(x, y)$ 的 n 阶台劳公式为

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(0, 0) + \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) f(0, 0) \\ & + \frac{1}{2!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(0, 0) + \dots \\ & + \frac{1}{n!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(0, 0) \\ & + \frac{1}{(n+1)!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(\theta x, \theta y), \\ & 0 < \theta < 1. \end{aligned} \quad (9.3)$$

公式(9.3)称函数 $f(x, y)$ 的 n 阶麦克劳林公式.

例1 求函数 $f(x, y) = \ln(1+x+y)$ 的三阶麦克劳林公式.

解 函数 $f(x, y) = \ln(1+x+y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某邻域内有直至 4 阶的连续偏导数:

$$f_1(x, y) = f_2(x, y) = \frac{1}{1+x+y},$$

$$f_{11}(x, y) = f_{12}(x, y) = f_{21}(x, y) = -\frac{1}{(1+x+y)^2},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^r \partial y^{3-r}} = \frac{2!}{(1+x+y)^3}, \quad (r=0, 1, 2, 3),$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^r \partial y^{4-r}} = -\frac{3!}{(1+x+y)^4}, \quad (r=0, 1, 2, 3, 4)$$

那么

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right) f(0, 0) = x f_x(0, 0) + y f_y(0, 0) = x + y,$$

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(0, 0) = x^2 f_{xx}(0, 0) + 2xy f_{xy}(0, 0)$$

$$+ y^2 f_{yy}(0, 0) = -(x + y)^2,$$

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(0, 0) = x^3 f_{xxx}(0, 0) + 3x^2 y f_{xxy}(0, 0)$$

$$+ 3xy^2 f_{xyy}(0, 0) + y^3 f_{yyy}(0, 0)$$

$$= 2(x + y)^3$$

$$f(0, 0) = 0,$$

所以

$$\ln(1 + x + y) = x + y - \frac{1}{2}(x + y)^2 + \frac{1}{3}(x + y)^3 + R_3,$$

$$R_3 = \frac{1}{4!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^4 f(\theta x, \theta y)$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \frac{(x + y)^4}{(1 + \theta x + \theta y)^4}, \quad 0 < \theta < 1.$$

二 二元函数极值充分条件的证明

作为二元函数台劳公式的应用, 下面证明本章 § 8 定理 2 二元函数极值的充分条件.

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 的某邻域内连续, 且具有一阶及二阶连续偏导数, 又 $f_x(x_0, y_0) = 0$, $f_y(x_0, y_0) = 0$.

按照二元函数 $f(x, y)$ 在点 M_0 的台劳公式, 对于 M_0 点某邻域内任一点 $M(x_0 + h, y_0 + k)$, 有

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

$$= f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k$$

$$+ \frac{1}{2!} \{ f_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)h^2$$

其中

$$\varphi(t) = A \cos^2 t + 2B \cos t \sin t + C \sin^2 t,$$

$$e = e_1 \cos^2 t + 2e_2 \cos t \sin t + e_3 \sin^2 t.$$

显然 e 是随着 $h \rightarrow 0$, $k \rightarrow 0$ 而趋于零. 函数 $\varphi(t)$ 在闭区间 $0 \leq t \leq 2\pi$ 上连续, 必取得最大值, 设其为 $\varphi(t_0)$, $t_0 \in [0, 2\pi]$.

(1) 如果 $B^2 - AC < 0$, 故 $A \neq 0$, $C \neq 0$, 且 A, C 符号相同. 因为 M 是异于点 M_0 的另一点, h, k 不同时为零, 不妨设 $k \neq 0$, 从而 $t \neq 0, \pi, 2\pi$, 因此有

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= A \sin^2 t \left(\operatorname{ctg}^2 t + \frac{2B}{A} \operatorname{ctg} t + \frac{C}{A} \right) \\ &= A \sin^2 t \left(u^2 + \frac{2B}{A} u + \frac{C}{A} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $u = \operatorname{ctg} t$. 对括号内的二次三项式, 于其判别式

$$\Delta = \left(\frac{2B}{A} \right)^2 - 4 \cdot \frac{C}{A} = \frac{4}{A^2} (B^2 - AC) < 0,$$

故

$$u^2 + \frac{2B}{A} u + \frac{C}{A} > 0.$$

所以 $\varphi(t)$ 与 A 符号相同

若 $k = 0$ 则 $\varphi(t) = A$, 因此这时 $\varphi(t)$ 与 A 的符号也相同.

(i) 当 $A < 0$ 时, $\varphi(t)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上恒为负, 特别其最大值 $\varphi(t_0)$ 也小于零, 根据

$$\begin{aligned} &f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \\ &= \frac{1}{2} \rho^2 [\varphi(t) + e] \leq \frac{1}{2} \rho^2 [\varphi(t_0) + e], \end{aligned}$$

由于 $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} e = 0$, 那么当 $|h|, |k|$ 充分小时, 上式右端方括号内的值的符号取决于 $\varphi(t_0)$ 的符号, 所以

$$f(x_0+h, y_0+k) < f(x_0, y_0),$$

这就证明了 $f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 处取得极大值.

(ii) 同理可证, 当 $A > 0$ 时, 函数 $f(x, y)$ 在点 M_0 处取得极小值.

(2) 如果 $B^2 - AC > 0$,

(i) 当 A, C 至少有一个不为零时, 不妨设 $A \neq 0$, 则

$$\begin{aligned} \rho^2 \varphi(t) &= Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 \\ &= \frac{1}{A} \{ (Ah + Bk)^2 - k^2 (B^2 - AC) \}, \end{aligned}$$

由上式可知, $\varphi(t)$ 的值可随 h, k 取值的变动有时为正, 有时为负, 故由(1)式可知在点 $M_0(x_0, y_0)$ 的任一邻域内存在着使 $f(x_0+h, y_0+k) > f(x_0, y_0)$ 的点, 也存在着使 $f(x_0+h, y_0+k) < f(x_0, y_0)$ 的点, 这就表明函数 $f(x, y)$ 在点 M_0 处无极值.

(ii) 当 $A=C=0$ 时,

$$\rho^2 \varphi(t) = 2Bhk,$$

显然 $\varphi(t)$ 的值随 h, k 取值的变动有时为正, 有时为负, 与(i)同理, 函数 $f(x, y)$ 在点 M_0 处无极值.

(3) 如果 $B^2 - AC = 0$, 对于

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$$

值的符号尚需另行讨论, 例如下面两个函数

$$f(x, y) = x^2 + y^4 \text{ 及 } g(x, y) = x^3 y^3,$$

显然点 $O(0, 0)$ 都是它们的驻点, 而且容易验算它们都满足 $B^2 - AC = 0$, 但 $f(x, y)$ 在点 O 处有极小值, 而 $g(x, y)$ 在点 O 处却无极值.

第九章 重 积 分

重积分是定积分概念的推广，定积分的被积函数是一元函数，积分的范围是一个闭区间，而重积分的被积函数是多元函数，积分的范围是平面或空间的一个有界闭区域。一般地说， n 元函数在 n 维空间有界闭区域上的积分叫做 n 重积分，统称为重积分。

重积分与定积分虽然形式不同，但是本质上却是一致的，都是一种和式的极限。在计算上，重积分主要是化为累次积分计算。本章中只介绍二重积分和三重积分。

§ 1 二重积分的概念及性质

一 二重积分问题的引例

例1 曲顶柱体的体积 设在直角坐标系 $O-xyz$ 中给定了一个母线平行于 Oz 轴的柱体，柱体的顶是连续曲面 $z=f(x,y)$ ($f(x,y) \geq 0$)，底面是柱面在 xOy 平面上的准线 Γ 所围的平面有界闭区域 D (图9-1)。求此曲顶柱体的体积 V 。

解 如果柱顶是与 xOy 平面平行的平面，那么柱体的体积就等于在闭区域 D 中任何一点 (x,y) 处的函数值 $f(x,y)$ 与闭区域 D 的面积之乘积。现在柱顶是曲面 $z=f(x,y)$ ，在不同的点处， $f(x,y)$ 的值也不同。

为了求出曲顶柱体的体积，把闭区域 D 任意地分割为 n 个闭子域： $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ ，其面积相应地记为 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ 。对每一个闭子域 σ_i ($i=1, 2, \dots, n$)，作以其边界为准线，而母线平行于 Oz 轴的柱面，这些柱面把原来的曲顶柱体分成了 n 个小曲顶柱体，在图9-2中，只画出了第 i 个小曲顶柱体作代表。

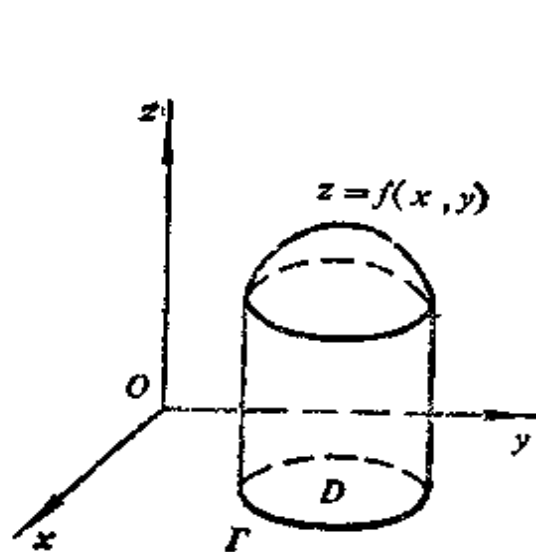


图 9-1

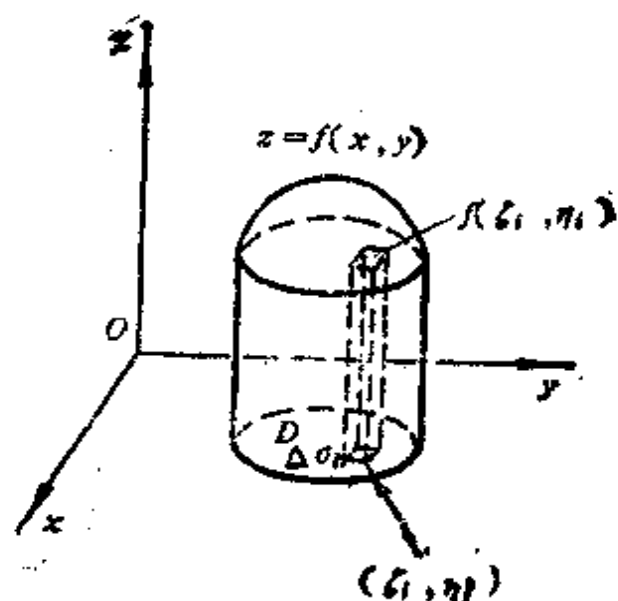


图 9-2

在每一个闭子域 σ_i ($i = 1, 2, \dots, n$)上任选一点 (ξ_i, η_i) ，以 $f(\xi_i, \eta_i)$ 为高、 σ_i 为底作平顶柱体，它的体积为 $f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ ，这就是第 i 个小曲顶柱体体积的近似值。于是所求的曲顶柱体体积的近似值为：

$$V \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

若把一个闭域中任意两点之间的距离的最大值称为这个闭域的“直径”，记闭子域 σ_i 的直径为 λ_i ，令 $\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ ，当 n 无限增大且 λ 趋于零时，如果上述和式的极限存在，那末这个极限值就表示了所求的曲顶柱体的体积，即

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta\sigma_i.$$

例 2 平面薄板的质量 一块密度不均匀的平面薄板，位于 xOy 平面中的有界闭区域 D 上，设其面密度是点的位置的连续函数 $\mu = \mu(x, y)$ ，求此平面薄板的质量 m 。

解 如果面密度 μ 是常数，则此平面薄板的质量就等于面密度 μ 与域 D 的面积之乘积。现在面密度是随点 (x, y) 的位置而变，为了

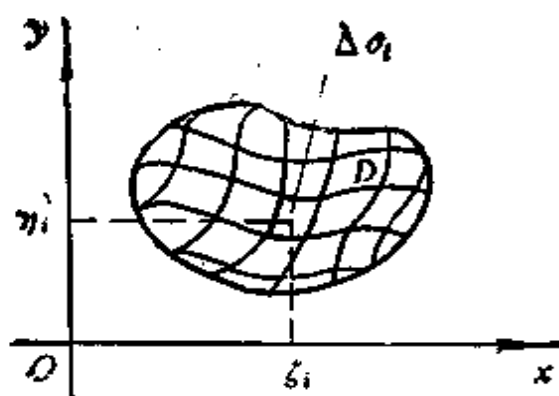


图 9-3

求出薄板的质量，把域 D 任意地分割为 n 个闭子域： $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ ，其面积相应地记为 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ （图9-3）。在 $\Delta\sigma_i$ 上任选一点 (ξ_i, η_i) ，则 $\mu(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ 就是第 i 个闭子域 σ_i 上质量的近似值，于是整个平面薄板的质量的近似值为

$$m \approx \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

当 n 无限增大且闭子域的最大直径 λ 趋于零时，如果这个和式的极限存在时，这个极限值就是所求的平面薄板的质量，即

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta\sigma_i$$

上面两例的求解步骤与求一元函数 $f(x)$ 在闭区间 (a, b) 上的定积分的步骤完全一样，只不过在这里把一元函数 $f(x)$ 换成了二元函数 $f(x, y)$ ，把闭区间 (a, b) 换成了平面上的有界闭区域 D 。

二 二重积分的定义

定义 设 $f(x, y)$ 是定义在平面有界闭区域 D 上的有界函数。将 D 任意地分割成 n 个闭子域 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ ，其面积相应地记为 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ 。设 λ_i 为 σ_i 的直径，记

$$\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}.$$

在 σ_i 中任取一点 $N_i(\xi_i, \eta_i)$ ，作乘积 $f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ ，并作和式

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i.$$

如果当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, I_n 的极限存在, 设为 I , 即

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} I_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = I,$$

其中极限值 I 与域 D 的分法无关, 也与每个闭子域 σ_i 中的点 $N_i(\xi_i, \eta_i)$ 的选取方法无关, 则称 I 为函数 $f(x, y)$ 在有界闭域 D 上的二重

积分, 记为 $\iint_D f(x, y) d\sigma$, 即

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta\sigma_i.$$

其中 $f(x, y)$ 叫做被积函数, D 叫做积分区域, $d\sigma$ 叫做面积元素.

由二重积分的定义知, 例 1 中的曲顶柱体的体积为:

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta\sigma_i = \iint_D f(x, y) d\sigma.$$

例 2 中平面薄板的质量为:

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta\sigma_i = \iint_D \mu(x, y) d\sigma.$$

如果 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 存在, 则称函数 $f(x, y)$ 在有界闭域 D 上可积. 今后在讨论二重积分的时候, 如不另外声明, 总是假定积分区域 D 是有界闭域.

可以证明, 下面的两类函数是可积的 (证明从略):

- 1 有界闭域 D 上的连续函数 $f(x, y)$ 是可积的.
- 2 有界闭域 D 上的有界函数 $f(x, y)$, 如果只在有限条曲线上有间断点, 在其余的点都是连续的, 则 $f(x, y)$ 是可积的.

三 二重积分的性质

二重积分的性质与定积分的性质相似，证明的方法也雷同，下面逐一列出其性质而不再给出证明（以下假设所讨论的函数在积分域 D 上都是可积的）。

性质 1 被积函数中的常数因子可以提到二重积分号的外面，即

$$\iint_D kf(x, y) d\sigma = k \iint_D f(x, y) d\sigma \quad (k \text{ 为常数}).$$

性质 2 函数和(差)的二重积分，等于各函数二重积分的和(差)，即

$$\begin{aligned} \iint_D (f(x, y) \pm g(x, y)) d\sigma &= \iint_D f(x, y) d\sigma \\ &\pm \iint_D g(x, y) d\sigma. \end{aligned}$$

性质 3 若用连续曲线把域 D 分成两个闭子域 D_1 与 D_2 ，则函数在 D 上的二重积分等于它在 D_1 与 D_2 上的二重积分的和，即

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma.$$

性质 3 表示二重积分对于积分域具有可加性。

性质 4 如果域 D 的面积为 S 且在域 D 上 $f(x, y) = 1$ ，则有

$$S = \iint_D 1 d\sigma = \iint_D d\sigma.$$

性质 4 的几何意义是十分明显的，底面积为 S 、高为 1 的平顶柱体的体积，在数值上等于该柱体的底面积 S 。

性质 5 如果在域 D 上有 $f(x, y) \leq g(x, y)$ 则有

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma.$$

由性质 5 可知，由于

$$-|f(x, y)| \leq f(x, y) \leq |f(x, y)|,$$

因此下面的不等式成立:

$$\left| \iint_D f(x, y) d\sigma \right| \leq \iint_D |f(x, y)| d\sigma.$$

性质6 设 M 、 m 分别是 $f(x, y)$ 在有界闭域 D 上的最大值和最小值. S 是域 D 的面积, 则有二重积分的估值不等式:

$$mS \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq MS.$$

推论 若函数 $f(x, y)$ 在面积为 S 的有界闭域 D 上连续, 则必存在点 $(\xi, \eta) \in D$, 使下面的等式成立:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot S.$$

这个推论, 通常又称为二重积分的中值定理.

一般地, 如果 $f(x, y) \geq 0$, 则二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 总可以看成是以曲面 $z = f(x, y)$ 为顶, 以积分区域 D 为底的曲顶柱体的体积. 如果函数 $f(x, y)$ 在积分区域 D 上是非正的, 这时曲顶柱体在 xOy 面的下方, 二重积分的值是其体积冠以负号. 如果函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上是变号的, 则根据上述性质3可知这时二重积分的值就等于 xOy 面上方的曲顶柱体的体积与 xOy 平面下方的曲顶柱体体积之差. 这就是二重积分的几何意义.

§ 2 二重积分的计算

用求和式极限的方法去计算二重积分是十分困难的, 所以要寻求实际可行的计算方法. 下面就来研究如何利用二次单积分(即二次定积分)来计算二重积分.

一 直角坐标系中二重积分的计算方法

由二重积分的定义可知, 如果二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 存在, 它的值与对域 D 的分法无关, 其面积元素 $d\sigma$ 象征着和式极限中的 $\Delta\sigma_i$.

在直角坐标系中, 可以采用便于计算的分割方法: 用平行于 Oy 轴的一组直线及平行于 Ox 轴的一组直线, 把域 D 分为 n 个闭子域 σ_i ($i = 1, 2, \dots, n$), 其面积记为 $\Delta\sigma_i$, 这样除了域 D 的边界上的闭子域含有曲边之外, 其余的闭子域在这种分割下都是小矩形, 设小矩形闭域 $\Delta\sigma_i$ 的边长为 Δx_i 和 Δy_i , 则 $\Delta\sigma_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$. 因此, 在直角坐标系中, 也把面积元素 $d\sigma$ 记为 $dx dy$. 这样, 二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 就可以记为 $\iint_D f(x, y) dx dy$. 即在直角坐标系中有

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

设积分域 D 是用下面的不等式表示的有界闭区域 (简称为 X -型区域):

$$\varphi(x) \leq y \leq \psi(x), \quad a \leq x \leq b.$$

即 $y = \varphi(x)$ 与 $y = \psi(x)$ 分别是域 D 的边界被直线 $x = a$, $x = b$ 分成的上、下两条曲线的方程 (图9-4). 从几何的观点看, 当

$f(x, y) \geq 0$ 时, 二重积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 可以理解为以 $z =$

$f(x, y)$ 为曲顶, 积分域 D 为底的曲顶柱体的体积. 现在, 应用定积分的方法来求此曲顶柱体的体积 (图9-5).

用一组平行于 yOz 坐标面的平面去截曲顶柱体, 在点 $(x, 0, 0)$ 处 ($a \leq x \leq b$) 的截面是曲边梯形 $PQRS$ (图9-5中的阴影所示), 其面积为

$$A(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy.$$

变量 x 在 $[a, b]$ 上作定积分.

这表明, 二重积分可以化为二次积分来计算. 象(1)式右边那样的先对 y , 后对 x 的二次积分, 习惯上记为

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy.$$

因此, (1)式也可以写成:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy. \quad (1')$$

设积分域 D 是用下面的不等式表示的有界闭区域 (简称为 Y -型区域):

$$\varphi(y) \leq x \leq \psi(y), \quad c \leq y \leq d.$$

(图9-6). 类似地有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \right] dy \quad (2)$$

(2)式习惯上也可以写成:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \quad (2')$$

这就是把二重积分化为先对 x , 后对 y 的二次积分的公式.

公式(1)与(2)给出了简单域 (X -型区域及 Y -型区域) 上的二重积分的计算方法——累次积分法. 在上面的推导中, 假定 $f(x, y) \geq 0$. 实际上这个假定可以去掉. 即对有界闭域 D 上的任意的连续函数 $f(x, y)$, 公式(1)、(2)都是成立的.

由于简单域的特点是它的边界曲线与平行于 Oy 轴 (或 Ox 轴) 的直线的交点不多于两个 (域 D 的边界或部分边界可以是平行于 Oy 轴或 Ox 轴的直线段). 如果域 D 不满足简单域的条件. 如图9-7中的域 D , 可以用平行于 Oy 轴的直线将它分成 D_1, D_2, D_3 三部分, 使每一部分都是简单域. 于是域 D 上的二重积分就化成了简单域 D_1, D_2, D_3 上二重积分之和. 类似地, 也可以用平行于 Ox

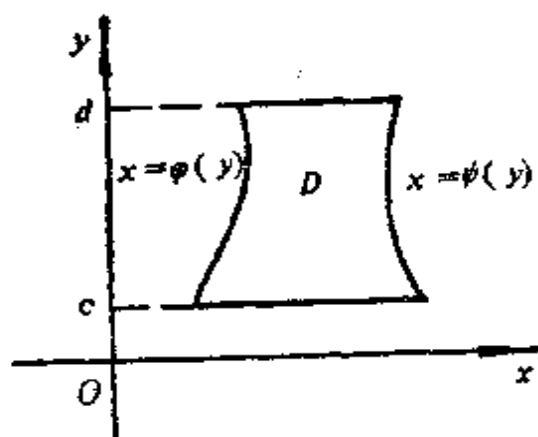


图 9-6

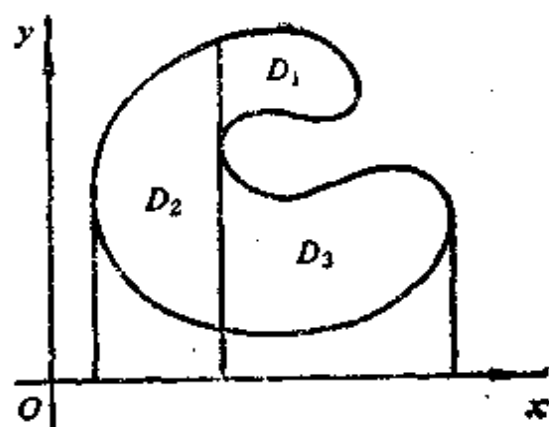


图 9-7

轴的直线把不满足简单域条件的域 D 分成若干个简单域之和。

如果积分域 D 既是 X -型的，又是 Y -型的，把二重积分化为累次积分计算时，就有两种积分顺序：先对 y 积分，后对 x 积分及先对 x 积分，后对 y 积分。即

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \\ &= \int_c^d dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \end{aligned} \quad (3)$$

这两种积分顺序都是应该掌握的。并且在计算时，应当按照积分的顺序正确地确定出各个单积分的上、下积分限。

当积分区域 D 为矩形区域：

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d$$

时，则有

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \\ &= \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx. \end{aligned} \quad (3')$$

例 1 计算二重积分 $\iint_D \left(1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{4}\right) dx dy$ ，其中 D 为矩

形域: $-1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2$.

解 先画出积分域 D 的图形 (图9-3), 依先对 y 后对 x 的积分顺序化为累次积分, 在对 y 积分时, 把 x 看作常量, 得

$$\begin{aligned} \iint_D \left(1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{4}\right) dx dy &= \int_{-1}^1 dx \int_{-2}^2 \left(1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{4}\right) dy \\ &= \int_{-1}^1 \left[y - \frac{x}{3} y - \frac{1}{8} y^2 \right]_{-2}^2 dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(4 - \frac{4}{3} x\right) dx \\ &= 4 \cdot 2 \\ &= 8 \end{aligned}$$

当然, 本题也可以依先对 x 后对 y 的积分顺序化为累次积分计算:

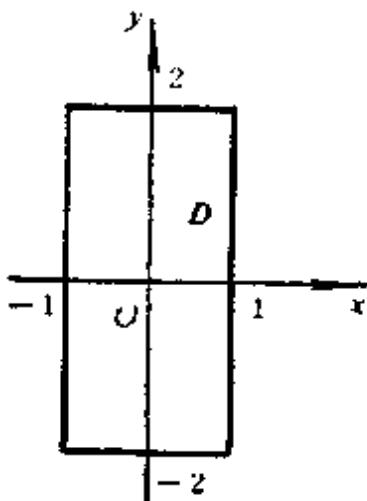


图9-8

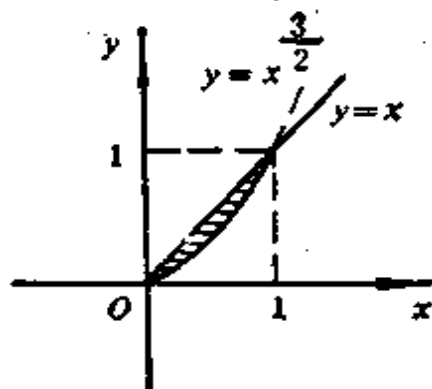


图9-9

$$\begin{aligned} \iint_D \left(1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{4}\right) dx dy &= \int_{-2}^2 dy \int_{-1}^1 \left(1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{4}\right) dx \\ &= \int_{-2}^2 \left[x - \frac{1}{6} x^2 - \frac{y}{4} x \right]_{-1}^1 dy \\ &= \int_{-2}^2 \left(2 - \frac{1}{2} y\right) dy \end{aligned}$$

$$= 2 \cdot 4$$

$$= 8.$$

例2 计算二重积分 $\iint_D xy dx dy$, 其中 D 为由半立方抛物线 $y = x^{\frac{3}{2}}$ 及直线 $y = x$ 所围的闭域.

解 先画出积分域 D 的图形 (图9-9中的阴影部分), 解得 $y = x^{\frac{3}{2}}$ 与 $y = x$ 的交点为 $(0, 0)$ 及 $(1, 1)$. 域 D 是 X -型的;

$$x^{\frac{3}{2}} \leq y \leq x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

因此,

$$\begin{aligned} \iint_D xy dx dy &= \int_0^1 dx \int_{x^{\frac{3}{2}}}^x xy dy \\ &= \int_0^1 x \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x^3 - x^4) dx \\ &= \frac{1}{40}. \end{aligned}$$

另外, 域 D 也是 Y -型的:

$$y \leq x \leq y^{\frac{2}{3}}, \quad 0 < y \leq 1$$

有

$$\begin{aligned} \iint_D xy dx dy &= \int_0^1 dy \int_y^{y^{\frac{2}{3}}} xy dx \\ &= \int_0^1 y \left(\frac{1}{2} y^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{2} y^2 \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(y^{\frac{7}{3}} - y^3 \right) dy \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{40}.$$

例3 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{|y-x^2|} dx dy$, 其中 D 是由直线 $x=-1$, $x=1$, $y=0$ 及 $y=2$ 所围成的闭区域.

解 先画出域 D 的图形 (图9-10), 由绝对值的定义将积分域进行分割. 因为

$$|y-x^2| = \begin{cases} y-x^2, & \text{当 } y \geq x^2; \\ x^2-y, & \text{当 } y < x^2. \end{cases}$$

所以在域 D 内, 抛物线 $y=x^2$ 将 D 分为上、下两个部分 D_1 及 D_2 , 且均为 X -型的. 于是有

$$\begin{aligned} & \iint_D \sqrt{|y-x^2|} dx dy \\ &= \iint_{D_1} \sqrt{y-x^2} dx dy + \iint_{D_2} \sqrt{x^2-y} dx dy \\ &= \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^2 \sqrt{y-x^2} dy + \int_{-1}^1 dx \int_0^{x^2} \sqrt{x^2-y} dy \\ &= \int_{-1}^1 \frac{2}{3} (2-x^2)^{\frac{3}{2}} dx + \int_{-1}^1 \frac{2}{3} |x|^3 dx \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

例4 计算二重积分 $\iint_D x^2 e^{-y^2} dx dy$, 其中 D 是由直线 $x=0$, $y=1$ 及 $y=x$ 所围成的闭域.

解 先画出积分域 D 的图形 (图9-11), 它既是 X -型的, 又是 Y -型的. 选择先对 x 后对 y 的积分顺序, 有

$$\iint_D x^2 e^{-y^2} dx dy = \int_0^1 dy \int_0^y x^2 e^{-y^2} dx$$

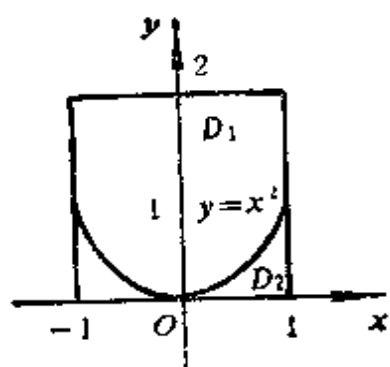


图 9-10

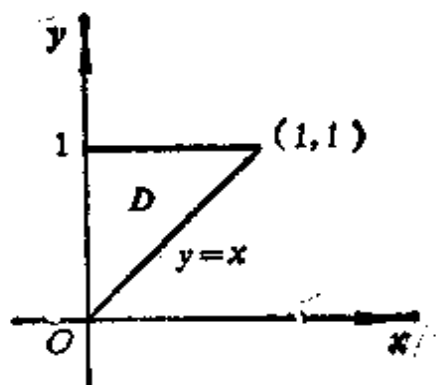


图 9-11

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3} \int_0^1 y^3 e^{-y^2} dy \\
 &= \frac{1}{6} \int_0^1 y^2 e^{-y^2} dy \\
 &\quad \underline{u=y^2} \quad \frac{1}{6} \int_0^1 u e^{-u} du \\
 &= \frac{1}{6} \left[-u e^{-u} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-u} du \right] \\
 &= \frac{1}{6} - \frac{1}{3e}.
 \end{aligned}$$

在本例中，若把二重积分化为先对 y ，后对 x 的二次积分，由于 e^{-y^2} 没有初等的原函数，这时积分难以进行。这表明本例中的二重积分不宜进行先对 y ，后对 x 的二次积分。

把二重积分化为二次积分时，积分顺序的不同往往使计算的繁简也会不同。所以在计算二重积分时，应当先考查一下被积函数的性质和积分域的形状，以决定采用那一种积分顺序的二次积分来进行计算。

例 5 狄利赫勒 (Dirichlet) 公式 设域 D 为如图 9-12 所示的直角三角形闭域，函数 $f(x, y)$ 在域 D 上连续，显然有狄利赫勒公

式

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x, y) dx.$$

若 $f(x, y)$ 为仅含 y 的函数 $f(y)$, 则有

$$\begin{aligned} \int_a^b dx \int_a^x f(y) dy &= \int_a^b dy \int_y^b f(y) dx \\ &= \int_a^b f(y) \left[\int_y^b dx \right] dy \\ &= \int_a^b f(y) (b - y) dy. \end{aligned}$$

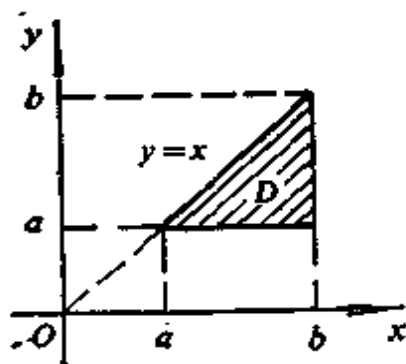


图 9-12

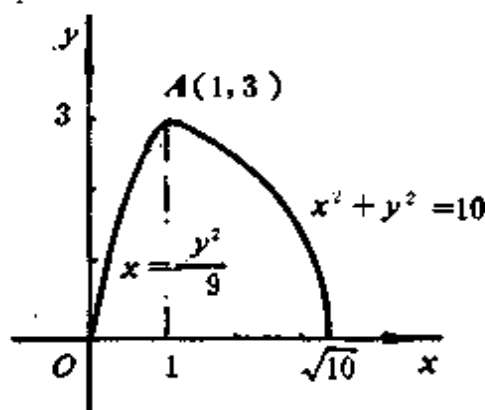


图 9-13

例 6 设 $f(x, y)$ 为连续函数, 改变二次积分 $\int_0^3 dy \int_{\frac{y^2}{9}}^{\sqrt{10-y^2}} f(x, y) dx$ 的积分顺序.

解 先画出所给的二次积分的积分区域的图形 (图 9-13).

改变二次积分的积分顺序, 即先对 y 积分后对 x 积分. 由于在 x 的变化范围 $(0, \sqrt{10})$ 内, 域的上缘边界曲线不能用同一个方程表示, 因此必须分为两个积分来表示. 即

$$\int_0^3 dy \int_{\frac{y^2}{9}}^{\sqrt{10-y^2}} f(x, y) dx = \int_0^1 dx \int_0^{3\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_1^{\sqrt{10}} dx \int_{\sqrt{10-x^2}}^3 f(x, y) dy$$

$$+ \int_1^{\sqrt{10}} dx \int_0^{\sqrt{10-x^2}} f(x, y) dy.$$

二 极坐标系中二重积分的计算方法

1 二重积分由直角坐标变换为极坐标的变换公式

在定积分中，常用变量代换的办法来简化计算，二重积分也有变量代换的问题，对于某些被积函数或某些积分区域，用直角坐标系来计算往往很困难，而用极坐标来计算就较为简便。下面主要介绍直角坐标系变为极坐标系的二重积分的计算方法。

若 $f(x, y) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = F(\rho, \theta)$ ，并设 $F(\rho, \theta)$ 是极坐标系中域 D 上的连续函数，并且假定除边界： $\theta = \alpha$ ， $\theta = \beta$ 之外，从极点 O 引出的射线与 D 的边界的交点不多于两个，并且总假定 $\rho \geq 0$ 。

用 $\rho = \text{常数}$ 及 $\theta = \text{常数}$ 的两组坐标线把域 D 分为 n 个子域。除了边界线处的子域之外，绝大多数的子域的形状都如图9-14所示，其中任意的一个子域 σ_i 的面积 $\Delta \sigma_i$ 为

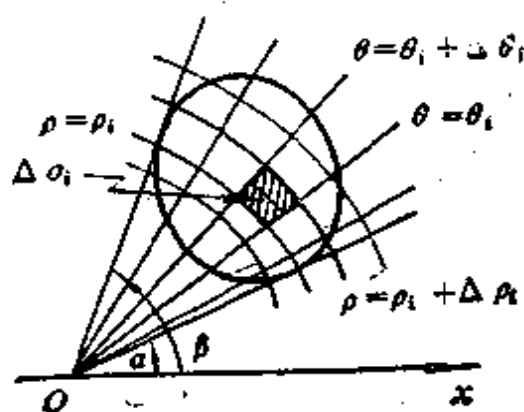


图9-14

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_i &= \frac{1}{2} (\rho_i + \Delta \rho_i)^2 \Delta \theta_i - \frac{1}{2} \rho_i^2 \Delta \theta_i \\ &= \left(\rho_i + \frac{1}{2} \Delta \rho_i \right) \Delta \rho_i \Delta \theta_i \end{aligned}$$

若取 $\rho_i' = \rho_i + \frac{1}{2} \Delta \rho_i$, 即 ρ_i' 为 ρ_i 与 $\rho_i + \Delta \rho_i$ 的算术平均值, 则有

$$\Delta \sigma_i = \rho_i' \Delta \rho_i \Delta \theta_i$$

由直角坐标与极坐标之间的关系, 设 $x_i' = \rho_i' \cos \theta_i'$, $y_i' = \rho_i' \sin \theta_i'$. ($(\rho_i', \theta_i') \in \sigma_i$) 于是得

$$f(x_i', y_i') = f(\rho_i' \cos \theta_i', \rho_i' \sin \theta_i') = F(\rho_i', \theta_i').$$

由二重积分的定义, 有

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_D f(x, y) d\sigma \\ &= \lim_{i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i', y_i') \cdot \Delta \sigma_i \\ &= \lim_{i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(\rho_i', \theta_i') \cdot \Delta \sigma_i \\ &= \lim_{i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(\rho_i', \theta_i') \cdot \rho_i' \Delta \rho_i \Delta \theta_i \\ &= \iint_D F(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta. \quad (4) \end{aligned}$$

公式(4)就是由直角坐标系下的二重积分变为极坐标系下的二重积分公式. 显然, 在极坐标系下面积元素 $d\sigma = \rho d\rho d\theta$.

由于二重积分的值与对域 D 的分割方法无关. 因此无论是用直角坐标系中的分割方法, 还是用极坐标系中的分割方法, 所得到的二重积分的值都是相等的.

2 极坐标系中的二次积分

极坐标系下二重积分的计算, 同样是化为二次积分来作. 只不

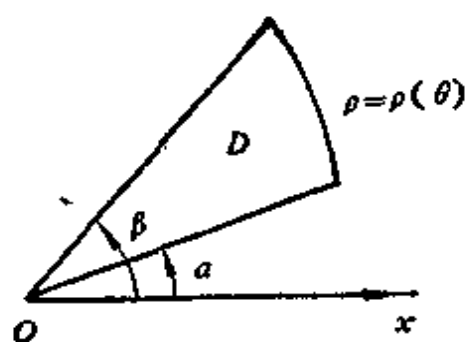


图 9-16

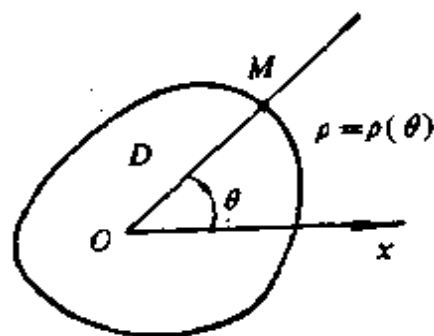


图 9-17

表示 (图9-17), 则有

$$\iint_D F(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\rho(\theta)} F(\rho, \theta) \rho d\rho.$$

例 7 利用极坐标计算二重积分 $\iint_D (1-x^2-y^2) dx dy$, 其中积分区域 D 为: $x^2+y^2 \leq 1$.

解 域 D 在极坐标系下可以用不等式表示为:

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

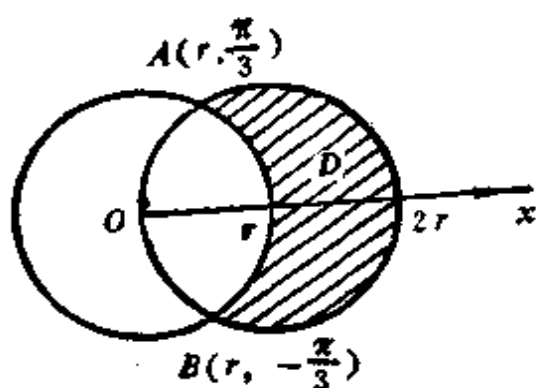


图 9-18

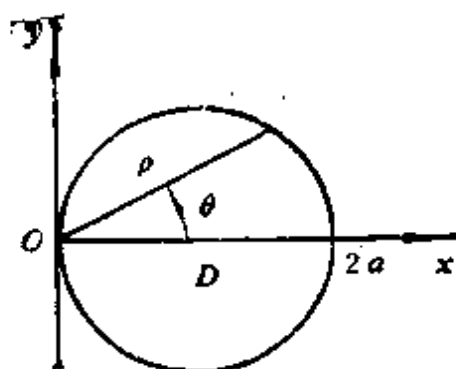


图 9-19

$$\begin{cases} \rho = r, \\ \rho = 2r \cos \theta. \end{cases}$$

得两圆的交点 $A(r, \frac{\pi}{3})$ 和 $B(r, -\frac{\pi}{3})$. 故所求面积的区域可以用不等式表示为

$$r \leq \rho \leq 2r \cos \theta, \quad -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}.$$

于是

$$\begin{aligned} S &= \iint_D d\sigma = \iint_D \rho d\rho d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_r^{2r \cos \theta} \rho d\rho \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\rho^2)_r^{2r \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} r^2 (4 \cos^2 \theta - 1) d\theta \\ &= \frac{r^2}{2} (\sin 2\theta + \theta) \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= r^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

例9 求 $\iint_D (x+2y)\sqrt{x^2+y^2} dx dy$, 其中积分区域 D 为:

$x^2+y^2 \leq 2ax$ (图9-19).

解 域 D 的边界曲线方程为 $\rho = 2a \cos \theta$, 且 $0 \leq \rho \leq 2a \cos \theta$,
 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. 则有

$$\begin{aligned} & \iint_D (x+2y)\sqrt{x^2+y^2} dx dy \\ &= \int_D (\rho \cos \theta + 2\rho \sin \theta) \rho \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} (\cos \theta + 2\sin \theta) \rho^3 d\rho \\ &= 4a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta + 2\sin \theta) \cos^4 \theta d\theta \\ &= \frac{64}{15} a^4. \end{aligned}$$

例10 计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$, 其中 D 为由圆周 $x^2+y^2=a^2$ 所围成的闭域.

解 域 D 可以用不等式表示为: $0 \leq \rho \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. 故

$$\begin{aligned} \iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_D e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a e^{-\rho^2} \rho d\rho \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right]_0^a d\theta \\ &= \frac{1}{2} (1 - e^{-a^2}) \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \pi (1 - e^{-a^2}). \end{aligned}$$

例11 计算广义积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ 的值.

解 由于 e^{-x^2} 没有初等的原函数, 直接计算困难较大. 利用例10的结果, 设 $D_1: x^2 + y^2 \leq R^2 (x \geq 0, y \geq 0)$, $S: 0 \leq x \leq R, 0 \leq y \leq R$, $D_2: x^2 + y^2 \leq 2R^2 (x \geq 0, y \geq 0)$ 如图9-20所示, 则有: $D_1 \subset S \subset D_2$, 由于 $e^{-x^2-y^2} > 0$, 故

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} e^{-x^2-y^2} dx dy &\leq \iint_S e^{-x^2-y^2} dx dy \\ &\leq \iint_{D_2} e^{-x^2-y^2} dx dy \end{aligned}$$

即

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}) \leq \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2})$$

令 $R \rightarrow +\infty$, 取极限. 由于上式两端的极限值均为 $\frac{\pi}{4}$, 故

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

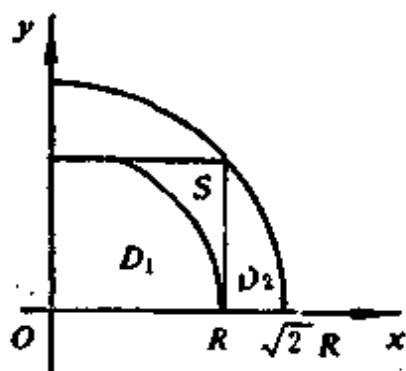


图9-20

*三 二重积分的一般变量代换

在二重积分中, 除了使用极坐标代换之外, 还可以作一般的变量代换. 变量代换的目的是使二重积分的计算变得更容易一些. 下面仅给出结论而不予以证明.

定理 若函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续. 设变换式: $x=x(u, v), y=y(u, v)$ 把 uov 平面上的有界闭域 D' 一对一的①

① 设 φ 是集 A 到集 B 的变换, 若对 A 中的每一元素 a , 有唯一的 $b = \varphi(a) \in B$, 且对 B 中的每一元素 b , 必在 A 中有唯一的元素 a , 适合 $\varphi(a) = b$, 则称 φ 是 A 到 B 的一一对应, 或称变换 $\varphi: A \rightarrow B$ 是一一对应的.

变为 xOy 平面上的域 D ，又设 $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$ 在域 D' 上对 u, v 有一阶连续的偏导数，且雅可比 (Jacobi) 行列式

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

则有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv. \quad (5)$$

应当指出，在进行二重积分的变量代换时，选择变换式 $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$ 的依据有三条：(1) $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$ 对 u, v 有一阶连续的偏导数，并且雅可比行列式 $J \neq 0$ （如果雅可比行列式 J 只在 D' 内个别点上，或在一条曲线上为零，而在其它点上不为零，那么变换式(5)仍然成立）；(2) 使得变换式对新变量 u, v 的积分限比较易于确定；(3) 变换后的对新变量 u, v 的积分比原来的积分更易于计算出结果。

例12 试用一般变量代换写出直角坐标变为极坐标的二重积分的公式。

解 因为代换式为 $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ ，且雅可比行列式

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} \\ = \rho,$$

除个别点 $\rho=0$ 之外，其他点均有 $J \neq 0$ 。所以有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \rho d\rho d\theta.$$

例13 求由曲面 $z = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ 及 $z = 0$

($a > 0, b > 0; c > 0$) 所围立体的体积 V .

解 所求立体的体积为

$$V = \iint_D c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy,$$

其中积分区域 D 为: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$. 作广义极坐标变换 $x = a\rho\cos\theta, y = b\rho\sin\theta$, 则域 D 变为域 D' : $0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, 雅可比行列式为

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -a\rho\sin\theta \\ b\sin\theta & b\rho\cos\theta \end{vmatrix} = ab\rho,$$

故有

$$\begin{aligned} V &= \iint_{D'} c \sqrt{1 - \rho^2} |J| d\rho d\theta \\ &= \iint_{D'} abc \sqrt{1 - \rho^2} \rho d\rho d\theta = abc \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2} \rho d\rho \\ &= 2\pi abc \left[-\frac{1}{3} (1 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \pi abc. \end{aligned}$$

例14 求由抛物线 $y^2 = x, y^2 = 2x$ 及双曲线 $xy = 2, xy = 3$ 所围成的闭域 D 的面积 (图9-21).

解 作变换:

$$\begin{cases} u = \frac{y^2}{x} \\ v = xy \end{cases}$$

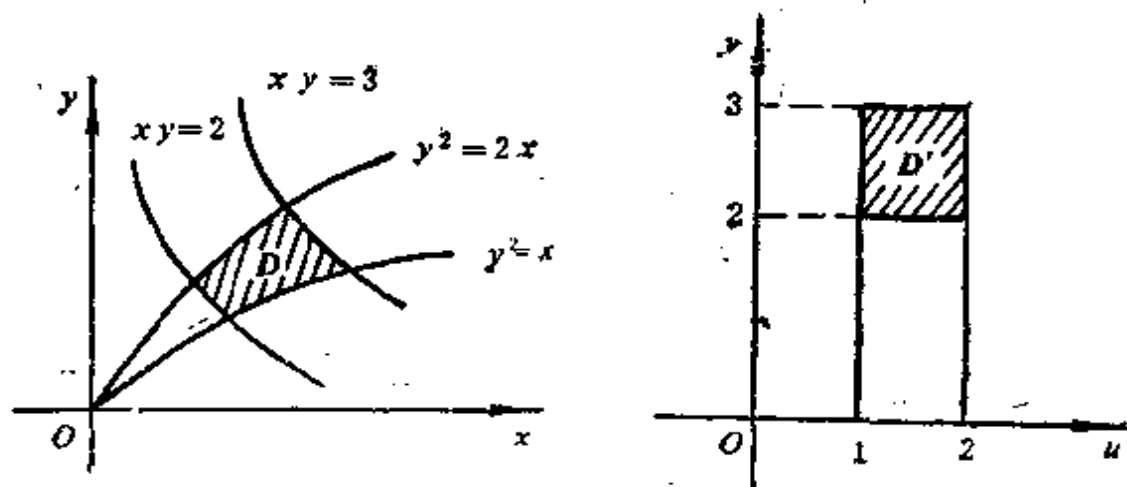


图 9-21

在这个变换下, xoy 平面上的区域 D 变为 uov 平面上的区域 D' , $1 \leq u \leq 2$, $2 \leq v \leq 3$. 且

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} = \frac{1}{\frac{3y^2}{x}} = \frac{1}{3u} \neq 0$$

于是所求的面积 S 为

$$\begin{aligned} S &= \iint_D dx dy = \iint_{D'} \frac{1}{3u} du dv = \frac{1}{3} \int_2^3 dv \int_1^2 \frac{1}{u} du \\ &= \frac{1}{3} \ln 2. \end{aligned}$$

§ 3 三重积分的概念及性质

一 三重积分的定义

定义 设 $f(x, y, z)$ 是定义在空间有界闭域 Ω 上的有界函数, 把 Ω 任意地分为 n 个子域 v_1, v_2, \dots, v_n , 其体积相应地记为 $\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n$. 若把 v_i ($i=1, 2, \dots, n$) 的直径 (即 v_i 中任意两点间距离的最大值) 记为 λ_i , 并记 $\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, 在子域 v_i 上任取一点 $N_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ 作和式

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta v_i.$$

如果当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, I_n 的极限存在, 设为 I , 即

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} I_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta v_i = I.$$

其中极限值 I 与域 Ω 的分法无关, 也与各子域 v_i 上的点 $N_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ 的取法无关, 则称 I 为函数 $f(x, y, z)$ 在域 Ω 上的三重积分, 记为 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$, 即

$$I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta v_i = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv.$$

上式中 $f(x, y, z)$ 称为被积函数, dv 称为体积元素, $f(x, y, z) dv$ 称为被积式, Ω 称为积分区域.

如果三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$ 存在, 则称函数 $f(x, y, z)$ 在有界闭域 Ω 上是可积的. 三重积分的可积函数的类型与二重积分类似. 例如, 空间有界闭域 Ω 上的连续函数 $f(x, y, z)$ 是可积的; 空间有界闭域 Ω 上的有界函数 $f(x, y, z)$, 如果只在有限张曲面上有间断点, 在其余的点处都是连续的, 则 $f(x, y, z)$ 是可积的. 其它的可积函数情况, 这里不再赘述.

如果一个物体所在的范围为三维空间中的有界闭域 Ω , 而函数 $\mu = f(x, y, z)$ 表示了在 Ω 中点 $N(x, y, z)$ 处的密度, 则此物体的质量 M 就是 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上的三重积分:

$$M = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv.$$

作为特例, Ω 的体积 V 可以用三重积分表示为:

$$V = \iiint_{\Omega} dv.$$

二 三重积分的性质

三重积分的性质与二重积分类似，下面列出一些基本性质，其中域 Ω 为空间的有界闭域。

性质1 若函数 $f(x, y, z)$ 在域 Ω 上可积， k 为常数，则 $kf(x, y, z)$ 在 Ω 上也可积，且有

$$\iiint_{\Omega} kf(x, y, z)dv = k \iiint_{\Omega} f(x, y, z)dv.$$

性质2 若函数 $f_1(x, y, z)$ 及 $f_2(x, y, z)$ 在 Ω 上均可积，则 $f_1(x, y, z) \pm f_2(x, y, z)$ 在 Ω 上也可积，且有

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} (f_1(x, y, z) \pm f_2(x, y, z))dv \\ &= \iiint_{\Omega} f_1(x, y, z)dv \pm \iiint_{\Omega} f_2(x, y, z)dv. \end{aligned}$$

性质3 设用连续曲面把 Ω 分为两个子域 Ω_1 与 Ω_2 ，而 $f(x, y, z)$ 在 Ω_1 与 Ω_2 上均可积，则 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上也可积，且有

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z)dv &= \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z)dv \\ &+ \iiint_{\Omega_2} f(x, y, z)dv. \end{aligned}$$

性质4 若 $f(x, y, z)$ 与 $g(x, y, z)$ 在 Ω 上均可积，且 $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$ ，则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dv \leq \iiint_{\Omega} g(x, y, z)dv.$$

性质5 设函数 $f(x, y, z)$ 在体积为 V 的有界闭域 Ω 上连续， M, m 分别为 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上的最大值与最小值，则有

$$mV \leq \iiint_{\Omega} f(x, y, z)dv \leq MV.$$

中值定理 设函数 $f(x, y, z)$ 在体积为 V 的有界闭域 Ω 上连

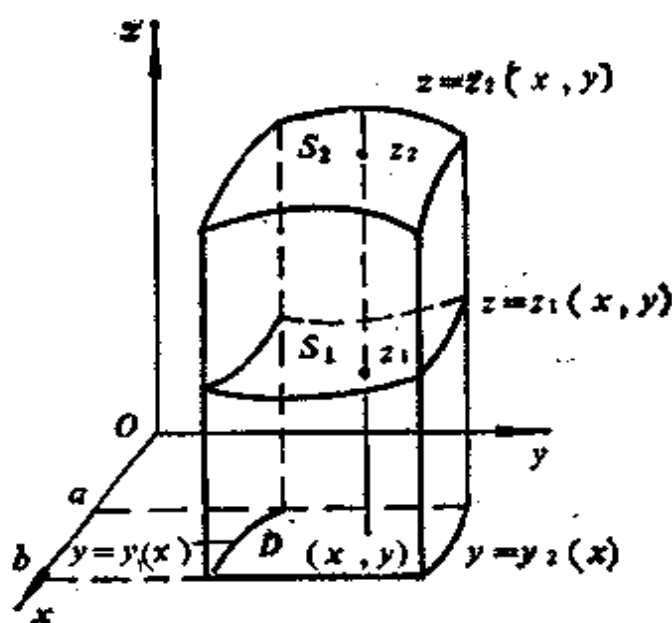


图 9-22

$$\varphi(x, y) = \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

也存在着二重积分

$$\iint_D \varphi(x, y) dx dy$$

这时

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz &= \iint_D \varphi(x, y) dx dy \\ &= \iint_D \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy \\ &= \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \end{aligned}$$

如果闭区域 D 可用不等式表示为

$$y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \quad a \leq x \leq b,$$

则有

$$\begin{aligned}
& \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \\
&= \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \\
&= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \quad (9.1)
\end{aligned}$$

(9.1)式右边的累次积分就是 $f(x, y, z)$ 在域 Ω 上的三次积分。在作这个三次积分时，先对变量 z 积分，视被积函数 $f(x, y, z)$ 中的变量 x, y 为常量，第一次积分结束后，仿此再对变量 y ，最后对变量 x 积分。

如果平行于 Ox 轴或 Oy 轴且穿过闭区域 Ω 内部的直线与 Ω 的边界曲面 S 的交点不多于两个，也可以把闭区域 Ω 投影到 yOz 面上或 xOz 面上，便可把三重积分化为依其它的顺序的三次积分。

例如可以把三重积分化为下面的累次积分

$$\begin{aligned}
& \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \\
&= \iint_D dx dz \int_{y_1(x, z)}^{y_2(x, z)} f(x, y, z) dy \\
&= \int_a^b dx \int_{z_1(x)}^{z_2(x)} dz \int_{y_1(x, z)}^{y_2(x, z)} f(x, y, z) dy. \quad (9.2)
\end{aligned}$$

(其中: $y_1(x, z) \leq y \leq y_2(x, z)$ $z_1(x) \leq z \leq z_2(x)$, $a \leq x \leq b$). 或

$$\begin{aligned}
& \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \\
&= \iint_D dy dz \int_{x_1(y, z)}^{x_2(y, z)} f(x, y, z) dx
\end{aligned}$$

$$= \int_c^d dy \int_{z_1(y)}^{z_2(y)} dz \int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x, y, z) dx \quad (9.3)$$

(其中: $x_1(y, z) \leq x \leq x_2(y, z)$, $z_1(y) \leq z \leq z_2(y)$, $c \leq y \leq d$).

当平行于坐标轴的直线与空间有界闭区域 Ω 的边界曲面的交点多于两个时, 仿照二重积分对积分区域的处理办法, 把空间有界闭域 Ω 分成几个部分, 使每一部分的边界曲面与平行于某坐标轴的直线的交点不多于两个, 把 Ω 上的三重积分化为各部分闭域上的三重积分的和.

例1 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$, 其中 Ω 是由三个坐标面及 $z=2$ 和 $x+2y=2$ 所围成的空间有界闭域(图9-23).

解 Ω 在 xOy 平面上的投影区域 D 为:

$0 \leq y \leq -\frac{1}{2}x + 1$, $0 \leq x \leq 2$. 先对 z 积分, z 的变化范围是: $0 \leq z \leq 2$. 故

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z dx dy dz &= \iint_D dx dy \int_0^2 z dz \\ &= \int_0^2 dx \int_0^{-\frac{1}{2}x+1} dy \int_0^2 z dz \\ &= \int_0^2 dx \int_0^{-\frac{1}{2}x+1} 2 dy \\ &= \int_0^2 (-x+2) dx \\ &= 2. \end{aligned}$$

例2 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, 其中 Ω 为曲面 $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ 和三个坐标面所围成的在第一卦限部分的有界闭域(图9-24).

解 Ω 在 xOy 平面上的投影区域 D 为:

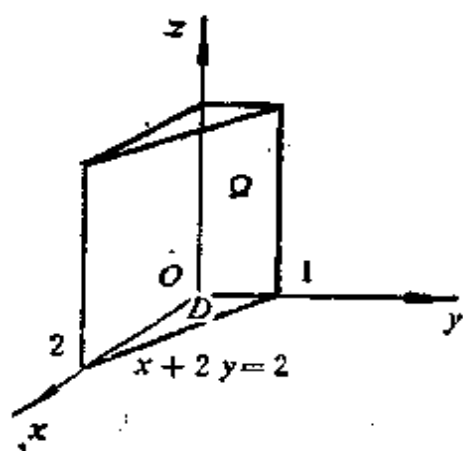


图 9-23

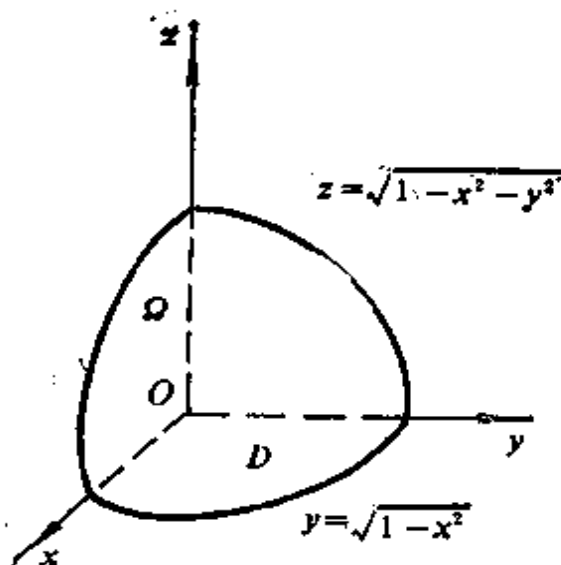


图 9-24

$x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. 先对 z 积分, z 的变化范围是, $0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. 故

$$\begin{aligned}
 & \iiint_Q xyz \, dx \, dy \, dz \\
 &= \iint_D dx \, dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz \, dz \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz \, dz \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy(1-x^2-y^2) \, dy \\
 &= \frac{1}{8} \int_0^1 x(1-x^2)^2 \, dx \\
 &= \frac{1}{48}.
 \end{aligned}$$

有时, 计算一个三重积分可以先化为计算一个二重积分, 再计算一个定积分. 即有下述的计算公式.

设空间闭区域 $\Omega = \{(x, y, z) | c_1 \leq z \leq c_2, (x, y) \in D_z\}$, 其中 D_z 是竖标为 z 的平面截闭域 Ω 得到的平面闭域 (图9-25) 则有

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{c_1}^{c_2} dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy. \quad (9.4)$$

例3 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$, 其中 Ω 是由椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ 所围成的空间闭区域 (图9-26).}$$

解 空间闭区域 Ω 可表示为:

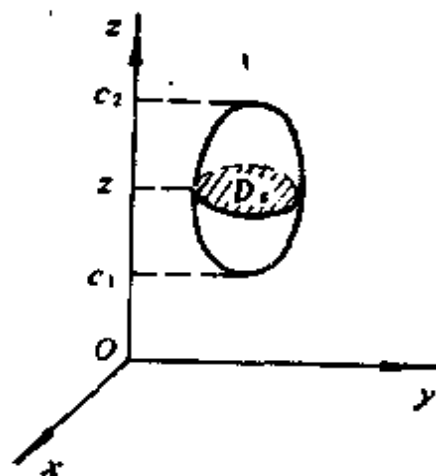


图9-25

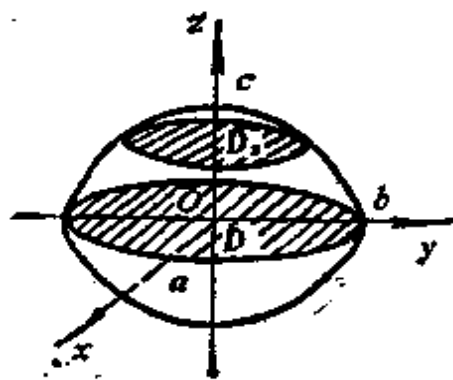


图9-26

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \mid -c \leq z \leq c, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{z^2}{c^2} \right\},$$

由公式(9.4)有

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz &= \int_{-c}^c z^2 dz \iint_{D_z} dx dy \\ &= \int_{-c}^c \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2} \right) z^2 dz \\ &= \frac{4}{15} \pi abc^3. \end{aligned}$$

二 柱面坐标系中三重积分的计算法

三重积分的计算与二重积分的计算一样，用直角坐标计算有时候并不方便，柱面坐标与球面坐标在三重积分的计算中是经常采用的。

1 柱面坐标系

设点 $M(x, y, z)$ 为空间中的一个点，且点 M 在 xOy 面上的投影为点 $P(x, y, 0)$ ，在直角坐标系中，以 Ox 轴为极轴，在 xOy 平面上建立极坐标系，再以 Oz 轴为竖轴，就构成了柱面坐标系。（图9-27）。并称 ρ, θ, z 这三个数为点 M 的柱面坐标，即 $M(\rho, \theta, z)$ 。其中 ρ 叫做极径， θ 叫做极角， z 叫做竖坐标。

这里规定 ρ, θ, z 的变化范围为：

$$0 \leq \rho < +\infty,$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

$$-\infty < z < +\infty.$$

三组坐标面分别为：

$\rho = c$ （ c 为正的常数），表示以 Oz 轴为中心轴，半径为 c 的圆柱面。

$\theta = \alpha$ （ α 为常数），表示以 Oz 轴为一条边的半平面。

$z = h$ （ h 为常数），表示与 xOy 平面平行且过点 $(0, 0, h)$ 的平面。

显然，点 M 的直角坐标与柱面坐标的关系为

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \\ z = z \end{cases} \quad (1)$$

现在，用柱面坐标来表示三重积分的体积元素 dv ，为此，用 ρ, θ, z 分别为常数的三组坐标面把 Ω 分成许多小闭域，除含 Ω 的边界曲面的小闭域之外，大部分这样的小闭域都是如图9-28中所示的柱体，并且这些小闭域的体积 dv ，等于柱体的底面积与高的乘积，（即极坐标系中的面积元素与 dz 之积），于是得

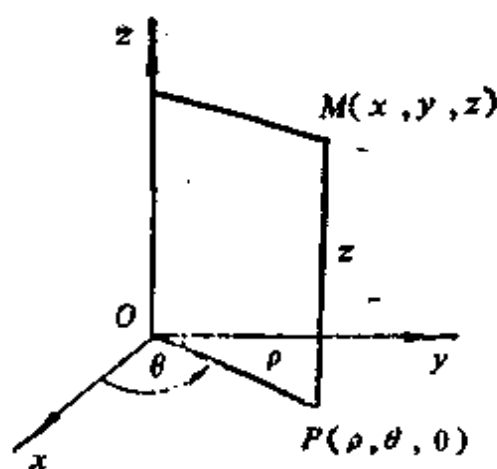


图 9-27

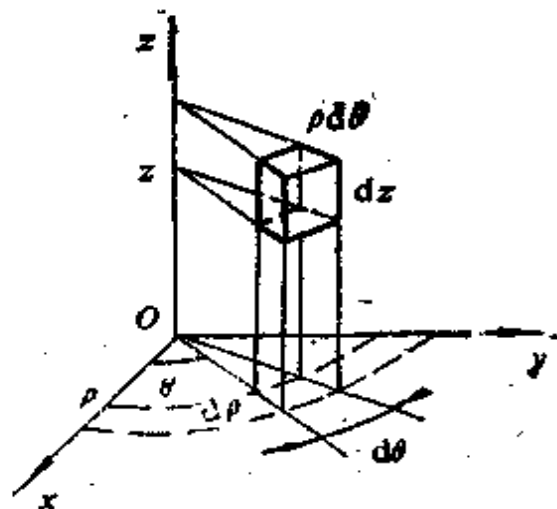


图 9-28

$$dv = \rho d\rho d\theta dz.$$

这就是柱面坐标系下的体积元素的表达式.

由此, 由公式(1)将三重积分从直角坐标变换为柱面坐标的公式为

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho d\rho d\theta dz. \end{aligned}$$

至于柱面坐标系下三重积分的计算, 还是要化为三次积分来作, 下面, 通过例子来说明计算方法.

2 柱面坐标系中三重积分的计算

例 4 用柱面坐标计算 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$. 其中 Ω 为由 $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $z = 2$ 所围的空间闭区域 (图9-29).

解 由于在 Ω 中:

$$0 \leq z \leq 2.$$

把 Ω 投影到 xOy 平面上, 得到半径为 2 的圆形闭域 D ,

$$0 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

于是有

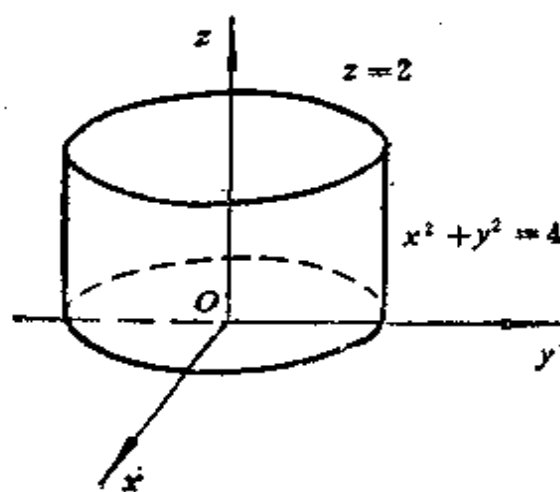


图 9-29

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta dz \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_0^2 dz \\
 &= 16\pi.
 \end{aligned}$$

例 5 用柱面坐标计算 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$. 其中 Ω 为闭半球体:
 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0$.

解 把域 Ω 投影到 xOy 面上, 得半径为 2 的圆形闭区域 D ,
 $0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. 而 Ω 中 z 的变化范围是: $0 \leq z \leq \sqrt{4 - \rho^2}$, 故

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} z dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-\rho^2}} z \rho d\rho d\theta dz \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_0^{\sqrt{4-\rho^2}} z dz \\
 &= 2\pi \int_0^2 \rho \left[\frac{1}{2}(4 - \rho^2) \right] d\rho \\
 &= 4\pi.
 \end{aligned}$$

三 球面坐标系中三重积分的计算法

1. 球面坐标系

设点 $M(x, y, z)$ 为空间中的一点, r 为原点 O 与点 M 的距离,

φ 为 \overrightarrow{OM} 与 Oz 轴正向的夹角, 若 P 为点 M 在 xOy 平面的投影, 记 Ox 轴的正向与射线 OP 的夹角为 θ (图9-30). 则点 M 的位置也可以用 r, φ, θ 三个有次序的数来确定. 并称 $M(r, \varphi, \theta)$ 中的 r, φ, θ 三个数为点 M 的球面坐标, 这里 r, φ, θ 的变化范围是:

$$0 \leq r < +\infty,$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi,$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

球面坐标的三组坐标面分别为:

$r = R$ (R 为非负常数), 表示坐标原点为中心, 半径为 R 的球面;

$\varphi = \beta$ (β 为常数, $0 \leq \beta \leq \pi$), 表示以原点为顶点, Oz 轴为轴的圆锥面.

$\theta = \alpha$ (α 为常数, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$), 表示过 Oz 轴且以 Oz 轴为一条边的半平面.

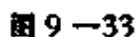
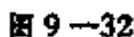
由图9-30可知, $x = OP \cos \theta$, $y = OP \sin \theta$, $z = OM \cos \varphi$. 因为 $OM = r$, $OP = r \sin \varphi$, 所以可得点 M 的直角坐标与球面坐标的关系为

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \\ z = r \cos \varphi \end{cases} \quad (2)$$

现在, 用球面坐标来表示三重积分的体积元素. 为此, 分别用 r, φ, θ 为常数的三组坐标面把空间有界闭域 Ω 分成许多小闭区域, 除含有 Ω 的边界曲面的小闭域外, 大部分这样的小闭域是“六面体”的形状 (图9-31). 考虑由 r, φ, θ 各取得微小增量 $dr, d\varphi, d\theta$ 所成的六面体的体积. 若不计高阶无穷小, 可以把这个六面体看作长方体. 其经线方向的长为 $r d\varphi$, 纬线方向的宽为 $r \sin \varphi d\theta$, 向经方向的高为 dr . 于是, 球坐标系下的体积元素为:

$$dv = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta.$$

$$= \frac{1}{4} \pi .$$



解 因为球面的方程为 $r = 2R \cos \varphi$, 锥面的方程为 $\varphi = \frac{\pi}{4}$, 所以 Ω 的范围可以用不等式表示为:

$$0 \leq r \leq 2R \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

故

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathcal{V}} dx dy dz &= \iiint_{\mathcal{V}} r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2R \cos \varphi} r^2 dr \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{2R \cos \varphi} r^2 dr \\ &= \frac{16\pi R^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 \varphi \sin \varphi d\varphi\end{aligned}$$

$$= \frac{4\pi R^3}{3} \left(1 - \cos^4 \frac{\pi}{4}\right) \\ = \pi R^3.$$

*四 三重积分的一般变量代换

仿照二重积分的一般变量代换, 就可以推得三重积分的一般变量代换公式.

定理 若函数 $f(x, y, z)$ 在有界闭域 Ω 上连续, 设变换式: $x=x(u, v, w)$, $y=y(u, v, w)$, $z=z(u, v, w)$ 把空间有界闭域 Ω' 一对一的变为 Ω , 又设 $x=x(u, v, w)$, $y=y(u, v, w)$, $z=z(u, v, w)$ 在 Ω' 上对 u, v, w 有一阶连续的偏导数, 且雅可比行列式

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$$

则有

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), \\ & \quad z(u, v, w)) |J| du dv dw. \end{aligned} \quad (3)$$

如果雅可比行列式 J 只在 Ω' 上的个别点处或有限个线、面上为零时, (3) 式仍然成立.

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \\ z = z. \end{cases}$$

则有

$$\begin{aligned} J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, z)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \rho. \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} &\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega'} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho d\rho d\theta dz. \end{aligned}$$

而在球面坐标系下, 由代换式

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \\ z = r \cos \varphi. \end{cases}$$

则有

$$\begin{aligned} J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \theta)} &= \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} \\ &= r^2 \sin \varphi. \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega'} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta. \end{aligned}$$

例8 计算 $\iiint_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz (a > 0,$

$b > 0, c > 0)$, 其中 Ω 为闭椭球体 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.

解 作广义球坐标代换:

$$x = ar \sin \varphi \cos \theta, y = br \sin \varphi \sin \theta, z = cr \cos \varphi.$$

其中 $r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi$.

在这个变换下, 椭球面方程变为 $r = 1$. 域 Ω 变为 Ω' 且有:
 $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. 其变换的雅可比行列式 (仅在有限的平面为零) $J = abcr^2 \sin \varphi$.

故

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega'} \sqrt{1 - r^2} \cdot abcr^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= abc \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} r^2 dr \\ &= \frac{\pi^2}{4} abc. \end{aligned}$$

§ 5 重积分的应用

一 几何方面的应用

1 封闭曲面所围立体的体积

例1 某个四面体的四个面为: $x=0, y=0, z=x+y, z=1-x-y$. 求这个四面体的体积 V .

解 先画出这个四面体 Ω 的图形(图9-34),

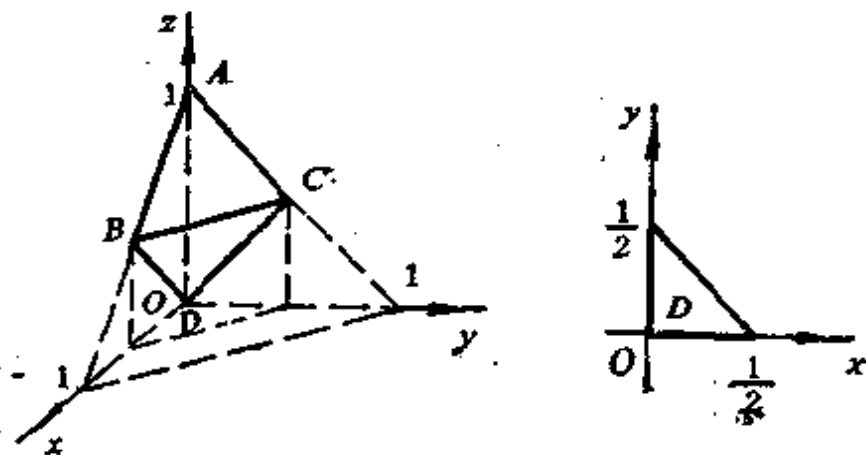


图 9-34

把此四面体向 xOy 平面投影，其投影区域 D 为三角形闭域。此三角形以 Ox 轴及 Oy 轴为两边，而第三边的方程 $y = \frac{1}{2} - x$ ，于是有

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} dx dy dz = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\frac{1}{2}-x} dy \int_{x+y}^{1-x-y} dz \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\frac{1}{2}-x} ((1-x-y)-(x+y)) dy \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - x + x^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

例2 计算由抛物面 $z=6-x^2-y^2$, 坐标面 xOz 、 yOz 及平面 $y=4z$, $x=1$, $y=2$ 所围的立体的体积 V (图9-35).

解 这个立体的上边界面为 $z=6-x^2-y^2$, 下边界面为 $z=\frac{1}{4}y$. 它在 xOy 面上的投影区域 D 为矩形闭域: $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq x \leq 1$. 故有

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^2 \int_{\frac{1}{4}y}^{6-x^2-y^2} dx dy dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_{\frac{1}{4}}^{6-x^2-y^2} dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^2 \left(6-x^2-y^2-\frac{1}{4}y \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{53}{6}-2x^2 \right) dx \\ &= \frac{49}{6}. \end{aligned}$$

2 曲面的面积

设空间曲面 S 的方程为 $z=f(x, y)$, 且 S 在 xOy 平面上的投影是可求面积的有界闭域 D (图9-36). 函数 $f(x, y)$ 在 D 上具有一阶连续的偏导数 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$.

把域 D 任意地分成 n 个可求面积的闭子域 $\sigma_i (i=1, 2, \dots, n)$. 并把 σ_i 的面积记为 $\Delta\sigma_i$. 以 σ_i 的边界为准线, 作母线平行于 Oz 轴的柱面, 这些柱面把 S 分为 n 块. 在 σ_i 中任取一点 (ξ_i, η_i) , 并记 $\zeta_i=f(\xi_i, \eta_i)$, 则曲面 S 在点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 处的切平面也被柱面截出了一小块平面 A_i . 设 A_i 的面积为 ΔA_i , 则 $\Delta\sigma_i$ 也是 A_i 在 xOy 平面上投影区域的面积. 于是

$$\Delta\sigma_i = \Delta A_i \cos \gamma_i$$

这里 γ_i 是切平面与 xOy 平面的夹角 ($0 \leq \gamma_i \leq \frac{\pi}{2}$).

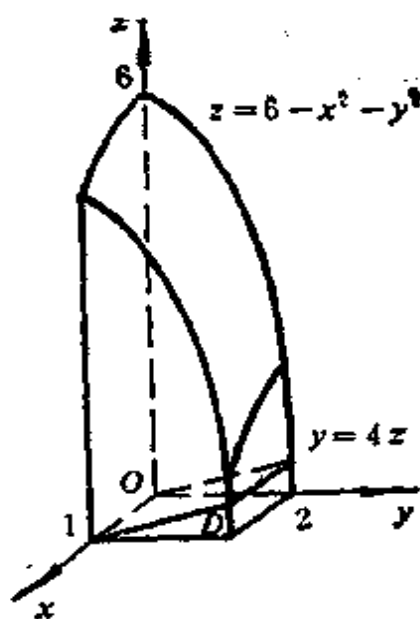


图 9-35

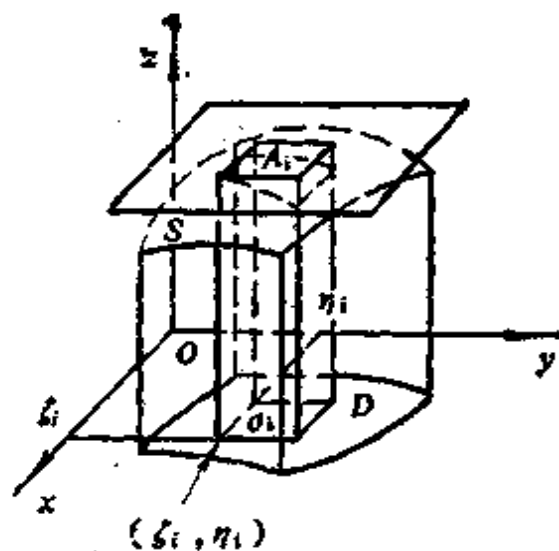


图 9-36

由于矢量 $\{-f_x(\xi_i, \eta_i), -f_y(\xi_i, \eta_i), 1\}$ 是切平面的法线矢量，而 γ_i 是 Oz 轴与此矢量的夹角，故

$$\cos \gamma_i = \frac{1}{\sqrt{f_x^2(\xi_i, \eta_i) + f_y^2(\xi_i, \eta_i) + 1}},$$

因此

$$\Delta A_i = \sqrt{f_x^2(\xi_i, \eta_i) + f_y^2(\xi_i, \eta_i) + 1} \cdot \Delta \sigma_i.$$

曲面 S 的面积 A 为：

$$\begin{aligned} A &= \lim_{i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta A_i \\ &= \lim_{i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f_x^2(\xi_i, \eta_i) + f_y^2(\xi_i, \eta_i)} \cdot \Delta \sigma_i \\ &= \iint_D \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} d\sigma. \end{aligned}$$

或

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (1)$$

这里 $dA = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$ 称为直角坐标系中曲面的面积元素.

若设空间曲面 S 的方程为 $x = g(y, z)$ 或 $y = h(x, z)$. 可分别把 S 投影到 yOz 平面上 (其投影区域记为 D_{yz}) 或 xOz 面上 (其投影区域记为 D_{xz}). 类似地有

$$A = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dy dz, \quad (2)$$

或

$$A = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dx dz. \quad (3)$$

例3 求半径为 R 的球的表面积 A .

解 上半球面的方程为: $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, 它在 xOy 平面上的投影区域 D 为: $x^2 + y^2 \leq R^2$.

由于 $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$, 它在闭区

域 D 的边界 $x^2 + y^2 = R^2$ 上不连续. 因此不能直接用公式 (1) 来计算表面积, 先取区域 D_1 : $x^2 + y^2 \leq r^2$ ($0 < r < R$), 为积分区域, 计算出相应于 D_1 上的半球面的面积 A_1 之后, 令 $r \rightarrow R$ 取 A_1 的极限就得到上半球面的面积. 由对称性, 可知整个球的表面积为上半球面的面积的 2 倍. 故有

$$\begin{aligned} A_1 &= \iint_{D_1} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= R \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \frac{\rho d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \\ &= 2\pi R \int_0^r \frac{\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} d\rho \end{aligned}$$

$$= 2\pi R(R - \sqrt{R^2 - r^2}),$$

于是

$$\begin{aligned} A &= 2 \lim_{r \rightarrow R} A_1 = 2 \cdot \lim_{r \rightarrow R} 2\pi R (R - \sqrt{R^2 - r^2}) \\ &= 2 \cdot 2\pi R^2 \\ &= 4\pi R^2 \end{aligned}$$

二 物理、力学方面的应用

1 物体的重心

设 xOy 平面上有 n 个质点，它们分别位于点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 处，其质量分别为 m_1, m_2, \dots, m_n 。由力学知道，这个质点系的重心 (\bar{x}, \bar{y}) 的坐标为：

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{M_x}{M}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{M_y}{M}.$$

其中 $M_x = \sum_{i=1}^n m_i x_i$, $M_y = \sum_{i=1}^n m_i y_i$ 分别叫做该质点系对 Oy 轴及 Ox 轴的静力矩，而 $M = \sum_{i=1}^n m_i$ 为质点系的总质量。

现在考虑平面薄板的情形，设此平面薄板占有 xOy 面上的有界闭域 D 。在点 (x, y) 处的面密度为 $\mu(x, y)$ ，并假定 $\mu(x, y)$ 为 D 上的连续函数。现在来求此平面薄板的重心坐标。

在有界闭域 D 上任取一个直径很小的闭区域 σ ，其面积记为 $d\sigma$ 。 (x, y) 是 σ 内的一点。故 σ 的质量近似地等于 $\mu(x, y) d\sigma$ 。这部分质量可近似看作集中在点 (x, y) 上。于是可以写出 D 上的 M_x 、 M_y 的微元 dM_x 及 dM_y ：

$$dM_x = x\mu(x, y)d\sigma, \quad dM_y = y\mu(x, y)d\sigma.$$

于是薄板对 Oy 轴与 Ox 轴的静力矩分别为

$$\bar{y} = \frac{\int \int \int_{\Omega} y \mu(x, y, z) dx dy dz}{\int \int \int_{\Omega} \mu(x, y, z) dx dy dz}, \quad (6)$$

$$\bar{z} = \frac{\int \int \int_{\Omega} z \mu(x, y, z) dx dy dz}{\int \int \int_{\Omega} \mu(x, y, z) dx dy dz}.$$

这里, $\int \int \int_{\Omega} \mu(x, y, z) dx dy dz$ 代表空间物体 Ω 的质量.

例 4 一个半径为 1 的半圆形平面薄板, 其上各点处的密度等于该点到圆心的距离, 求此半圆 (图 9-37) 的重心坐标.

解 由图 9-37 知, 此平面薄板以 Oy 轴为对称轴. 且薄板上各点处的密度为 $\mu = \sqrt{x^2 + y^2}$.

由对称性, 知重心必在 Oy 轴上, 故知 $\bar{x} = 0$.

$$\bar{y} = \frac{\int \int_D y \sqrt{x^2 + y^2} dx dy}{\int \int_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy} = \frac{3}{2\pi}.$$

即重心的位置在点 $(0, \frac{3}{2\pi})$.

例 5 求两个圆 $\rho = a \cos \theta$, $\rho = b \cos \theta$ ($0 < a < b$) 所围成的密度为 1 的平面薄板的重心.

解 此平面薄板的范围如图 9-38 所示.

由对称性可知: $\bar{y} = 0$. 由公式 (5), 有

$$\bar{x} = \frac{\int \int_D x d\sigma}{A} = \frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{a \cos \theta}^{b \cos \theta} \rho^2 \cos \theta d\rho}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{a \cos \theta}^{b \cos \theta} \rho d\rho}$$

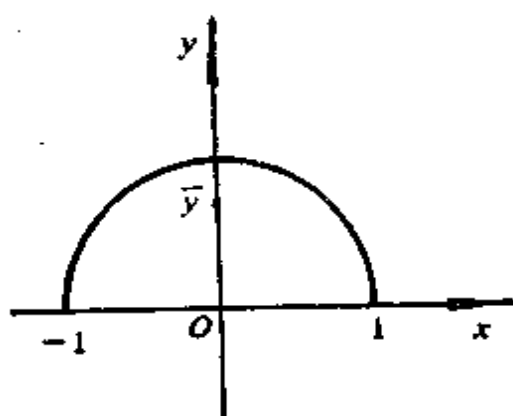


图 9-37

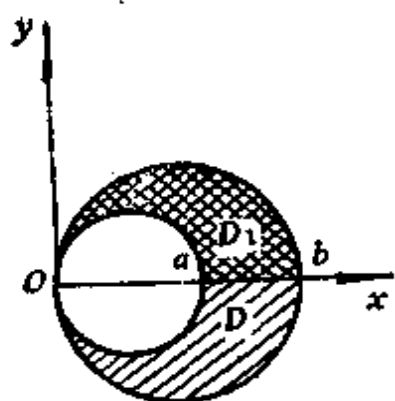


图 9-38

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} (b^3 \cos^3 \theta - a^3 \cos^3 \theta) \cos \theta d\theta}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (b^2 \cos^2 \theta - a^2 \cos^2 \theta) d\theta} \\
 &= \frac{\frac{2}{3} (b^3 - a^3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta}{(b^2 - a^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta} \\
 &= \frac{\frac{\pi}{8} (b^3 - a^3)}{\frac{\pi}{4} (b^2 - a^2)} \\
 &= \frac{a^2 + ab + b^2}{2(a+b)}.
 \end{aligned}$$

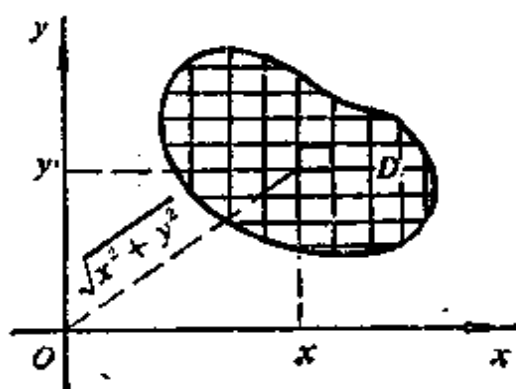


图 9-39

即重心坐标为: $\left(\frac{a^2 + ab + b^2}{2(a+b)}, 0 \right)$.

2 物体的转动惯量

根据力学的定义, 一个质点对一个轴的转动惯量 (又叫惯性矩) 等于质点的质量 m 与此质点到轴的距离的平方的乘积, 应用微元法不难推出位于平面有界闭域 D 上的密度为 $\mu(x, y)$ 的一块平面薄板 (图 9-39) 对 Ox 轴的转动惯量 I_x 是:

$$I_x = \iint_D y^2 \mu(x, y) dx dy, \quad (7)$$

对 Oy 轴的转动惯量 I_y 是:

$$I_y = \iint_D x^2 \mu(x, y) dx dy \quad (8)$$

若把质点的质量与此质点到原点的距离的平方的乘积定义为质点到原点的转动惯量, 不难推出平面薄板对原点的转动惯量 I_0 为:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \mu(x, y) dx dy \quad (9)$$

比较公式(7): (8)、(9)有

$$I_0 = I_x + I_y.$$

把平面的情况推广到空间立体, 设空间物体的范围是空间有界闭域 Ω , 其密度为 $\mu(x, y, z)$, 则它对于 xOy 平面的转动惯量 I_{xy} , 对 yOz 平面的转动惯量 I_{yz} , 对 xOz 平面的转动惯量 I_{xz} 及对原点、 Ox 轴、 Oy 轴、 Oz 轴的转动惯量 I_0 、 I_x 、 I_y 、 I_z 的计算公式分别为:

$$I_{xy} = \iiint_{\Omega} z^2 \mu(x, y, z) dx dy dz, \quad (10)$$

$$I_{yz} = \iiint_{\Omega} x^2 \mu(x, y, z) dx dy dz, \quad (11)$$

$$I_{xz} = \iiint_{\Omega} y^2 \mu(x, y, z) dx dy dz, \quad (12)$$

$$I_0 = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \mu(x, y, z) dx dy dz, \quad (13)$$

$$I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \mu(x, y, z) dx dy dz, \quad (14)$$

$$I_y = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) \mu(x, y, z) dx dy dz, \quad (15)$$

$$I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \mu(x, y, z) dx dy dz. \quad (16)$$

例 6 求密度为 1 的均匀球体 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 对坐标轴的转动惯量

解 根据公式 (14), (15), (16), 有

$$I_z = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) dx dy dz,$$

$$I_y = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) dx dy dz,$$

$$I_x = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz.$$

由对称性, 知

$$I_x = I_y = I_z = I,$$

相加就得到

$$3I = \iiint_{\Omega} 2(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$

用球面坐标, 有

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{3} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz \\ &= \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 r^4 dr \\ &= \frac{2}{3} \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{5} \\ &= \frac{8}{15} \pi. \end{aligned}$$

第十章 曲线积分及曲面积分

曲线积分及曲面积分也是定积分概念在多元函数方面的推广。

把一元函数在区间上的定积分概念推广到曲线段及定义在该曲线段上的函数上去，就得到曲线积分；推广到曲面块及定义在该曲面块上的函数上去，则得到曲面积分。

曲线积分及曲面积分是研究场论，如电磁场、力场、流速场等的一个重要数学工具。本章将阐明曲线积分及曲面积分的基本内容，并介绍场论中的几个基本概念。

§ 1 第一类曲线积分

在本章中讨论曲线积分时，总是假定所给的曲线是光滑的（即曲线具有连续变化的切线）或逐段光滑的^①。从理论上可以证明，这样的曲线可以求长度。

一 第一类曲线积分的概念及性质

例1 物质曲线的质量 m 。

设有物质曲线段 L ，其端点为 A 和 B ，在 L 上的点 $M(x, y, z)$ 处的线密度为 $\mu = f(x, y, z)$ ，求物质曲线 L 的质量。

解 如果曲线 L 的密度 μ 为常数，则 L 的质量 m 就等于密度 μ 与 L 的弧长 s 的乘积，即 $m = \mu s$ 。

当曲线 L 的密度 $\mu = f(x, y, z)$ 不是常数时，可以将 L 分成 n 个子弧段 $\overline{M_{i-1}M_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) (图10-1)，用 Δs_i 表示第 i 个子弧段 $\overline{M_{i-1}M_i}$ 的弧长。在 $\overline{M_{i-1}M_i}$ 上任取一点 $N_i(\xi_i,$

^① 所谓“逐段光滑”就是可以把曲线分成有限多段，曲线在每一段上都是光滑的。

η_i, ξ_i), 则这个子弧段上的质量 Δm_i 就近似地等于 $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta s_i$, 即

$$\Delta m_i \approx f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta s_i.$$

于是

$$m = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta s_i.$$

当 Δs_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 的最大长度 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 上面的和式之极限, 就是曲线 L 的质量, 即

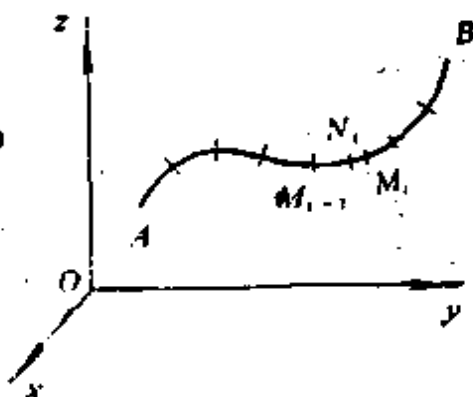


图 10-1

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta s_i. \quad (1)$$

由例 1 中出现的和式极限(1)式, 可以引出第一类曲线积分的定义.

定义 设空间曲线段 L 的端点为 A 和 B . $f(x, y, z)$ 为定义在 L 上的有界函数. 用分点 $A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}, M_n = B$ 把 L 任意地分成 n 个子弧段 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 它们的长度分别记为 Δs_i , 在 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 上任取一点 $N_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, 作和式:

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta s_i.$$

如果当 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta s_i\} \rightarrow 0$ 时, I_n 的极限值为 I , 即

$$I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} I_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i. \quad (2)$$

且此极限值与对曲线 L 的分法无关, 也与每一个子弧段 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 上的点 $N_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ 的选取方法无关, 则称 I 为函数 $f(x, y, z)$ 沿曲线 L 对弧长的曲线积分或称为第一类曲线积分, 记为

$$I = \int_L f(x, y, z) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta s_i,$$

其中 $f(x, y, z)$ 叫做被积函数, ds 叫做弧长微分元素, 曲线 L 叫做积分路径.

在第一类曲线积分中, 对曲线 L 在 \widehat{AB} 上的第一类曲线积分可以记为 $\int_{L(AB)} f(x, y, z) ds$, 或 $\int_{\widehat{AB}} f(x, y, z) ds$.

可以证明: 当函数 $f(x, y, z)$ 在光滑或逐段光滑的曲线段 L 上连续时, 第一类曲线积分 $\int_L f(x, y, z) ds$ 是必定存在的. 因此下面我们总假定 $f(x, y, z)$ 是在 L 上连续的函数.

上面讲过的例 1, 用第一类曲线积分来表示曲线 L 的质量, 则有

$$m = \int_{L(AB)} f(x, y, z) ds.$$

第一类曲线积分具有与定积分类似的性质, 如:

$$(1) \int_L k f(x, y, z) ds = k \int_L f(x, y, z) ds \quad (k \text{ 为常数}).$$

$$\begin{aligned} (2) \int_L [f(x, y, z) \pm g(x, y, z)] ds \\ = \int_L f(x, y, z) ds \pm \int_L g(x, y, z) ds. \end{aligned}$$

(3) 将曲线 L 分割成两段 L_1, L_2 , 则

$$\begin{aligned} \int_L f(x, y, z) ds &= \int_{L_1} f(x, y, z) ds \\ &+ \int_{L_2} f(x, y, z) ds. \end{aligned}$$

当曲线 L 为闭曲线时, 第一类曲线积分可记为

$$\oint_L f(x, y, z) \cdot ds.$$

如果 L 为平面曲线, 第一类曲线积分就记 $\int_L f(x, y) ds$.

二 第一类曲线积分的计算

1 设空间曲线 L 的方程由参量方程给出:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

其中 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ 在 (α, β) 上有一阶连续的导数, 并且 $f(x, y, z)$ 在 L 上连续.

用分点 $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta$ 将区间 (α, β) 分为 n 个子区间, 记 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $d = \max\{\Delta t_i\}$, Δs_i 为对应于 (t_{i-1}, t_i) 的一段弧的弧长, 且 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta s_i\}$. 并在

Δs_i 上任取一点 $N_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, 其对应坐标的参量为 τ_i ($t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$), 即 $\xi_i = x(\tau_i)$, $\eta_i = y(\tau_i)$, $\zeta_i = z(\tau_i)$. 于是有

$$\int_L f(x, y, z) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)) \Delta s_i.$$

由弧长公式及定积分的中值定理知: 存在 $\tau'_i \in (t_{i-1}, t_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 使

$$\begin{aligned} \Delta s_i &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt \\ &= \sqrt{x'^2(\tau'_i) + y'^2(\tau'_i) + z'^2(\tau'_i)} \Delta t_i. \end{aligned}$$

因为曲线积分 $\int_L f(x, y, z) ds$ 存在, 故在其和式极限中与 τ_i 的取法无关. 不妨取 $\tau_i = \tau'_i$, 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, $d \rightarrow 0$. 则有

$$\begin{aligned} &\int_L f(x, y, z) ds \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x(\tau'_i), y(\tau'_i), z(\tau'_i)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{x'^2(\tau'_i) + y'^2(\tau'_i) + z'^2(\tau'_i)} \cdot \Delta t_i \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt. \\ & \dots\dots\dots (1.1) \end{aligned}$$

公式(1.1)给出了当空间曲线 L 由参量方程表示时, 第一类曲线积分的计算法. 即对弧长的曲线积分可化为定积分来计算.

2 设平面曲线 L 的方程由参量方程给出:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad (a \leq t \leq \beta).$$

其中 $x(t)$, $y(t)$ 在 $[a, \beta]$ 上有一阶连续的导数, 并且 $f(x, y)$ 在 L 上连续, 则有

$$\begin{aligned} \int_L f(x, y) ds &= \int_a^\beta f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt. \\ & \dots\dots\dots (1.2) \end{aligned}$$

另外, 当平面曲线 L 的方程由直角坐标方程给出时:

$$y = y(x), \quad (a \leq x \leq b).$$

则有

$$\begin{aligned} \int_L f(x, y) ds &= \int_a^b f(x, y(x)) \cdot \sqrt{1 + y'^2(x)} dx. \\ & \dots\dots\dots (1.3) \end{aligned}$$

类似地, 如果平面曲线 L 的方程由直角坐标方程给出:

$$x = x(y), \quad (c \leq y \leq d).$$

则有

$$\begin{aligned} \int_L f(x, y) ds &= \int_c^d f(x(y), y) \cdot \sqrt{1 + x'^2(y)} dy. \\ & \dots\dots\dots (1.4) \end{aligned}$$

应当注意, 由于在第一类曲线积分的定义中(见(2)式),

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy,$$

$$\begin{aligned}\int_L y ds &= \int_0^2 y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{y}{2}\right)^2} dy \\ &= \frac{4}{3}(2\sqrt{2} - 1).\end{aligned}$$

例2 计算曲线积分 $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds$, 其中 L 为圆柱螺线: $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = t$ 上相应于从 $t = 0$ 到 $t = 2\pi$ 的一段弧.

解 由于 $ds = \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + 1^2} dt = \sqrt{1 + a^2} dt$,
故

$$\begin{aligned}& \int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds \\ &= \int_0^{2\pi} [(a \cos t)^2 + (a \sin t)^2 + (t)^2] \cdot \sqrt{1 + a^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (a^2 + t^2) \sqrt{1 + a^2} dt \\ &= \sqrt{1 + a^2} \left[a^2 t + \frac{1}{3} t^3 \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{2}{3} \pi \sqrt{1 + a^2} (3a^2 + 4\pi^2).\end{aligned}$$

§ 2 第二类曲线积分

第二类曲线积分, 又称为对坐标的曲线积分, 是研究矢量场的曲线积分. 在这种积分中要涉及到矢量场和曲线的方向等概念. 所以要先介绍矢量场的概念和曲线方向的规定, 然后再讨论第二类曲

线积分的性质和计算.

一 矢量场的概念

若对于空间区域 Ω 上的每一点 $M(x, y, z)$, 在时刻 t 总存在着一个确定的数值 $u = u(x, y, z, t)$ 与之对应, 则称在 Ω 上确定了一个数量场 $u = u(x, y, z, t)$. 例如, 若 u 表示对应于点 M 的温度, 则 u 是温度场; 若 u 表示点 M 的电位, 则 u 是电位场.

如果对于空间区域 Ω 上的每一点 $M(x, y, z)$, 在时刻 t 都有一个确定的矢量 $A = A(x, y, z, t)$ 与之对应, 则称在 Ω 上确定了一个矢量场 $A = A(x, y, z, t)$. 例如, 若 A 表示对应于点 M 的引力, 则 A 是引力场; 若 A 表示点 M 处质点的速度, 则 A 是速度场.

无论是数量场或是矢量场, 凡是不随时间变化的, 均称为稳定场. 在稳定场中, 由于不依赖于 t , 而仅与点 $M(x, y, z)$ 的坐标有关, 这时数量场可表示为 $u = u(x, y, z)$, 矢量场可表示为 $A = A(x, y, z)$. 本章中只讨论稳定场.

设 $A(x, y, z)$ 在空间直角坐标系中三个坐标轴上的投影依次为 $P(x, y, z)$ 、 $Q(x, y, z)$ 、 $R(x, y, z)$. 于是 $A(x, y, z)$ 可表示为:

$$A(x, y, z) = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k.$$

当 $P(x, y, z)$ 、 $Q(x, y, z)$ 、 $R(x, y, z)$ 连续时, 则称 $A(x, y, z)$ 是连续的. 在本书中总假定 $A(x, y, z)$ 是连续的.

二 第二类曲线积分的概念及性质

第二类曲线积分要涉及曲线的方向问题, 因此先给出曲线方向的规定: 对空间非封闭曲线段 L , 如果 A, B 是它的两个端点, 则总存在着 \overrightarrow{AB} 与 \overrightarrow{BA} 两个方向. 如果取定一个方向为正向, 则另一个方向就是负向. 曲线段 L 的正向, 记为 L ; 曲线段 L 的负向, 则

记为 L^- .

对空间的封闭曲线 L , 由于起点与终点重合, 仅用起点和终点很难表示出曲线的正负向, 这时可在闭曲线 L 上另外再增加两个点, 以便准确描述闭曲线 L 的方向, 从而正确地定出闭曲线 L 的正、负向.

为了引出第二类曲线积分的概念, 先研究下面的实例.

例1 力场做功问题

设一个质点在变力 $\mathbf{F} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ 的作用下, 从点 A 沿曲线 L 移动到点 B , 求变力 \mathbf{F} 所作的功 W .

将曲线 L 从点 A 起, 用分点 $A = M_0, M_1, \dots, M_n = B$ 把曲线段 \widehat{AB} 按顺序任意地分成 n 个小弧段 $\widehat{M_{i-1}M_i}$, 其长度记为 Δs_i ($i = 1, 2, \dots, n$). 小弧段 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 所对应的矢量 $\overrightarrow{M_{i-1}M_i} = \Delta x_i \mathbf{i} + \Delta y_i \mathbf{j} + \Delta z_i \mathbf{k}$, 可以近似地看作是质点由点 M_{i-1} 到点 M_i 的位移, 在小弧段 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 上把 \mathbf{F} 近似看成常力, 用 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 上任取的一点 $N_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ 处的力 $\mathbf{F}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ 来代表, 则数积 $\mathbf{F}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \overrightarrow{M_{i-1}M_i}$ 近似地表示了质点移动一个小弧段 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 时所作的功, 于是

$$\begin{aligned} W &\approx \sum_{i=1}^n \mathbf{F}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \overrightarrow{M_{i-1}M_i} \\ &= \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta y_i \\ &\quad + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta z_i], \end{aligned}$$

其中 $\sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i$, $\sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta y_i$,

$\sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta z_i$ 分别为 \mathbf{F} 在三个坐标轴方向的分力所作

的功的近似值. 记 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta s_i\}$, 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 则得

$$W = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta y_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta z_i].$$

由上面的例子中引出的和式极限，可以导出第二类曲线积分的概念。

定义 设空间有向曲线 L 的端点为 A 和 B ，其正方向是由点 A 到点 B 的方向。 $P(x, y, z)$ 、 $Q(x, y, z)$ 、 $R(x, y, z)$ 为定义在 L 上的有界函数，沿 L 的正向，用分点 $M_0 = A, M_1, \dots, M_i, \dots, M_n = B$ 将曲线 L 任意地分成 n 个有向子弧段 $\overline{M_{i-1}M_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$)，子弧段的长度记为 Δs_i ，与子弧段 $\overline{M_{i-1}M_i}$ 对应的矢量为 $\overline{M_{i-1}M_i} = \Delta x_i \mathbf{i} + \Delta y_i \mathbf{j} + \Delta z_i \mathbf{k}$ ，在每一个子弧段 $\overline{M_{i-1}M_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 上任取一点 $N_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ ，作和式

$$\sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i.$$

如果当 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta s_i\} \rightarrow 0$ 时，极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i$$

存在，且极限值与对曲线 L 的分法无关，也与每一个子弧段 $\overline{M_{i-1}M_i}$ 上点 $N_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ 的选取方法无关，则称此极限为函数 $P(x, y, z)$ 沿有向曲线 $L_{(AB)}$ 对坐标 x 的曲线积分，或称为 $P(x, y, z)$ 沿有向曲线 $L_{(AB)}$ 的第二类曲线积分。记为 $\int_{L_{(AB)}} P(x, y, z) dx$ ，即

$$\int_{L_{(AB)}} P(x, y, z) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i. \quad (1)$$

类似地, 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta y_i$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta z_i$ 存在, 同样可以定义函数 $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ 沿有向曲线 L_{AB} 的对坐标 y 和对坐标 z 的曲线积分 (或称为 $Q(x, y, z)$ 、 $R(x, y, z)$ 沿有向曲线 L_{AB} 的第二类曲线积分):

$$\int_{L_{AB}} Q(x, y, z) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta y_i. \quad (2)$$

$$\int_{L_{AB}} R(x, y, z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta z_i. \quad (3)$$

应用上, (1)、(2)、(3)式的和经常出现, 为了方便, 可以简写成:

$$\begin{aligned} & \int_{L_{AB}} P dx + Q dy + R dz \\ &= \int_{L_{AB}} P dx + \int_{L_{AB}} Q dy + \int_{L_{AB}} R dz. \end{aligned} \quad (4)$$

例如, 例 1 中质点在力场中所作的功, 就可以表示为:

$$W = \int_{L_{AB}} P dx + Q dy + R dz.$$

可以证明: 如果函数 P 、 Q 、 R 在曲线 L_{AB} 上连续, 则第二类曲线积分 $\int_{L_{AB}} P dx$, $\int_{L_{AB}} Q dy$, $\int_{L_{AB}} R dz$ 一定存在.

第二类曲线积分与第一类曲线积分的定义不同之处在于在乘积和式中, 第一类曲线积分为函数值 $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ 与小弧段 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 的弧长 Δs_i 相乘, 而第二类曲线积分则是函数值 $P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ (或 $Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ 、 $R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$) 与有向弧段 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 相对应的矢量 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 在 Ox 轴 (或 Oy 轴、 Oz 轴) 上的投影 Δx_i (或 Δy_i , Δz_i) 相乘. 因此, 第二类曲线积分的值是与积分路径的方向有关的. 如果改变积分路径的方向, 那么所有的有向小弧段所对应的矢

量在坐标轴上的投影都要改变符号，从而有

$$\int_{L_{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = - \int_{L_{BA}} Pdx + Qdy + Rdz.$$

第二类曲线积分也具有类似定积分的一些性质，如

$$\begin{aligned} & \int_{L_{AB}} [P_1(x, y, z) \pm P_2(x, y, z)] dx \\ &= \int_{L_{AB}} P_1(x, y, z) dx \pm \int_{L_{AB}} P_2(x, y, z) dx. \end{aligned}$$

若积分路径 $L(AB)$ 被分成弧段 $L_1(AM)$, $L_2(MB)$, 则有

$$\begin{aligned} & \int_{L_{AB}} P(x, y, z) dx \\ &= \int_{L_1_{AM}} P(x, y, z) dx + \int_{L_2_{MB}} P(x, y, z) dx. \end{aligned}$$

以上讨论的是空间曲线的情形，在平面曲线的情况下，第二类曲线积分成为：

$$\int_{L_{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

三 第二类曲线积分的计算法

设空间曲线 $L(AB)$ 的参数方程为

$$x=x(t), y=y(t), z=z(t), (\alpha \leq t \leq \beta).$$

其中 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ 存在一阶连续的导数，参数 $t=\alpha$ 对应 L 的起点 A ； $t=\beta$ 对应 L 的终点 B 。当 t 单调地由 α 变到 β 时，曲线 L 上对应的点按曲线的正向由起点 A 变到终点 B ，又设函数 $P(x, y, z)$ 在 L 上连续。

沿曲线 L 的正向分割 L 成为 n 个有向弧段 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ (其中 $M_0=A$, $M_n=B$)，设与点 M_i 对应的参数值为 t_i ，即 $x_i=x(t_i)$, $y=y(t_i)$, $z=z(t_i)$ ($i=0, 1, 2, \dots, n$, $t_0=\alpha$, $t_n=\beta$)。

在 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 上任取一点 $N_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, 它对应的参量值为 τ_i (τ_i 介于 t_{i-1} 与 t_i 之间). 因为 $x(t)$ 具有连续的导数 $x'(t)$, 根据微分中值定理, 存在 $\tau'_i \in (t_{i-1}, t_i)$, 使

$$\begin{aligned}\Delta x_i &= x_i - x_{i-1} = x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\tau'_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &= x'(\tau'_i)\Delta t_i,\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}& \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^n P(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i))x'(\tau'_i)\Delta t_i.\end{aligned}$$

由于所给的条件已经使曲线积分 $\int_{L_{AB}} P(x, y, z) dx$ 存在, 故在其和式极限中, 必与参量 τ_i 的取法无关, 不妨取 $\tau_i = \tau'_i$, 则有

$$\begin{aligned}& \int_{L_{AB}} P(x, y, z) dx \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(x(\tau'_i), y(\tau'_i), z(\tau'_i))x'(\tau'_i)\Delta t_i.\end{aligned}$$

由于当 $\lambda \rightarrow 0$ 时 $d = \max_{1 \leq i \leq n} |\Delta t_i| \rightarrow 0$, 故知上式右端的和式极限

就是定积分 $\int_a^b P(x(t), y(t), z(t))x'(t) dt$. 因此有

$$\int_{L_{AB}} P(x, y, z) dx = \int_a^b P(x(t), y(t), z(t))x'(t) dt. \quad (5)$$

类似地, 有

$$\begin{aligned}& \int_{L_{AB}} Q(x, y, z) dy \\ &= \int_a^b Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) dt.\end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \int_{L_{AB}} R(x, y, z) dz \\ &= \int_a^b R(x(t), y(t), z(t)) z'(t) dt. \end{aligned} \quad (7)$$

及

$$\begin{aligned} & \int_{L_{AB}} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \\ &= \int_a^b \{P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t), \\ & \quad z(t)) y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) z'(t)\} dt. \end{aligned} \quad (8)$$

公式(5)~(8)给出了用定积分计算第二类曲线积分的方法。如果 L_{AB} 为平面曲线，相应于公式(8)，有

$$\begin{aligned} & \int_{L_{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \\ &= \int_a^b \{P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t)\} dt. \end{aligned} \quad (9)$$

如果平面曲线 L_{AB} 的方程由具有连续的一阶导数的函数 $y = y(x)$ 给出时，又点 A 的横坐标为 a ，点 B 的横坐标为 b （图10-2），则有

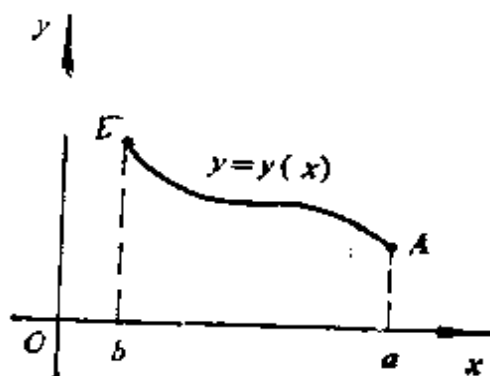


图10-2

$$\begin{aligned} & \int_{L_{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \\ &= \int_a^b \{P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)\} dx, \end{aligned} \quad (10)$$

类似地，如果 L 的方程由具有连续的一阶导数的函数 $x = x(y)$ 给出，又点 A 的纵坐标为 c ，点 B 的纵坐标为 d ，则有

$$\int_{L_{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_c^d \{P(x(y), y)x'(y) + Q(x(y), y)\} dy. \quad (11)$$

总之，在计算第二类曲线积分时要注意到：曲线方程的表达式既要代入函数 P 、 Q 中，也要代入 dx 、 dy 中；曲线 L 的起点的参量值作为积分下限，曲线终点的参量值作为积分上限。

例2 求 $\int_L xy dx$ ， L 是抛物线 $y^2 = x$ 从点 $A(1, -1)$ 到点 $B(1, 1)$ 的一段弧（图10-3）。

解 $L = \widehat{AO} + \widehat{OB}$ ，在 \widehat{AO} 上： $y = -\sqrt{x}$ ；在 \widehat{OB} 上， $y = \sqrt{x}$ ，由公式(10)可得

$$\begin{aligned} \int_L xy dx &= \int_{\widehat{AO}} xy dx + \int_{\widehat{OB}} xy dx \\ &= \int_1^0 x(-\sqrt{x}) dx + \int_0^1 x(\sqrt{x}) dx \\ &= 2 \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} dx \\ &= \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

若以 y 为积分变量，因为 $x = y^2$ ，由公式(11)同样有：

$$\int_{\widehat{AO}} xy dx + \int_{\widehat{OB}} xy dx = \int_{-1}^1 y^3 dy = \frac{y^4}{4} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{OB} (x+y)dx + (x-y)dy \\
& = \int_R^0 (0-y)dy + \int_0^R (x+0)dx \\
& = \int_0^R ydy + \int_0^R xdx \\
& = R^2.
\end{aligned}$$

例4 计算 $\int_L xydx + (y-x)dy$. (1) L 为直线 $y-x=0$ 从点 $O(0, 0)$ 到点 $B(1, 1)$; (2) L 为抛物线 $y=x^2$ 从点 $O(0, 0)$ 到点 $B(1, 1)$ (图10-5).

解 (1) 沿直线 $y-x=0$ 积分时, $y=x$, $dy=dx$.

$$\begin{aligned}
\int_L xydx + (y-x)dy &= \int_0^1 x \cdot xdx + (x-x)dx \\
&= \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

(2) 沿抛物线 $y=x^2$ 积分时, $dy=2xdx$,

$$\begin{aligned}
\int_L xydx + (y-x)dy &= \int_0^1 (x \cdot x^2)dx + (x^2-x)2xdx \\
&= \int_0^1 (3x^3 - 2x^2)dx \\
&= \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

当 L 是闭曲线时, 曲线积分的符号 \int_L 用 \oint_L 来表示; \int_L 用 \oint_L 来表示.

例5 求曲线积分 $\oint_L xyzdz$, 其中 L 是圆周 $x=\cos t$,

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \oint_L xyz dz \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\cos t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t dt \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{16} \pi.
 \end{aligned}$$

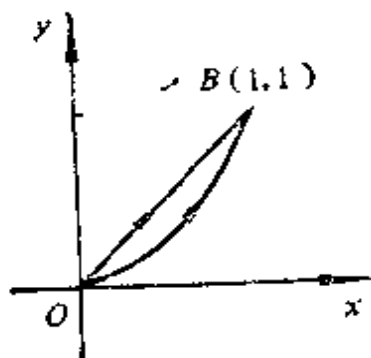


图10-5

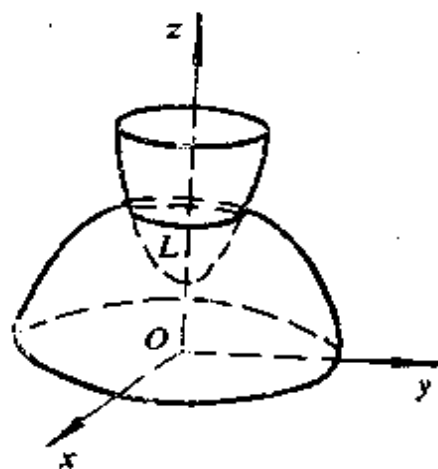


图10-6

例6 计算 $\oint_L y(z-x^2)dx + xy^2dy + (x+y+1)dz$. 其中 L 为闭曲线 (图10-6)。

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5, \\ z = x^2 + y^2 + 1. \end{cases}$$

L 的正向从原点看去为顺时针方向。

解 由 L 的方程知: $(z-1)+z^2=5$, 故有 $z=2$ ($z=-3$ 舍去) 故曲线 L 可以表示为

$$\begin{cases} z = 2, \\ z = x^2 + y^2 + 1. \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} z = 2, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

于是 L 的参量方程为:

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = 2. \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

参量 t 从 0 变到 2π 即为 L 的正向, 因此

$$\begin{aligned} & \oint_L y(z-x^2)dx + xy^2dy + (x+y+1)dz \\ &= \int_0^{2\pi} [\sin t(2-\cos^2 t)(-\sin t) + \cos t \sin^2 t(\cos t)]dt + 0 \\ &= \int_0^{2\pi} 2(\sin^2 t \cos^2 t - \sin^2 t)dt \\ &= -\frac{3}{2}\pi. \end{aligned}$$

四 第一、二类曲线积分之间的关系

设平面上的有向曲线段 L 的起点为 A , 终点为 B , 若取弧长 $\widehat{AM} = s$ 为曲线段的参数.

又设曲线段 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s), \end{cases} \quad 0 \leq s \leq l$$

其中 l 为曲线段 L 的全长 $\widehat{AB} = l$, $x(s)$, $y(s)$ 在 $[0, l]$ 上具有一阶连续的导数. 且函数 $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 在 L 上连续, 则由公式(9)有

$$\begin{aligned} & \int_{L_{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \\ &= \int_0^l \left\{ P(x(s), y(s)) \frac{dx}{ds} + Q(x(s), y(s)) \frac{dy}{ds} \right\} ds \\ &= \int_0^l \{ P(x(s), y(s)) \cos \alpha + Q(x(s), y(s)) \cos \beta \} ds, \end{aligned}$$

其中 $\frac{dx}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos\alpha$, $\frac{dy}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta s} = \cos\beta$.

($\cos\alpha, \cos\beta$ 是有向曲线段 L 上点 (x, y) 处的切线向量的方向余弦, 切线向量的指向与 L 的方向一致).

另一方面, 由第一类曲线积分的计算公式有

$$\begin{aligned} & \int_{L_{AB}} (P(x, y)\cos\alpha + Q(x, y)\cos\beta) ds \\ &= \int_0^1 \{P(x(s), y(s))\cos\alpha + Q(x(s), y(s))\cos\beta\} ds. \end{aligned}$$

由此可知, 平面曲线 L 上的两类曲线积分之间有以下关系式成立:

$$\int_{L_{AB}} Pdx + Qdy = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta) ds. \quad (12)$$

把平面曲线的结论加以推广, 就得到了空间曲线 L 上的两类曲线积分之间的关系

$$\begin{aligned} & \int_{L_{AB}} Pdx + Qdy + Rdz \\ &= \int_{L_{AB}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) ds. \end{aligned} \quad (13)$$

这里, $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 是空间有向曲线 $L_{(AB)}$ 上点 (x, y, z) 处的切线向量的方向余弦, 切线向量的指向与 L 的方向一致.

§ 3 格林公式

为了进一步研究第二类曲线积分的性质, 本节先介绍格林公式, 然后在格林公式的基础上讨论平面曲线积分与路径无关的条件.

格林公式描述了平面上闭合曲线的曲线积分与二重积分之间的

关系，它在理论上和实际应用中都有很重要的作用。

一 格林 (Green) 公式

首先介绍单连通域和复连通域的概念，按照区域的定义，区域具有连通性，即对区域 D 中的任意两点 P_1 与 P_2 ，总能用位于 D 中的折线把它们连接起来。这就是说，区域就是指连通域。但是连通域还有单连通域与复连通域之分：如果区域 D 中的任何闭曲线所包围的点都全属于 D ，则称 D 为单连通域，简称单连域，否则称为复连通域或多连通域。在图10-7中， D_1 、 D_2 为单连通域， D_3 、 D_4 为复连通域。从直观上看，单连域就是区域内部不含有“洞”的区域。

对于单连通域或复连通域的边界闭曲线正向的规定为：若一个人沿着闭曲线前进时，区域总在此人的左侧，则人的前进方向就是边界闭曲线的正向。以图10-7中的闭曲线为例， D_1 中边界闭曲线的正向为逆时针方向， D_3 中外边界曲线以逆时针方向为正向，内边界曲线以顺时针方向为正向。

定理 1 (格林定理) 设函数 $P(x, y)$ ， $Q(x, y)$ 在有界闭域 D 内及其边界曲线 L 上具有一阶连续的偏导数，则

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (3.1)$$

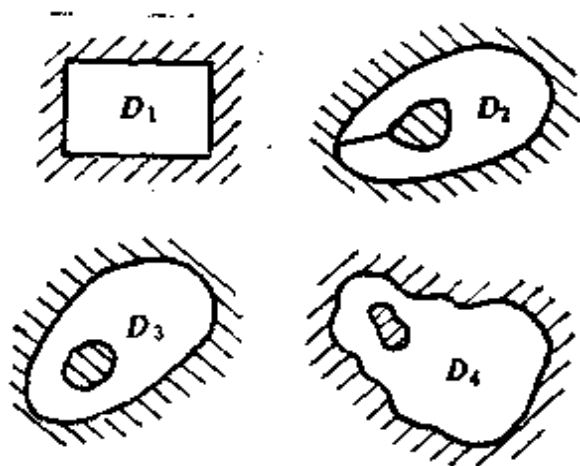


图10-7

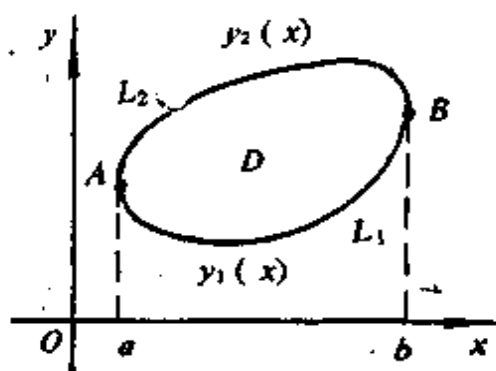


图10-8

这里 L 取正向, 公式(3.1)叫做格林公式.

证明 先证明闭区域 D 是单连通域的情形, 再证明区域 D 是复连通域的情形.

(1) 设 D 为单连通域, 穿过域 D 内部且平行于坐标轴的直线与 D 的边界曲线 L 的交点恰好为两点, 即域 D 既是 X -型的又是 Y -型的情形 (图10-8). 记 D 的正向边界曲线 $L = L_1 + L_2$, 其中 L_1 的方程为 $y = y_1(x)$, L_2 的方程为 $y = y_2(x)$. 由二重积分的计算法, 知

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

而

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \\ &= \int_a^b \{P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))\} dx \\ &= \int_a^b P(x, y_2(x)) dx - \int_a^b P(x, y_1(x)) dx. \end{aligned}$$

但是

$$\begin{aligned} \int_a^b P(x, y_2(x)) dx &= - \int_{L_2} P(x, y) dx, \\ \int_a^b P(x, y_1(x)) dx &= \int_{L_1} P(x, y) dx, \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= - \left[\int_{L_1} P(x, y) dx + \int_{L_2} P(x, y) dx \right] \\ &= - \oint_L P(x, y) dx. \end{aligned} \quad (1)$$

同理可证

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_L Q(x, y) dy. \quad (2)$$

由(1)与(2)得:

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

如果单连通闭域 D 不满足上面讨论的条件, 则可在 D 内作一条或几条辅助线, 把 D 分为若干个满足条件的闭子域. 例如图10-9所示的闭域 D 就可以用线段 MN 将 D 分成两个闭子域: D_1 与 D_2 . 使每一个子域都满足前面的条件.

令 D_1 的边界曲线为 $L_1 + NM$, D_2 的边界曲线为 $L_2 + MN$. 由已证得的公式, 有

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \int_{L_1} P dx + Q dy \\ &\quad + \int_{NM} P dx + Q dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \int_{L_2} P dx + Q dy \\ &\quad + \int_{MN} P dx + Q dy. \end{aligned}$$

因为

$$L_1 + L_2 = L, \quad \int_{NM} P dx + Q dy + \int_{MN} P dx + Q dy = 0.$$

所以

$$\begin{aligned} &\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{L_1} Pdx + Qdy + \int_{NM} Pdx + Qdy \\
&\quad + \int_{L_2} Pdx + Qdy + \int_{MN} Pdx + Qdy \\
&= \oint_L Pdx + Qdy.
\end{aligned}$$

(2) D 为复连通域, 设 D 的正向边界为 $L = L_1 + L_2$ (图10-10), $P(x, y)$ 、 $Q(x, y)$ 及其一阶偏导数在 D 内及 L 上连续. 作辅助边界线 AB , 于是以 $L' = L_2 + BA + L_1 + AB$ 为边界的闭域为单连通域, 记为 D' , 在 D' 上格林公式成立:

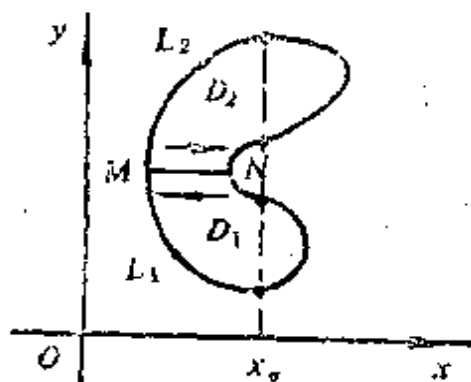


图10-9

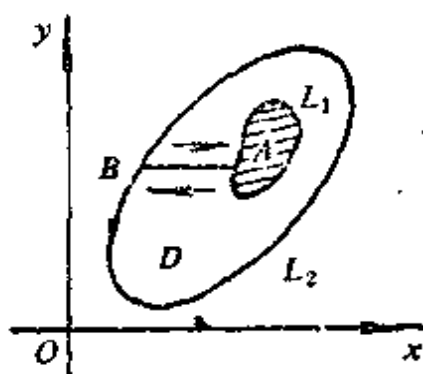


图10-10

$$\begin{aligned}
\iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \oint_{L'} Pdx + Qdy \\
&= \int_{L_2} Pdx + Qdy + \int_{BA} Pdx + Qdy \\
&\quad + \int_{L_1} Pdx + Qdy + \int_{AB} Pdx + Qdy.
\end{aligned}$$

由于

$$\iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

$$\int_{BA} Pdx + Qdy + \int_{AB} Pdx + Qdy = 0,$$

$$\oint_L Pdx + Qdy = \int_{L_1} Pdx + Qdy + \int_{L_2} Pdx + Qdy.$$

故

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad \text{证毕.}$$

作为特例，在格林公式中，令 $P(x, y) = -y$ ， $Q(x, y) = x$ ，就得到了一个计算平面有界闭域 D 的面积 S 的公式：

$$S = \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx. \quad (3)$$

利用格林公式可以把闭曲线积分转化为二重积分来计算，这给曲线积分的计算带来了方便。

例1 计算 $\oint_L 3xy dx + x^2 dy$ ，其中 L 是由图10-11所示的矩形边界正向的一周。

解 由格林公式，因为 $P = 3xy$ ， $Q = x^2$ ，故有

$$\begin{aligned} \oint_L 3xy dx + x^2 dy &= \iint_D (2x - 3x) dx dy \\ &= \int_0^2 dy \int_{-1}^1 (-x) dx \\ &= -8. \end{aligned}$$

例2 计算 $\int_L \frac{y^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx + (4x + 2y \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})) dy$,

其中 L 为沿圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ ，由点 $A(a, 0)$ 依逆时针方向到点 $B(-a, 0)$ 的半圆周（图10-12）。

解 本题若直接用曲线积分计算相当困难。为了使用格林公式，作辅助线段 BA ，则 BA 与 L 构成了半圆形闭区域 D 的正向边界

的图形的面积 S 。

解 由面积公式(3): $S = -\frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx$, 有

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (abc \cos^2 \theta + absin^2 \theta) d\theta \\ &= -\frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \pi ab. \end{aligned}$$

例4 计算 $I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, 其中 L 是一条无重点的①、分段光滑且不通过原点的闭曲线, 其方向为逆时针方向。

解 分两种情况来讨论:

(1) 设 L 的内部不包含原点(图10-13), 则

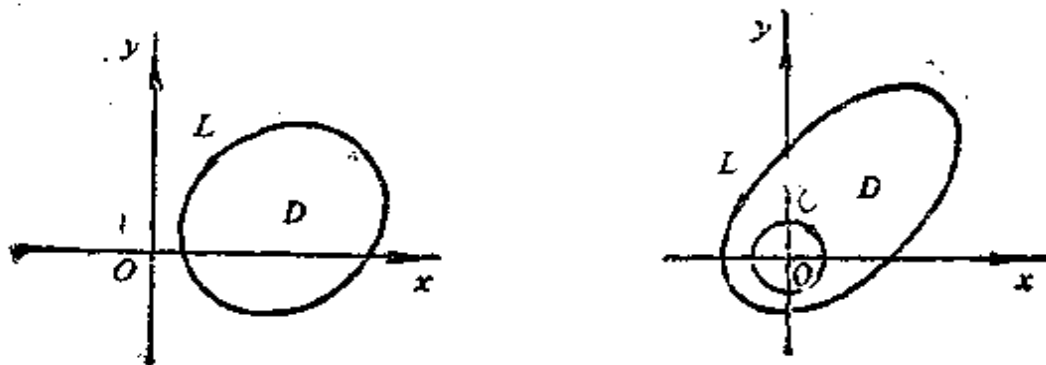


图10-13

$$P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

①对于连续曲线 $L: x = \varphi(t), y = \psi(t), a \leq t \leq \beta$, 如果除了 $t = a, t = \beta$ 外, 当 $t_1 \neq t_2$ 时, 点 $(\varphi(t_1), \psi(t_1))$ 与点 $(\varphi(t_2), \psi(t_2))$ 总是相异的, 则称 L 是无重点的曲线。

$$Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

故在 L 所围成的区域 D 上, 恒有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

由单连域的格林公式得:

$$\begin{aligned} I &= \oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

(2) 设 L 的内部包含原点, 以原点为中心, 充分小的正数 r 为半径作圆周 C , 其正向为顺时针方向, 则在 $L + C$ 为边界的复连通域内, 格林公式成立:

$$\begin{aligned} \oint_{L+C} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_D \left[\frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] dx dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \oint_{L+C} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} &= \oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} + \oint_C \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}
 I &= \oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = - \oint_C \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \\
 &= \oint_{C^-} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.
 \end{aligned}$$

其中 C^- 应循逆时针方向. 设圆周 C 的参量方程为: $x = r \cos t$, $y = r \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$). 于是

$$\begin{aligned}
 I &= \oint_{C^-} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{r \cos t \cdot r \cos t - r \sin t (-r \sin t)}{r^2} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} dt \\
 &= 2\pi.
 \end{aligned}$$

这说明沿任何包围原点的闭曲线 L 一周的积分均等于同一数值 2π .

二 平面曲线积分与路径无关的条件

曲线积分 $\int_{L(AB)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ 与路径无关的具体含义是: 已给平面域 D , A 、 B 为 D 内的任意两点. 如果沿着任何一条以 A 、 B 两点为端点且完全含于 D 内的曲线段 \widehat{AB} 的曲线积分 $\int_{\widehat{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ 的值均相同. 即积分 $\int_{\widehat{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ 的值只由端点 A 、 B 而定, 而与路径 \widehat{AB} 的选取无关.

曲线积分与路径无关这个问题在许多物理场中是有重要意义的. 例如对于力场 $\mathbf{F} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$, 曲线积分 $\int_{\widehat{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ 表示沿路径 \widehat{AB} 由点 A 到点 B 力场 \mathbf{F} 所作的功. 如果这个曲线积分与路径无关, 就表示在力场 \mathbf{F} 中, 不管由点 A 沿着什么路径到点 B , 力场所作的功都相同. 具有这种重要性质的力场, 称为保守场.

定理 2 设函数 $P(x, y)$ 、 $Q(x, y)$ 在单连通域 D 上具有一阶连续的偏导数，则下面的四个命题等价：

(i) 在域 D 中沿任一条闭曲线 L 的积分为零，即

$$\oint_L Pdx + Qdy = 0;$$

(ii) 在域 D 中曲线积分 $\int_{AB} Pdx + Qdy$ 与路径无关，只与起点 A 和终点 B 有关；

(iii) 在域 D 中存在函数 $u(x, y)$ 使曲线积分 $\int_{AB} Pdx + Qdy$ 的被积式 $Pdx + Qdy$ 是 $u(x, y)$ 的全微分，即

$$du = Pdx + Qdy;$$

(iv) 在域 D 中任意一点 (x, y) 处，恒有

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

证明 要证明上面四个命题等价，只需依次证明由 (i) 可以推得 (ii)，记为 $(i) \Rightarrow (ii)$ ； $(ii) \Rightarrow (iii)$ ， $(iii) \Rightarrow (iv)$ 及 $(iv) \Rightarrow (i)$ 。

现证明 $(i) \Rightarrow (ii)$ 。

若在 D 内沿任意的闭曲线 L ，曲线积分 $\oint_L Pdx + Qdy = 0$ ，设 A 、 B 为域 D 内任意的两点， $L_1(AB)$ 与 $L_2(AB)$ 为 D 内联结 A 、 B 的任意两条曲线，且除 A 、 B 之外无其它交点。则由 (图 10-14)

$$\int_{L_1 AB} Pdx + Qdy + \int_{L_2 BA} Pdx + Qdy = 0,$$

有

$$\int_{L_1 AB} Pdx + Qdy = \int_{L_2 AB} Pdx + Qdy.$$

如果 $L_1(AB)$ 与 $L_2(AB)$ 除 A 、 B 之外还有其它交点 (图 10-15)，

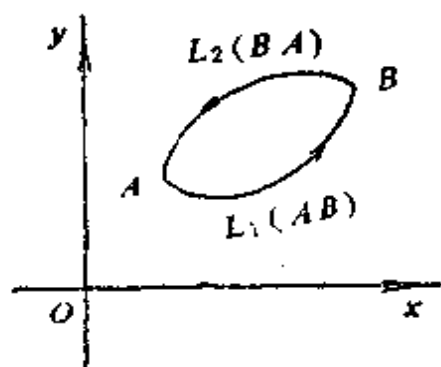


图10-14

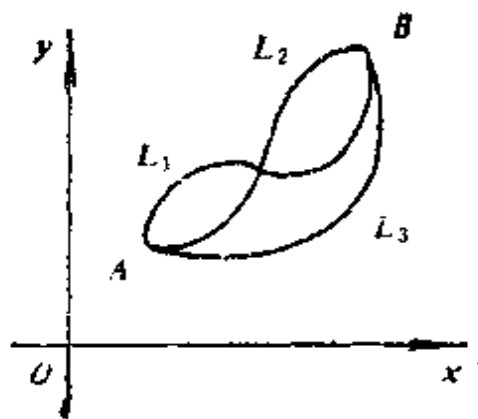


图10-15

则作 $L_3(AB)$ 使之与 $L_1(AB)$ 、 $L_2(AB)$ 除 A 、 B 外无其它交点，则由前面所证，必有

$$\begin{aligned} \int_{L_1(AB)} Pdx + Qdy &= \int_{L_2(AB)} Pdx + Qdy \\ &= \int_{L_3(AB)} Pdx + Qdy. \end{aligned}$$

故

$$\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy \text{ 与路径无关.}$$

再证明 (ii) \Rightarrow (iii).

由 (ii) 知曲线积分 $\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy$ 在 D 内与路径无关. 若令 $A(x_0, y_0)$ 为起点, $B(x, y)$ 为终点, 则当 $A(x_0, y_0)$ 固定时, 曲线积分的值仅依赖于终点 $B(x, y)$, 记为

$$u(x, y) = \int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy = \int_{A(x_0, y_0)}^{B(x, y)} Pdx + Qdy,$$

则

$$u(x + \Delta x, y) = \int_{A(x_0, y_0)}^{N(x + \Delta x, y)} Pdx + Qdy.$$

由于曲线积分与路径无关, 故可取积分路径如图10-16所示, 则有

$$\begin{aligned}
 u(x+\Delta x, y) &= \int_{A(x_0, y_0)}^{N(x+\Delta x, y)} Pdx + Qdy \\
 &= \int_{A(x_0, y_0)}^{B(x, y)} Pdx + Qdy + \int_{B(x, y)}^{N(x+\Delta x, y)} Pdx + Qdy \\
 &= u(x, y) + \int_{B(x, y)}^{N(x+\Delta x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.
 \end{aligned}$$

因为在线段 BN 上, y 不变. 故 $dy=0$, 上式成为

$$\begin{aligned}
 u(x+\Delta x, y) - u(x, y) &= \int_x^{x+\Delta x} P(x, y)dx \\
 &= P(x+\theta\Delta x, y) \cdot \Delta x, \quad (0 \leq \theta \leq 1).
 \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(x+\theta\Delta x, y) \\
 &= P(x, y),
 \end{aligned}$$

于是得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y).$$

同理可证

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y).$$

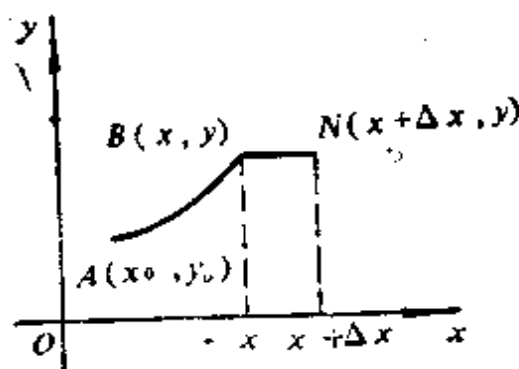


图10-16

下面再证 (iii) \Rightarrow (iv).

假设在 D 内存在某一个函数 $u(x, y)$, 使

$$du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

则必有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y),$$

及

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

由于 $P(x, y)$ 、 $Q(x, y)$ 在 D 内具有一阶连续的偏导数, 故 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ 、

$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ 连续. 因此 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$. 即

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

最后再由 (iv) 证 (i).

设 L 为 D 内任意一条正向闭曲线, 它所包围的区域为 D_1 , 由于 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 故由格林公式得

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

即在 D 内沿任何一条正向闭曲线 L 的积分:

$$\oint_L P dx + Q dy = 0,$$

显然若闭线 L 取顺时针方向, 结论亦真.

证毕.

到此为止, 曲线积分 $\int_{AB} P dx + Q dy$ 与路径无关的四个命题的等价性就证明完了.

如果曲线积分 $\int_{AB} P dx + Q dy$ 在单连通域 D 上与路径无关 (且 P 、 Q 在 D 上有一阶连续的偏导数), 则存在函数 $u(x, y)$ 使

$$du(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

成立. 并且 $u(x, y)$ 可以表示为

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy + C. \quad (3)$$

其中 (x_0, y_0) 为域 D 中的一个定点, C 为常数. 这时称 $u(x, y)$ 为

微分式 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 的原函数.

应当引起注意的是, 在上面讨论四个命题的等价性时, 域 D 是单连通这个条件很重要. 对复连通域这种等价性就未必成立. 例如: 考虑函数 $P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$, $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$. 在复连通域 (破坏了单连通域的条件), $\frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 4$ 上, 有

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

这时沿着单位圆周 c : $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) 上的曲线积分

$$\begin{aligned} \oint_c Pdx + Qdy &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

它不等于零, 故命题的等价性不成立.

例5 (1) 证明 $\int_L e^x(\cos y dx - \sin y dy)$ 与路径无关.

(2) 计算 $\int_{(0,0)}^{(2,1)} e^x(\cos y dx - \sin y dy)$ 的值.

解 (1) 证明 因为在整个 xOy 平面上, $\frac{\partial P}{\partial y} = -e^x \sin y = \frac{\partial Q}{\partial x}$. 所以在整个 xOy 平面上曲线积分 $\int_L e^x(\cos y dx - \sin y dy)$ 与路径无关.

(2) 取路径由点 $O(0,0)$ 到点 $A(2,0)$ 再到点 $B(2,1)$ 的折线 OAB , 则

$$\begin{aligned} \int_{(0,0)}^{(2,1)} e^x(\cos y dx - \sin y dy) &= \int_0^2 e^x dx + \int_0^1 e^2(-\sin y) dy \\ &= e^2 \cos 1 - 1. \end{aligned}$$

例6 验证表达式 $(4x+2y)dx + (2x-6y)dy$ 是某个函数的

全微分, 并求出在点 $(1, 1)$ 处函数值为零的那个原函数.

解 因为在 xOy 平面上有

$$\frac{\partial(4x+2y)}{\partial y} = 2 = \frac{\partial(2x-6y)}{\partial x}$$

所以表达式 $(4x+2y)dx + (2x-6y)dy$ 是某个函数 $u(x, y)$ 的全微分. 取积分路径为 ONB . 其中 $O(0, 0)$, $N(x, 0)$, $B(x, y)$. 则有

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x 4x dx + \int_0^y (2x-6y) dy + C \\ &= 2x^2 + 2xy - 3y^2 + C. \end{aligned}$$

由定解条件: $u(1, 1) = 0$, 知 $C = -1$. 故有

$$u(x, y) = 2x^2 + 2xy - 3y^2 - 1.$$

另外, 由公式(3), 取 $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. 也可以同样得到:

$$u(x, y) = 2x^2 + 2xy - 3y^2 - 1.$$

§ 4 第一类曲面积分

第一类曲面积分的概念与第一类曲线积分的概念类似, 但是它的积分域不是曲线段, 而是曲面块.

本书中在讨论曲面积分时, 总是假定所给的曲面是有界的光滑的 (即曲面具有连续变化的切平面) 或者逐片光滑的 (即将曲面分成若干块, 则每一块都是光滑的). 因此, 曲面均是可求面积的.

一 第一类曲面积分的概念及性质

例1 曲面薄板的质量 设 S 为一曲面薄板, 其上各点的面密度为 $\mu = \mu(x, y, z)$. 求此薄板的质量 m .

解 为了求此薄板的质量 m , 将 S 任意地分割为 n 个子曲面块 ΔS_i ($i = 1, 2, \dots, n$). 同时用 ΔS_i 代表第 i 块子曲面块的面积. 在 ΔS_i 上任取一点 $N_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, 则子曲面块 ΔS_i 的质量近似等于

存在定理 如果函数 $f(x, y, z)$ 在有界光滑的闭曲面 S 上连续, 则第一类曲面积分 $\iint_S f(x, y, z) dS$ 存在 (证明从略).

第一类曲面积分也具有与第一类曲线积分相似的性质. 如将曲面 S 分割为两块曲面 S_1 与 S_2 , 则有

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{S_1} f(x, y, z) dS + \iint_{S_2} f(x, y, z) dS.$$

其余的性质, 这里不再赘述.

二 第一类曲面积分的计算法

设曲面 S 的方程由 $z = z(x, y)$ 给出, S 在 xOy 平面上的投影区域为 D_{xy} , 又设函数 $f(x, y, z)$ 在 S 上连续. 由曲面积分的定义, 有

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i \quad (1)$$

设 ΔS_i 在 xOy 平面上的投影区域为 $(\Delta \sigma_i)_{xy}$ (它的面积也记为 $(\Delta \sigma_i)_{xy}$), 则 (1) 式中的曲面子块 ΔS_i 可用二重积分表示为:

$$\begin{aligned} \Delta S_i &= \iint_{(\Delta \sigma_i)_{xy}} \sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)} dx dy \\ &= \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_i', \eta_i') + z_y'^2(\xi_i', \eta_i')} \cdot (\Delta \sigma_i)_{xy}, \end{aligned}$$

其中 $(\xi_i', \eta_i') \in (\Delta \sigma_i)_{xy}$. 于是由 $\zeta_i = z(\xi_i, \eta_i)$, 有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i)) \\ &\quad \cdot \sqrt{1 + z_x'^2(\xi_i', \eta_i') + z_y'^2(\xi_i', \eta_i')} (\Delta \sigma_i)_{xy}. \end{aligned}$$

由于曲面积分存在, 因此与 (ξ_i, η_i, ζ_i) 选取方法无关, 故不妨在上式右端取 $\xi_i = \xi_i'$, $\eta_i = \eta_i'$, 又当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 有 $d = \max |(\Delta \sigma_i)_{xy}| \rightarrow 0$, 故由上式极限得

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y))$$

$$\cdot \sqrt{1+z'^2(x, y)+z''^2(x, y)} dx dy. \quad (4.1)$$

公式(4.1)给出了第一类曲面积分的计算方法, 它将曲面积分化为二重积分计算.

类似地, 如果曲面 S 的方程为: $x = x(y, z)$ 或 $y = y(x, z)$. D_{yz} 、 D_{zx} 分别为曲面 S 在 yOz 、 zOx 平面上的投影, 同样有

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) dS &= \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \\ &\cdot \sqrt{1+x'^2(y, z)+x''^2(y, z)} dy dz, \end{aligned} \quad (4.2)$$

及

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) dS &= \iint_{D_{zx}} f(x, y(x, z), z) \\ &\cdot \sqrt{1+y'^2(x, z)+y''^2(x, z)} dx dz. \end{aligned} \quad (4.3)$$

例 1 计算 $\iint_S (z + 2x + \frac{4}{3}y) dS$. 其中 S 为平面 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ 位于第一卦限中的部分 (图 10-17).

解 因为 $z = 4 - 2x - \frac{4}{3}y$, 所以 $dS = \frac{\sqrt{61}}{3} dx dy$, 故

$$\begin{aligned} \iint_S \left(z + 2x + \frac{4}{3}y \right) dS &= \iint_D 4 \cdot \frac{\sqrt{61}}{3} dx dy \\ &= 4 \cdot \frac{\sqrt{61}}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \\ &= 4\sqrt{61}. \end{aligned}$$

例 2 计算 $\iint_S \frac{1}{z} dS$, 其中 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, 被平面 $z = h$ ($0 < h \leq a$) 所截得的位于平面上方的球冠.

解 因为 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, 所以 $dS = \frac{a dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$,

故

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{1}{z} dS &= \iint_{D_{xy}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= a \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{a^2 - h^2}} \frac{\rho}{a^2 - \rho^2} d\rho \\ &= 2\pi a \left[-\frac{1}{2} \ln(a^2 - \rho^2) \right]_0^{\sqrt{a^2 - h^2}} \\ &= 2\pi a \ln \frac{a}{h}. \end{aligned}$$

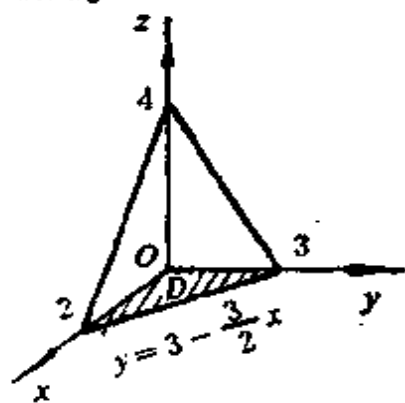


图10-17

§ 5 第二类曲面积分

第二类曲面积分与第二类曲线积分相似, 它的概念要涉及到曲面的方向, 为此首先介绍有向曲面的概念.

一 有向曲面

在曲面 S 上任取一点 M_0 , 并取定 M_0 的法线矢量 n_0 , 当法线矢量 n_0 从点 M_0 出发, 沿着完全落在曲面 S 上的任意一条不越过 S 的边界的连续闭曲线 L 运动, 再次回到点 M_0 时, 如果法线矢量 n_0 的方向与出发时的方向相同, 则称曲面 S 是双侧的, 否则称 S 是单侧的.

在实际问题中, 遇到的曲面大多数都是双侧曲面. 但是单侧曲面也是存在的. 象图10-18中的莫比乌斯 (Möbius) 面就是单侧曲面的例子. 它是将矩形 $ABCD$ 扭转一次, 然后将 B 与 D 、 A 与 C 粘合起来构成的一个环带状曲面. 今后本节中讨论的曲面, 都是双侧曲面.

在讨论第二类曲面积分时, 需要指定是对曲面哪一侧积分. 为

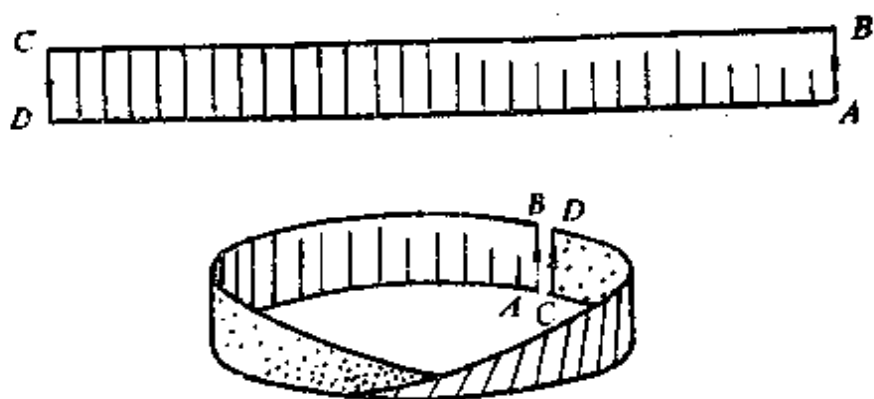


图10-18

此，可以通过曲面上法矢量的指向来确定曲面的侧。例如，对于曲面 $z = z(x, y)$ ，若取它的法矢量 n 的指向朝上，我们就认为是取定曲面的上侧，或称取曲面的上侧为正侧。对于封闭曲面，我们通常取它的法矢量的指向朝外，即取定曲面的外侧为正侧。这种取定了法矢量的指向，亦即选定了侧的曲面，就叫做有向曲面。

设 S 为有向曲面，在 S 上取一充分小的曲面块 ΔS 。设在 ΔS 上的一点处的法矢量的方向余弦为 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 。我们记

$$\Delta S \cos\gamma = \Delta_{xy}\sigma, \quad \Delta S \cos\alpha = \Delta_{yz}\sigma, \quad \Delta S \cos\beta = \Delta_{zx}\sigma,$$

并分别对应地称它们为有向曲面片 ΔS 在 xOy 、 yOz 、 zOx 三个坐标面的投影（注意，它们的值可正、可负、也可能为零）。当 ΔS 为平面块时，这些投影的绝对值就是这块小平面的投影在该坐标面上投影区域的面积。

二 第二类曲面积分的概念及性质

例1 流速场的流量 设有不可压缩（密度为1）的流体在空间区域 Ω 中稳恒（即流速不随时间而变化）地流动，质点的流速为 $v = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k$ ， S 为 Ω 中的有向曲面，其单位法线矢量为 n 。求流体通过曲面 S 流向正侧的流量。

解 先考虑最简单的情形

(1) 设流速 $v = Pi + Qj + Rk$ 为常矢量， ΔS 是一块平面，它的

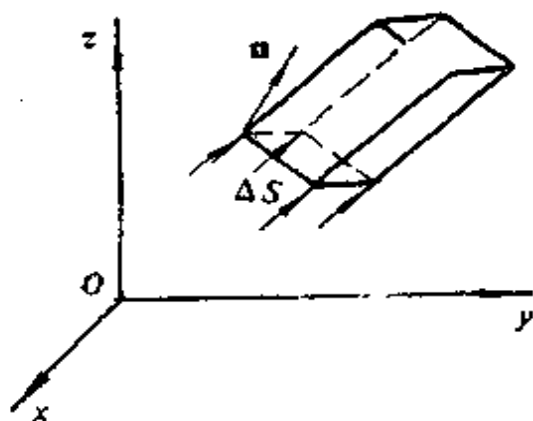


图 10-19

单位法线矢量为 $n = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, 这一小块平面的面积仍记为 ΔS (图10-19)。

在单位时间内, 在 ΔS 上流体的质点平行于 v 移动了 $|v|$ 个单位距离, 因为密度为 1, 于是以 ΔS 为底, 以 $|v|$ 为棱长的柱体的体积就是流过 ΔS 的流体的体积。所以流过有向平面块 ΔS 的流量为:

$$I = v \cdot n \Delta S = |v| \cos\theta \Delta S$$

其中 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) 为 v 与 n 的夹角。

实际上, 上面的流量 I 还可以写成矢量的坐标表示式:

$$\begin{aligned} I &= (Pi + Qj + Rk) \cdot (\cos\alpha i + \cos\beta j + \cos\gamma k) \Delta S \\ &= P\cos\alpha \Delta S + Q\cos\beta \Delta S + R\cos\gamma \Delta S \\ &= P\Delta_{yz}\sigma + Q\Delta_{xz}\sigma + R\Delta_{xy}\sigma \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $\Delta_{yz}\sigma$ 、 $\Delta_{xz}\sigma$ 、 $\Delta_{xy}\sigma$ 分别为 ΔS 在 yOz 面、 xOz 面、 xOy 面上的投影。

考虑一般的情形, 设 v 为变矢量, S 为有向曲面。

(2) 把曲面 S 任意地分成 n 个子曲面块 ΔS_i ($i = 1, 2, \dots, n$), 它的面积仍记为 ΔS_i , 并设 λ 为这 n 个子曲面块中的最大直径。在 ΔS_i 上任取一点 $N_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, 曲面 S 在点 N_i 处的单位法线矢量为 n_i , 则流过第 i 个子曲面块 ΔS_i 的流量可以近似地表示为:

$$v(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot n_i \cdot \Delta S_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

于是流过有向曲面正侧的流量可以近似地表示为:

$$\begin{aligned}
 I_n &= \sum_{i=1}^n \boldsymbol{v}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \boldsymbol{n} \Delta S \\
 &= \sum_{i=1}^n (P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i \sigma_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta y_i \sigma_i \\
 &\quad + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta z_i \sigma_i)
 \end{aligned}$$

当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 上式的极限即为流过有向曲面 S 正侧的流量 I .

$$I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} I_n.$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (P \Delta x_i \sigma_i + Q \Delta y_i \sigma_i + R \Delta z_i \sigma_i) \quad (2)$$

由例 1 中的 (2) 式得到的和式极限, 可以引出第二类曲面积分的概念.

定义 设 S 为光滑的有向曲面, 其单位法线矢量为 \boldsymbol{n} , $P(x, y, z)$ 、 $Q(x, y, z)$ 、 $R(x, y, z)$ 为定义在 S 上的有界函数.

将曲面 S 任意地分成 n 个子曲面块 ΔS_i ($i=1, 2, \dots, n$). 其面积仍记为 ΔS_i . 又设 λ 为 n 个子曲面块 ΔS_i 中的最大直径.

在 ΔS_i 上任取一点 $N_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, 若记曲面 S 在点 N_i 处的单位法线矢量为 $\boldsymbol{n}_i = \{\cos \alpha_i, \cos \beta_i, \cos \gamma_i\}$.

记 $\Delta x_i \sigma_i = \cos \gamma_i \Delta S_i$ 为有向子曲面块 ΔS_i 在坐标平面 xOy 上的投影, 作和式

$$I_n = \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i \sigma_i$$

如果当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, I_n 的极限为 I , 即

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} I_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i \sigma_i = I,$$

且极限值 I 与曲面 S 的分法无关, 也与每个子曲面块 ΔS_i 上的点 N_i 的选取方法无关, 则称 I 为函数 $R(x, y, z)$ 在有向曲面 S 上对 xOy 坐标面的曲面积分或函数 $R(x, y, z)$ 在有向曲面 S 上的第

二类曲面积分. 记为 $\iint_S R(x, y, z) dx dy$, 即

$$\iint_S R(x, y, z) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta \sigma_i, \quad (5.1)$$

其中 $R(x, y, z)$ 叫做被积函数, S 叫做积分曲面.

类似地, 可以定义函数 $P(x, y, z)$ 及 $Q(x, y, z)$ 在有向曲面 S 上 (对 yOz 及 zOx 坐标面) 的第二类曲面积分:

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta \sigma_i, \quad (5.2)$$

及

$$\iint_S Q(x, y, z) dx dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta \sigma_i, \quad (5.3).$$

将 (5.1)、(5.2)、(5.3) 三式相加, 并简记为

$$\begin{aligned} & \iint_S P dy dz + Q dx dz + R dx dy \\ &= \iint_S P dy dz + \iint_S Q dz dx + \iint_S R dx dy \end{aligned} \quad (5.4)$$

称 (5.4) 式为函数 P, Q, R 在有向曲面 S 上的第二类曲面积分.

由于第二类曲面积分中的曲面 S 是有向曲面, 因此在上面的 (5.1)~(5.4) 式中都需要具体指明积分是对 S 的哪一侧进行的 (即指出 S 的法线矢量的指向).

如果把 (5.4) 式中的 P, Q, R 看成矢量 $\mathbf{A} = \{P, Q, R\}$ 的坐标, $\mathbf{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ 为有向曲面 S 的单位法线矢量, 记

$$\begin{aligned} \mathbf{n} dS &= \cos \alpha dS \mathbf{i} + \cos \beta dS \mathbf{j} + \cos \gamma dS \mathbf{k}, \\ &= dy dz \mathbf{i} + dx dz \mathbf{j} + dx dy \mathbf{k} \end{aligned}$$

$$=dS. \quad (3)$$

这里 dS 叫做有向曲面 S 的面积元素,它的方向就是 n 的方向,其大小即为 dS (图10-20),于是(5.4)式又可以表示为

$$\iint_S Pdydz+Qdxdz+Rdxdy=\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.5)$$

用矢量形式表示第二类曲面积分有很明确的物理意义,因此很多科技书籍中多采用(5.5)式的形式.如果给定一个矢量场 $\mathbf{A}=P(x,y,z)\mathbf{i}+Q(x,y,z)\mathbf{j}+R(x,y,z)\mathbf{k}$, S 是一个有向曲面,那么(5.4)式表示的就是矢量场 \mathbf{A} 通过有向曲面正侧的通量.

对于第二类曲面积分,有下面的存在定理:若函数 P, Q, R 在有向曲面 S 上连续,则第二类曲面积分 $\iint_S Pdydz+Qdxdz+Rdxdy$ 存在(证明从略)

第二类曲面积分与第一类曲面积分的重要区别是第二类曲面积分的值是与曲面 S 的方向有关的,如果改变曲面 S 的方向,则有向子面块 ΔS_i 在坐标平面上的投影都要改变符号,从而积分也要变号,即

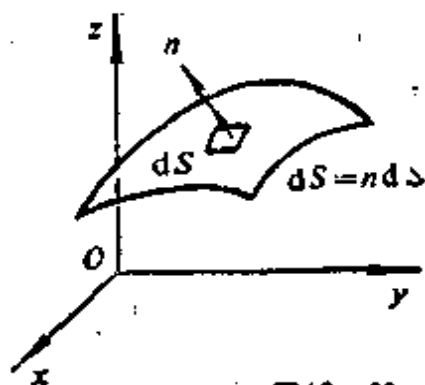


图10-20

$$\begin{aligned} & \iint_{S^*} Pdydz+Qdxdz+Rdxdy \\ &= - \iint_S Pdydz+Qdxdz+Rdxdy. \end{aligned}$$

其中 S^* 表示与 S 的取向相反的另一侧有向曲面.

由于在第二类曲面积分的和式极限中

$$\Delta_{12}\sigma_i = \Delta S_i \cos \alpha_i, \quad \Delta_{23}\sigma_i = \Delta S_i \cos \beta_i, \quad \Delta_{31}\sigma_i = \Delta S_i \cos \gamma_i$$

因此两类曲面积分之间有以下的关系式成立

$$\iint_S Pdydz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \alpha_i \Delta S_i$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_S P \cos \alpha dS, \\
\iint_S Q dz dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \beta_i \Delta S_i \\
&= \iint_S Q \cos \beta dS, \\
\iint_S R dx dy &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \gamma_i \Delta S_i \\
&= \iint_S R \cos \gamma dS,
\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}
&\iint_S P dy dz + Q dx dz + R dx dy \\
&= \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS \quad (5.6)
\end{aligned}$$

这里, $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ 为有向曲面 S 的法线矢量的方向余弦.

第二类曲面积分也具有与第二类曲线积分类似的性质, 这里不再赘述.

三 第二类曲面积分的计算法

设有向曲面 S 的方程为 $z = z(x, y)$, 它在 xOy 平面上的投影区域为 D_{xy} , 若 γ 为 S 的法线矢量与 Oz 轴正向的夹角. 函数 $R(x, y, z)$ 在 S 上连续, 当 S 表示取曲面上侧时, $0 \leq \gamma < \frac{\pi}{2}$, 故 $\cos \gamma > 0$, 于是由两类曲面积分的关系. 有

$$\begin{aligned}
\iint_S R(x, y, z) dx dy &= \iint_S R(x, y, z) \cos \gamma dS \\
&= \iint_S R(x, y, z) \frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}} dS
\end{aligned}$$

$$\iint_S Q(x, y, z) dz dx = 0. \quad (9)$$

同理, 当 S 的方程为 $x = x(y, z)$, S 在 yOz 平面上的投影区域为 D_{yz} 时, 有公式(10)~(12):

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz = \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dy dz. \quad (10)$$

其中 S 表示取曲面的前侧 (这时 $\cos \alpha > 0$),

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz = - \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dy dz. \quad (11)$$

其中 S 表示取曲面的后侧 (这时 $\cos \alpha < 0$).

当曲面 S 为垂直于 yOz 面的柱面时, 由于 $\cos \alpha = 0$, 这时有

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz = 0. \quad (12)$$

例 2. 计算曲面积分 $\iint_S xyz dx dy$, 其中 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧在 $x \geq 0, y \geq 0$ 的部分 (图10-21).

解 由球面的方程解 z 得

$$S_1: z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

$$S_2: z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

S_1 为球面在第 I 卦限部分, 其法线矢量 n_1 与 Oz 轴正向的夹角为锐角. S_2 为球面在第 V 卦限部分, 其法线矢量 n_2 与 Oz 轴正向的夹角为钝角. 于是

$$\begin{aligned} \iint_S xyz dx dy &= \iint_{S_1} xyz dx dy + \iint_{S_2} xyz dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy \\ &\quad + \left[- \iint_{D_{xy}} xy (-\sqrt{1 - x^2 - y^2}) dx dy \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \rho \cos\theta \cdot \rho \sin\theta \sqrt{1-\rho^2} \rho d\rho \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta d\theta \int_0^1 \rho^3 \sqrt{1-\rho^2} d\rho \\
&= -\frac{2}{15}.
\end{aligned}$$

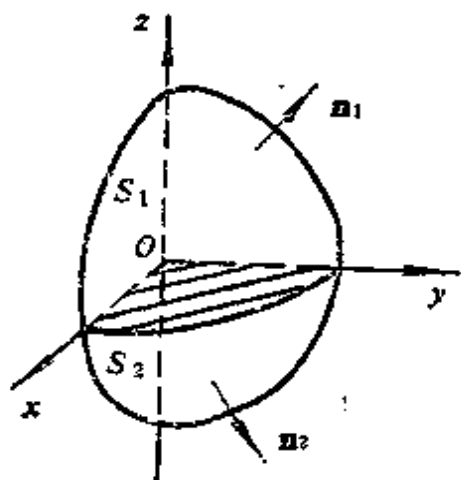


图10-21

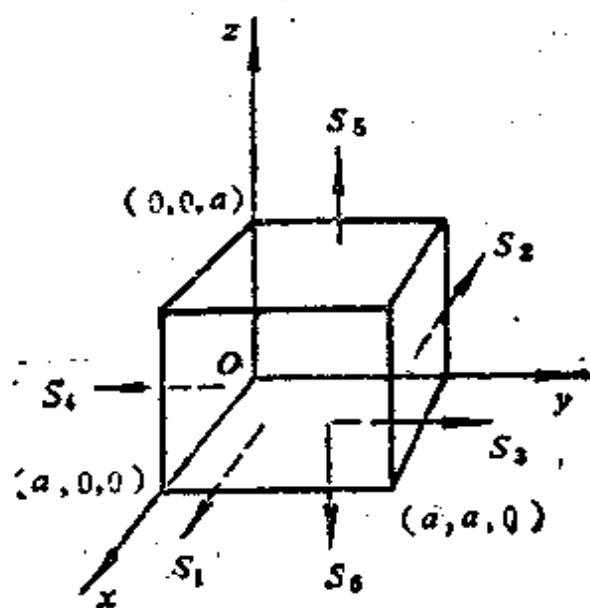


图10-22

例2 设向量场 $A(x, y, z) = y(x-z)i + x^2j + (y^2+xz)k$, S 为立方体: $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$ 的表面的外侧. 求 $A(x, y, z)$ 通过 S 的通量 Φ .

解 封闭曲面 S 由六块平面组成(图10-22), 分别设其为: S_1 、 S_2 、 S_3 、 S_4 、 S_5 和 S_6 . 则有:

S_1 的方程: $x=a$, 法矢量为 i ;

S_2 的方程: $x=0$, 法矢量为 $-i$;

S_3 的方程: $y=a$, 法矢量为 j ;

S_4 的方程: $y=0$, 法矢量为 $-j$;

S_5 的方程: $z=a$, 法矢量为 k ;

S_0 的方程: $z=0$, 法矢量为 $-k$.

若用 \oint_S 表示沿封闭曲面 S (外侧为正侧) 的积分, 于是所求的

通量 Φ 可以表示为:

$$\Phi = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S y(x-z)dydz + x^2dxdz + (y^2+xz)dxdy.$$

由于 S_1 、 S_2 在 xOy 、 xOz 面的投影为零,

S_3 、 S_4 在 xOy 、 yOz 面的投影为零,

S_5 、 S_6 在 xOz 、 yOz 面的投影为零.

故通量只需计算六个积分:

$$\begin{aligned} \Phi &= \left[\iint_{S_1} y(x-z)dydz + \iint_{S_2} y(x-z)dydz \right] \\ &\quad + \left[\iint_{S_3} x^2dxdz + \iint_{S_4} x^2dxdz \right] \\ &\quad + \left[\iint_{S_5} (y^2+xz)dxdy + \iint_{S_6} (y^2+xz)dxdy \right] \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{D_{yz}} y(a-z)dydz + \left(- \iint_{D_{yz}} y(0-z)dydz \right) \\ &= \int_0^a ydy \int_0^a (a-z)dz + \int_0^a ydy \int_0^a zdz \\ &= \frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{4}a^4 \\ &= \frac{1}{2}a^4. \end{aligned}$$

$$I_2 = \iint_{D_{xz}} x^2 dx dz + \left(- \iint_{D_{xz}} x^2 dx dz \right) = 0.$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \iint_{D_{xy}} (y^2 + ax) dx dy + \left[- \iint_{D_{xy}} (y^2 + 0 \cdot x) dx dy \right] \\ &= \int_0^a \int_0^a (y^2 + ax) dx dy + \left(- \int_0^a dx \int_0^a y^2 dy \right) \\ &= \frac{5}{6}a^3 - \frac{1}{3}a^3 \\ &= \frac{1}{2}a^3. \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \Phi &= I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{2}a^3 + 0 + \frac{1}{2}a^3 \\ &= a^3. \end{aligned}$$

§ 6 高斯公式 曲面积分与曲面 无关的条件

格林公式建立了平面上沿闭曲线 L 的曲线积分与 L 所围的闭区域 D 上的二重积分的联系。而高斯公式所表达的，则是沿闭曲面 S 的曲面积分与 S 所围的空间闭区域 Ω 上的三重积分之间的关系。

一 高斯(Gauss)公式

首先介绍空间单连通域的概念，与平面区域的情况类似，按照定义空间区域也都是连通的。但是空间单连通域则有一维单连通域和二维单连通域的区别。

如果在空间区域 Ω 内，任意的一张简单闭曲面所围的区域都全属于 Ω ，则称 Ω 为空间二维单连通域。

如果在空间区域 Ω 内, 任意的一条闭曲线总可以张成一片完全属于 Ω 的曲面, 则称 Ω 为空间一维单连通域.

例如, 球面所围的空间区域 Ω , 既是空间一维单连通域, 又是空间二维单连通域; 两个同心球面之间的空间区域, 只是空间一维单连通域而不是空间二维单连通域; 圆环面所围的空间区域, 只是空间二维单连通域, 而不是空间一维单连通域.

定理 1 (高斯定理) 设空间有界闭域 Ω 是空间二维单连通域, 其边界曲面为 S . 函数 $P(x, y, z)$ 、 $Q(x, y, z)$ 、 $R(x, y, z)$ 在 Ω 及 S 上具有一阶连续的偏导数, 则有

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz \\ &= \oiint_S P dy dz + Q dx dz + R dx dy \\ &= \oiint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS. \end{aligned} \quad (6.1)$$

其中, 曲面 S 取外侧, $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ 是 S 上法线矢量的方向余弦. 公式(6.1)叫做高斯(Gauss)公式.

证明 在公式(6.1)中, 后面的一个等式由两类曲面积分的关系已经知道是成立的. 故仅需证明此式的前面等式成立.

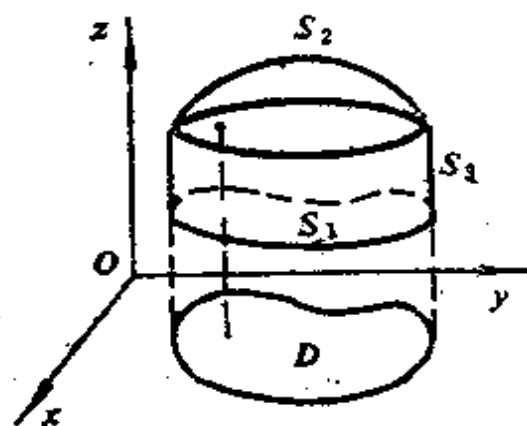


图10-23

设穿过 Ω 内部且平行于坐标轴的直线与 Ω 的边界曲面 S 的交点恰好是两个. 如图10-23所示, 平行于 Oz 轴且穿过 Ω 内部的直线与 S 的两个交点分别在曲面 S 的上半部分 S_2 上与下半部分 S_1 上, 则设 S 是由 S_1 , S_2 及柱面 S_3 组成. 如果

设 S_1 与 S_2 的方程为,

$S_1: z = z_1(x, y);$

$S_2: z = z_2(x, y),$ 其中 $z_1(x, y) \leq z_2(x, y).$

D_{xy} 是空间闭区域 Ω 在 xOy 平面上的投影.

根据三重积分的计算法, 有

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz \\ &= \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \\ &= \iint_{D_{xy}} \{R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y))\} dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_2(x, y)) dx dy \\ &\quad - \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_1(x, y)) dx dy. \end{aligned} \quad (1)$$

另一方面, 根据曲面积分的计算法, 并注意到 S_3 在 xOy 面上的投影为零. 故有

$$\begin{aligned} & \oint_S R(x, y, z) dx dy \\ &= \iint_{S_2(\text{上侧})} R(x, y, z) dx dy \\ &\quad + \iint_{S_1(\text{下侧})} R(x, y, z) dx dy + \iint_{S_3} R(x, y, z) dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_2(x, y)) dx dy \\ &\quad - \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_1(x, y)) dx dy + 0 \end{aligned}$$

$$= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_2(x, y)) dx dy - \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_1(x, y)) dx dy. \quad (2)$$

由(1)式与(2)式, 得

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \oiint_S R(x, y, z) dx dy. \quad (3)$$

同理可证

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \oiint_S P(x, y, z) dy dz. \quad (4)$$

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \oiint_S Q(x, y, z) dx dz. \quad (5)$$

合并(3)、(4)、(5)式, 便证得高斯公式(6.1).

如果闭区域 Ω 不满足上面的条件(平行于坐标轴的直线与 Ω 的边界曲面的交点多于两个)时, 可以用平面将 Ω 分成若干个小的闭区域, 使每一个小的闭区域都满足以上的条件. 例如象图10-24那样, 可以将 Ω 分成 Ω_1 与 Ω_2 两个小的闭区域. 注意到分别在 Ω_1 与 Ω_2 上应用高斯公式时, 沿辅助平面相反两侧积分的值仅差一个负号, 相加时正负恰好相互抵消. 因此在 Ω 上高斯公式仍然成立.

证毕

例1 设向量场 $\mathbf{A}(x, y, z) = (x^3 - yz)\mathbf{i} - 2x^2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, S 为立方体: $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$ 的表面的外侧. 求 $\mathbf{A}(x, y, z)$ 通过 S 的通量 Φ .

$$\text{解 } \Phi = \oiint_S (x^3 - yz) dy dz - 2x^2y dx dz + z dx dy.$$

因为 $P = x^3 - yz$, $Q = -2x^2y$, $R = z$,

$$\text{所以 } \frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = -2x^2, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 1.$$

由高斯公式，有

$$\begin{aligned}\Phi &= \iiint_{\Omega} (x^2 + 1) dx dy dz = \int_0^a dz \int_0^a dy \int_0^a (x^2 + 1) dx \\ &= \frac{1}{3}a^6 + a^3.\end{aligned}$$

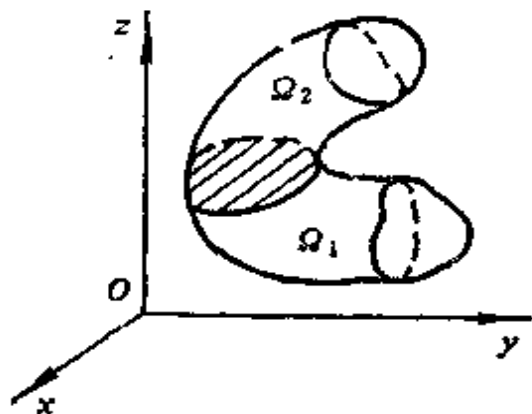


图10-24

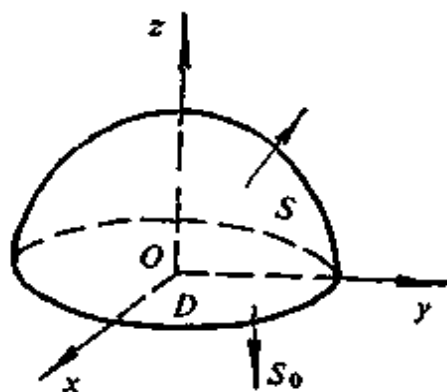


图10-25

例2 计算 $\iint_S dydz + x dx dz + (z+1) dx dy$ ，其中 S 是半球

面 $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧。

解 由于 S 不是封闭曲面，（图10-25），直接计算曲面积分比较繁一些。现在加上 xOy 平面上的圆 S_0 ：

$$z=0, x^2+y^2 \leq 1.$$

S_0 的方向取下侧，则由 S 与 S_0 构成了封闭曲面，设其所围的半球体为 Ω 。用高斯公式有

$$\begin{aligned}& \oiint_{S+S_0} dydz + x dx dz + (z+1) dx dy \\ &= \iiint_{\Omega} + \iint_{S_0} \\ &= \iiint_{\Omega} (0+0+1) dx dy dz\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 r^2 \sin\varphi dr \\
&= 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \\
&= \frac{2}{3}\pi.
\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}
&\iint_S dydz + xdx dz + (z+1)dx dy \\
&= \oint_{S+S_0} - \iint_{S_0} dydz + xdx dz + (z+1)dx dy \\
&= \frac{2}{3}\pi + \iint_{D_{xy}} dx dy \\
&= \frac{2}{3}\pi + \pi \\
&= \frac{5}{3}\pi.
\end{aligned}$$

二 曲面积分与曲面无关的条件

利用高斯公式，可以得到曲面积分与所取曲面无关的条件。

定理2 设 Ω 是空间二维单连通闭域， P 、 Q 、 R 在 Ω 内具有一阶连续的偏导数，则曲面积分

$$\iint_S P dydz + Q dx dz + R dx dy, \quad (6)$$

在 Ω 内与所取的曲面 S 无关，而只取决于 S 的边界曲线（或沿 Ω 内任意一闭曲面的曲面积分为零）的充分必要条件是等式

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0, \quad (7)$$

§ 7 斯托克斯公式 空间曲线积分与路径无关的条件

斯托克斯公式是格林公式的另外一种形式的推广，它建立了沿有向曲面 S 的边界曲线 L 的曲线积分与 S 上的曲面积分之间的联系。

一 斯托克斯 (Stokes) 公式

设 S 为一有向曲面， L 是它的边界曲线，规定 S 的正侧与 L 的

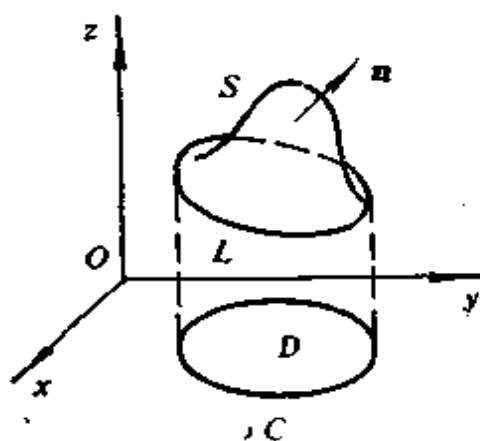


图10-26

正向的关系如下：若观察者站在曲面 S 的正侧上（即观察者由脚至头部的方向与曲面的法线方向一致），当他沿着曲线 L 前进时，曲面 S 总在他的左边，这时规定观察者前进的方向为 L 的正向。并称 L 的正向与曲面 S 的法线矢量方向遵循右手法则（图10-26），或称 L 是有向曲面 S 的正向边界曲线。

定理（斯托克斯定理）设函数 $P(x, y, z)$ 、 $Q(x, y, z)$ 、 $R(x, y, z)$ 在包含曲面 S 的空间区域 Ω 中有一阶连续的偏导数，则

$$\begin{aligned} & \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz \\ & + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ & = \oint_L P dx + Q dy + R dz. \end{aligned} \quad (7.1)$$

其中 L 为 S 的边界， L 和 S 的正向按右手法则确定，公式(7.1)叫做

斯托克斯公式.

证明 设 S 的方程为 $z=z(x, y)$, 则平行于 Oz 轴的直线与 S 至多只有一个交点. 记 S 为曲面 $z=z(x, y)$ 的上侧. 曲线 L 在 xOy 平面上的投影为有向曲线 C , 由 C 围成的闭区域为 D_{xy} .

斯托克斯公式由三个相类似的部分组成, 现在先证明其中的一个部分:

$$\iint_S \frac{\partial P}{\partial z} dx dz - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_L P(x, y, z) dx \quad (1)$$

为此, 设 xOy 平面上的曲线 C 的方程为:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} \quad (a \leq t \leq b).$$

则空间曲线 L 的方程可以表示为:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(x(t), y(t)). \end{cases} \quad (a \leq t \leq b).$$

于是有

$$\begin{aligned} & \oint_L P(x, y, z) dx \\ &= \int_a^b P(x(t), y(t), z(x(t), y(t))) x'(t) dt \\ &= \oint_C P(x, y, z(x, y)) dx. \end{aligned} \quad (2)$$

而(1)式的左端由两类曲面积分的关系有

$$\begin{aligned} & \iint_S \frac{\partial P}{\partial z} dx dz - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \\ &= \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) dS. \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $\cos \beta$, $\cos \gamma$ 为曲面 $S: z=z(x, y)$ 的法线矢量的方向余弦:

$$\cos \beta = \frac{-\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},$$

易知

$$\cos \beta = -\frac{\partial z}{\partial y} \cos \gamma.$$

代入(3)式的右端, 得

$$\begin{aligned} & \iint_s \frac{\partial P}{\partial z} dx dz - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \\ &= \iint_s -\left(\frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y}\right) \cos \gamma dS \\ &= -\iint_s \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx dy \\ &= -\iint_{D_{xy}} \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, z(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

应用格林公式有

$$\begin{aligned} & -\iint_{D_{xy}} \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, z(x, y)) dx dy \\ &= \oint_{\partial D_{xy}} P(x, y, z(x, y)) dx, \end{aligned}$$

$$\text{即 } \iint_s \frac{\partial P}{\partial z} dx dz - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_{\partial D_{xy}} P(x, y, z(x, y)) dy. \quad (4)$$

比较(2)式与(4)式即得

$$\iint_S \frac{\partial P}{\partial z} dx dz - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_L P(x, y, z) dx,$$

如果曲面 S 取下侧， L 也相应改成相反的方向，那末上式的两端同时改变符号，因此(1)式仍然成立。

用同样方法可证

$$\iint_S \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy dz = \oint_L Q(x, y, z) dy, \quad (5)$$

$$\iint_S \frac{\partial R}{\partial y} dy dz - \frac{\partial R}{\partial x} dx dz = \oint_L R(x, y, z) dz, \quad (6)$$

把(1)、(5)、(6)三式相加，就证得斯托克斯公式：

$$\begin{aligned} & \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz \\ & \quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ & = \oint_L P dx + Q dy + R dz. \end{aligned}$$

如果平行于坐标轴的直线与曲面 S 的交点多于一个时，可将 S 分成有限个小曲面，使每个小曲面与平行于坐标轴的直线的交点不多于一个。根据曲面积分的可加性，对于这种曲面，斯托克斯公式仍然成立。

证毕。

若曲面 S 的法线矢量的方向余弦为 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ，并把 $\frac{\partial}{\partial x}$ 与 Q 的“积”理解为 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ ， $\frac{\partial}{\partial y}$ 与 P 的“积”理解为 $\frac{\partial P}{\partial y}$...等等。则斯托克斯公式用行列式可以表示为：

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

$$= \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \quad (7.2)$$

公式(7.2)当然比公式(7.1)更便于记忆.

在斯托克斯公式中, 如果 S 是一个平行于 xOy 面的平面, 则有 $dz=0$, 这时, 斯托克斯公式就变成格林公式.

例1 计算曲线积分: $\oint_L ydx + zdy + xdz$, 其中 L 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x+y)$ 与平面 $x+y=2$ 的交线, L 的正向为从原点看去是逆时针方向(图10-27).

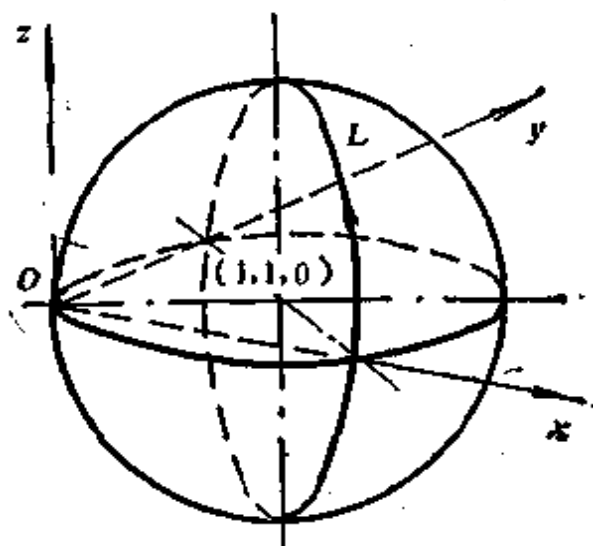


图10-27

解 取平面 $x+y=2$ 的由曲线 L 所围成的部分作为斯托克斯公式中的曲面 S , 则曲面 S 的法线矢量的方向余弦按右手法则为:

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos\gamma = 0.$$

于是由斯托克斯公式, 得

$$\oint_L ydx + zdy + xdz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} ds$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_s \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) dS \\
&= \sqrt{2} \iint_s dS \\
&= \sqrt{2} \cdot (\pi (\sqrt{2})^2) \\
&= 2\sqrt{2}\pi.
\end{aligned}$$

二 空间曲线积分与路径无关的条件

设函数 $P(x, y, z)$ 、 $Q(x, y, z)$ 、 $R(x, y, z)$ 及其偏导数在空间一维单连通域 Ω 上连续, 则与平面曲线积分相似, 有下面四个等价的命题 (证明从略).

(1) 在 Ω 中曲线积分 $\int_{L(A,B)} Pdx + Qdy + Rdz$ 与路径无关, 只与起点 A 和终点 B 有关;

(2) 在 Ω 中, 沿任何一条闭曲线 L 的积分值为零, 即

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0;$$

(3) 在 Ω 中的任意点 (x, y, z) 处, 恒有

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0;$$

(4) 在 Ω 中, 存在函数 $u(x, y, z)$, 使曲线积分 $\int_{L(A,B)} Pdx + Qdy + Rdz$ 中的被积式是 $u(x, y, z)$ 的全微分. 即

$$du = Pdx + Qdy + Rdz.$$

例2 设力场为 $F = Pi + Qj + Rk$. 其中

$P = yz(2x + y + z)$, $Q = xz(x + 2y + z)$, $R = xy(x + y + 2z)$
证明该力场为保守场, 并求场对质点 M 沿任一路径 L 从点 $A(x_0, y_0, z_0)$ 到点 $B(x, y, z)$ 所作的功 W .

解 因为 $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = (2xz + 2yz + z^2) - (2xz + 2yz + z^2) = 0$,

$$\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} = (2xy + y^2 + 2yz) - (2xy + y^2 + 2yz) = 0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} = (2xy + 2xz + x^2) - (2xy + 2xz + z^2) = 0.$$

所以, 沿任何闭路 L 所作的功为零, 即

$$\oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

说明 \mathbf{F} 为保守力场, 此力场所作的功 W 只与起点和终点有关, 而与路径无关. 于是

$$\begin{aligned} W &= \int_{L_{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} yz(2x + y + z)dx + xz(x + 2y + z)dy \\ &\quad + xy(x + y + 2z)dz \\ &= \int_{x_0}^x y_0 z_0 (2x + y_0 + z_0) dx + \int_{y_0}^y x z_0 (x + 2y + z_0) dy \\ &\quad + \int_{z_0}^z x y (x + y + 2z) dz \\ &= x^2 y z + x y^2 z + x y z^2 - (x_0^2 y_0 z_0 + x_0 y_0^2 z_0 + x_0 y_0 z_0^2). \end{aligned}$$

§ 8 矢量场的散度与旋度

一 矢量场的散度

在第五节中, 已经知道: 给定一个矢量场:

$$\mathbf{A}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}.$$

那么矢量场 \mathbf{A} 通过闭曲面 S 外侧的通量 Φ 可以表示为:

$$\Phi = \oiint_S P dy dz + Q dx dz + R dx dy.$$

$$= \oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1)$$

如果 \mathbf{A} 为流速场, 则(1)式就代表了通过 S 的流量.

当 $\Phi > 0$ 时, 表示通过 S 流出的流体多于流入的流体. 此时, 在 S 内必有产生流体的泉源. 当然, 也可能还有排泄流体的漏洞. 无论如何 S 内产生的流体必定多于排泄的流体. 总的说来 S 内有正源.

当 $\Phi < 0$ 时, 表示流入 S 的流体少于流出的流体. 总的来说是 S 内有负源.

当 $\Phi = 0$ 时, 我们不能断定 S 内无源. 因为 S 内可能出现既有正源又有负源, 二者恰好相互抵消使得 $\Phi = 0$.

通量的概念不能了解“正、负源”在 S 内的分布情况及“源”的强弱程度等, 为了回答这个问题, 下面引进散度的定义.

散度的定义 设有矢量场 $\mathbf{A}(M) = \mathbf{A}(x, y, z)$, 在场中某一点 M 处的某一邻域内作一个包含点 M 在内的任一闭曲面 Σ (取外侧), 设其包围的空间为 $\Delta\Omega$, 以 ΔV 表示其体积, 以 $\Delta\Phi$ 表示从其内穿出 Σ 的通量, 当 $\Delta\Omega$ 以任意方式收缩向点 M 时, 若极限

$$\lim_{\Delta\Omega \rightarrow M} \frac{\Delta\Phi}{\Delta V} = \lim_{\Delta\Omega \rightarrow M} \frac{\oiint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V}$$

存在, 则称此极限值为矢量场 $\mathbf{A}(M)$ 在点 M 处的散度, 记为 $\operatorname{div} \mathbf{A}$.

由散度的定义可知, $\operatorname{div} \mathbf{A}$ 为一数量, 它表示在场中 M 点处通量对体积的变化率. 即在点 M 处的单位体积所穿出的通量, 实际就是点 M 处的源的强度 (或通量密度)

因此, 当 $\operatorname{div} \mathbf{A} \neq 0$ 时, 其符号的正、负就表示了在点 M 处有散发通量的正源或吸收通量的负源; 而其绝对值 $|\operatorname{div} \mathbf{A}|$ 相应地表示了在该点 M 处散发或吸收通量的强度; 而当 $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ 时, 表示在该点无源. 对于 $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ 的矢量场 \mathbf{A} 则称为无源场或管形场.

定理 1 若矢量场 $\mathbf{A} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$, 其中 P, Q, R 具有一阶连续的偏导数, 则在任意一点 $M(x,$

y, z)处的散度为

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad (8.1)$$

证明 对任意包围点 M 的一个闭曲面 S (其法矢量指向外侧), 设其包围的空间 $\Delta\Omega$ 的体积为 ΔV , 则由高斯公式

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_S P dy dz + Q dx dz + R dx dy \\ &= \iiint_{\Delta\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV \end{aligned}$$

由三重积分的中值定理, 存在 $M^*(\xi, \eta, \zeta) \in \Delta\Omega$, 使

$$\Delta\Phi = \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right]_{M^*} \cdot \Delta V \quad (M^* \in \Delta\Omega).$$

故

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A} &= \lim_{\Delta\Omega \rightarrow M} \frac{\Delta\Phi}{\Delta V} = \lim_{\substack{\Delta\Omega \rightarrow M \\ (M^* \rightarrow M)}} \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right]_{M^*} \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \end{aligned}$$

证毕.

散度具有下面的运算性质:

- (1) $\operatorname{div}(k\mathbf{A}) = k\operatorname{div} \mathbf{A}$ (k 为常数);
- (2) $\operatorname{div}(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \operatorname{div} \mathbf{A} \pm \operatorname{div} \mathbf{B}$;
- (3) $\operatorname{div}(u\mathbf{A}) = u\operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad} u$ (u 为数性函数).

例1 置于原点的点电荷 e , 产生的静电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{e}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} (xi + yj + zk). \text{ 验证 } \mathbf{E} \text{ 在不包含原点}$$

的空间区域内为无源场

解 因为

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = e \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \right) \right]$$

(仍用 ΔS 代表): $\frac{\Gamma}{\Delta S}$, 这个比值表示在小面元 ΔS 上沿其法矢量方向 \mathbf{n} 的平均电流密度. 当小面元缩向一点 M 时, 即当小面元的面积 $\Delta S \rightarrow 0$ 时, 若 $\frac{\Gamma}{\Delta S}$ 有极限存在, 那末这个极限就代表在点 M 处沿方向 \mathbf{n} 的电流密度.

将以上的物理概念推广到一般的矢量场, 就有下面的矢量场环量密度概念.

定义 1 设 M 为矢量场 \mathbf{A} 中的一点, 在点 M 处取定一个方向 \mathbf{n} , 再过点 M 作一个微小的曲面 ΔS (其面积也记为 ΔS), 并以 \mathbf{n} 代表点 M 处 ΔS 的法线矢量, 若 ΔS 的边界用 L 表示, 且 L 的正向与 \mathbf{n} 遵循右手法则 (图10-28), 若比值的极限

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \Gamma}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta S}$$

存在, 则称此极限值为矢量场 \mathbf{A} 在点 M 处沿方向 \mathbf{n} 的环量密度, 记为 μ_n . (环量对面积的变化率), 即

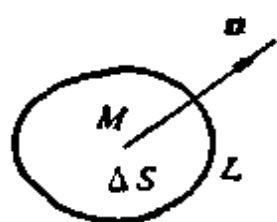


图10-28

$$\begin{aligned} \mu_n &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \Gamma}{\Delta S} \\ &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta S}. \end{aligned}$$

从上面的定义可知, 环量密度 μ_n 的值除了与点 M 的位置有关之外, 还与所取的方向 \mathbf{n} 有关, 这一点与数量场的方向导数的概念类似. 在数量场中定义了一个梯度矢量, 类似地, 在矢量场 \mathbf{A} 中也定义了一个矢量, 这就是矢量场 \mathbf{A} 在点 M 处的旋度: $\text{rot } \mathbf{A}$.

旋度的定义 设矢量场 \mathbf{A} 中的一点 $M(x, y, z)$ 处存在这样一个矢量, 其方向为最大环量密度的方向, 其模为最大环量密度的值, 则称此矢量为矢量场 \mathbf{A} 在点 M 处的旋度, 记为 $\text{rot } \mathbf{A}|_M$, 当点 M 为任意点时, 记为 $\text{rot } \mathbf{A}$.

下面的定理提供了在直角坐标系下, 计算矢量场旋度的公式.

定理 2 若矢量场 $\mathbf{A} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x,$

$y, z)k$, 其中 P, Q, R 具有一阶连续的偏导数, 则在任意一点 $M(x, y, z)$ 处的旋度为

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (8.2)$$

证明 先求环量面密度 μ_n , 因为

$$\begin{aligned} \Delta \Gamma &= \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_L P dx + Q dy + R dz \\ &= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz \\ &\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos(n, x) \right. \\ &\quad + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos(n, y) \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos(n, z) \right] dS. \end{aligned}$$

其中 $\cos(n, x), \cos(n, y), \cos(n, z)$ 为曲面 S 上法线矢量的方向余弦. 由积分中值定理, 在 S 上必存在点 $M'(\xi, \eta, \zeta)$ 使上式为

$$\Delta \Gamma = \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos(n, x) \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos(n, y) \\
& + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos(n, z) \Bigg]_{M'} \Delta S,
\end{aligned}$$

所以得

$$\begin{aligned}
\mu_s &= \lim_{\Delta S \rightarrow M} \frac{\Delta \Gamma}{\Delta S} = \lim_{\substack{\Delta S \rightarrow M \\ (M' \rightarrow M)}} \frac{\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta S} \\
&= \lim_{\substack{\Delta S \rightarrow M \\ (M' \rightarrow M)}} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos(n, x) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos(n, y) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos(n, z) \right]_{M'} \\
&= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta \\
&\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma. \tag{2}
\end{aligned}$$

(2)式就是矢量场 \mathbf{A} 在点 M 处沿 $\mathbf{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ 方向的环量密度在直角坐标系中的表示式。

在公式(2)中, 如果取矢量 \mathbf{R} 为

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \tag{3}
\end{aligned}$$

则公式(2)可写成

$$\mu_s = \lim_{\Delta S \rightarrow M} \frac{\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta S} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{n} = |\mathbf{R}| \cos(\mathbf{R}, \mathbf{n}).$$

从上式可知, 当角 $(\mathbf{R}, \mathbf{n}) = 0$ 时, 环量密度具有最大值 $|\mathbf{R}|$, 即 \mathbf{R} 的方向为最大环量密度的方向, 其模为最大环量密度值. 所以矢量 \mathbf{R} 正好就是矢量场 \mathbf{A} 在点 M 处的旋度, 即

$$\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{R}.$$

因此, 公式(3)就是旋度在直角坐标系中的表示式.

证毕.

旋度具有下面的运算性质:

$$(1) \text{rot}(k\mathbf{A}) = k\text{rot } \mathbf{A}, \quad (k \text{ 为常数});$$

$$(2) \text{rot}(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \text{rot } \mathbf{A} \pm \text{rot } \mathbf{B};$$

$$(3) \text{rot}(u\mathbf{A}) = u\text{rot } \mathbf{A} + \text{grad } u \times \mathbf{A}, \quad (u \text{ 为数性函数}),$$

$$(4) \text{rot}(\text{grad } u) = \mathbf{0}. \quad (\mathbf{0} \text{ 为零矢量})$$

若矢量场 \mathbf{A} 的旋度 $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{0}$, 则称矢量场 \mathbf{A} 为无旋场. 既是无旋场又是无源场的矢量场 \mathbf{A} 称为调合场.

例3 求矢量场 $\mathbf{A} = xy^2z^2\mathbf{i} + z^2\sin y\mathbf{j} + x^2e^y\mathbf{k}$ 的旋度

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \text{rot } \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2z^2 & z^2\sin y & x^2e^y \end{vmatrix} \\ &= (x^2e^y - 2z\sin y)\mathbf{i} + 2x(y^2z - e^y)\mathbf{j} - 2xyz^2\mathbf{k}. \end{aligned}$$

例4 一刚体绕过原点的轴 l 转动, 其角速度为 $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$, 刚体上每一点处均有线速度 \mathbf{v} , 求速度场 \mathbf{v} 的旋度: $\text{rot } \mathbf{v}$ (图10-29).

解 由物理学知, 在点 $M(x, y, z)$ 处的速度 \mathbf{v} 为

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = (\omega_y z - \omega_z y)\mathbf{i} + (\omega_z x - \omega_x z)\mathbf{j} + (\omega_x y - \omega_y x)\mathbf{k}$$

其中 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, 为 M 点处的矢径. 于是得:

$$\text{rot } \mathbf{v} = 2\omega_x\mathbf{i} + 2\omega_y\mathbf{j} + 2\omega_z\mathbf{k} = 2\boldsymbol{\omega}.$$

三 哈密尔顿 (Hamilton) 算子

哈密尔顿引进的矢量微分算子 ∇ 定义为:

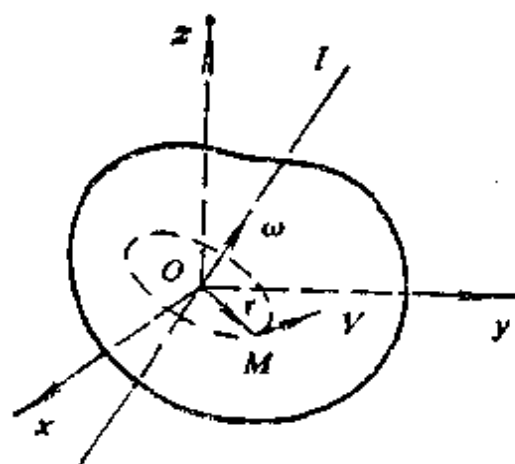


图10-29

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k.$$

记号 ∇ 读作纳普拉(Nabla)称为哈密顿算子或纳普拉算子, ∇ 算子本身并无意义,仅是一种微分运算符号,同时又被看作矢量.因此,在运算中具有矢量和微分的双重性质.它的运算规则是:

(1) 设 $u = u(x, y, z)$, 则

$$\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) u$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k = \text{grad} u.$$

$$\nabla^2 u = \nabla \cdot \nabla u = \nabla \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k \right)$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

(2) 设 $A = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k$,

则

$$\nabla \cdot A = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \cdot (Pi + Qj + Rk)$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$= \text{div} A.$$

$$\nabla \times A = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \times (Pi + Qj + Rk)$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \text{rot} \mathbf{A}.$$

而 $\nabla \mathbf{A}$ 、 $\nabla \cdot \mathbf{u}$ 、 $\nabla \times \mathbf{u}$ 均无意义。

利用算子 ∇ ，高斯公式可以写为：

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int \int \int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV.$$

而斯托克斯公式则可写为：

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

哈密尔顿算子有下面的运算性质

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} \pm \nabla \cdot \mathbf{B}$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} \pm \nabla \times \mathbf{B},$$

$$\nabla(u \pm v) = \nabla u \pm \nabla v,$$

$$\nabla(uv) = u \nabla v + v \nabla u.$$

例5 证明 $\nabla(uv) = u \nabla v + v \nabla u$.

$$\begin{aligned} \text{证明} \quad \nabla(uv) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) uv \\ &= \frac{\partial(uv)}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial(uv)}{\partial z} \mathbf{k} \\ &= \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \left(u \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{j} \\ &\quad + \left(u \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial z} \right) \mathbf{k} \\ &= u \left(\frac{\partial v}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial v}{\partial z} \mathbf{k} \right) \end{aligned}$$

$$+ v \left(\frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k \right)$$

$$= u \nabla v + v \nabla u$$

证毕.

第十一章 级数

无穷级数是高等数学的一个重要组成部分. 在历史上, 它是由于进行实际计算的需要, 随着极限概念的完善而同时形成的. 无穷级数是表示函数、研究函数性质以及进行数值计算的重要工具之一.

本章首先讨论常数项级数, 然后讨论函数项级数, 并着重讨论如何把函数展开成幂级数与三角级数的问题.

§ 1 数项级数

一 无穷级数的基本概念

无穷级数的概念, 在中学教材中就已见过, 例如无穷等比级数 (或几何级数)

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots,$$

另外, 无尽小数也可以看做是无穷级数, 例如

$$\sqrt{2} = 1.4142\cdots = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \cdots.$$

定义 设给定一个数列

$$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots,$$

则由此数列构成的表达式

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \quad (1)$$

叫做 (常数项) 无穷级数, 简称 (常数项) 级数, 记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots,$$

其中第 n 项 u_n 叫做级数的通项或一般项.

在上述定义中, 无穷多项相加的式子, 暂时还没有运算上的意义, 因为逐项相加对无穷多项来说是无法实现的. 为了使无穷多项相加的式子有实际意义, 显然应当从有限项的和出发, 观察它们的变化趋势, 由此来理解无穷多项相加的含义. 为此, 把级数的前 n 项的和记为 s_n , 即

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k, \quad (2)$$

并称 s_n 为级数的部分和. 当 n 依次取 $1, 2, 3, \cdots$ 时, 部分和构成一个新的数列:

$$s_1 = u_1, \quad s_2 = u_1 + u_2, \quad s_3 = u_1 + u_2 + u_3, \quad \cdots, \\ s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n, \quad \cdots$$

根据这个数列有没有极限, 下面引进无穷级数 (1) 的收敛与发散的概念.

定义 当 n 无限增大时, 若级数 (1) 的部分和所成的数列 s_n 有极限 s , 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, 则称级数 (1) 收敛, 并称 s 为级数 (1) 的和, 记为

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

如果 s_n 没有极限, 则称级数 (1) 发散.

当级数收敛时, 其部分和 s_n 是级数和 s 的近似值, s 与 s_n 之间的差值记为 r_n , 由下段将证明的级数的基本性质 3 可知

$$r_n = s - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+k} + \cdots,$$

因此我们把 r_n 叫做级数的余项 (或第 n 项以后的余和). 用 s_n 作为近似值代替 s 所产生的误差就是这个余项的绝对值, 即误差是 $|r_n|$.

例 1 等比无穷级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots, \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
 s_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
 &= 1 - \frac{1}{n+1},
 \end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

所以该级数收敛，其和是1.

例3 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 的收敛性.

解 由于级数的部分和

$$\begin{aligned}
 s_n &= \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n} \\
 &= \ln \left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1),
 \end{aligned}$$

从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty$.

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 发散.

二 级数的基本性质

根据级数收敛与发散的定义，可以得出级数具有的几个基本性质.

性质1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于和 s ， C 为常数，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} C u_n = C u_1 + C u_2 + \cdots + C u_n + \cdots$$

也收敛, 且其和为 Cs ; 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, C 为不等于零的常数,

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$ 也发散.

证明 令 $s_n = \sum_{k=1}^n u_k$, $\sigma_n = \sum_{k=1}^n Cu_k$, 于是有 $\sigma_n = Cs_n$. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于和 s , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Cs_n = Cs,$$

这就表明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$ 收敛于和 Cs .

又由关系式 $\sigma_n = Cs_n$ 可知, 如果 s_n 没有极限且 $C \neq 0$, 那末 σ_n 也不可能有极限. 因此若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散且 $C \neq 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$ 必发散. 证毕.

这个性质表明: 将级数的每一项同乘一个不为零的常数后, 其敛散性不变.

性质 2 设有两个收敛级数

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots,$$

$$\sigma = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n + \cdots,$$

则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \cdots + (u_n \pm v_n) + \cdots$$

也收敛, 且其和为 $s \pm \sigma$.

证明 因为

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^n (u_i \pm v_i) \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^n u_i \pm \sum_{i=1}^n v_i \right] \\ &= s \pm \sigma \end{aligned}$$

故所得结论成立.

证毕.

性质 3 在级数的前面去掉或加上有限项, 不会影响级数的敛散性 (不过在收敛时, 一般说来级数的和是要改变的).

证明 设将级数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_k + u_{k+1} + \cdots + u_{k+n} + \cdots$$

的前 k 项去掉, 则得级数

$$u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{k+n} + \cdots,$$

于是新得的级数的部分和为

$$\sigma_n = u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{k+n} = s_{k+n} - s_k,$$

其中 s_{k+n} 是原来级数的前 $k+n$ 项的和. 因为 s_k 是常数, 所以当 $n \rightarrow \infty$ 时, σ_n 与 s_{k+n} 同时具有极限, 或者同时没有极限. 在有极限时其关系为

$$\sigma = s - s_k,$$

其中 $\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$, $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{k+n}$.

类似地, 可以证明在级数的前面加上有限项, 也不会影响级数的敛散性.

证毕.

性质 4 收敛级数加括弧后所成的级数仍然收敛于原来的和.

证明 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于和 s . 将级数按照某一规律加括弧后所成的级数设为

$$(u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots \\ + (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) + \cdots,$$

把这个级数记为

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_k + \cdots.$$

用 σ_k 表示它前 k 项的和, 则 σ_k 应是原级数前 n_k 项的和 $s_{n_k} = \sum_{n=1}^{n_k} u_n$,

即数列 $\{\sigma_k\}$ 是数列 $\{s_n\}$ 的一个子列. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, 所以作为 $\{s_n\}$ 的子列 $\sigma_k = s_{n_k}$ 也应当以同一个数 s 为其极限 (参见第二章 § 2 中海

涅定理一段)。即加上括弧后所得的新级数 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 仍然收敛, 而且

其和与原给级数的和 s 相同.

证毕.

注意, 收敛级数去括弧后所成的级数不一定收敛, 例如级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

收敛于零, 但去掉括弧后的级数

$$1-1+1-1+1-1+\cdots+1-1+\cdots$$

却是发散的.

根据性质 4 可以得到以下的推论: 如果加括弧后所成的级数发散, 则原来的级数也发散. 事实上, 倘若原来级数收敛, 则根据性质 4 知道, 加括弧后的级数就应该收敛了.

性质 5 (级数收敛的必要条件) 若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 收敛, 则当 n

$\rightarrow \infty$ 时, 其通项 u_n 必趋于零.

证明 设级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 收敛于和 s , 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, 其中 $s_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

由于

$$u_n = s_n - s_{n-1}$$

因此有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1}$$

$$= s - s = 0.$$

证毕.

由级数收敛的必要条件可知, 如果当 $n \rightarrow \infty$ 时, 级数的通项不以零为极限, 则级数必发散. 例如级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[n]{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{4}} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} + \cdots,$$

它的通项 $u_n = (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时不趋于零, 因此这级数是发散的.

注意, 通项趋于零并不是级数收敛的充分条件. 有些级数虽然通项趋于零, 但仍然是发散的. 例如在 § 1 例 3 中所讨论的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n} + \cdots,$$

它的通项 $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 但它却是一个发散的级数. 又如调和级数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots, \quad (4)$$

虽然它的通项 $u_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 但很容易证明它也是发散的. 事实上, 因为当 $x > 0$ 时恒有不等式 $x > \ln(1+x)$ 成立, 所以对一切自然数 n 均有不等式

$$\frac{1}{n} > \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad (n=1, 2, \cdots)$$

成立. 于是调和级数(4)的前 n 项和

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(1+1) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \cdots \\ &\quad + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \ln(n+1), \end{aligned}$$

因此当 $n \rightarrow \infty$ 时 $s_n \rightarrow \infty$, 即调和级数(4)是发散的.

三 正项级数敛散性的判别法

级数的每一项均为非负实数的级数称为正项级数. 这种级数特别重要, 以后将会看到许多其它形式的级数的收敛性问题, 往往都要归结到讨论正项级数的收敛性问题.

设级数

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

是一个正项级数 ($u_n \geq 0$)，它的部分和为 s_n 。显然，数列 s_n 是一个单调增加数列：

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \cdots \leq s_n \leq \cdots.$$

如果数列 $\{s_n\}$ 有界，即，总不大于某个正数 M ，则级数 $\sum u_n$ 收敛，且其和为 M 。

$\sigma_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n \geq u_1 + u_2 + \cdots + u_n = s_n \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$,
即数列 $\{\sigma_n\}$ 是一个无界数列, 由基本定理知级数 (B) 发散. 证毕.

注意到去掉级数前面有限项不会影响级数收敛性这一性质, 可以得到以下推论:

推论 如果级数 (A) 收敛, 并且从某项起 (例如从第 N 项起) 总有 $v_n \leq u_n$ ($n \geq N$), 则级数 (B) 也收敛; 如果级数 (A) 发散, 并且从某项起恒有 $v_n \geq u_n$ ($n \geq N$), 则级数 (B) 也发散.

例 4 讨论 p -级数

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots \quad (5)$$

的收敛性, 其中常数 $p > 0$.

解 当 $p = 1$ 时, p -级数就是前面已经讨论过的调和级数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots,$$

它是发散的.

当 $p < 1$ 时, p -级数的各项都不小于调和级数的对应项, $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$; 由比较判别法可知这时级数 (5) 发散.

设 $p > 1$, 由于当 $n-1 \leq x \leq n$ 时, 有 $\frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{x^p}$, 所以

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^p} &= \int_{n-1}^n \frac{1}{n^p} dx \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{x^p} dx \\ &= \frac{1}{p-1} \left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}} \right], \\ &\quad (n=2, 3, \cdots). \end{aligned}$$

考虑正项级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}} \right], \quad (6)$$

它的部分和

$$\begin{aligned} s_n &= \left(1 - \frac{1}{2^{p-1}} \right) + \left(\frac{1}{2^{p-1}} - \frac{1}{3^{p-1}} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n^{p-1}} - \frac{1}{(n+1)^{p-1}} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)^{p-1}}, \end{aligned}$$

因 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^{p-1}} \right) = 1,$

所以级数(6)收敛, 对级数(6)乘以正常数 $\frac{1}{p-1}$ 也收敛. 于是根据比较法的推论(从第二项起开始比较)可知, 级数(5)当 $p > 1$ 时收敛.

综合上述结果, 就得到: p -级数(5)当 $p \leq 1$ 时发散, 当 $p > 1$ 时收敛.

例5 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n^2}$ 是收敛的.

证明 因为

$$0 \leq \sin \frac{\pi}{n^2} < \frac{\pi}{n^2},$$

又 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n^2} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 根据比较判别法知级数: $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n^2}$ 收敛. 证毕.

例6 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 是发散的.

证明 因为 $n(n+1) < (n+1)^2$ 所以 $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1}.$

而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n+1} + \cdots$$

是发散的, 根据比较判别法知所给级数发散.

证毕.

下述比较法的极限形式更为方便实用.

比较法的极限形式 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 为两个正项级数, 且 $v_n > 0$, 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l,$$

则

(i) 当 $0 < l < +\infty$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 有相同的敛散性.

(ii) 当 $l = 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

(iii) 当 $l = +\infty$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

证明 由所设有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$.

(i) 当 $0 < l < +\infty$ 时, 对 $\varepsilon = \frac{l}{2} > 0$, 存在自然数 N , 当 $n > N$ 时有不等式

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - l \right| < \frac{l}{2} \quad \text{即} \quad \frac{l}{2} v_n < u_n < \frac{3}{2} l v_n$$

成立. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{2} v_n$ 也发散, 由比较判别法的推论

可知所给级数与 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6}{7}\right)^n$ 有相同的敛散性, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6}{7}\right)^n$ 为收敛的正项几何级数, 故所给级数收敛.

例 8 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sqrt[n]{n}}}$ 的敛散性.

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^{\sqrt[n]{n}}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1,$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sqrt[n]{n}}}$ 也发散.

例 9 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ 的敛散性.

解 将级数与 p -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 比较, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln n}{n^2}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^{2-p}} = \begin{cases} +\infty, & \text{当 } p \geq 2 \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } p < 2 \text{ 时.} \end{cases}$$

所以这时在比较法的极限形式中不能使用(i)的结论. 注意到当 $1 < p < 2$ 时上述极限为零且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ($1 < p < 2$) 收敛, 根据比较法的极限式(ii)的结论可知所给级数收敛.

2 比值判别法与根值判别法

将所给正项级数与等比级数比较, 可以得到在实用上很方便的比值判别法与根值判别法.

比值判别法 (达朗贝尔 (D'Alembert) 判别法) 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的后项与前项的比值的极限等于 ρ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho,$$

则当 $\rho < 1$ 时级数收敛; $\rho > 1$ (包括 $\rho = +\infty$) 时级数发散; $\rho = 1$ 时级数可能收敛也可能发散.

证明 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$,

(i) 当 $\rho < 1$ 时, 取一个适当小的正数 ε , 使得 $\rho + \varepsilon = r < 1$, 根据极限定义, 存在自然数 N , 当 $n \geq N$ 时有不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \rho + \varepsilon = r, \quad (n \geq N).$$

因此

$$u_{N+1} < r u_N, \quad u_{N+2} < r u_{N+1} < r^2 u_N, \quad u_{N+3} < r u_{N+2} < r^3 u_N, \\ \dots\dots$$

所以级数

$$u_{N+1} + u_{N+2} + u_{N+3} + \dots$$

的各项就小于收敛的等比级数 (因为公比 $r < 1$)

$$r u_N + r^2 u_N + r^3 u_N + \dots$$

的对应项, 所以它也收敛. 由于原来的级数只比它多了前 N 项, 所以原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(ii) 当 $\rho > 1$ 时, 取一个适当的小数 $\varepsilon > 0$, 使得 $\rho - \varepsilon > 1$. 根据极限定义, 存在自然数 N , 当 $n \geq N$ 时有不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \rho - \varepsilon > 1,$$

也就是

$$u_{n+1} > u_n$$

所以当 $n \geq N$ 时, 级数的通项 u_n 是单调增加的, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$. 根

据级数收敛的必要条件可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

类似地, 可以证明 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$ 时, 级数也是发散的.

(iii) 当 $p = 1$ 时级数可能收敛也可能发散. 例如 p -级数 (5), 不论 p 为何值都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = 1.$$

但我们知道, 当 $p \leq 1$ 时级数发散, 而当 $p > 1$ 时级数收敛. 因此, 遇到这种情况比值判别法就失效了.

例10 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{2^n}$ 的收敛性.

解 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3(n+1)}{2^{n+1}}}{\frac{3n}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1,$$

所以根据比值判别法知所给级数收敛.

例11 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^b}{a^n}$ ($a > 1$, $b > 0$) 的敛散性.

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^b}{a^{n+1}}}{\frac{n^b}{a^n}} = \frac{1}{a} < 1,$$

故所给级数收敛.

例12 判别级数

$$\frac{1}{10} + \frac{1 \cdot 2}{10^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{10^3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{10^4} + \dots$$

的收敛性.

解 因为 $u_n = \frac{n!}{10^n}$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}}{\frac{n!}{10^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{10} = \infty,$$

故所给级数发散.

根值判别法 (柯西 (Cauchy) 判别法) 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的通项 u_n 的 n 次根的极限等于 ρ , 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$$

则当 $\rho < 1$ 时级数收敛; $\rho > 1$ (包括 $\rho = +\infty$) 时级数发散; 当 $\rho = 1$ 时级数可能收敛也可能发散.

证明 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$,

(i) 当 $\rho < 1$ 时, 可取适当小的正数 ε , 使得 $\rho + \varepsilon = r < 1$. 根据极限定义, 存在自然数 N , 当 $n \geq N$ 时有不等式

$$\sqrt[n]{u_n} < \rho + \varepsilon = r < 1, \text{ 即 } u_n < r^n.$$

由于等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ (公比 $r < 1$) 收敛, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,

从而原给级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(ii) 当 $\rho > 1$ 时, 可取适当小的正数 ε , 使得 $\rho - \varepsilon > 1$, 根据极限定义, 存在自然数 N , 当 $n \geq N$ 时, 有不等式

$$\sqrt[n]{u_n} > \rho - \varepsilon > 1, \text{ 即 } u_n > 1.$$

于是, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, 所以原给级数发散.

(iii) 当 $\rho = 1$ 时, 仍以 p -级数为例, 这时

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = 1.$$

由于当 $p > 1$ 时 p -级数收敛; 而当 $p \leq 1$ 时, p -级数发散, 这就表明当 $p = 1$ 时级数可能收敛, 也可能发散.

例13 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^2}{4^n}$ 的收敛性

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} < 1,$$

由根值判别法知所给级数收敛.

例14 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+(-1)^{n-1}}$ 的收敛性.

解 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^{-n+(-1)^{n-1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{(-1)^{n-1}}{n}}}{2} \\ &= \frac{1}{2} < 1, \end{aligned}$$

所以此级数收敛.

注意这个级数不能用比值判别法检验. 因为

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} 2, & \text{若 } n \text{ 为偶数,} \\ \frac{1}{8}, & \text{若 } n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ 不存在.

四 任意项级数敛散性的判别法

一个既有无穷多个正项又有无穷多个负项的级数叫做任意项级数. 下面首先来讨论任意项级数中的一种特殊情形——交错级数.

1 交错级数

所谓交错级数是指这样的级数, 它的各项是正负交错的, 从而可以写成下面的形式:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n-1} u_n + \cdots, \quad (7)$$

或 $-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \cdots + (-1)^n u_n + \cdots,$

其中 u_n ($n=1, 2, \cdots$) 都是正数. 这种级数有下面重要的审敛法.

莱布尼兹 (Leibniz) 定理 如果交错级数 (7) 满足条件:

$$(i) u_n \leq u_{n-1} \quad (n=1, 2, \cdots);$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

则级数 (7) 收敛, 且其和 s 介于 0 与 u_1 之间: $0 \leq s \leq u_1$.

证明 先证明前 $2n$ 项的和 s_{2n} 的极限存在. 为此把 s_{2n} 写成两种形式:

$$s_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n}),$$

$$\text{及 } s_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}.$$

根据条件 (i) 可知所有括弧中的差都是非负的数. 由第一种形式可见数列 s_{2n} 是单调增加的, 由第二种形式可见 $s_{2n} < u_1$. 于是根据单调有界数列必有极限的准则可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n}$ 存在, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = s$, 并且必有 $0 \leq s \leq u_1$.

下面再证明级数前 $2n+1$ 项的和 s_{2n+1} 的极限也是 s . 事实上

$$s_{2n+1} = s_{2n} + u_{2n+1},$$

由条件 (ii) 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} = 0$, 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{2n} + u_{2n+1}) = s.$$

综合上述可知：级数(7)的部分和 s_n 当 $n \rightarrow \infty$ 时有极限 s ，并且 s 满足： $0 \leq s \leq u_1$ 。证毕。

满足莱布尼兹定理条件的交错级数称为莱布尼兹型级数。

推论 莱布尼兹型级数的余项 r_n 的绝对值有不等式 $|r_n| \leq u_{n+1}$ 成立。

这是因为余项 r_n 可以写成

$$r_n = (-1)^n (u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \cdots),$$

所以 $|r_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots$,

上式右端也是一个莱布尼兹型级数，其和不大于它的第一项，因此有 $|r_n| \leq u_{n+1}$ 成立。

例如，交错级数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots$$

满足条件

$$(i) \quad u_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = u_{n+1} \quad (n=1, 2, \cdots);$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

所以它是收敛的，且其和 $s < 1$ 。如果取前 n 项的和

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n},$$

作为 s 的近似值，则所产生的误差 $|r_n| \leq \frac{1}{n+1}$ 。在以后的幂级数部分(§2例8)可知这级数的和 $s = \ln 2$ 。

2 绝对收敛与条件收敛

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为任意项级数，其各项的绝对值所构成的正项级

数为 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$. 这两者的收敛性之间有以下的重要定理.

定理 1 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

证明 令

$$v_n = \frac{1}{2}(|u_n| + u_n), \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

则 $v_n \geq 0$, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是正项级数. 因 $v_n \leq |u_n|$, 而且 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 故由正项级数的比较判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} 2v_n$ 收敛. 又因为

$$u_n = 2v_n - |u_n|,$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (2v_n - |u_n|),$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} 2v_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 都收敛, 所以根据级数的基本性质 2, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛. 证毕.

必须指出, 上述定理的逆定理并不成立. 也就是说, 在

$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散的情况下, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也有可能收敛. 例如, 级数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$$

是收敛的, 但是各项取绝对值所成级数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots,$$

却是发散的.

综上所述, 我们给出以下定义.

定义 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是绝对收敛的; 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是条件收敛的.

根据这个定义可知, 级数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots$$

是一个条件收敛的级数.

例15 判定下列级数是否收敛? 如果收敛, 是绝对收敛还是条件收敛?

$$(i) \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n \cdot 2^n} + \cdots;$$

$$(ii) \frac{2}{3} - \frac{2^2}{5} + \frac{2^3}{7} - \frac{2^4}{9} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{2^n}{2n+1} + \cdots;$$

$$(iii) \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{3} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{n} + \cdots$$

(其中 α 为正常数, 且 $\alpha \neq \frac{k}{2} \pi$, ($k=1, 2, \cdots$));

$$(iv) \sin \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + \cdots + \frac{\sin n\alpha}{n^2} + \cdots \text{ (其中 } \alpha \text{ 为实常数)}.$$

解 (i) 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{1}{n2^n}} = \frac{1}{2} < 1,$$

关于绝对收敛级数的两个性质.

定理 2 绝对收敛级数的各项可以任意重排而不改变它的绝对收敛性, 也不改变其和.

证明* (1) 先证收敛的正项级数的项任意重排后仍收敛, 且其和不变. 设正项级数

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

收敛, 其部分和为 s_n , 和为 s . 而级数

$$u_1^* + u_2^* + u_3^* + \cdots + u_n^* + \cdots$$

为其各项重排之后所成级数, 其部分和为 s_n^* .

对于任何的正整数 n , 它固定以后, 总可取正整数 m 足够大, 使 $u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*$ 各项都出现在 $s_m = u_1 + u_2 + \cdots + u_m$ 中, 于是得

$$s_n^* \leq s_m \leq s,$$

因此单调增数列 $\{s_n^*\}$ 有上界 s , 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^*$ 存在, 且有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^* = s^* \leq s.$$

另一方面把原来的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 看成是由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^*$ 各项重排而得到的级数, 则应用刚才得到的结论, 又有

$$s \leq s^*,$$

要使上面两个不等式同时成立, 必定有

$$s^* = s.$$

(2) 再证定理对一般的绝对收敛级数是正确的. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛. 在定理 1 的证明中已得

$$u_n = 2v_n - |u_n|,$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是收敛的正项级数. 故有

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (2v_n - |u_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} 2v_n - \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|.$$

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 各项重排之后的级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^*$, 则相应地 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 改变

为 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^*$, $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 改变为 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n^*|$, 由(1)证得的结论可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} v_n^*, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^*|,$$

所以

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} u_n^* &= \sum_{n=1}^{\infty} 2v_n^* - \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^*| = \sum_{n=1}^{\infty} 2v_n - \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \end{aligned} \quad \text{证毕}$$

条件收敛级数并不具备定理2所述的性质. 例如将条件收敛的级数:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots \quad (8)$$

的各项重排得到下面的级数

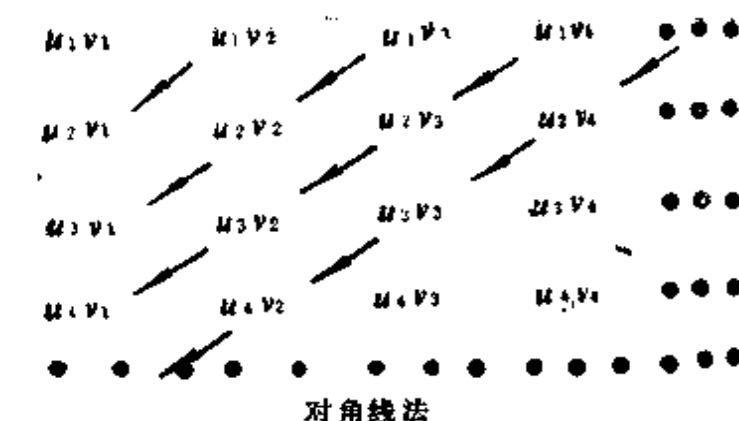
$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots, \quad (9)$$

设级数(8)和为 s (在 § 2 例 8 中可以知道 $s = \ln 2$), 可以证明将级数(8)各项重排之后所得到的级数(9)和为 $\frac{3}{2}s$ (即 $\frac{3}{2}\ln 2$). 事

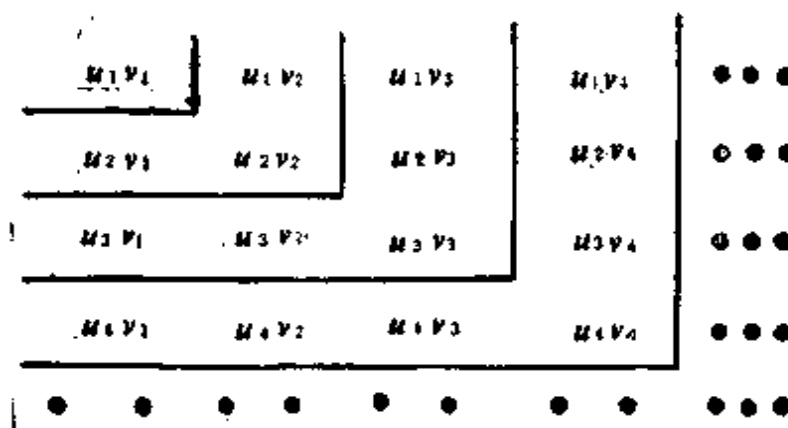
实上, 对级数(8)乘以 $\frac{1}{2}$ 可得

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n} + \cdots = \frac{s}{2},$$

这个级数又可以写成



对角线法



正方形法
图11-1

为两级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的柯西乘积.

定理 3 (绝对收敛级数的乘法) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都绝对收敛, 其和分别为 s 与 σ , 则它们的柯西乘积

$$u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + \cdots + (u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \cdots + u_n v_1) + \cdots \quad (10)$$

也是绝对收敛的, 且其和为 $s \cdot \sigma$.

证明* 考虑把级数(10)的括弧去掉后所成的级数

$$u_1 v_1 + u_1 v_2 + u_2 v_1 + \cdots + u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \cdots \quad (11)$$

如果级数(11)绝对收敛且其和为 w , 则由级数的基本性质 4 及比较判别法可知, 级数(10)也绝对收敛且其和为 w . 因此只要证明级数(11)绝对收敛且其和 $w = s \cdot \sigma$ 就行了.

(1) 先证级数(11)绝对收敛.

设 w_m 为级数(11)前 m 项分别取绝对值后所成的和, 又设

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = A, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |v_n| = B,$$

则显然有

$$w_m \leq \sum_{n=1}^m |u_n| \cdot \sum_{n=1}^m |v_n| \leq A \cdot B.$$

由此可见单调增数列 w_m 有上界 AB , 所以级数(11)绝对收敛.

(2) 再证级数(11)的和 $w = s \cdot \sigma$.

把级数(11)各项位置重新排列并加上括弧使它成为按“正方形法”排列所组成的级数

$$\begin{aligned} & u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_2 + u_2 v_1) + \cdots \\ & + (u_1 v_n + u_2 v_n + \cdots + u_n v_n + u_n v_{n-1} + \cdots + u_n v_1) + \cdots \end{aligned} \quad (12)$$

根据定理2及级数的基本性质4可知, 对于绝对收敛级数(11)这样作法不会改变其收敛性, 且其和不变. 易知级数(12)的前 n 项和为

$$(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)(v_1 + v_2 + \cdots + v_n) = s_n \cdot \sigma_n.$$

因此, 当 n 无限增大时, 就有

$$w = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n \cdot \sigma_n) = s \cdot \sigma. \quad \text{证毕}$$

§ 2 幂级数

给定一个定义在区间 I 上的函数列

$$u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x), \cdots,$$

则由这函数列构成的表达式

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots, \quad (2.1)$$

称为定义在区间 I 上的函数项级数, 简称级数.

对于每一个确定的值 $x_0 \in I$, 函数项级数(2.1)成为常数项级数. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛, 就称 x_0 为函数项级数(2.1)的收敛点;

如果它发散, 就称 x_0 为函数项级数 (2.1) 的发散点. 函数项级数 (2.1) 的所有收敛点的全体称为它的收敛域.

对应于收敛域内的任意一个数 x , 函数项级数 (2.1) 有和 s . 显然在其收敛域上, 其和是 x 的函数, 设为 $s(x)$. 通常称 $s(x)$ 为函数项级数 (2.1) 的和函数, 这函数的定义域就是函数项级数的收敛域. 记为

$$s(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots.$$

把函数项级数前 n 项的部分和记作 $s_n(x)$, 则在其收敛域上有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = s(x).$$

在函数项级数 (2.1) 的收敛域上记 $r_n(x) = s(x) - s_n(x)$, 称 $r_n(x)$ 为函数项级数 (2.1) 的余项 (或第 n 项以后的余和), 于是有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (s(x) - s_n(x)) = 0.$$

下面来讨论幂级数 (即各项都是幂函数的函数项级数) 收敛域的求法及其主要性质.

一 幂级数的收敛区间与收敛半径

形如

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \quad (2.2)$$

的函数项级数叫做幂级数, 其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ 都是常数, 称为幂级数的系数. 幂级数的更一般的形式是

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots, \quad (2.3)$$

其中 x_0 为常数. 由于只需作变量置换 $x - x_0 = t$ 就可以把 (2.3) 变成 (2.2), 所以下面主要讨论 (2.2) 型的幂级数.

首先研究幂级数的收敛域. 对于一般的函数项级数, 其收敛域往往比较复杂, 但幂级数的收敛域都比较简单. 例如幂级数

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots,$$

当 $|x| < 1$ 时它收敛, 当 $|x| \geq 1$ 时它发散. 因此它的收敛域是以

原点 O 为中心的一个对称区间。对于一般的幂级数也有类似的结论（但幂级数在这个对称区间的两个端点处的收敛性，可以因幂级数的不同而有所变化）。下面的阿贝尔定理就表明了这一事实。

定理1（阿贝尔（Abel）定理） 若幂级数(2.2)当 $x=x_0$ （ $x_0 \neq 0$ ）时收敛，则当 $|x| < |x_0|$ 时幂级数(2.2)绝对收敛。反之，若幂级数(2.2)当 $x=x_0$ 时发散，则当 $|x| > |x_0|$ 时幂级数(2.2)发散。

证明 先设 x_0 （ $x_0 \neq 0$ ）是幂级数(2.2)的收敛点，即级数

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n + \cdots$$

收敛。根据级数收敛的必要条件，这时有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0,$$

于是存在常数 $M > 0$ ，使得

$$|a_n x_0^n| \leq M, \quad (n=0, 1, 2, 3, \cdots).$$

这样幂级数(2.2)通项的绝对值

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0} \right)^n \right| \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

因为当 $|x| < |x_0|$ 时，等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ 收敛（公比 $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$ ），所以级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 收敛，也就是幂级数(2.2)绝对收敛。

定理的后半部分可用反证法证明。倘若幂级数(2.2)当 $x=x_0$ 时发散而有一点 x_1 满足 $|x_1| > |x_0|$ 使级数收敛，则根据定理前半部分已证的结论知，级数当 $x=x_0$ 时应收敛，这与所设矛盾。定理得证。

证毕。

这个定理告诉我们，如果幂级数(2.2)在 $x=x_0$ 处收敛，则对于开区间 $(-|x_0|, |x_0|)$ 内的任何 x ，幂级数在该点都绝对收敛；如果幂级数在 $x=x_0$ 处发散，则对于闭区间 $(-|x_0|, |x_0|)$

以外的任何点 x ，幂级数(2.2)都发散。

由此可见，如果假定幂级数(2.2)在数轴上有发散点且除了原点外尚有其它收敛点，那末幂级数(2.2)的收敛点集一定是下面这样的情况：当动点 x 从原点出发沿数轴向右方前进时，最初只遇到收敛点，然后就只遇到发散点，这两部分的交界点 P 可能是收敛的也可能是发散的；从原点向左方前进也是如此，两个界点 P 与 P' 分别在原点的两侧且由定理1很容易证实，它们到原点的距离应当是相同的(图11-2)。

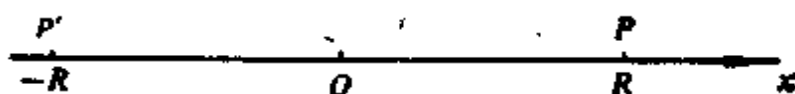


图11-2

从上面的几何说明，就得到以下的重要推论：

推论 如果幂级数(2.2)既有发散点，也有异于原点的其它收敛点，则必有一个完全确定的正数 R 存在，它具有下列性质：

当 $|x| < R$ 时，幂级数(2.2)绝对收敛；

当 $|x| > R$ 时，幂级数(2.2)发散；

当 $x = R$ 与 $x = -R$ 时，幂级数(2.2)可能收敛也可能发散。

这个正数 R 通常叫做幂级数(2.2)的收敛半径。而开区间 $(-R, R)$ 则称为幂级数(2.2)的收敛区间①。

如果幂级数(2.2)只在 $x = 0$ 处收敛，则规定收敛半径 $R = 0$ ，这时收敛区间只有一点 $x = 0$ ；如果幂级数(2.2)对一切 x 都收敛，则规定收敛半径 $R = +\infty$ ，这时收敛区间是 $(-\infty, +\infty)$ 。

通过变量代换容易证实幂级数(2.3)的收敛区间是以 x_0 为中心的开区间 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 。

关于幂级数的收敛半径的求法，有下面的定理。

定理2 设

①按本书的定义，幂级数的收敛区间与收敛域只可能在区间的端点处有差别。有些书中称本书幂级数的收敛域为其收敛区间。这一点请读者注意。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho,$$

其中 a_n, a_{n+1} 是幂级数 (2.2) 的相邻两项的系数. 如果

(i) $\rho \neq 0$, 则 $R = \frac{1}{\rho}$;

(ii) $\rho = 0$, 则 $R = +\infty$;

(iii) $\rho = +\infty$, 则 $R = 0$.

证明 考查幂级数 (2.2) 的各项取绝对值所成的级数

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \cdots + |a_n x^n| + \cdots, \quad (2.4)$$

其相邻两项之比为

$$\frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x|.$$

(i) 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$ ($\rho \neq 0$) 存在, 根据比值判别法

知当 $\rho |x| < 1$ 即 $|x| < \frac{1}{\rho}$ 时, (2.4) 收敛, 从而幂级数 (2.2)

绝对收敛; 当 $\rho |x| > 1$ 即 $|x| > \frac{1}{\rho}$ 时, 级数 (2.4) 发散并且从某一项开始必有

$$|a_{n+1} x^{n+1}| > |a_n x^n|,$$

因此当 $n \rightarrow \infty$ 时, 级数 (2.4) 的一般项不能趋于零, 所以 $a_n x^n$ 也不能趋于零, 从而级数 (2.2) 发散. 于是收敛半径 $R = \frac{1}{\rho}$.

(ii) 如果 $\rho = 0$, 则对任何 $x \neq 0$, 有 $\frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), 所以级数 (2.4) 收敛, 从而级数 (2.2) 绝对收敛. 于是 $R = +\infty$.

(iii) 如果 $\rho = +\infty$, 则对于除 $x = 0$ 外的其它一切 x 值均有

$\frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$), 根据比值判别法, 级数 (2.4) 发散且通

所以收敛半径 $R = +\infty$ ，从而收敛域为 $(-\infty, +\infty)$ 。

例3 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ 的收敛半径 (记号 $0! = 1$)。

解 因为

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = +\infty.$$

所以收敛半径 $R = 0$ ，即所给幂级数仅在 $x = 0$ 点处收敛。

例4 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2(n-1)}$ 的收敛半径与收敛域。

解 所给幂级数缺少奇次幂，定理2不能直接应用，可根据比值判别法直接求收敛半径，因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2n+1}{2^{n+1}} x^{2n} : \frac{2n-1}{2^n} x^{2(n-2)} \right| = \frac{x^2}{2},$$

所以当 $\frac{x^2}{2} < 1$ ，即 $|x| < \sqrt{2}$ 时所给幂级数绝对收敛，当

$\frac{x^2}{2} > 1$ ，即 $|x| > \sqrt{2}$ 时，所给幂级数发散，所以收敛半径 $R = \sqrt{2}$ 。

当 $x = \pm \sqrt{2}$ 时，级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2}$ ，它是发散的。因

此所给幂级数的收敛域是 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 。

例5 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛域。

解 令 $t = x + 1$ ，所给幂级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n \cdot 2^n}$ ，因为

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot 2^n}{(n+1) 2^{n+1}} = \frac{1}{2},$$

故其收敛半径 $R=2$.

当 $t=2$ 时, 级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, 这级数发散. 当 $t=-2$ 时, 级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, 这级数收敛. 因此幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛域为 $-2 \leq t < 2$. 即

$$-2 \leq x+1 < 2 \text{ 或 } -3 \leq x < 1,$$

因此所给幂级数收敛域为 $(-3, 1)$.

在正项级数的收敛性判别法中介绍过的柯西根值判别法, 也可用来求幂级数的收敛半径. 如在例4中设 $u_n = \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$, 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}} = \frac{|x|^2}{2}$$

可知当 $|x| < \sqrt{2}$ 时, 所给幂级数绝对收敛; 当 $|x| > \sqrt{2}$ 时所给幂级数发散, 所以收敛半径 $R = \sqrt{2}$.

二 幂级数的性质

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛区间分别是 $(-R_1, R_1)$,

$(-R_2, R_2)$ ($R_1 > 0$, $R_2 > 0$), 令 $R = \min(R_1, R_2)$, 则它们在区间 $(-R, R)$ 内都绝对收敛. 设这两个幂级数的和函数分别是 $f(x)$ 与 $g(x)$, 即

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = f(x), \quad x \in (-R, R)$$

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots = g(x),$$

根据 § 1 中级数的基本性质 2 及关于级数乘法的定理 3 可知, 对这两个幂级数在区间 $(-R, R)$ 内可以进行加(减)法及乘法运算:

加(减)法:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n = f(x) \pm g(x), \quad x \in (-R, R);$$

乘法:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) x^n \\ = f(x) \cdot g(x), \quad x \in (-R, R);$$

当 $b_0 \neq 0$ 时, 也可以定义二幂级数的除法运算:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots} \\ = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots,$$

为了决定系数 $c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$, 可以将级数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 与

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 相乘, 并令乘积中各项系数分别等于级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 中同次幂的系数, 即得:

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 c_0, \\ a_1 &= b_1 c_0 + b_0 c_1, \\ a_2 &= b_2 c_0 + b_1 c_1 + b_0 c_2, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

这些方程就可以顺序地求出 $c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$.

两个幂级数相除所得的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 的收敛区间有可能比原

来的两个级数的收敛区间: $(-R_1, R_1), (-R_2, R_2)$ 小得多. 例如, 当 $|x| < 1$ 时有等式

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

成立. 上式左端可以看作是二个幂级数 " $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1$ " 与

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 1-x$ 之间, 它们的收敛区间都是 $(-\infty, +\infty)$,

但右端的级数仅在 $(-1, 1)$ 内收敛.

例6 求幂级数

$$1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+\cdots$$

与
$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$$

的乘积.

解 这两个幂级数收敛区间都是 $(-1, 1)$ (见本节例1), 故由两者作乘积所得的幂级数

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \right) \\ &= x - \left(1 + \frac{1}{2} \right) x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) x^3 \\ & \quad - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) x^4 + \cdots \\ & \quad + (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) x^n + \cdots \end{aligned}$$

在 $(-1, 1)$ 内绝对收敛 (图11-3).

在本节例8中将会看到幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ 的和函数是

$\ln(1+x)$, ($|x| < 1$), 而 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ 的和函数是

$\frac{1}{1+x}$ ($|x| < 1$), 因此在区间 $(-1, 1)$ 内两个幂级数乘积

的和函数是 $\frac{\ln(1+x)}{(1+x)}$, 即

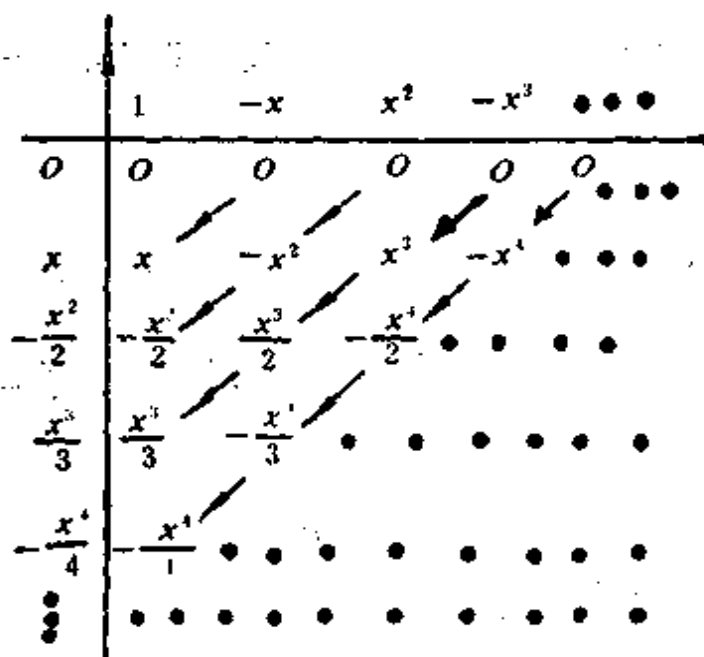


图11-3

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1+x)}{1+x} &= x - \left(1 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^3 \dots \\ &+ (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)x^n + \dots, \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

下面给出关于幂级数的和函数的三个定理，其证明从略。

定理3 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛半径为 R ($0 < R \leq +\infty$)，

则其和函数 $s(x)$ 在其收敛区间 $(-R, R)$ 内是连续的。若在收敛区间的端点 $x=R$ (或 $x=-R$) 处幂级数也收敛，则其和函数 $s(x)$ 在 $x=R$ 处左连续 (或在 $x=-R$ 处右连续)。

定理4 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R ($0 < R \leq +\infty$)，其和函数为 $s(x)$ ($|x| < R$)，则在其收敛区间 $(-R, R)$ 内有逐项积分公式成立：

$$\int_0^x s(x) dx = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad (|x| < R),$$

且逐项积分后所得到的幂级数与原级数有相同的收敛半径.

定理 5 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R ($0 < R \leq +\infty$), 则其和函数 $s(x)$ 在其收敛区间 $(-R, R)$ 内是可导的, 并且有逐项求导公式成立:

$$s'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (|x| < R),$$

且逐项求导后所得到的幂级数与原级数有相同的收敛半径.

反复应用上述定理可得: 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛区间内具有任意阶导数.

例 7 由于在收敛区间 $(-1, 1)$ 内有

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots,$$

根据定理 5 在 $(-1, 1)$ 内就有

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1+x} \right)' &= (1)' - (x)' + (x^2)' - (x^3)' + \cdots + (-1)^n \\ &\quad \cdot (x^n)' + \cdots \\ &= -1 + 2x - 3x^2 + \cdots + (-1)^n n x^{n-1} + \cdots, \end{aligned}$$

且逐项求导后所得幂级数收敛半径不变. 因此在 $(-1, 1)$ 内有

$$-\frac{1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - 3x^2 + \cdots + (-1)^n n x^{n-1} + \cdots,$$

或

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - \cdots + (-1)^{n-1} nx^{n-1} + \cdots,$$

$$(|x| < 1).$$

例8 在收敛区间 $(-1, 1)$ 内将等式

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots,$$

两端从 0 到 x 积分 $(-1 < x < 1)$, 根据定理4就有

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{1+x} dx &= \int_0^x dx - \int_0^x x dx + \int_0^x x^2 dx - \int_0^x x^3 dx + \cdots \\ &\quad + \int_0^x (-1)^n x^n dx + \cdots \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \\ &\quad (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1} x^{n+1} + \cdots. \end{aligned}$$

且逐项积分后所得幂级数收敛半径不变: 因此在 $(-1, 1)$ 内有

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n + \cdots.$$

由于上式右端当 $x=1$ 时也是收敛的, 根据定理3可知其和函数当 $x=1$ 时应当是连续的, 因此有

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots,$$

即当 $-1 < x \leq 1$ 时, 均有等式

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots,$$

$$(-1 < x \leq 1)$$

成立.

对于形如

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

$$(|x-x_0| < R)$$

的幂级数, 逐项积分时通常取积分下限为 x_0 , 设其和函数为 $s(x)$, 则有

$$\int_{x_0}^x a_0 dx + \int_{x_0}^x a_1(x-x_0) dx + \int_{x_0}^x a_2(x-x_0)^2 dx + \cdots +$$

$$\int_{x_0}^x a_n(x-x_0)^n dx + \cdots = \int_{x_0}^x s(x) dx, \quad (|x-x_0| < R),$$

即

$$a_0(x-x_0) + \frac{a_1}{2}(x-x_0)^2 + \frac{a_2}{3}(x-x_0)^3 + \cdots +$$

$$\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} + \cdots = \int_{x_0}^x s(x) dx, \quad (|x-x_0| < R).$$

例9 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的和函数.

解 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1,$$

可知所给幂级数收敛半径为 1. 根据定理 4 可知在其收敛区间 $(-1, 1)$ 内有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} nx^n &= x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n + \cdots \\ &= x(1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots) \\ &= x(x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots)' \\ &= x \cdot \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

例10 求幂级数 $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)2^n}$ 的和函数.

解 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)2^{n+1}} : \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)2^n} \right| = \frac{x^2}{2}.$$

故所给幂级数收敛半径 $R = \sqrt{2}$. 设其和函数为 $s(x)$, 即令

$$s(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)2^n}, \quad (|x| < \sqrt{2}).$$

则 $s(0) = 1$. 由定理4, 在收敛区间 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 内有

$$\begin{aligned} s'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)}{(2n-1)2^n} x^{2n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} \right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2} \right)^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2}} \\ &= \frac{1}{2-x^2}, \quad (|x| < \sqrt{2}). \end{aligned}$$

两端从 0 到 x 积分 ($|x| < \sqrt{2}$), 得:

$$\int_0^x s'(x) dx = \int_0^x \frac{dx}{2-x^2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}$$

即

$$s(x) - s(0) = \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x},$$

或

$$\begin{aligned} s(x) &= s(0) + \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x} \\ &= 1 + \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}, \quad (|x| < \sqrt{2}). \end{aligned}$$

来近似表达, 其误差等于 $|R_n(x)|$. 显然, 在一般情况下 $|R_n(x)|$ 将随 n 增大而不断减小, 因此 n 愈大则 $p_n(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似表达式的精确程度就愈高. 如果 $f(x)$ 在 x_0 点某邻域内具有任意多阶导数, 这时可以设想多项式 (2) 的项数无限增加, 发展成以下的幂级数

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots, \quad (3)$$

幂级数 (3) 称为函数 $f(x)$ 的台劳级数. 当 $x=x_0$ 时它收敛于 $f(x_0)$. 但是除了 $x=x_0$ 而外, 这幂级数是否收敛? 如果它在 x_0 的某个邻域内收敛, 那末它的和函数是否就是 $f(x)$? 下面的例子表明: 函数 $f(x)$ 的台劳级数即使收敛, 其和函数也不一定就是原给的函数 $f(x)$. 设

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

不难证明这个函数在整个数轴上连续可导, 应用数学归纳法还可以证明在整个数轴上它存在任意阶导数, 特别是在 $x_0=0$ 点处有 $f(0)=f^{(n)}(0)=0$ ($n=1, 2, 3, 4, \dots$). 因此函数 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 点处的台劳级数的各项都是零, 它处处收敛, 其和函数为 $s(x)=0$, 它并不是原给的函数 $f(x)$.

下述定理给出了函数 $f(x)$ 的台劳级数收敛于函数 $f(x)$ 的充分必要条件.

定理 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某邻域 $U(x_0)$ 内具有任意阶导数, 则 $f(x)$ 在 x_0 点处的台劳级数 (3) 在该邻域内收敛于 $f(x)$ 的充分必要条件是: $f(x)$ 在 x_0 点的台劳公式的余项 $R_n(x)$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限为零.

证明 先证必要性. 设 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内能展开成台劳级数, 即

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots \quad (4)$$

对一切 $x \in U(x_0)$ 成立. 现在将 $f(x)$ 的 n 阶台劳公式(1)写成

$$f(x) = s_{n+1}(x) + R_n(x), \quad (5)$$

其中 $s_{n+1}(x)$ 是 $f(x)$ 的台劳级数(3)前 $n+1$ 项之和. 因为由(4)式有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1}(x) = f(x),$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - s_{n+1}(x)] = f(x) - f(x) = 0.$$

这就证明了条件是必要的.

再证充分性. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ 对一切 $x \in U(x_0)$ 成立. 由 $f(x)$ 的 n 阶台劳公式(5)有

$$s_{n+1}(x) = f(x) - R_n(x),$$

令 $n \rightarrow \infty$ 对上式取极限, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - R_n(x)] = f(x).$$

这就是说 $f(x)$ 的台劳级数(3)在 $U(x_0)$ 内收敛, 且以 $f(x)$ 为其和函数. 因此条件是充分的. 证毕.

在(3)式中取 $x_0 = 0$, 得

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots, \quad (6)$$

幂级数(6)称为函数 $f(x)$ 的马克劳林级数.

下面我们来证明: 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某邻域内能够展开成幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, 那末这种展开式必定是唯一的, 它只能与 $f(x)$ 在 x_0 点的台劳级数(4)完全一致.

事实上, 如果等式

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots \\ + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

对一切 $x \in U(x_0)$ 成立, 则根据幂级数在其收敛区间内可以逐项求导的定理, 有

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2(x-x_0) + \cdots + na_n(x-x_0)^{n-1} + \cdots; \\ f''(x) &= 2!a_2 + 3 \cdot 2a_3(x-x_0) + \cdots \\ &\quad + n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2} + \cdots; \\ f'''(x) &= 3!a_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)a_n(x-x_0)^{n-3} + \cdots; \\ &\quad \cdots \cdots \cdots \\ f^{(n)}(x) &= n!a_n + (n+1)n(n-1)\cdots 2a_{n+1}(x-x_0) + \cdots; \\ &\quad \cdots \cdots \cdots \end{aligned}$$

把 $x = x_0$ 代入以上各式即得

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = f'(0), \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \quad \cdots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad \cdots$$

这就是所要证明的.

二 函数展开成幂级数

根据上一段关于函数展为台劳级数的定理可知, 要将函数 $f(x)$ 展开成 $(x-x_0)$ 的幂级数, 可按以下步骤来进行:

第一步 求出 $f(x)$ 的各阶导数 $f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n)}(x), \cdots$. 如果在 x_0 点处函数 $f(x)$ 的某阶导数不存在, 就停止进行, 因为在这种情况下函数 $f(x)$ 就不能展开成 $(x-x_0)$ 的幂级数了. 例如 $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ 在 $x=0$ 处三阶导数不存在, 因此它是不能展开成 x 的幂级数的;

第二步 求出函数 $f(x)$ 及其各阶导数在 x_0 点的值:

$$f(x_0), f'(x_0), f''(x_0), \cdots, f^{(n)}(x_0), \cdots;$$

第三步 写出函数 $f(x)$ 的台劳级数

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \dots,$$

并求出其收敛半径 R ;

第四步 考察当 x 在其收敛区间内时, 函数的台劳余项 $R_n(x)$ 的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x)$ 是否为零. 如果为零, 则在此收敛区间内, 函数 $f(x)$ 的台劳级数就收敛于 $f(x)$.

按照以上步骤将函数展开成幂级数的方法通常叫做直接展开法.

例1 将函数 $f(x) = e^x$ 展开成 x 的幂级数.

解 因为 $f^{(n)}(x) = e^x$ ($n = 1, 2, \dots$) 所以

$$f(0) = f^{(n)}(0) = 1, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

写出函数 $f(x) = e^x$ 的马克劳林级数

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

它的收敛半径 $R = +\infty$.

对于任何有限的数 x , ξ (ξ 介于0与 x 之间), 函数的台劳余项 $R_n(x)$ 满足不等式

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},$$

因 $e^{|x|}$ 有限, 而 $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 是收敛级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 的通项, 所

以当 $n \rightarrow \infty$ 时, $e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$, 即当 $n \rightarrow \infty$ 时有 $|R_n(x)| \rightarrow 0$, 于是得展开式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad (-\infty < x < +\infty).$$

(3.1)

例2 将函数 $f(x) = \sin x$ 展开成 x 的幂级数.

解 所给函数的各阶导数为

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad (n=1, 2, \dots).$$

$f^{(n)}(0)$ 顺序循环地取 $0, 1, 0, -1, \dots$ ($n=0, 1, 2, 3, \dots$), 于是得到 $f(x) = \sin x$ 的马克劳林级数

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots,$$

它的收敛半径 $R = +\infty$.

对于任何有限的数 x 、 ξ (ξ 介于 0 与 x 之间), 函数 $f(x) = \sin x$ 的台劳余项 $R_n(x)$ 满足不等式:

$$|R_n(x)| = \left| \frac{\sin\left(\xi + \frac{n+1}{2}\pi\right)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

由于当 $n \rightarrow \infty$ 时 $|R_n(x)| \rightarrow 0$, 故得展开式

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\ &\quad + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, \\ &\quad (-\infty < x < +\infty). \end{aligned} \quad (3.2)$$

从上面两个例子可以看到, 用直接展开法将函数展成幂级数计算量较大, 而且研究台劳余项是否趋向于零也不是一件很容易的事. 所以除了对几个基本的展开式不得不用这种方法以外, 其余都是采用间接的展开方法, 即利用已知的函数展开式以及幂级数的运算, 如四则运算、逐项求导、逐项积分等, 将所给函数展开成幂级数. 这种方法通常叫做间接展开法.

例3 将函数 $f(x) = \cos x$ 展开成 x 的幂级数.

解 由于 $\cos x = \frac{d}{dx}(\sin x)$, 又已知

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \\ &\quad + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots, \quad (-\infty, +\infty).\end{aligned}$$

根据上节定理4, 对上式两端求导即得:

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ &\quad + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots, \\ &\quad (-\infty < x < +\infty), \quad (3.3)\end{aligned}$$

例4 将函数 $f(x) = (1+x)^a$ 展开成 x 的幂级数, 其中 a 为任意实常数.

解 $f(x)$ 的各阶导数为

$$f'(x) = a(1+x)^{a-1};$$

$$f''(x) = a(a-1)(1+x)^{a-2};$$

.....

$$f^{(n)}(x) = a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)(1+x)^{a-n};$$

.....,

所以 $f(0)=1$, $f'(0)=a$, $f''(0)=a(a-1)$, \cdots ,

$$f^{(n)}(0) = a(a-1)\cdots(a-n+1), \cdots.$$

于是得到 $f(x) = (1+x)^a$ 的马克劳林级数为

$$1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} x^n + \cdots,$$

它的收敛半径 $R=1$.

利用函数 $f(x) = (1+x)^a$ 其它形式的台劳余项, 可以证明在其收敛区间内当 $n \rightarrow \infty$ 时有 $R_n(x) \rightarrow 0$ (由于证明较繁, 在此从略). 因此得到展开式

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \cdots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots, \\ (-1 < x < 1). \quad (3.4)$$

在区间 $(-1, 1)$ 的端点 $x = \pm 1$ 处, 展开式是否成立与 α 的具体数值有关, 需要根据不同情况来判定.

公式(3.4)叫做二项展开式. 特殊地, 当 α 为正整数时, 级数为 x 的 α 次多项式, 这就是代数学中的二项式定理.

当 $\alpha = -1$ 时就得到早已熟知的展开式

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, \\ (-1 < x < 1).$$

当 $\alpha = -\frac{1}{2}$ 时, 可得

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \cdots \\ + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n + \cdots, \quad (-1 < x \leq 1).$$

其中 $(2n)!! = 2n(2n-2)(2n-4)\cdots 4 \cdot 2$,

$(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\cdots 5 \cdot 3 \cdot 1$.

例5 将函数 $f(x) = \operatorname{arctg} x$ 展为 x 的幂级数.

解 在展开式 $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ ($-1 < x < 1$) 中, 以 x^2 代替 x 得到展开式 (展开式成立的区间应当由不等式: $-1 < x^2 < 1$ 定出, 仍为 $(-1, 1)$),

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots, \\ (-1 < x < 1),$$

由0到 x 逐项积分得

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \dots$$

$$+ (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} + \dots, \quad (-1 < x < 1).$$

即

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} + \dots, \\ (-1 \leq x \leq 1). \quad (3.5)$$

注意，在展开式(3.5)中包括了区间 $(-1, 1)$ 的两个端点 $x = \pm 1$ ，这是因为当 $x = \pm 1$ 时公式(3.5)的右端的级数收敛，根据本章§2定理3可知当 $x = \pm 1$ 时公式(3.5)也是成立的。

例6 将函数 $f(x) = \arcsin x$ 展为 x 的幂级数。

解 在展开式 $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n$ ($-1 < x \leq 1$) 中以 $-x^2$ 代替 x (展开式成立的区间作相应的代换) 得

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 + \dots \\ + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} + \dots, \quad (-1 < x < 1).$$

两端从0到 x 积分得

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} x^5 + \dots + \\ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{(2n+1)} x^{2n+1} + \dots, \quad (-1 \leq x \leq 1). \quad (3.6)$$

当 $x = \pm 1$ 时上式右端收敛 (证明从略)，所以公式(3.6)成立的区间包括两个端点。

例7 将函数 $f(x) = \sin x$ 展为 $(x - \frac{\pi}{4})$ 的幂级数.

解 因为

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin\left[\frac{\pi}{4} + \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] \\ &= \sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\frac{\pi}{4}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right],\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= 1 - \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 \\ &\quad - \frac{1}{6!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^6 + \dots, \quad (-\infty < x < +\infty), \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 \\ &\quad + \frac{1}{5!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5 - \dots, \quad (-\infty < x < +\infty),\end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \dots\right], \quad (-\infty < x < +\infty).\end{aligned}$$

例8 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}$ 展开成 $(x - 1)$ 的幂级

数.

例9 求数 e 的近似值, 要求误差不超过 10^{-4} .

解 在 e^x 的马克劳林级数中, 令 $x = 1$ 就得到

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots,$$

取右端前 n 项作为近似值

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!}.$$

其误差(也叫做截断误差)为:

$$\begin{aligned} |r_n| &= \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots \\ &= \frac{1}{n!} \left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots \right), \end{aligned}$$

为了决定所取的项数 n , 可将上式右端放大成等比级数, 以便求和,

$$\begin{aligned} |r_n| &< \frac{1}{n!} \left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n \cdot n!}, \end{aligned}$$

经过试算可知当 $n = 8$ 时

$$|r_n| < \frac{9}{8 \cdot 8!} < \frac{3}{10^6}.$$

因此取 $n = 8$ 时, 其截断误差已经小于 10^{-4} , 所以可取

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!}$$

为了使“四舍五入”引起的误差(叫做舍入误差)与截断误差之和不超 10^{-4} , 计算时右端每一项都应取六位小数, 然后再四舍五入, 使其每一项的计算误差均小于 10^{-6} , 从而使总的计算误差小于

$7/10^6$. 经过计算最后得 (小数后第五位四舍五入, 使答案仅保留四位小数): $e=2.7183$.

例10 计算 $\sqrt[5]{240}$ 的近似值, 要求准确到小数点后第四位.

解 因为

$$\sqrt[5]{240} = \sqrt[5]{243-3} = 3 \left(1 - \frac{1}{3^4} \right)^{\frac{1}{5}},$$

故可取 $f(x) = 3(1+x)^{\frac{1}{5}}$, $\sqrt[5]{240}$ 可以看成当 $x = -\frac{1}{3^4}$ 时函数 $f(x)$ 的函数值. 由二项展开式可得

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{240} = 3 \left(1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^4} - \frac{1 \cdot 4}{5^2 \cdot 2!} \cdot \frac{1}{3^8} \right. \\ \left. - \frac{1 \cdot 4 \cdot 9}{5^3 \cdot 3!} \cdot \frac{1}{3^{12}} - \dots \right) \end{aligned}$$

这个级数收敛很快, 不妨取两项作为其近似值, 考虑其误差能否达到要求的精确度, 即取

$$\sqrt[5]{240} \approx 3 \left(1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^4} \right)$$

则截断误差

$$\begin{aligned} |r_2| &= 3 \left(\frac{1 \cdot 4}{2! 5^2} \cdot \frac{1}{3^8} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 9}{3! 5^3} \cdot \frac{1}{3^{12}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 14}{4! 5^4} \cdot \frac{1}{3^{16}} + \dots \right) \\ &= 3 \left(\frac{4}{2! 5^2} \right) \left(\frac{1}{3^8} \right) \left(1 + \frac{9}{3 \cdot 5} \cdot \frac{1}{9^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{9 \cdot 14}{12 \cdot 5^2} \cdot \frac{1}{9^4} + \dots \right) \\ &< \frac{6}{25} \cdot \frac{1}{81^2} \left(1 + \frac{1}{81} + \frac{1}{81^2} + \dots \right) \end{aligned}$$

$$< \frac{6}{25} \cdot \frac{1}{81^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{81}} < \frac{1}{20000} = \frac{1}{2} \times 10^{-4}.$$

计算时应取五位小数，然后四舍五入，这时截断误差与舍入误差之和不会超过 10^{-4} 。最后得

$$\sqrt[5]{240} = 2.9926.$$

例11 计算 $\ln 2$ 的近似值，要求误差小于 10^{-4} 。

解 若在展开式

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots, \\ (-1 < x \leq 1),$$

中令 $x = 1$ 得

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots.$$

如果取前 n 项的和作为 $\ln 2$ 的近似值，其截断误差为

$$|r_n| \leq \frac{1}{n+1}.$$

为了保证误差不超过 10^{-4} ，就需要取级数的前10000项进行计算。这样做计算量太大，因此需要一个收敛较快的级数来代替它。

在 $\ln(1+x)$ 的展开式中，将 x 换成一 x ，得

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots, \quad (-1 \leq x < 1).$$

于是可得展开式

$$\begin{aligned} \ln \frac{1+x}{1-x} &= \ln(1+x) - \ln(1-x) \\ &= 2 \left(x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \right), \\ &\quad (-1 < x < 1). \end{aligned}$$

令 $\frac{1+x}{1-x} = 2$, 解出 $x = \frac{1}{3}$. 将 $x = \frac{1}{3}$ 代入上式即得

$$\ln 2 = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^7} + \cdots \right)$$

若取前四项作为 $\ln 2$ 的近似值, 则截断误差

$$\begin{aligned} |r_4| &= 2 \left(\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3^9} + \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{3^{11}} + \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{3^{13}} + \cdots \right) \\ &< \frac{2}{3^{11}} \left[1 + \frac{1}{9} + \left(\frac{1}{9} \right)^2 + \cdots \right] < \frac{1}{70000}, \end{aligned}$$

于是取

$$\ln 2 \approx 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^7} \right).$$

同样地, 考虑到舍入误差, 计算时每项应取五位小数 (由小数后第六位四舍五入得到), 最后结果只保留到小数后第四位. 因此得

$$\ln 2 \approx 0.6931.$$

例12 利用 $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$ 求 $\sin 9^\circ$ 的近似值, 并估计误差

解 首先把角度化成弧度,

$$9^\circ = \frac{\pi}{180} \times 9 (\text{弧度}) = \frac{\pi}{20} (\text{弧度}),$$

从而

$$\sin \frac{\pi}{20} \approx \frac{\pi}{20} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{20} \right)^3.$$

其次估计这个近似值的精确度. 在 $\sin x$ 的幂级数展开式中令 $x =$

$\frac{\pi}{20}$, 得

$$\sin \frac{\pi}{20} = \frac{\pi}{20} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{20} \right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{20} \right)^5 - \cdots$$

$$-\frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^7 + \dots,$$

等式右端是一个莱布尼兹型的交错级数，取前两项作为近似值其截断误差

$$|r_2| \leq \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^5 < \frac{1}{120} \cdot (0.2)^5 < \frac{1}{300000}.$$

因此取

$$\frac{\pi}{20} \approx 0.157080, \left(\frac{\pi}{20}\right)^3 \approx 0.003876,$$

于是得 $\sin 9^\circ \approx 0.15643$,

这时误差不超过 10^{-5} .

利用幂级数不仅可以计算一些函数值的近似值，而且可以计算一些定积分的近似值。特别是当定积分的被积函数的原函数不能用初等函数表达的时候，若被积函数能够展开成幂级数，那就可以通过逐项积分的办法，将定积分表示成数项级数，然后求得近似值。

例13 计算 $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx$ 的近似值，精确到 10^{-4} 。（取

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \approx 0.56419）。$$

解 将 e^x 的幂级数展开式中的 x 换成 $-x^2$ 就得到 e^{-x^2} 的幂级数展开式

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \dots,$$

$$(-\infty < x < +\infty).$$

根据本章 § 2 定理 5，两端从 0 到 $\frac{1}{2}$ 积分得

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} \right] dx \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\frac{1}{2}} x^{2n} dx \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{2n+1}.
 \end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{2^4 \cdot 5 \cdot 2!} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2^6 \cdot 7 \cdot 3!} + \cdots \right),
 \end{aligned}$$

取前四项的和作为近似值, 其误差为

$$|r_4| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2^8 \cdot 9 \cdot 4!} < \frac{1}{90000}.$$

所以

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx &\approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{2^4 \cdot 5 \cdot 2!} - \frac{1}{2^6 \cdot 7 \cdot 3!} \right) \\
 &\approx 0.5205.
 \end{aligned}$$

函数 $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$ 是误差理论中一个非常重要的函数, 叫做误差函数或概率积分, 记为 $\text{erf}(x)$. 它的函数值已用这种方法作成函数值表.

例14 计算积分 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ 的近似值, 精确到 10^{-4} .

解 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 因此所给积分不是广义积分, $x=0$ 是被积函数的可去间断点, 如果定义函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{当 } x \neq 0 \text{ 时,} \\ 1, & \text{当 } x = 0 \text{ 时,} \end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上连续, 且可展开成幂级数

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots, \quad (-\infty < x < +\infty).$$

在 $(0, 1)$ 上逐项积分, 得

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} \\ &\quad - \frac{1}{7 \cdot 7!} + \dots \end{aligned}$$

这是一个莱布尼兹型的交错级数, 由于其第四项的绝对值

$$\frac{1}{7 \cdot 7!} < \frac{1}{30000},$$

所以取前三项的和作为定积分的近似值, 经计算可得

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \approx 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} \approx 0.9461.$$

2 欧拉 (Euler) 公式

设有复数项级数为

$$(u_1 + iv_1) + (u_2 + iv_2) + \dots + (u_n + iv_n) + \dots, \quad (1)$$

其中 u_n, v_n ($n = 1, 2, \dots$) 为实常数或实函数. 如果实部所成的级数

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (2)$$

收敛于和 u , 且虚部所成级数

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \quad (3)$$

收敛于和 v , 则称级数 (1) 收敛且其和为 $u + iv$.

如果级数 (1) 各项的模所构成的级数

$$\sqrt{u_1^2+v_1^2} + \sqrt{u_2^2+v_2^2} + \cdots + \sqrt{u_n^2+v_n^2} + \cdots \quad (4)$$

收敛, 由于

$$|u_n| \leq \sqrt{u_n^2+v_n^2}, \quad |v_n| \leq \sqrt{u_n^2+v_n^2}, \quad (n=1, 2, \cdots).$$

因而级数(2)、(3)绝对收敛, 从而级数(1)收敛. 这时称级数(1)绝对收敛.

考察复数项级数

$$1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots + \frac{1}{n!}z^n + \cdots, \quad (z = x + iy), \quad (5)$$

由于 $|z^n| = |z|^n$ ($n=1, 2, \cdots$), 所以容易证实级数(5)在整个复平面上是绝对收敛的, 在 x 轴上 ($z=x$) 它表示指数函数 e^x , 在整个复平面上我们用它来定义复变量指数函数, 记作 e^z , 即

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots + \frac{1}{n!}z^n + \cdots, \quad (|z| < \infty), \quad (6)$$

当 $x=0$ 时 $z=iy$, 这时(6)式成为

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy + \frac{1}{2!}(iy)^2 + \frac{1}{3!}(iy)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}(iy)^n + \cdots \\ &= 1 + iy - \frac{1}{2!}y^2 - i\frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{4!}y^4 + i\frac{1}{5!}y^5 - \cdots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{4!}y^4 - \cdots\right) \\ &\quad + i\left(y - \frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 - \cdots\right) \\ &= \cos y + i \sin y, \end{aligned}$$

把 y 换成 x , 上式变为

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad (3.7)$$

这就是欧拉公式. 应用公式(3.7), 复数 z 可以表示为指数形式:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}, \quad (3.8)$$

其中 $r = |z|$, $\theta = \arg z$ 是 z 的辐角.

在 (3.7) 式中把 x 换成 $-x$, 又有

$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x,$$

与 (3.7) 式相加、相减可得

$$\left. \begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \\ \sin x &= \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}). \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

这两个公式也叫欧拉公式, 公式 (3.7) 和公式 (3.9) 揭示了三角函数与复变量指数函数之间的联系, 它们有很广泛的应用.

最后根据定义 (6), 并利用幂级数乘法, 不难验证

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2},$$

特殊地取 z_1 为实数 x , z_2 为纯虚数 iy , 则有

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

这就是说, 复变量指数函数 e^z 在 $z = x + iy$ 处的值是模为 e^x 、辐角为 y 的复数.

§ 4* 函数项级数的一致收敛性和 一致收敛级数的基本性质

设函数项级数

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \quad (1)$$

在区间 I 上收敛于和 $s(x)$, 即当 $x \in I$ 时有

$$\bar{s}(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots, \quad (2)$$

对于有限项的和, 如果假定 $u_1(x)$, $u_2(x)$, \cdots , $u_n(x)$ 都在区间 I 上连续, 那末它们的和

$$s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)$$

一 函数项级数的一致收敛性

设函数项级数(1)在区间 I 上收敛于和 $s(x)$ ，则按级数收敛的定义有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = s(x), \quad (x \in I)$$

其中 $s_n(x)$ 为级数(1)的前 n 项和

$$s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x).$$

根据极限定义，即任给正数 $\varepsilon > 0$ ，对于区间 I 中的每一个 x ，都存在着正整数 N ，使当 $n > N$ 时有 $|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$ 成立。这个 N 一般来说不仅依赖于 ε ，它也与 x 有关，可以记作 $N(\varepsilon, x)$ 。

现在如果假定给定正数 ε 之后，对于区间 I 中一切的 x ，存在一个共同的正整数 N ，它只依赖于 ε ，而与 x 无关，可记为 $N(\varepsilon)$ ，当 $n > N(\varepsilon)$ 时，对一切 $x \in I$ 均有 $|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$ 。这种情况与前者比较有着极大的差异，因此给出以下的定义。

定义 对在区间 I 上给定的函数序列 $\{s_n(x)\}$ 及函数 $s(x)$ ，若任给 $\varepsilon > 0$ ，存在只依赖于 ε 而与 x 无关的正整数 $N(\varepsilon)$ ，使当 $n > N(\varepsilon)$ 时，不等式

$$|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$$

对一切 $x \in I$ 恒成立，则称函数序列 $\{s_n(x)\}$ 在区间 I 上一致收敛于 $s(x)$ 。

定义 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的前 n 项和所构成的函数序列 $\{s_n(x)\}$ 在区间 I 上一致收敛于 $s(x)$ ，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛于 $s(x)$ 。

对函数项级数(1)（或级数(1)的前 n 项和构成的函数列 $\{s_n(x)\}$ ）在区间 I 上一致收敛的概念可给出如图11-4的几何解释。若级数(1)在区间 (a, b) 上一致收敛于和 $s(x)$ ，则根据定义，任给 $\varepsilon > 0$ ，就存在一个正整数 N ，当 $n > N$ 时，对一切 $x \in (a, b)$

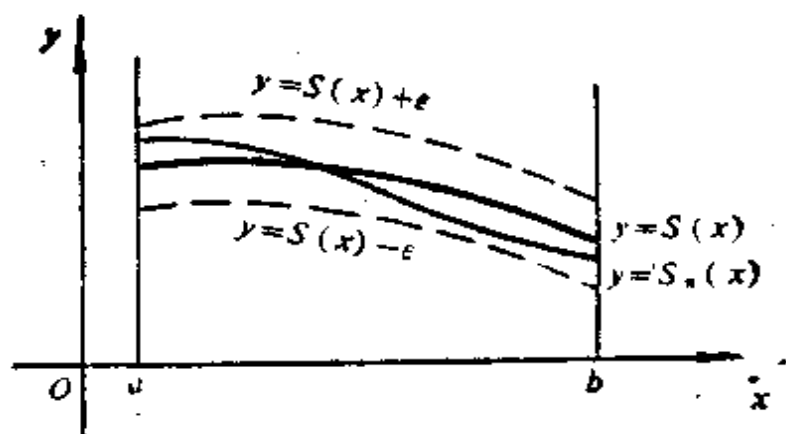


图11-4

都有不等式

$$|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon,$$

即

$$s(x) - \varepsilon < s_n(x) < s(x) + \varepsilon$$

成立。这就是说：在区间 (a, b) 上，当 $n > N$ 时，所有曲线 $y = s_n(x)$ 都应包含在两条“平行”曲线 $y = s(x) + \varepsilon$ 与 $y = s(x) - \varepsilon$ 之间。

例1 证明级数

$$\frac{1}{x+1} + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n-1} \right) + \cdots$$

在区间 $(0, +\infty)$ 上一致收敛

证明 级数前 n 项和 $s_n(x) = \frac{1}{x+n}$ ，所以在区间 $(0, +\infty)$ 上级数的和是

$$s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x+n} = 0.$$

于是在区间 $(0, +\infty)$ 上显然有

$$|s_n(x) - s(x)| = \left| \frac{1}{x+n} - 0 \right| = \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n},$$

对于任给的 $\varepsilon > 0$ ，取正整数 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$ （它只依赖于 ε ），则当

$n > N$ 时在区间 $(0, +\infty)$ 上就恒有

$$|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$$

成立. 因此所给级数在 $(0, +\infty)$ 上是一致收敛的.

证毕.

例2 证明级数

$$x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \cdots + (x^n - x^{n-1}) + \cdots$$

在区间 $(0, 1)$ 内收敛, 但不是一致收敛的.

证明 级数前 n 项和 $s_n(x) = x^n$, 在区间 $(0, 1)$ 内有

$$s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0,$$

于是有

$$|s_n(x) - s(x)| = x^n, \quad (0 < x < 1).$$

今若给定 $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$, 则不论正整数 N 多么大, 总可取 $n = N + 1 >$

N , 而且在区间 $(0, 1)$ 内存在一点 $x_0 = 2^{-\frac{1}{N+1}}$ 使得

$$|s_{N+1}(x_0) - s(x_0)| = \left(2^{-\frac{1}{N+1}}\right)^{N+1} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}.$$

故所给级数在 $(0, 1)$ 内不是一致收敛的 (图11-5).

证毕.

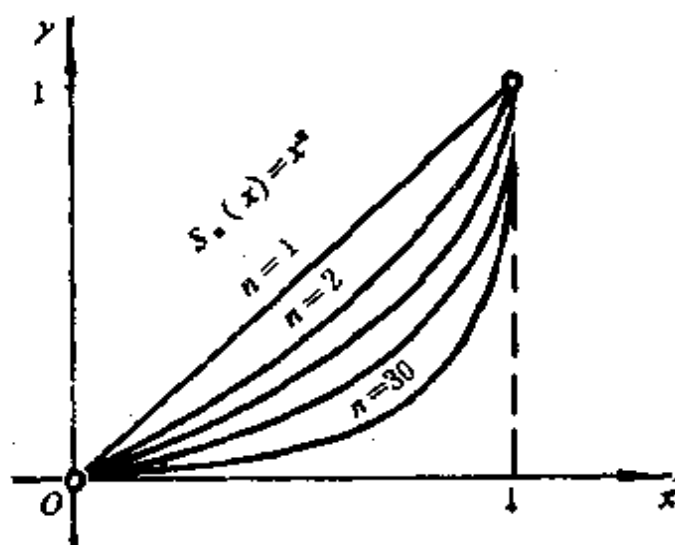


图11-5

以上两个例子都是直接根据定义来判定级数的一致收敛性的。但对绝大多数级数来说，要直接根据定义来判定其一致收敛性还是很困难的。下面这个判别法是一个常用的很方便的判别方法。

维尔斯特拉斯 (Weierstrass) 判别法 如果函数项级数

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上满足条件：

$$(i) \quad |u_n(x)| \leq a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$(ii) \quad \text{正项级数 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛.}$$

则函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛。

证明 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛于 A ，以 A_n 表示 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的前 n 项和，

则因 $A_n \rightarrow A (n \rightarrow \infty)$ ，故任给 $\varepsilon > 0$ 必存在正整数 $N = N(\varepsilon)$ ，当 $n > N$ 时有

$$|A - A_n| = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon.$$

由所给条件(i)，根据比较判别法可知：在区间 I 上级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 绝对收敛。设其和为 $s(x) (x \in I)$ ，以 $s_n(x)$ 表示它的前 n 项和，则当 $n > N(\varepsilon)$ 时，对一切 $x \in I$ 均有

$$\begin{aligned} |s(x) - s_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon. \end{aligned}$$

由于 N 只依赖于 ε ，而与 x 无关，根据定义得证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在

区间 I 上一致收敛.

证毕.

例3 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

证明 因为在 $(-\infty, +\infty)$ 上恒有

$$\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}, \quad \left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}, \quad (n=1, 2, \dots).$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故由维尔斯脱拉斯判别法可知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \text{ 在 } (-\infty, +\infty) \text{ 上一致收敛.}$$

证毕.

例4 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R > 0$, 试证此级数在 $(-R, R)$ 内的任一闭区间 (a, b) 上一致收敛.

证明 记 $r = \max(|a|, |b|)$, 则对 (a, b) 上的一切 x 均有

$$|a_n x^n| \leq |a_n r^n|, \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

而 $0 < r < R$, 由本章 § 2 定理 1 知级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ 绝对收敛, 根据维尔斯脱拉斯判别法即得所要证的结论.

证毕.

对于例4所证得的结论, 通常简称为: 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛区间内是“内闭一致收敛的”. 进一步还可以证明, 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在收敛区间的某个端点收敛, 则其一致收敛的区间还可扩大到包含该端点.

二 一致收敛级数的基本性质

有了一致收敛的概念之后, 本节开始时所提出的那些问题就都可以得到完满的解决了.

定理 1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的各项 $u_n(x)$ 在区间 (a, b) 上都连续, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 (a, b) 上一致收敛于 $s(x)$, 则 $s(x)$ 在 (a, b) 上也连续.

证明 任取 $x_0 \in (a, b)$, 下面证明 $s(x)$ 在 x_0 点连续. 设 $s_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = s(x)$ 是一致的, 故任给 $\varepsilon > 0$ 必存在与 x 无关的正整数 $N(\varepsilon)$, 当 $n > N(\varepsilon)$ 时, $|s_n(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ 对一切 $x \in (a, b)$ 恒成立. 今取定 $n_0 > N(\varepsilon)$, 则有

$$|s_{n_0}(x_0) - s(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |s(x) - s_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

又

$$|s(x) - s(x_0)| \leq |s(x) - s_{n_0}(x)| + |s_{n_0}(x) - s_{n_0}(x_0)| + |s_{n_0}(x_0) - s(x_0)|,$$

由于 $u_n(x)$ 在 x_0 点连续, 故 $s_{n_0}(x)$ 在 x_0 点连续, 对所给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时不等式

$$|s_{n_0}(x) - s_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

成立. 综上所述故当 $|x - x_0| < \delta$ 时就有

$$|s(x) - s(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

成立, 即 $s(x)$ 在 x_0 点连续. 又 x_0 是 (a, b) 上的任一点, 故 $s(x)$ 在 (a, b) 上连续.

证毕.

定理 2 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的各项 $u_n(x)$ 在区间 (a, b) 上连续, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a, b) 上一致收敛于 $s(x)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a, b) 上可以逐项积分, 即

$$\int_{x_0}^x s(x) dx = \int_{x_0}^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x u_n(x) dx,$$

其中 x_0 与 x 均属于 (a, b) , 并且上式右端的级数在 (a, b) 上也一致收敛.

证明 由于 $u_n(x)$ 连续且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 一致收敛, 故级数的前 n 项和 $s_n(x)$ 与级数的和 $s(x)$ 在 (a, b) 上都是连续的, 所以积分

$$\int_{x_0}^x s_n(x) dx \quad \text{与} \quad \int_{x_0}^x s(x) dx, \quad x_0, x \in (a, b)$$

都存在. 又因为在 (a, b) 上 $s_n(x)$ 一致收敛于 $s(x)$, 所以任给 $\varepsilon > 0$ 必存在正整数 $N(\varepsilon)$, 当 $n > N$ 时 $|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$ 对一切 $x \in (a, b)$ 恒成立, 故

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_0}^x s_n(x) dx - \int_{x_0}^x s(x) dx \right| &\leq \left| \int_{x_0}^x s_n(x) - s(x) dx \right| \\ &< \varepsilon |x - x_0| < \varepsilon (b - a) \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x s_n(x) dx = \int_{x_0}^x s(x) dx, \quad x_0, x \in (a, b),$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{x_0}^x u_k(x) dx = \int_{x_0}^x s(x) dx,$$

也就是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x u_n(x) dx = \int_{x_0}^x s(x) dx, \quad x_0, x \in (a, b).$$

由于 N 只依赖于 ε 而与 x_0, x 无关, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x u_n(x) dx$ 在 (a, b) 上一致收敛.

证毕.

定理 3 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 (a, b) 上收敛于和 $s(x)$, 其

各项 $u_n(x)$ 均具有连续导数 $u_n'(x)$, 并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 $(a,$

$b)$ 上一致收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a, b) 上也一致收敛, 且可逐项求导, 即

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + \cdots + u_n'(x) + \cdots.$$

证明 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 (a, b) 上一致收敛, 设其和为 $\varphi(x)$, 由于 $u_n'(x)$ 连续, 根据定理 1 知 $\varphi(x)$ 在 (a, b) 上连续, 任取 $x \in (a, b)$, 由定理 2 知

$$\begin{aligned} \int_a^x \varphi(x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n'(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n(x) - u_n(a)) \\ &= s(x) - s(a). \end{aligned}$$

上式两端对 x 求导数, 得

$$\varphi(x) = s'(x)$$

即

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

再由定理 2 即知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a, b) 上也是一致收敛的.

证毕.

关于定理3 需要注意必须要求 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在区间 (a, b) 上一致

收敛, 如果只是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 本身在 (a, b) 上一致收敛则并不能

保证可以逐项求导, 例如级数

$$\frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2^2 x}{2^2} + \dots + \frac{\sin n^2 x}{n^2} + \dots,$$

在任何区间 (a, b) 上都是一致收敛的, 但逐项求导后的级数

$$\cos x + \cos 2^2 x + \dots + \cos n^2 x + \dots,$$

其一般项不趋于零, 因此对任何 x 都是发散的, 所以原级数不能逐项求导.

利用本节例4 关于幂级数在其收敛区间内是内闭一致收敛的结论以及上面的几个定理, 就可以证明本章 §2 中的定理3、定理4、定理5的结论. 关于幂级数和函数的连续性与可逐项积分的结论. 根据例4 及本节定理1、定理2可以直接推出. 至于可逐项求

导的结论. 根据本节定理3 尚需证明. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛半径

为 $R > 0$, 则逐项求导所得级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 仍在

$(-R, R)$ 内收敛. 这一点可补充证明如下:

对 $(-R, R)$ 中任意一点 x , 总可取定 x_0 使得 $|x| < x_0 <$

R , 记 $q = \frac{|x|}{x_0} < 1$, 则

$$|n a_n x^{n-1}| = n \left| \frac{x}{x_0} \right|^{n-1} \cdot \frac{1}{x_0} |a_n x_0^n|$$

的结论矛盾。所以对幂级数逐项积分所得级数其收敛半径也不会改变。

§ 5 傅立叶级数

函数项级数中，在理论上最重要、应用上最常见的除幂级数外还有三角级数。

在物理学中最简单的波是谐波（正弦波），它是形如 $A\sin(\omega t + \varphi)$ 的波（其中 A 是振幅、 ω 是角频率， φ 是初相位，其周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ）。其它形式的波，如电子技术中常见的矩形波（图11-6）、锯齿波（图11-7）等都需要用一系列的谐波迭加表示出来。这种需要在数学上就归结为：要将一个以 T （ $=\frac{2\pi}{\omega}$ ）为周期的函数 $f(t)$ 用一系列三角函数 $A_n\sin(n\omega t + \varphi_n)$ 组成的级数来表示

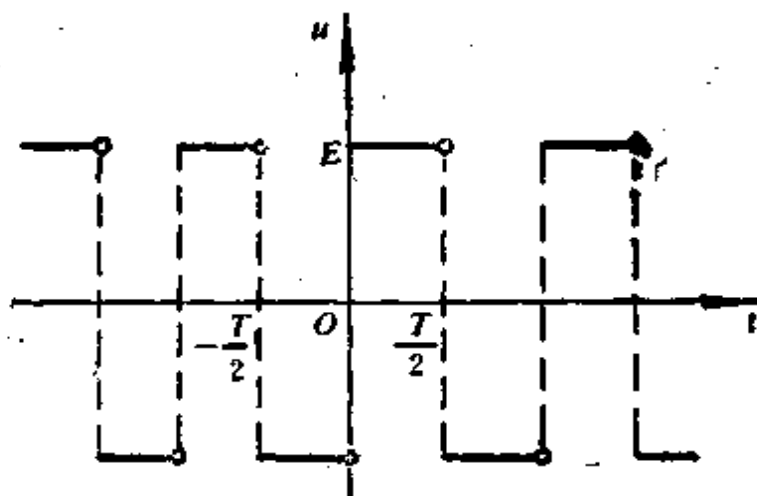


图 11-6

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n), \quad (1)$$

其中 A_0 , A_n , φ_n ($n = 1, 2, \dots$) 都是常数。注意到上式右端各项均以 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 为周期，所以如果这个级数在一个周期内收敛，

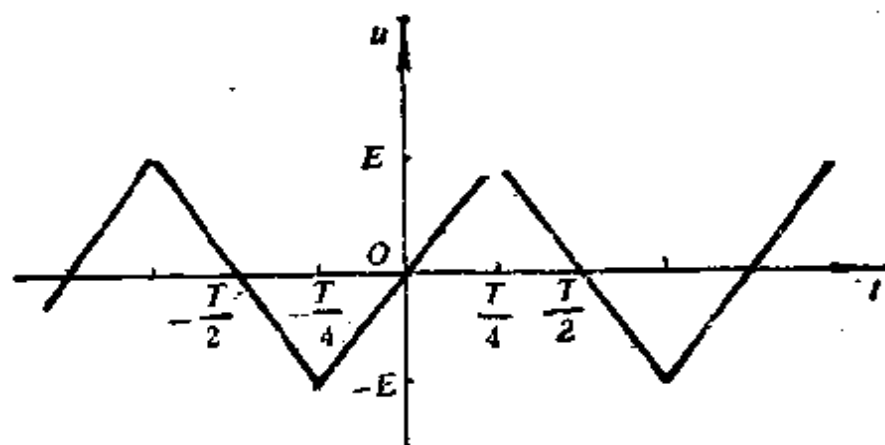


图11-7

则其和函数必然是一个以 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 为周期的周期函数。因此我们有理由期望在一定的条件下适当选取常数 A_0, A_n, φ_n ($n = 1, 2, \dots$) 能使(1)式右端的级数收敛于 $f(t)$ 。

将周期函数按上述方式展开，其物理意义是非常明确的，这就是要把一个复杂的周期振动分解成许多不同频率的简谐振动的叠加。在电工学上，这种展开称为谐波分析。其中 A_0 称为 $f(t)$ 的直流分量； $A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ 称为一次谐波（又叫做基波）；而 $A_2 \sin(2\omega t + \varphi_2), A_3 \sin(3\omega t + \varphi_3), \dots$ 依次称为二次谐波，三次谐波，等等。

为了以后讨论的方便起见，将正弦函数 $A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$ 变为以下形式：

$$A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) = A_n \sin \varphi_n \cos n\omega t + A_n \cos \varphi_n \sin n\omega t,$$

并令 $A_0 = \frac{a_0}{2}$, $a_n = A_n \sin \varphi_n$, $b_n = A_n \cos \varphi_n$ ($n = 1, 2, \dots$),

则(1)式右端的级数可以改写为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t). \quad (2)$$

一般地，形如(2)式的函数项级数叫做三角级数，其中 a_0, a_n, b_n ($n = 1, 2, \dots$) 都是常数。本节将研究在什么条件下 $f(t)$ 可以

展开成三角级数, 以及 $a_0, a_n, b_n (n=1, 2, \dots)$ 这些常数与 $f(t)$ 之间的关系. 我们首先研究 $\omega=1$ 即周期 $T=2\pi$ 的情况. 对一般情况只需作一个自变量的代换就能解决.

三角级数是由研究周期函数的需要而提出来的. 但在应用上却不一定非要是周期函数才能展开成三角级数. 下面将会看到: 一个在有限区间上定义的函数, 只要满足某些条件, 也可以展开成三角级数.

一 三角函数系的正交性

为了讨论怎样才能把一个以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 展开成三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

我们首先介绍三角函数系的正交性.

若在区间 (a, b) 上给定一个函数系 $\{\varphi_k(x)\}$, 其中 $\varphi_k(x) (k=1, 2, 3, \dots)$ 是在 (a, b) 上的可积函数. 如果在区间 (a, b) 上满足条件:

$$\int_a^b \varphi_k(x) \varphi_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{当 } k \neq m \text{ 时,} \\ l_k \neq 0, & \text{当 } k = m \text{ 时,} \end{cases} \quad (3)$$

则称函数系 $\{\varphi_k(x)\}$ 在区间 (a, b) 上是正交的.

函数系的正交性这个用语, 是从矢量代数中借用的. 空间直角坐标系中的三个基本单位矢量 i, j, k 之间具有正交性, 即

$$i \cdot j = 0, \quad j \cdot k = 0, \quad k \cdot i = 0$$

$$i \cdot i = 1, \quad j \cdot j = 1, \quad k \cdot k = 1,$$

把(3)式与它们作类比是十分相似的.

现在来考察三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots, \quad (4)$$

容易证明这个三角函数系在任意一个长为 2π 的区间上都是正交

的.

事实上, 由于周期函数 $f(x)$ 在其任一周期上积分的值相等, 而上述三角函数系中各函数均以 2π 为其公共周期, 所以要验证上述结论只需在其一个周期上 (例如 $(-\pi, \pi)$) 加以验证即可. 根据三角函数积化和差的公式容易算出

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx dx = 0, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx dx = 0, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx dx = 0, \quad (k, n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx = 0, \quad (k, n = 1, 2, \dots, k \neq n);$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx dx = 0, \quad (k, n = 1, 2, \dots, k \neq n).$$

例如对第四式可以验证如下: 因为

$$\cos kx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos(k+n)x + \cos(k-n)x],$$

当 $k \neq n$ 时, 有

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k+n)x + \cos(k-n)x] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(k+n)x}{k+n} + \frac{\sin(k-n)x}{k-n} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0. \end{aligned}$$

其余各式请读者自行验证. 这就是说在函数系(4)中任意两个不同的函数的乘积在 $(-\pi, \pi)$ 上积分为零. 又三角函数系(4)中两个相同的函数的乘积在区间 $(-\pi, \pi)$ 上的积分不等于零, 即

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi,$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots).$$

可见三角函数系(4)在区间 $(-\pi, \pi)$ 上是正交的, 同样在任一长度为 2π 的区间上也是正交的.

二 傅立叶级数

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数, 且能展开成三角级数.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (5)$$

现在要问: 系数 $a_0, a_n, b_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 与函数 $f(x)$ 之间存在什么样的关系? 或者换句话说能不能利用 $f(x)$ 把这些系数求出来? 为此, 假定(5)式右端可以逐项积分, 并且在用任何 $\sin mx$ 和 $\cos mx$ 去乘(5)式之后所得函数项级数还可以逐项积分. 首先对(5)式从 $-\pi$ 到 π 逐项积分:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{-\pi}^{\pi} a_n \sin nx dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx dx \right], \end{aligned}$$

根据三角函数系(4)的正交性, 等式右端除第一项外, 其余各项均为零, 所以

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi,$$

于是得

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

其次再用 $\cos mx$ 乘(5)式两端, 并从 $-\pi$ 到 π 逐项积分得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \cos mx dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx \cos mx dx \right],$$

根据三角函数系(4)的正交性, 上式右端除 $n=m$ 的一项外, 其余各项均为零, 所以

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx = a_m \pi,$$

于是得

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx, \quad (m=1, 2, \dots).$$

类似地, 用 $\sin mx$ 乘(5)式两端, 再从 $-\pi$ 到 π 逐项积分, 可得

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx, \quad (m=1, 2, 3, \dots).$$

由于当 $m=0$ 时, a_m 的表达式正好给出 a_0 , 因此已得的结果可以合并写成

$$\left. \begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx, \quad (m=0, 1, 2, \dots). \\ b_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx, \quad (m=1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

如果公式(5.1)中的积分都存在, 这时由它们定出的系数 a_0, a_n, b_n ($n=1, 2, \dots$)就叫做函数 $f(x)$ 的傅立叶(Fourier)系数, 将这些系数代入(5)式的右端, 所得的三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (5.2)$$

叫做函数 $f(x)$ 的傅立叶级数.

上面的讨论是在假定 $f(x)$ 可以展开成三角级数(5)的前提下形式地作出来的. 函数 $f(x)$ 的傅立叶级数(5.2)在什么条件下收敛以及在什么条件下它收敛于 $f(x)$, 这些问题都是需要进一步研究的问题.

下面不加证明地引述一个收敛定理, 它给出了上述问题的一个重要结论.

狄利赫勒 (Dirichlet) 收敛定理 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数. 如果它满足条件: 在区间 $(-\pi, \pi)$ 上连续或只有有限个第一类间断点, 并且至多只有有限个极值点, 则 $f(x)$ 的傅立叶级数收敛, 并且

(i) 当 x 是 $f(x)$ 的连续点时, 级数收敛于 $f(x)$;

(ii) 当 x 是 $f(x)$ 的间断点时, 级数收敛于

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

上述定理告诉我们: 只要函数在 $(-\pi, \pi)$ 上至多有有限个第一类间断点, 并且不作无限次振动, 那末函数的傅立叶级数在连续点处收敛于该点的函数值, 在间断点处收敛于该点左极限与右极限的算术平均值. 可见函数展开成傅立叶级数的条件要比展开成幂级数的条件低得多.

例1 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数, 它在 $(-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & -\pi \leq x < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅立叶级数.

解 所给函数在点 $x=k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 处有第一类间断点, 在其它点处连续且没有极值存在, 故满足收敛定理的条

件, $f(x)$ 的傅立叶级数收敛. 并且当 $x = k\pi$ 时级数收敛于

$$\frac{1}{2} \left[\left(-\frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{2} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} + \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = 0$$

当 $x \neq k\pi$ 时级数收敛于 $f(x)$.

$f(x)$ 的傅立叶系数是

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \left(-\frac{\pi}{2} \right) \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} \right) \cos nx dx \\ &= 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \left(-\frac{\pi}{2} \right) \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} \right) \sin nx dx \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_{-\pi}^0 + \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{n} (1 - \cos n\pi) \\ &= \begin{cases} \frac{2}{n}, & \text{当 } n = 1, 3, 5, \dots \text{时,} \\ 0, & \text{当 } n = 2, 4, 6, \dots \text{时.} \end{cases} \end{aligned}$$

将傅立叶系数代入(5.2)式, 就得到 $f(x)$ 的傅立叶级数展开式为

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2k-1} \sin (2k-1)x + \dots \right), \end{aligned}$$

$$(-\infty < x < +\infty; x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots).$$

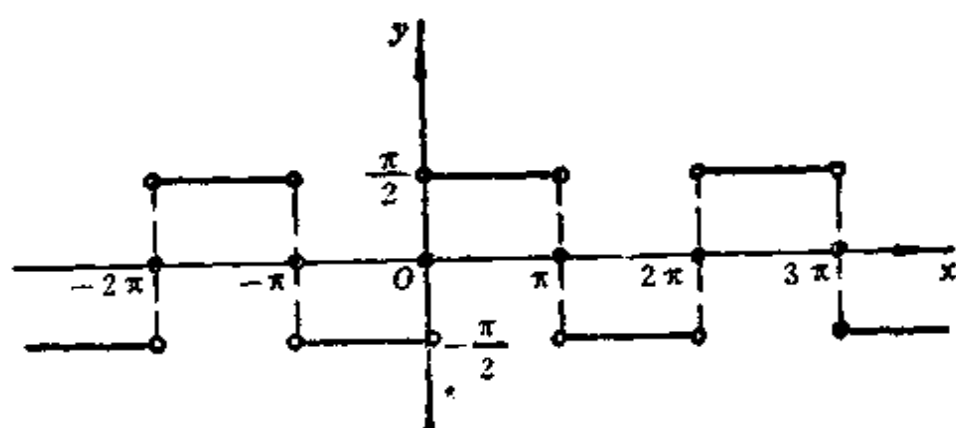


图11-8

上式右端三角级数和函数的图形如图11-8所示，它与 $f(x)$ 仅在 $x=k\pi(k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 点处有区别。

如果把例1中的函数理解为矩形波的波形函数（周期 $T=2\pi$ ，幅值 $E=\frac{\pi}{2}$ ，自变量 x 表示时间），那末以上展开式表明：矩形波是由一系列不同频率的正弦波叠加而成的，这些正弦波的频率依次为基波频率的奇数倍。

应当注意，如果函数 $f(x)$ 只在区间 $(-\pi, \pi)$ 上有定义，并且满足收敛定理的条件，那末 $f(x)$ 也可以展开成傅立叶级数。事实上，我们可以在 $(-\pi, \pi)$ 或 $(-\pi, \pi)$ 之外补充函数 $f(x)$ 的定义，把它开拓成周期为 2π 的周期函数 $F(x)$ 。按这种方式开拓函数的定义域的过程称为周期延拓。再将 $F(x)$ 展开成傅立叶级数，最后限制 x 在 $(-\pi, \pi)$ 内，此时 $F(x)=f(x)$ ，这样便得到 $f(x)$ 的傅立叶级数的展开式。根据收敛定理，这级数在区间的端点 $x=\pm\pi$ 处收敛于 $\frac{1}{2}(f(\pi-0)+f(-\pi+0))$ 。

一般地，如果函数 $f(x)$ 只在 $(a, a+2\pi)$ （ a 为任一常数）上有定义，且满足收敛定理的条件，则同样也可以使用周期延拓的方法展开成傅立叶级数。由于三角函数系(4)在任意一个长为 2π 的区间上都是正交的，所以傅立叶系数公式(5.1)可以改为直接从 a 到

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n} x \sin nx + \frac{1}{n^2} \cos nx \right] \Big|_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{n^2 \pi} (\cos n\pi - 1) \\
&= \frac{1}{n^2 \pi} ((-1)^n - 1), \quad (n = 1, 2, 3, \dots).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n} x \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx \right]_0^{\pi} \\
&= -\frac{1}{n} \cos n\pi = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).
\end{aligned}$$

将求得的系数代入(5.2)式, 就得到 $f(x)$ 的傅立叶级数的展开式为

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\pi}{4} + \left(-\frac{2}{1^2 \cdot \pi} \cos x + \sin x \right) - \frac{1}{2} \sin 2x \\
&\quad + \left(-\frac{2}{3^2 \cdot \pi} \cos 3x + \frac{1}{3} \sin 3x \right) - \frac{1}{4} \sin 4x + \dots, \\
&\quad (-\pi < x < \pi).
\end{aligned}$$

上式右端级数的和函数的图形如图11-10所示.

例3 将函数 $f(x) = x^2$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) 展为傅立叶级数.

解 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 上连续单调, 满足收敛定理的条件. 在延拓为周期函数时, 它在 $x = 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 处有第一类间断点, 因此延拓后的周期函数在 $(0, 2\pi)$ 内收敛于 $f(x)$, 而当 $x = 0$ 及 $x = 2\pi$ 时傅立叶级数收敛于

$$\frac{1}{2} (f(0+0) + f(2\pi-0)) = \frac{0 + 4\pi^2}{2} = 2\pi^2.$$

函数 $f(x)$ 的傅立叶系数为

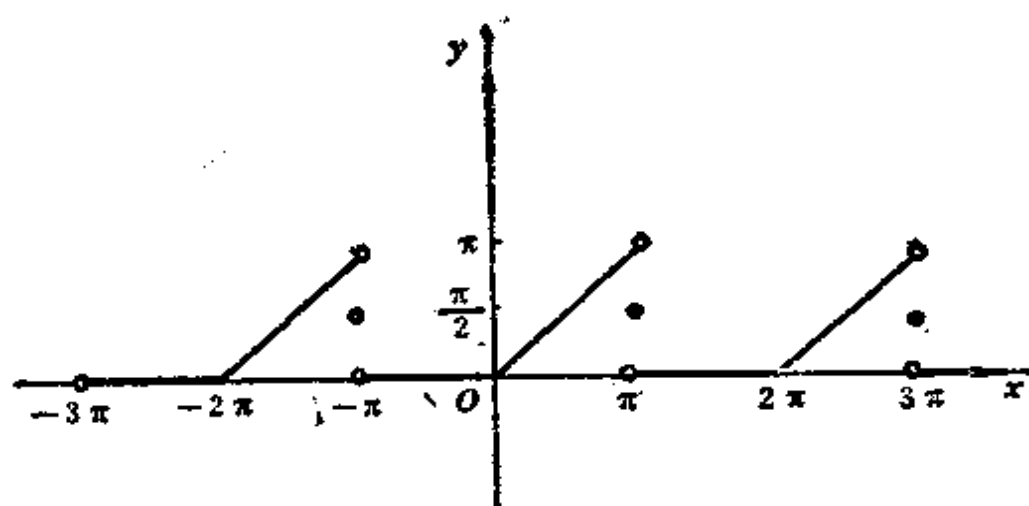


图11-10

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8}{3} \pi^2.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[x^2 \left(\frac{\sin nx}{n} \right) + 2x \left(\frac{\cos nx}{n^2} \right) - 2 \left(\frac{\sin nx}{n^3} \right) \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{4}{n^2}, \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[x^2 \left(-\frac{\cos nx}{n} \right) + 2x \left(\frac{\sin nx}{n^2} \right) + 2 \left(\frac{\cos nx}{n^3} \right) \right]_0^{2\pi} \\ &= -\frac{4\pi}{n}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

故所给函数的傅立叶级数展开式为

$$x^2 = \frac{4}{3} \pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n^2} \cos nx - \frac{\pi}{n} \sin nx \right),$$

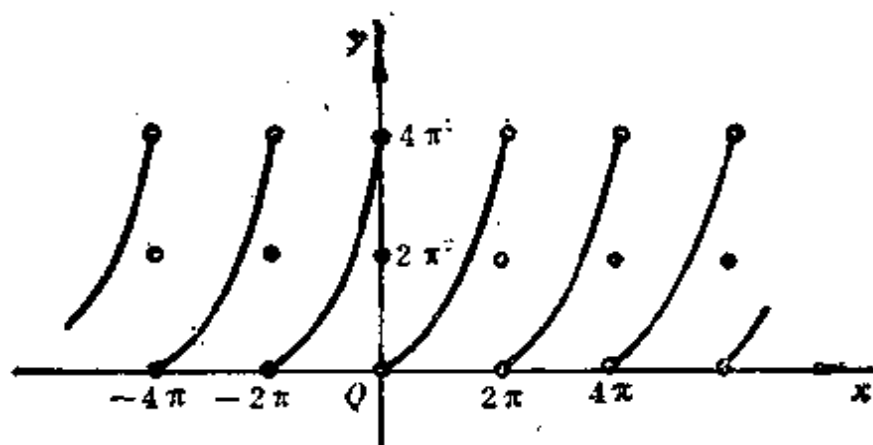


图11-11

$$(0 < x < 2\pi).$$

上式右端三角级数和函数的图形如图11-11所示。

读者不妨思考一下：如果把函数 x^2 在 $-\pi \leq x \leq \pi$ 展为傅立叶级数，那么得到的展开式会与上面得到的展开式相同吗？这样得到的傅立叶级数的和函数的图形将是什么样子？

三 正弦级数与余弦级数

1 奇函数与偶函数的傅立叶级数

设 $f(x)$ 是定义在区间 $(-\pi, \pi)$ 上且满足收敛定理条件的函数。如果 $f(x)$ 是偶函数，则 $f(x)\cos nx$ 为偶函数，而 $f(x)\sin nx$ 为奇函数，于是有

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 2 \int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

同理，如果 $f(x)$ 是奇函数则有

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 2 \int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

因此有以下定理成立

定理 1 设 $f(x)$ 为在区间 $(-\pi, \pi)$ 上满足收敛定理的条件, 则当 $f(x)$ 为奇函数时, 其傅立叶系数为

$$a_n = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

而当 $f(x)$ 为偶函数时, 其傅立叶系数为

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

$$b_n = 0.$$

这个定理表明: 如果 $f(x)$ 是奇函数, 那末它的傅立叶级数是只含有正弦项的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \quad (6)$$

我们称之为正弦级数. 如果 $f(x)$ 是偶函数, 那末它的傅立叶级数是只含有常数项和余弦项的级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad (7)$$

我们称之为余弦级数.

例 4 将 $f(x) = |x|$ 在 $-\pi \leq x \leq \pi$ 上展为傅立叶级数.

解 所给函数是在区间 $(-\pi, \pi)$ 上满足收敛定理条件的偶函数, 在延拓为周期函数时, 它在每一点 x 处都连续 (图11-12), 因此其傅立叶级数在 $(-\pi, \pi)$ 上收敛于 $f(x)$. 由于 $f(x)$ 是偶函数, 故其傅立叶级数必是余弦级数, 此时 $b_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$), 而

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi.$$

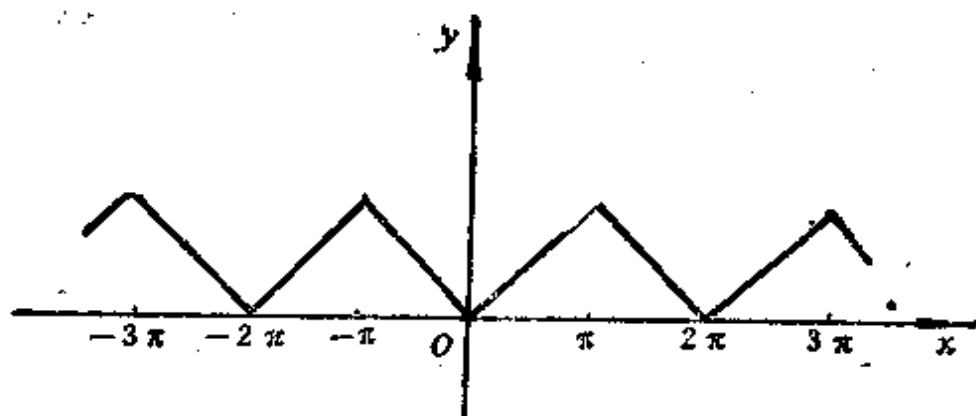


图 11-12

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} (\cos n\pi - 1)$$

$$= \begin{cases} -\frac{4}{n^2 \pi}, & \text{当 } n = 1, 3, 5, \dots \text{时,} \\ 0, & \text{当 } n = 2, 4, 6, \dots \text{时.} \end{cases}$$

于是得

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \dots \right),$$

$$(-\pi \leq x \leq \pi).$$

利用这个展开式，可以求出几个特殊级数的和，当 $x=0$ 时 $f(0)=0$ ，于是由上式得到

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

设
$$\sigma = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots,$$

$$\sigma_1 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \left(= \frac{\pi^2}{8} \right),$$

则
$$\sigma_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots$$

$$= \frac{1}{2^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) = \frac{1}{4} \sigma_1.$$

因为 $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, 故有

$$\sigma_2 = \frac{1}{4}(\sigma_1 + \sigma_2).$$

于是得

$$\sigma_2 = \frac{1}{3}\sigma_1 = \frac{\pi^2}{24},$$

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{6}.$$

例 5 将 $f(x) = x$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上展为傅立叶级数

解 所给函数是在区间 $(-\pi, \pi)$ 上满足收敛定理条件的奇函数, 在延拓为周期函数时, 仅在点 $x = (2k+1)\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 处有第一类间断点, 因此其傅立叶级数在 $(-\pi, \pi)$ 内收敛于 $f(x)$, 而在 $x = \pm \pi$ 处收敛于

$$\frac{1}{2}[f(-\pi+0) + f(\pi-0)] = \frac{1}{2}(-\pi + \pi) = 0$$

其和函数的图形如图 11-13 所示.

由于 $f(x)$ 是奇函数, 故其傅立叶级数必是正弦级数, 这时

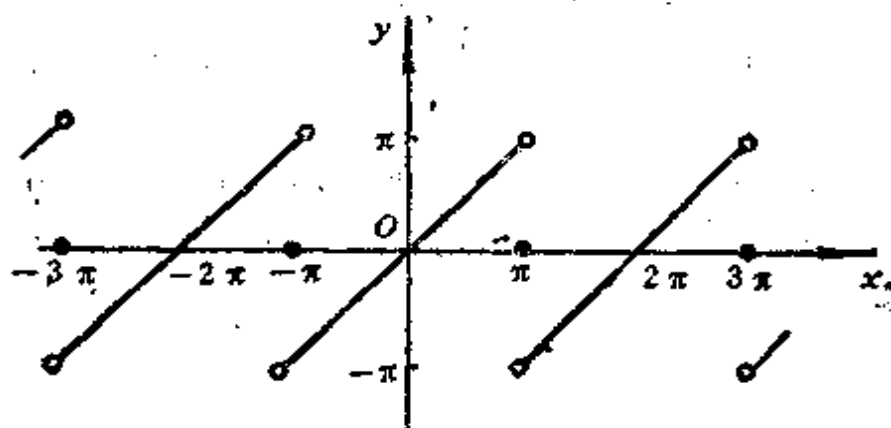


图 11-13

$a_n = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), 而

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = -\frac{2}{n} \cos n\pi \\ &= (-1)^{n+1} \frac{2}{n}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \end{aligned}$$

于是得到 $f(x)$ 的傅立叶级数展开式为

$$x = 2 \left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots \right), \quad (-\pi < x < \pi).$$

2 函数展为正弦级数或余弦级数

在许多实际问题中(例如研究某些波动问题、热的传导等),常常需要把定义在区间 $(0, \pi)$ 上的函数 $f(x)$ 展开成正弦级数或余弦级数. 解决这种问题, 仍可借鉴前面已经提到的周期延拓的方法. 设函数 $f(x)$ 定义在区间 $(0, \pi)$ 上且满足收敛定理的条件, 在开区间 $(-\pi, 0)$ 内补充函数 $f(x)$ 的定义, 得到定义在 $(-\pi, \pi)$ 上的函数 $F(x)$, 使它在 $(-\pi, \pi)$ 上成为奇函数或偶函数(在使 $F(x)$ 成为奇函数时, 若 $f(0) \neq 0$, 则规定 $F(0) = 0$), 按这种方式延拓函数定义域的过程分别对应地称为奇式延拓或偶式延拓. 将延拓之后的函数 $F(x)$ 展开成傅立叶级数就会分别得到正弦级数或余弦级数. 最后再限制 x 在 $(0, \pi)$ 上, 这时 $F(x) = f(x)$, 这样便得到 $f(x)$ 的正弦级数或余弦级数的展开式了.

例6 将函数 $f(x) = x + 1$ ($0 \leq x \leq \pi$) 分别展开成正弦级数和余弦级数.

解 先求正弦级数, 为此对函数 $f(x)$ 进行奇式延拓(图11-14), 这时傅立叶系数 $a_n = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), 而

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x+1) \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x}{n} \cos nx + \frac{\sin nx}{n^2} - \frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} \end{aligned}$$

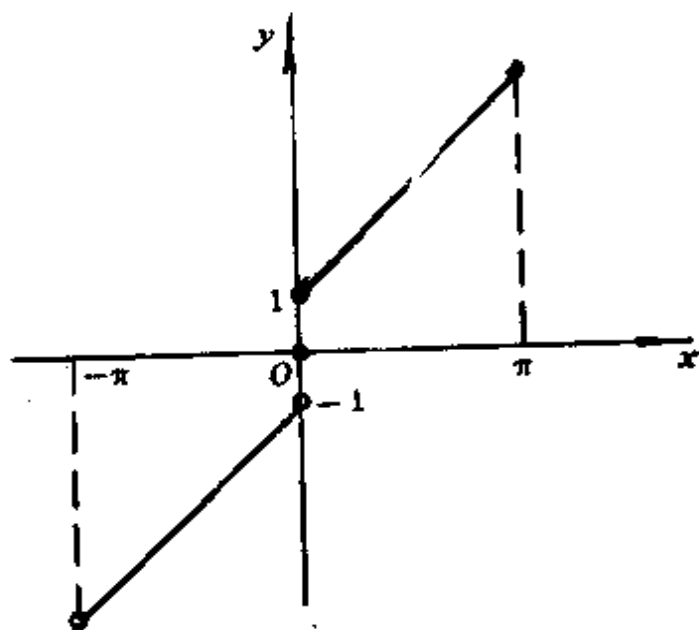


图11-14

$$= \frac{2}{n\pi} [1 - (\pi + 1) \cos n\pi]$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi + 2}{n}, & \text{当 } n = 1, 3, 5, \dots \text{时,} \\ -\frac{2}{n}, & \text{当 } n = 2, 4, 6, \dots \text{时.} \end{cases}$$

将求得的系数 b_n 代入正弦级数 (6), 得

$$x + 1 = \frac{2}{\pi} \left[(\pi + 2) \sin x - \frac{\pi}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} (\pi + 2) \sin 3x - \frac{\pi}{4} \sin 4x + \dots \right], \quad (0 < x < \pi).$$

在端点 $x = 0$ 及 $x = \pi$ 处, 级数的和为零, 它不代表原来函数 $f(x)$ 的值.

再求余弦级数, 为此对 $f(x)$ 进行偶式延拓 (图11-15), 这时傅立叶系数 $b_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$), 而

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x + 1) dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_0^{\pi} = \pi + 2.$$

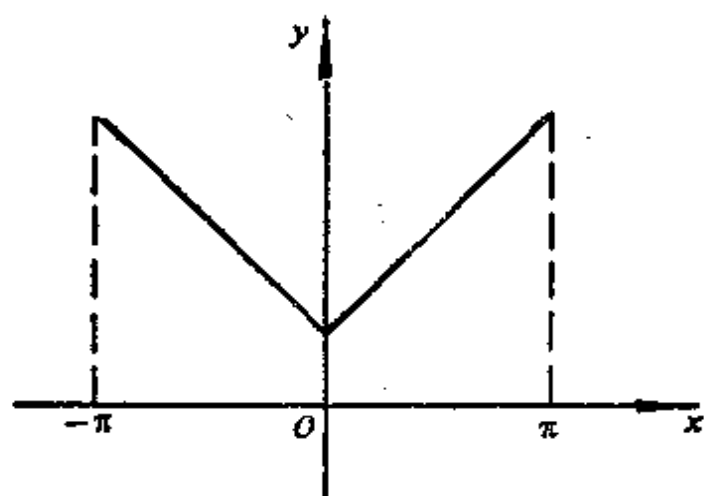


图11-15

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x+1) \cos nx \, dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} + \frac{\sin nx}{n} \right]_0^{\pi} \\
 &= \frac{2}{n^2 \pi} (\cos n\pi - 1) \\
 &= \begin{cases} 0, & \text{当 } n = 2, 4, 6, \dots \text{时,} \\ -\frac{4}{n^2 \pi}, & \text{当 } n = 1, 3, 5, \dots \text{时.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

将求得的系数 a_n 代入余弦级数(7), 得

$$\begin{aligned}
 x+1 &= \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \dots \right), \quad (0 \leq x \leq \pi).
 \end{aligned}$$

四 一般周期函数的傅立叶级数

到现在为止, 上面讨论的周期函数都是以 2π 为周期的. 下面我们讨论周期为 $2l(l > 0)$ 的周期函数的傅立叶级数. 根据前面讨论

证明 作变量代换 $z = \frac{\pi x}{l}$, 则区间 $-l \leq x \leq l$ 就变换成

$-\pi \leq z \leq \pi$. 设函数 $f(x) = f\left(\frac{lz}{\pi}\right) = F(z)$, 则 $F(z)$ 是周期为 2π 的周期函数, 且满足收敛定理的条件. 将 $F(z)$ 展为傅立叶级数, 则在函数 $F(z)$ 的连续点处有

$$F(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nz + b_n \sin nz),$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(z) \cos nz dz, \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(z) \sin nz dz, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

在 $F(z)$ 的间断点 z 处, $F(z)$ 的傅立叶级数收敛于

$$\frac{1}{2} (F(z-0) + F(z+0)).$$

在以上各式中令 $z = \frac{\pi}{l} x$, 并注意到 $F(z) = f(x)$, 于是在 $f(x)$ 的连续点处有

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right),$$

而且

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx, \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

在 $f(x)$ 的间断点 x 处, 由于 $f(x-0) = F(z-0)$, $f(x+0)$

$=F(x+0)$ ，故这时级数收敛于

$$\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)].$$

类似地，可以证明定理的其余部分。

证毕。

如果要将一个只在区间 $(-l, l)$ (或 $(a, a+2l)$ ，其中 a 为任一常数)上有定义且满足收敛定理条件的函数 $f(x)$ 展为傅立叶级数，则可仿照前面讲过的先进行周期延拓，然后再展开。同样对于在区间 $(0, l)$ 上给定的满足收敛定理条件的函数 $f(x)$ ，要想展为正弦级数或余弦级数，则应在分别进行奇式延拓或偶式延拓之后再展开。下面通过例题来说明。

例7 设 $f(x)$ 是周期为4的周期函数，它在 $(-2, 2)$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x < 0, \\ h, & 0 \leq x < 2. \end{cases} \quad (\text{常数 } h > 0)$$

将 $f(x)$ 展开成傅立叶级数。

解 $f(x)$ 满足收敛定理条件，按公式(9)有

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 0 \cdot dx + \frac{1}{2} \int_0^2 h dx = h.$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_0^2 h \cos \frac{n\pi}{2} x dx = \left[\frac{h}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} x \right]_0^2 = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_0^2 h \sin \frac{n\pi}{2} x dx = \left[-\frac{h}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} x \right]_0^2$$

$$= \frac{h}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} \frac{2h}{n\pi}, & \text{当 } n = 1, 3, 5, \dots \text{时,} \\ 0, & \text{当 } n = 2, 4, 6, \dots \text{时.} \end{cases}$$

将求得的系数 a_n, b_n 代入(8)式，得

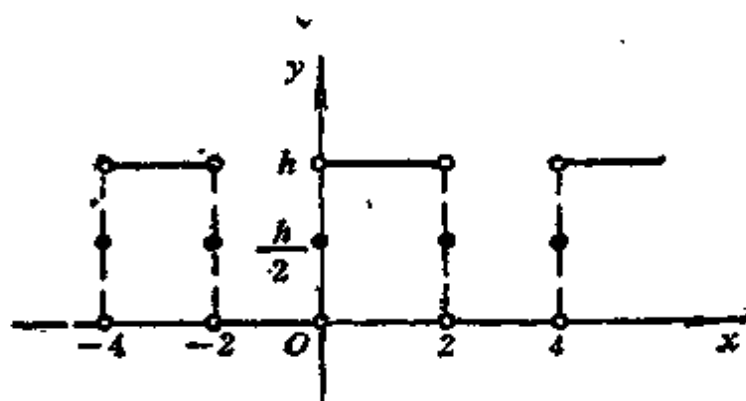


图11-16

$$f(x) = \frac{h}{2} + \frac{2h}{\pi} \left(\sin \frac{\pi}{2} x + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{2} x + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi}{2} x + \dots \right),$$

$$(-\infty < x < +\infty, x \neq 0, \pm 2, \pm 4, \dots).$$

上式右端级数的和函数的图形如图11-16所示.

例8 将函数

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

展为正弦级数.

解 函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上显然满足收敛定理条件. 要展为正弦级数, 必须对函数 $f(x)$ 进行奇式延拓. 按公式 (11) 计算其傅立叶系数 ($l=2$)

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) \sin \frac{n\pi}{2} x dx \\ &= \int_0^1 \sin \frac{\pi x}{2} \sin \frac{n\pi}{2} x dx + \int_1^2 0 \cdot dx \end{aligned}$$

当 $n=1$ 时

$$b_1 = \int_0^1 \sin^2 \frac{\pi}{2} x dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \frac{1}{2}$$

当 $n > 1$ 时, 作代换, 令 $t = \frac{\pi x}{2}$, 则

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin t \sin nt dt = \frac{1}{\pi} (\cos(n-1)t - \cos(n+1)t) \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{当 } n = 3, 5, 7, \dots \text{时,} \\ (-1)^{\frac{n+2}{2}} \frac{2n}{\pi(n^2-1)}, & \text{当 } n = 2, 4, 6, \dots \text{时.} \end{cases}$$

把系数 b_n 代入公式(10), 去掉为零的项, 并令 $n = 2k$, 得

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi x}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{4k^2-1} \sin k\pi x,$$

$$(0 \leq x \leq 2, x \neq 1).$$

上式右端级数的和函数如图11-17所示

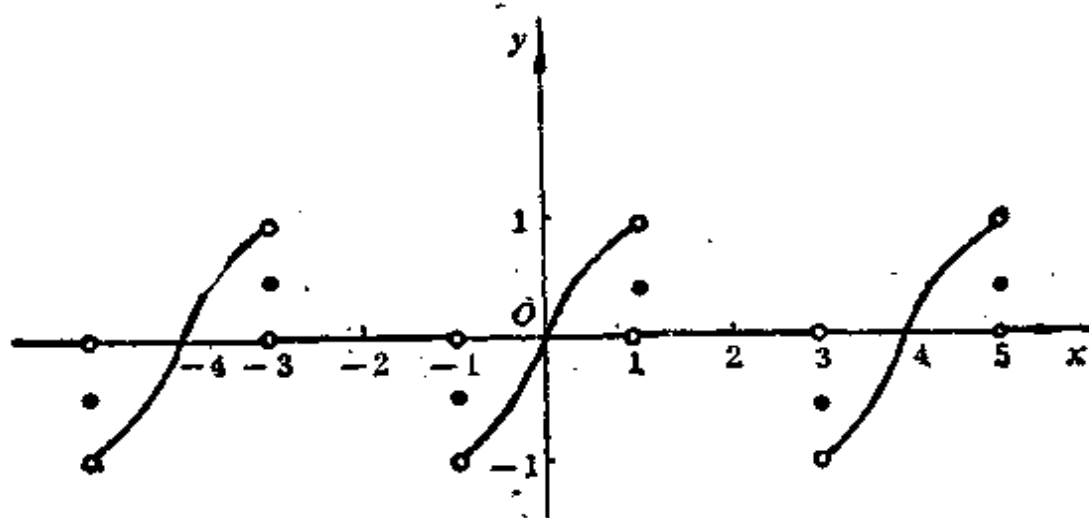


图11-17

例9 将函数 $f(x) = 10 - x$ ($5 < x < 15$) 展开成傅立叶级数.

解 作变量代换 $z = x - 10$, 则区间 $5 < x < 15$ 变换成 $-5 < z < 5$, 而 $f(x) = f(z + 10) = -z = \varphi(z)$. 补充 $\varphi(z) = -z$ ($-5 < z < 5$) 在 $z = -5$ 点处的定义 $\varphi(-5) = 5$, 然后将 $\varphi(z)$ 以 10 为周期进行周期延拓. 显然这延拓后的周期函数满足收敛定理条件, 其傅立叶级数在 $(-5, 5)$ 内收敛于 $\varphi(z)$. 经计算可得其傅立

叶系数为

$$a_n = \frac{1}{5} \int_{-5}^5 (-z) \cos \frac{n\pi}{5} z dz = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{5} \int_{-5}^5 (-z) \sin \frac{n\pi}{5} z dz = \frac{2}{5} \int_0^5 (-z) \sin \frac{n\pi}{5} z dz \\ &= (-1)^n \frac{10}{n\pi}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

于是

$$-z = \frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi z}{5}, \quad (-5 < z < 5).$$

代回原来的变量即得

$$\begin{aligned} 10-x &= \frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi}{5} (x-10) \\ &= \frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi}{5} x, \quad (5 < x < 15). \end{aligned}$$

本题也可以先将 $f(x)$ 以 10 为周期进行周期延拓, 在用公式(9)计算傅立叶系数时直接从 5 到 15 积分, 即

$$a_n = \frac{1}{5} \int_5^{15} (10-x) \cos \frac{n\pi}{5} x dx, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

$$b_n = \frac{1}{5} \int_5^{15} (10-x) \sin \frac{n\pi}{5} x dx, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

计算出 a_n, b_n 之后代入(8)式可得到与上式完全相同的展开式.

五* 傅立叶级数的复数形式

傅立叶级数还可以用复数形式来表示. 这种表达形式是借助于欧拉公式, 将三角函数转化为指数函数而得到的. 在电子技术中, 经常应用这种形式.

设周期为 $2l$ 的周期函数 $f(x)$ 的傅立叶级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right), \quad (8)$$

其中系数 a_n, b_n 为

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx, \quad (n=0, 1, 2, \dots), \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx, \quad (n=1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

利用欧拉公式

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i},$$

可将傅立叶级数(8)化为

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{2} \left(e^{i \frac{n\pi}{l} x} + e^{-i \frac{n\pi}{l} x} \right) - \frac{ib_n}{2} \left(e^{i \frac{n\pi}{l} x} - e^{-i \frac{n\pi}{l} x} \right) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n - ib_n}{2} e^{i \frac{n\pi}{l} x} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-i \frac{n\pi}{l} x} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{记 } \frac{a_0}{2} &= C_0, \quad \frac{a_n - ib_n}{2} = C_n, \quad \frac{a_n + ib_n}{2} = C_{-n}, \\ & \quad (n=1, 2, 3, \dots), \end{aligned} \quad (14)$$

则上式可化为

$$C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n e^{i \frac{n\pi}{l} x} + C_{-n} e^{i \frac{(-n)\pi}{l} x} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i \frac{n\pi}{l} x},$$

故得函数 $f(x)$ 的傅立叶级数的复数形式为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i \frac{n\pi}{l} x}. \quad (15)$$

为了得到 C_n 的表达式, 把(9)式代入(14)式得

$$C_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx.$$

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx \right. \\
&\quad \left. - \frac{i}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \right] \\
&= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \left(\cos \frac{n\pi}{l} x - i \sin \frac{n\pi}{l} x \right) dx \\
&= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i \frac{n\pi}{l} x} dx, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \\
C_{-n} &= \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{i \frac{n\pi}{l} x} dx, \\
&\quad (n = 1, 2, 3, \dots).
\end{aligned}$$

将上面所得的结果合并写成

$$C_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i \frac{n\pi}{l} x} dx, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (16)$$

傅立叶级数的两种形式，本质上是一样的，但复数形式比较简洁，且只用一个公式计算系数。

例10 电子技术中矩形脉冲函数 $u(t)$ 在一个周期 $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ 上的表达式为

$$u(t) = \begin{cases} 0, & -\frac{T}{2} \leq t < -\frac{\tau}{2}, \\ h, & -\frac{\tau}{2} \leq t < \frac{\tau}{2}, \\ 0, & \frac{\tau}{2} \leq t < \frac{T}{2}. \end{cases}$$

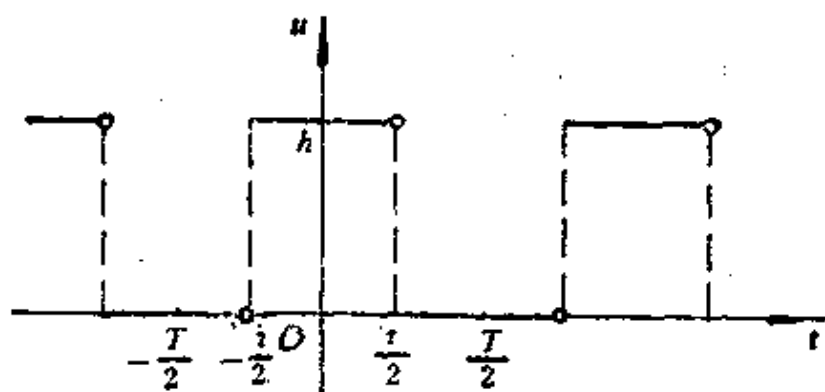


图11-18

其中 $0 < \tau < T$. 试将 $u(t)$ 展开成复数形式的傅立叶级数 (图11-18).

解 由公式(16)有①

$$\begin{aligned}
 C_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} h dt = \frac{h\tau}{T}, \\
 C_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) e^{-i \frac{2n\pi}{T} t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} h e^{-i \frac{2n\pi}{T} t} dt \\
 &= \frac{h}{T} \left[\frac{-T}{2n\pi i} e^{-i \frac{2n\pi}{T} t} \right]_{-\tau/2}^{\tau/2}
 \end{aligned}$$

①由欧拉公式 $e^{-i\alpha x} = \cos \alpha x - i \sin \alpha x$, 当 $\alpha \neq 0$ 时, 有

$$\begin{aligned}
 \int e^{-i\alpha x} dx &= \int (\cos \alpha x - i \sin \alpha x) dx \\
 &= \int \cos \alpha x dx - i \int \sin \alpha x dx \\
 &= \frac{1}{\alpha} \sin \alpha x + i \frac{1}{\alpha} \cos \alpha x + C \\
 &= -\frac{1}{i\alpha} (\cos \alpha x - i \sin \alpha x) + C \\
 &= \frac{1}{-i\alpha} e^{-i\alpha x} + C.
 \end{aligned}$$

$$= \frac{h}{n\pi} \sin \frac{n\pi\tau}{T}, \quad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots).$$

将求得的 C_n 代入级数(15), 得

$$u(t) = \frac{h\tau}{T} + \frac{h}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi\tau}{T} e^{i \frac{2\pi n}{T} t},$$

$$\left(-\infty < t < +\infty; \quad t \neq \pm \frac{\tau}{2}, \pm \frac{\tau}{2} \pm T, \dots \right).$$

$$y = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C, \quad (3)$$

其中 C 是任意常数，易见，满足方程(1)的函数有无穷多个。但按题意，该曲线通过点 $(0, 1)$ ，即要求满足 $y|_{x=0}=1$ 的那个函数。将(2)代入(3)，确定 $C=1$ 。故所求曲线方程为

$$y = \frac{x^3}{3} + 1. \quad (4)$$

由解析几何得知 $y = \frac{x^3}{3} + C$ 是一族曲线。如图12-1，随 C 取不同值，可以得到不同的立方抛物线。而过点 $(0, 1)$ 的那一条为

$$y = \frac{x^3}{3} + 1.$$

例2 质量为 m 的物体自由落下，不计空气阻力。设初速为 v_0 。求该物体的运动规律。

解 选取坐标系如图12-2。

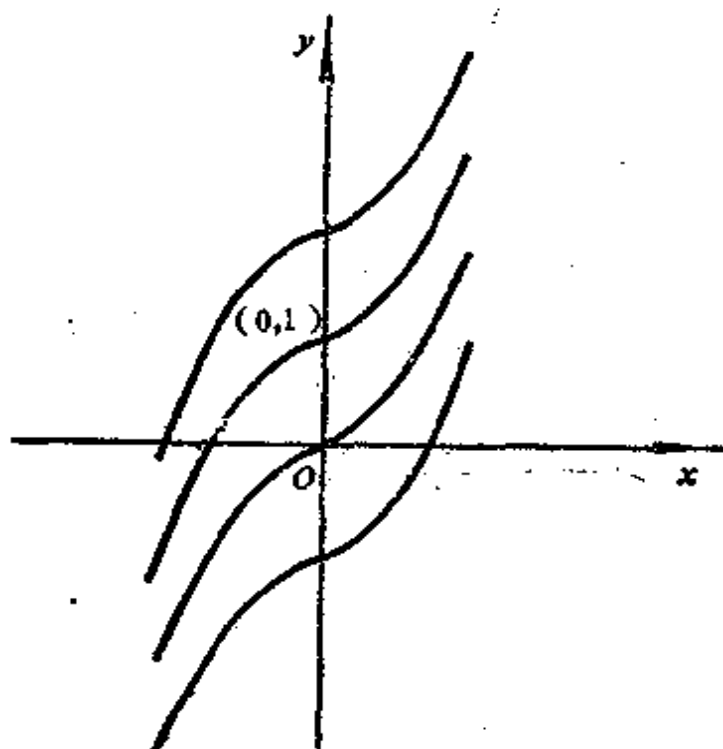


图12-1

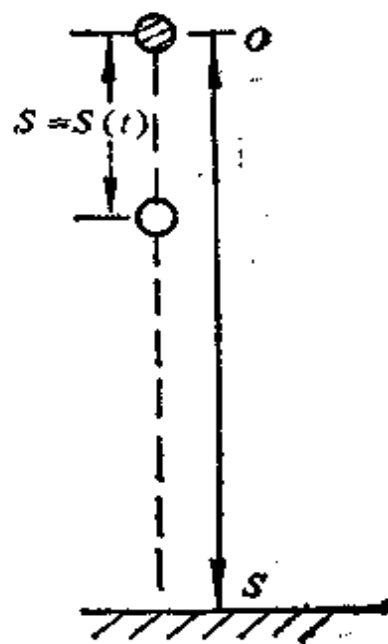


图12-2

设物体运动规律为 $s=s(t)$ ，根据牛顿第二定律， $F=ma$ ，其中 F 是物体在时刻 t 所受的力， a 是时刻 t 时物体运动的加速度， m 是物体的质量。因此，据题意，有

$$\begin{cases} m \frac{d^2 s}{dt^2} = mg, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} s|_{t=0} = 0, & \left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=0} = v_0 \end{cases} \quad (6)$$

方程(5)是含有未知函数 $s(t)$ 的二阶导数的方程，先对方程(5)两端进行积分，得

$$\frac{ds}{dt} = gt + C_1$$

再积分一次，得一族函数

$$s = \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2, \quad (7)$$

其中 C_1, C_2 是任意常数。据题意应在函数族(7)中找出满足条件(6)的函数，将条件(6)代入(7)得

$$\begin{aligned} s|_{t=0} &= C_2 = 0, \\ \left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=0} &= C_1 = v_0. \end{aligned}$$

故所求自由落体的运动方程为

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t. \quad (8)$$

从上例可以归纳出求解实际问题中未知函数的思路和方法。即首先根据实际问题建立所求函数及其导数的方程及所求函数所满足的条件，然后通过运算求出函数的一般规律及适合条件的具体规律。

在解决实际问题中，从数学上看，更着重考虑的是根据含有未知函数及其导数的方程如何求解函数关系的问题。而对于方程的建

立，则不仅需要一定数学基础，还要牵涉到较多的物理和有关专业知识，这方面只作适当要求。

下面介绍有关微分方程的基本概念。

二 微分方程的基本概念

定义 含有自变量、未知函数及其导数（或微分）的方程，称为微分方程。

如上面例子中的方程：

$$\frac{dy}{dx} = x^2, \quad \frac{d^2s}{dt^2} = g$$

都是微分方程。

未知函数是一元函数的微分方程，称为常微分方程，如上面例子都是常微分方程。未知函数为多元函数的微分方程，称为偏微分方程，本章只限于讨论常微分方程，并简称微分方程（或称方程）

微分方程中所出现的未知函数最高阶导数的阶数，称为微分方程的阶。如方程：

$$\frac{dy}{dx} = x^2,$$

$$2y' - 3y = e^x,$$

$$y' = \frac{x+y}{x-y},$$

为一阶微分方程，如

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g,$$

$$y'' + y' + y = \sin x,$$

为二阶微分方程。一般地， n 阶微分方程形式为

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.1)$$

其中 $y^{(n)}$ 必须出现，其他 $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$ 可以不全出现。

定义 设函数 $y = \varphi(x)$ 在区间 I 上有 n 阶导数，且将它代入方

程(1.1), 使方程成为恒等式, 则函数 $y=\varphi(x)$ 称为方程(1.1)在区间 I 上的解.

如函数(3)(4)都是微分方程(1)的解. 函数(7), (8)都是微分方程(5)的解.

微分方程的解一般有两种形式, 一种解含有任意常数, 且任意常数的个数^①与方程的阶数相等. 这种解称为微分方程的通解(或一般解). 如函数(3)是微分方程(1)的通解. 函数(7)是微分方程(5)的通解. 有时通解是以隐函数形式出现的, 这种隐函数形式的通解称为通积分. 另一种形式的解不含有任意常数, 它是按照问题所给的特定条件, 将通解中的任意常数加以确定而得到的, 这种满足问题特定条件的解, 称为特解. 如函数(4)是微分方程(1)的特解. 函数(8)是微分方程(5)的特解.

微分方程解的图形称为微分方程的积分曲线. 通解或通积分的图形是积分曲线族.

由于通解中含有任意常数, 所以它还不能反映客观事物特定的规律性. 因此, 需要根据问题的实际情况提出某些特定的条件. 即当自变量取特定值时, 未知函数或其导数对应的确定值, 这种条件称为定解条件, 定解条件的个数与微分方程的阶数相同. 特别, 在定解条件中自变量都取同一特定值, 这种定解条件又称为初始条件(或初值条件). 如(2)(6)为初始条件. 用初始条件确定出通解中的任意常数就得到特解. 如函数(4)是方程(1)满足初始条件(2)的特解. 函数(8)是方程(5)满足初始条件(6)的特解.

求微分方程 $y'=f(x, y)$ 满足初始条件 $y|_{x=x_0}=y_0$ 的特解, 这样的问题称为一阶微分方程的初值问题. 记作

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y|_{x=x_0} = y_0. \end{cases} \quad (1.2)$$

初值问题的几何意义是求微分方程过点 (x_0, y_0) 的那条积分曲线,

^①这里所说的任意常数是相互独立的, 即它们不能合并而使得任意常数的个数减少(参看本章第四节关于函数的线性相关性).

二阶微分方程的初值问题为

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0. \end{cases} \quad (1.3)$$

其几何意义是求微分方程通过点 (x_0, y_0) ，且该点处的切线斜率为 y'_0 的那条积分曲线。

§2 一阶微分方程

本节将介绍几种已有解法的一阶微分方程类型及其解法。

一阶微分方程的一般形式是

$$F(x, y, y') = 0. \quad (2.1)$$

如果 y' 已解出，可写为

$$y' = f(x, y). \quad (2.2)$$

有时，也写成下面形式

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \quad (2.3)$$

一 可分离变量方程

形如

$$X(x)dx = Y(y)dy. \quad (2.4)$$

的方程，称为变量已分离方程，其中 $X(x)$ 、 $Y(y)$ 是已知连续函数。

如果一阶微分方程可化为形如(2.4)的方程，那末，原方程称为可分离变量方程。

设 $y = y(x)$ 是方程(2.4)的解，代入方程，得恒等式

$$X(x)dx = Y(y(x))dy(x),$$

两端积分，得

$$\int X(x)dx = \int Y(y(x))dy(x) + C.$$

注意，在微分方程求解过程中，通常视不定积分符号表示任意一个原函数而不是全部原函数，故上式两边的原函数相差一个常数。若

对上式引进变量 y , 令 $y=y(x)$, 得

$$\int X(x)dx = \int Y(y)dy + C. \quad (2.5)$$

可见, 方程(2.4)的解 $y=y(x)$ 满足等式(2.5). 反之, 如果将(2.5)两端微分, 可证明(2.5)式所确定的隐函数一定满足方程(2.4). 因此,

$$\int X(x)dx = \int Y(y)dy + C$$

是方程(2.4)的通积分, 由此, 给出可分离变量方程的解法.

例1 求微分方程

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

的通解.

解 这是可分离变量方程. 分离变量后, 得

$$\frac{dy}{y} = 2x dx,$$

两端积分

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x dx + C_1,$$

得

$$\ln |y| = x^2 + C_1,$$

即

$$|y| = e^{x^2 + C_1} = e^{C_1} \cdot e^{x^2},$$

故

$$y = C e^{x^2},$$

其中 $C = \pm e^{C_1}$ 为任意常数.

今后为运算方便, 常将以下求解过程简化, 把 $\ln |y|$ 写成 $\ln y$, 只是应当明确, 在最后得到的通解中其任意常数也可取非正的实数.

例2 求微分方程

$$\sqrt{1-y^2} = 3x^2 y y'$$

的通解.

解 分离变量, 得

$$\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{3x^2},$$

两端积分

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{dx}{3x^2} + C,$$

得

$$-\sqrt{1-y^2} = -\frac{1}{3x} + C,$$

或

$$\sqrt{1-y^2} - \frac{1}{3x} + C = 0.$$

上式就是所求方程的通积分.

例3 求解初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{x+xy^2}{y+x^2y}, \\ y|_{x=0} = 1. \end{cases}$$

解 原方程经分离变量, 得

$$\frac{y}{1+y^2} dy = \frac{x}{1+x^2} dx,$$

两端积分, 得

$$\frac{1}{2} \ln(1+y^2) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C_1,$$

$$\ln(1+y^2) = \ln(1+x^2) + \ln C, \quad \left(C_1 = \frac{1}{2} \ln C\right).$$

故方程通积分为

$$1+y^2 = C(1+x^2),$$

代入初始条件 $y|_{x=0}=1$, 得 $C=2$. 故初值问题特解为

$$1+y^2=2(1+x^2).$$

有些一阶微分方程可作适当的变量置换化为可分离变量方程. 常见形如

$$\frac{dy}{dx} = f(ax+by+c) \quad (2.6)$$

的方程. 取变量置换 $u=ax+by+c$, 可将方程(2.6)化为以 u 为新未知函数, x 为自变量的可分离变量方程. 由于

$$\frac{du}{dx} = a + b \frac{dy}{dx},$$

故原方程(2.6)化为可分离变量方程

$$\frac{1}{b} \left(\frac{du}{dx} - a \right) = f(u).$$

求得通解后, 再经还原变量, 即得原方程通解.

例4 求微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-y} + 1$$

的通解.

解 作未知函数变换 $u=x-y$, 则 $\frac{du}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx}$, 代入方程, 得可分离变量方程

$$1 - \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} + 1,$$

$$u du = -dx,$$

$$\frac{u^2}{2} = -x + C_1,$$

还原变量, 得通解积分

$$(x-y)^2 = -2x + C, \quad (C=2C_1).$$

二 齐次方程

形如

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (2.7)$$

的方程，称为齐次方程。其中 $f\left(\frac{y}{x}\right)$ 是以 $\frac{y}{x}$ 为中间变量的函数。

一般地，为了判定一阶方程

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y) \quad (2.8)$$

是否是齐次方程，可将方程 (2.8) 右端 $\varphi(x, y)$ ，用 tx, ty 分别替换 x, y ，若有

$$\varphi(tx, ty) = \varphi(x, y)$$

则方程 (2.8) 为齐次方程。特别，若方程 (2.8) 中右端 $\varphi(x, y)$ 简单，可通过简单变形，即可化为 (2.7) 的右端 $f\left(\frac{y}{x}\right)$ 。如方程

$$y' = \frac{x+y}{x-y}, \quad y' = \frac{2y^2}{x^2 - xy},$$

都是齐次方程。对于第二个方程，右端分子、分母同除以 x^2 即可化为方程 (2.7)

$$y' = \frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 - \frac{y}{x}}.$$

齐次方程的解法，通过对齐次方程 (2.7) 引入新的未知函数 $u = \frac{y}{x}$ ，即可化为可分离变量的方程。

解 方程为齐次方程. 据方程中指数项的特点, 可令 $u = \frac{x}{y}$,

有 $x = uy$, $dx = udy + ydu$, 代入方程并整理, 得

$$(1 + e^{-u})ydu + (1 + ue^{-u})dy = 0,$$

分离变量, 得

$$\frac{1 + e^{-u}}{1 + ue^{-u}} du + \frac{dy}{y} = 0,$$

即

$$\frac{1 + e^{-u}}{u + e^{-u}} du + \frac{dy}{y} = 0.$$

积分, 得

$$\ln(u + e^{-u}) + \ln y = \ln C,$$

$$(u + e^{-u})y = C,$$

还原变量, 得通解积分

$$x + ye^{\frac{x}{y}} = C.$$

有些一阶方程形式上不是齐次方程, 但可通过适当变换, 化为齐次方程.

例 7 解微分方程 $y' = \frac{y+2}{x+y-1}$.

解 此方程不是齐次方程. 设想若右端分式函数的分子、分母都没有常数项, 就成为齐次方程, 因此, 只要把坐标原点平移到两直线

$$\begin{cases} y + 2 = 0, \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

的交点即可, 由方程组解得交点为 $x = 3$, $y = -2$. 作坐标平移变换 $x = X + 3$, $y = Y - 2$, 有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(Y-2)}{d(X+3)} = \frac{dY}{dX},$$

方程化为

$$\frac{dY}{dX} = \frac{Y}{X+Y},$$

即为齐次方程. 设 $Y=uX$, 方程化为

$$u + X \frac{du}{dX} = \frac{u}{1+u},$$

即

$$-\frac{1+u}{u^2} du = \frac{dX}{X},$$

积分, 得

$$\frac{1}{u} - \ln u = \ln X + \ln C,$$

还原变量 $u = \frac{Y}{X}$, 及 $X = x-3$, $Y = y+2$, 得方程的通积分

$$\frac{x-3}{y+2} = \ln C(y+2).$$

三 一阶线性方程

1 线性方程

形如

$$a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0 \quad (2.9)$$

的方程称为一阶线性方程, 所谓“线性”是指对于未知函数 y 及其导数都是一次的, 其中 $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ 是已知的连续函数. 且 $a(x) \neq 0$.

为方便起见, 方程(2.9)常写成

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad (2.10)$$

其中 $P(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$ $Q(x) = -\frac{c(x)}{a(x)}$, $Q(x)$ 称为自由项, 当

$Q(x) \neq 0$ 时, 方程

$$y' + P(x)y = 0, \quad (2.11)$$

称为一阶线性齐次方程. 当 $Q(x) \neq 0$ 时, 方程(2.10)称为一阶线性非齐次方程.

解线性非齐次方程(2.10), 先解线性非齐次方程所对应的齐次方程

$$y' + P(x)y = 0.$$

这是可分离变量方程, 经分离变量, 得

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx,$$

积分, 得

$$\ln y = -\int P(x)dx + \ln C,$$

即对应齐次方程通解为

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}. \quad (2.12)$$

下面再应用“常数变易法”求线性非齐次方程(2.10)的通解. 这种方法是将对应齐次方程(2.11)通解(2.12)中的任意常数 C , 换成 x 的待定函数 $u(x)$, 设方程(2.10)具有形如 $y = u(x)e^{-\int P(x)dx}$ 的解, 代入方程(2.10)后, 只需确定待定函数 $u(x)$, 即得方程(2.10)的通解.

设 $y = u(x)e^{-\int P(x)dx}$ 是方程(2.10)的解, 代入方程.

$$\begin{aligned} u'(x)e^{-\int P(x)dx} - P(x)u(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)u(x)e^{-\int P(x)dx} \\ = Q(x), \end{aligned}$$

即

$$u'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x),$$

$$u'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx},$$

积分, 得

$$u(x) = \int Q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C.$$

以上推导过程都是可逆的，故线性非齐次方程(2.10)的通解为

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right]. \quad (2.13)$$

这就是利用常数变易法所得的一阶线性方程的通解。可以看出，一阶线性方程通解的结构是由线性非齐次方程的特解与对应线性齐次方程的通解两部分组成。

例8 求解方程 $xy' + y = \cos x$ 。

解 这是一阶线性非齐次方程。用常数变易法，先求对应齐次方程通解。

$$xy' + y = 0,$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x},$$

积分，得

$$\ln y = -\ln x + \ln C,$$

得对应齐市方程通解为

$$y = \frac{C}{x}.$$

再求线性非齐次方程的通解。

设解为 $y = \frac{u(x)}{x}$ ，其中 $u(x)$ 为待定函数。代入方程，得

$$u'(x) - u(x)\frac{1}{x} + u(x)\frac{1}{x} = \cos x.$$

即

$$u'(x) = \cos x,$$

$$u(x) = \sin x + C.$$

于是，得原方程通解

$$y = \frac{1}{x}(\sin x + C).$$

如直接利用公式(2.13), 与方程(2.10)对照, 可知 $P(x) = \frac{1}{x}$,

$Q(x) = \frac{\cos x}{x}$. 于是有

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left[\int \frac{\cos x}{x} e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right] \\ &= \frac{1}{x} (\sin x + C). \end{aligned}$$

与上面结果相同.

例 9 解方程 $y dx + (y^2 e^y - x) dy = 0$.

解 如视 y 为 x 的函数, 方程表为

$$(y^2 e^y - x) y' + y = 0.$$

显然不是关于 y' , y 的线性方程. 如将 x 视为 y 的函数, 方程即可化为关于 x' , x 的线性方程了, 即

$$x' - \frac{1}{y} x = -y e^y.$$

用常数变易法, 先求对应齐次方程的通解, 易得 $x = C y$.

再求原方程通解. 设解为 $x = u(y) y$ 代入方程, 得

$$u'(y) = -e^y,$$

$$u(y) = -e^y + C,$$

故原方程通解为

$$x = -y e^y + C y.$$

有的方程形式上不是一阶线性方程, 但通过变量置换, 可化为线性方程. 下面介绍的贝努利方程, 就属于这类方程.

2 贝努利 (Bernoulli) 方程

形如

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \quad (n \neq 0, 1) \quad (2.14)$$

的方程称为贝努利方程. 其中 $P(x)$, $Q(x)$ 是连续函数(当 $n=0, 1$ 时, 为线性方程, 当 $n \neq 0, 1$ 时, 方程为贝努利方程).

事实上, 以 y^n 除方程(2.14)得

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x) y^{1-n} = Q(x).$$

由于 $\frac{d(y^{1-n})}{dx} = (1-n) y^{-n} \frac{dy}{dx}$, 上式可化为

$$\frac{1}{1-n} \frac{d(y^{1-n})}{dx} + P(x) y^{1-n} = Q(x).$$

引入新的未知函数 $z = y^{1-n}$ 有

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x),$$

这就是线性方程. 求得其解后, 再还原变量 $z = y^{1-n}$, 即得贝努利方程通解.

例10 求解方程 $y' + \frac{y}{x} = (\ln x)y^2$.

解 方程为贝努利方程, 用 y^2 除方程, 得

$$\begin{aligned} y^{-2} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y^{-1} &= \ln x, \\ -\frac{d(y^{-1})}{dx} + \frac{1}{x} y^{-1} &= \ln x, \end{aligned}$$

令 $z = y^{-1}$, 方程化为

$$\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x}z = -\ln x.$$

这是线性方程, 它的通解为

$$z = x \left[-\frac{1}{2}(\ln x)^2 + C \right],$$

还原变量, 得原方程通积分为

$$xy\left[-\frac{1}{2}(\ln x)^2 + C\right] = 1.$$

以上所介绍的方法, 基本思路都是通过适当的变换(函数变换或自变量变换)将一个微分方程化为可分离变量的方程, 或化为已知求解步骤的方程. 这是解微分方程最常用的方法.

下面再介绍解微分方程的另一种方法.

四 全微分方程

形如

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \quad (2.15)$$

的方程, 且左端恰好是某二元函数 $u = u(x, y)$ 的全微分, 即

$$du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

则方程(2.15)称为全微分方程.

全微分方程(2.15)的判定, 可根据曲线积分中的结论. 即若 $P(x, y)$ 、 $Q(x, y)$ 在单连通域内有一阶连续偏导数, 则

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

是某二元函数 $u(x, y)$ 全微分的充分必要条件是

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

因此, 判断方程(2.15)为全微分方程, 可利用判别式

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \quad (2.16)$$

如何求解全微分方程(2.15)呢? 由于

$$du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

即 $du(x, y) = 0$,

两端积分, 即可得方程(2.15)的通积分

$$u(x, y) = C.$$

而上式的 $u(x, y)$ 可利用曲线积分求出, 即

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \\
 &= \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy,
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

其中定点 (x_0, y_0) 为在单连域内所选择的适当的点. 因此, 求解全微分方程 (2.15), 关键是利用 (2.17) 式求得方程 (2.15) 左端的原函数 $u(x, y)$. 而全微分方程通积分即为

$$u(x, y) = C.$$

例11 求解 $(x^2 + y)dx - (y - x)dy = 0$.

解 这里 $P(x, y) = x^2 + y$, $Q(x, y) = -(y - x)$,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

所以这是全微分方程

取 $(x_0, y_0) = (0, 0)$ 有

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \int_{(0, 0)}^{(x, y)} (x^2 + y) dx - (y - x) dy \\
 &= \int_0^x x^2 dx - \int_0^y (y - x) dy \\
 &= \frac{x^3}{3} - \frac{y^2}{2} + xy.
 \end{aligned}$$

方程通积分为

$$\frac{x^3}{3} - \frac{y^2}{2} + xy = C.$$

下面再介绍利用不定积分求 $u(x, y)$ 的方法. 因为

$$\begin{aligned}
 du &= P(x, y) dx + Q(x, y) dy \\
 &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy,
 \end{aligned}$$

因此, 有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y).$$

将前一个式子两端关于 x 积分 (y 视为常数), 得

$$u(x, y) = \int P(x, y) dx + \varphi(y) \quad (1)$$

再将所得的函数 $u(x, y)$ 关于 y 求导数, 且知 $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$, 于是有

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\int P(x, y) dx \right] + \varphi'(y) = Q(x, y).$$

$$\text{即} \quad \varphi'(y) = Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx, \quad (2)$$

易知 $\varphi'(y)$ 是 y 的函数, 由于

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx \right] \\ &= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial x} \int P(x, y) dx \right] \\ &= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \end{aligned}$$

所以 (2) 式右端的式子只是 y 的函数, 而与 x 无关. 于是将 (2) 式两端对 y 积分, 即可求得 $\varphi(y)$, 代入 (1) 中, 即得 $u(x, y)$. 下面用这种方法再解例 11.

解 由于 $\frac{\partial u}{\partial x} = x^2 + y$, 两端对 x 积分, 得

$$u(x, y) = \int (x^2 + y) dx = \frac{x^3}{3} + xy + \varphi(y),$$

将上式关于 y 求导, 得

$$\mu P dx + \mu Q dy = 0$$

是全微分方程, 则函数 $\mu(x, y)$ 称为方程 (2.15) 的积分因子.

一般说来, 积分因子的求法, 比较复杂, 不过对简单的方程, $\mu(x, y)$ 可用观察法求得, 为此需要熟记一些简单函数的全微分, 如

$$x dy + y dx = d(xy), \quad x dx + y dy = \frac{1}{2} d(x^2 + y^2),$$

$$\frac{y dx - x dy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right), \quad \frac{x dy - y dx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} = d\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y}\right), \quad \frac{y dx - x dy}{xy} = d\left(\ln \frac{x}{y}\right)$$

等等, 从而为观察方程的积分因子提供依据.

例13 解方程 $y dx - x dy = 0$.

解 所给方程不是全微分方程. 显然, 函数 $\frac{1}{y^2}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{xy}$ 和 $\frac{1}{x^2 + y^2}$ 都是方程的积分因子.

若取 $\mu(x, y) = \frac{1}{y^2}$, 有 $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y dx - x dy}{y^2} = 0$, 方程

通积分为 $\frac{x}{y} = C$.

若取 $\mu(x, y) = \frac{1}{x^2}$, 有 $d\left(\frac{-y}{x}\right) = \frac{y dx - x dy}{x^2} = 0$, 方程

通积分为 $\frac{y}{x} = C$.

若取 $\mu(x, y) = \frac{1}{xy}$, 有 $d\left(\ln \frac{x}{y}\right) = \frac{y dx - x dy}{xy} = 0$, 方

程通积分为 $\ln \frac{x}{y} = C$.

若取 $\mu(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$, 有 $d\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} =$

0, 方程通积分为 $\operatorname{arctg} \frac{x}{y} = C$.

可以看出, 只要将后三个通积分中的任意常数加以变化, 方程 $ydx - xdy = 0$ 的通积分都可写成 $\frac{x}{y} = C$.

例14 解方程 $(y + 2xy^2)dx + (x - 2x^2y)dy = 0$.

解 经验证, 方程不是全微分方程,
先分项组合,

$$(ydx + xdy) + (2xy^2dx - 2x^2ydy) = 0,$$

取积分因子 $\frac{1}{x^2y^2}$, 方程化为

$$\frac{ydx + xdy}{x^2y^2} + \frac{2xy^2dx - 2x^2ydy}{x^2y^2} = 0,$$

即

$$\frac{d(xy)}{x^2y^2} + d\left(\ln \frac{x^2}{y^2}\right) = 0,$$

$$d\left(-\frac{1}{xy}\right) + d\left(\ln \frac{x^2}{y^2}\right) = 0.$$

方程的通积分为

$$-\frac{1}{xy} + \ln \frac{x^2}{y^2} = \ln C,$$

即

$$x^2 = Cy^2 e^{\frac{1}{xy}}.$$

关于一阶微分方程，前面介绍了四类方程：可分离变量方程，齐次方程，线性方程，全微分方程，并介绍了相应的解法。不难看出，求解微分方程，首先要判定方程的类型，然后才能运用相应的方法解得方程的解。因此，判定方程类型是至关重要的，这往往被初学者所忽略。

值得注意的是，很多一阶方程不能用上面的方法求解。在这种情形下，近似解法和数值解法就更有实际意义。

五 一阶微分方程应用举例

在本章开始时曾提出，微分方程在自然科学和工程技术中有着广泛应用。下面举一些用微分方程解决实际问题的例子，以培养应用微分方程解决问题的能力。

用微分方程解决实际问题的步骤如下：

- (1) 分析问题，建立微分方程，并提出定解条件。
- (2) 求出微分方程通解，且据初始条件求出微分方程特解。

例1 〈冷却问题〉 将一个加热到 50°C 的物体，放在 20°C 恒温室中冷却，求物体温度变化规律。

解 先建立微分方程，提出初始条件。

据冷却定律：温度为 T 的物体在温度 T_0 环境下，其冷却速度与温差 $T-T_0$ 成正比。于是，有微分方程的初始问题（设比例系数为 k ）：

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = -k(T - T_0) = -k(T - 20), & (k > 0), \\ T|_{t=0} = 50. \end{cases}$$

先求通解，分离变量，得

$$\frac{dT}{T-20} = -k dt,$$

$$\ln(T-20) = -kt + \ln C,$$

$$T = 20 + Ce^{-kt}.$$

再将初始条件代入，得 $C = 30$ 。从而，得所求温度的变化规律

为

$$T = 20 + 30e^{-kt}.$$

函数 $T(t)$ 的图形如图12-3. 从图上可以看出, 随 t 的增加, 温度下降, 且开始下降快, 后逐渐缓慢, 并越来越接近周围温度 20°C .

例2 落体问题, 设质量为 m 的质点, 从液面由静止开始在液体中下降. 设液体的阻力与速度 v 成正比. 试求质点下降时, 速度 v 与时间 t 的关系.

解 取坐标系如图12-4.

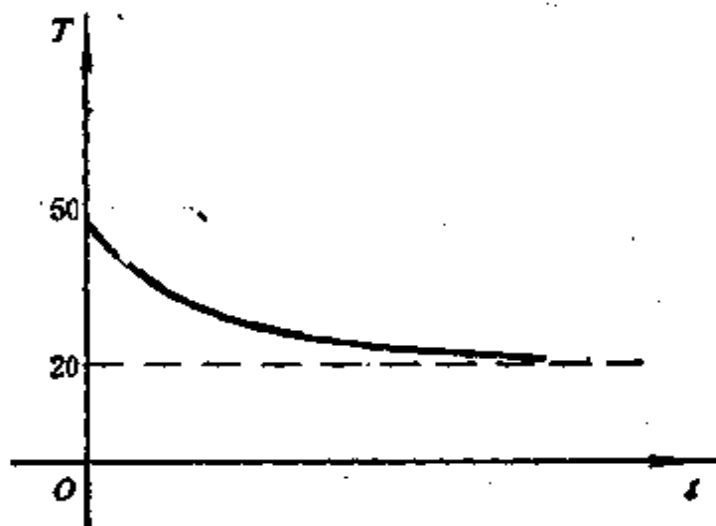


图12-3

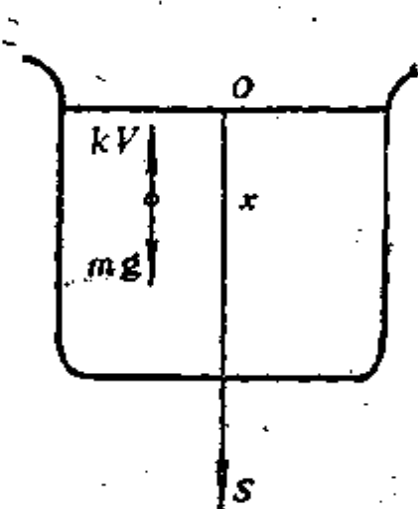


图12-4

已知质点下降过程中受两个力作用, 一个是向下的重力 mg . 另一个是向上的阻力 kv . ($k > 0$, 比例系数) 据牛顿第二定律, 得

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv,$$

又因质点从静止开始运动, 有 $v|_{t=0} = 0$, 得初值问题

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = mg - kv, \\ v|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

先求通解. 分离变量, 再积分

$$\frac{mdv}{mg-kv} = dt,$$

$$-\frac{m}{k} \ln(mg-kv) = t + C_1,$$

$$mg-kv = C_2 e^{-\frac{k}{m}t},$$

$$v = \frac{1}{k} \left(mg - C_2 e^{-\frac{k}{m}t} \right) = \frac{mg}{k} + C e^{-\frac{k}{m}t}.$$

再代入初始条件, 得 $C = -\frac{mg}{k}$, 故特解为

$$v = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right).$$

例3 设旋转曲面形状的凹镜, 由旋转轴上一点 O 发出的一切光线经此凹镜反射后都与旋转轴平行, 求此旋转曲面的生成曲线方程.

解 设旋转轴为 x 轴, 光源所在处为原点. (图 12-5) 并设 xOy 面与旋转面的交线 $y=f(x)$ 即为所求曲线 L .

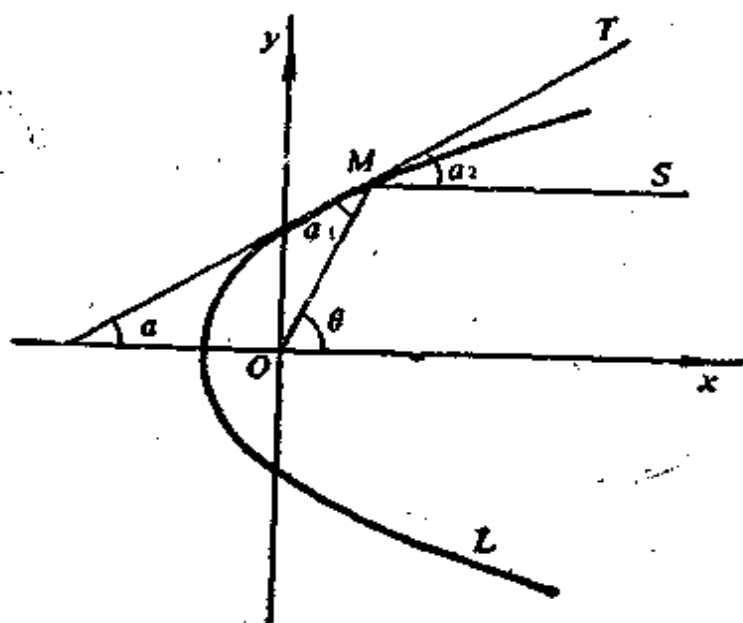


图 12-5

过曲线 L 上一点 $M(x, y)$ 作切线 MT , 其倾角为 α . 设入射线 OM 与 Ox 夹角为 θ , 与 MT 夹角为 α_1 . 反射线 MS 与 MT 夹角 α_2 , 由光的反射定律知 $\alpha_1 = \alpha_2$, 又因 $MS \parallel Ox$, 有 $\alpha_2 = \alpha$. $\alpha_1 = \alpha$. 所以 $\theta = 2\alpha$, 下面用函数 $y = f(x)$ 来表达上述关系.

由 $\theta = 2\alpha$, 有 $\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} 2\alpha$, 即

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad (1)$$

又由导数几何意义, $\operatorname{tg} \alpha = f'(x) = y'$, 又

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}. \quad (2)$$

合并(1), (2)且将 $y' = \operatorname{tg} \alpha$ 代入, 得

$$\frac{y}{x} = \frac{2y'}{1 - y'^2}.$$

解出 y' , 得微分方程

$$y' = -\frac{x}{y} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}.$$

由于曲面的生成曲线是旋转而成的. 不妨只讨论生成曲线的上半支. 此时, α 取正角($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)所以 $\operatorname{tg} \alpha = y' > 0$, 故得

$$y' = -\frac{x}{y} + \sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}.$$

这是齐次方程.

设 $y = ux$, 代入方程后, 方程化为

$$\frac{u du}{-(1+u^2) + \sqrt{1+u^2}} = \frac{dx}{x}.$$

再令 $1 + u^2 = v^2$ 代入, 得

$$\frac{dv}{-(v-1)} = \frac{dx}{x}.$$

积分得

$$\ln(v-1) + \ln x = \ln C,$$

即

$$x(v-1) = C.$$

还原变量, 得

$$x \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} - 1 \right) = C,$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + C.$$

或

$$y^2 = 2Cx + C^2$$

$$= 2C \left(x + \frac{C}{2} \right)$$

可知所求曲线为抛物线, 其顶点在 $(-\frac{C}{2}, 0)$, 这个方程已包括生成曲线的上、下两个半支.

例 4 $\langle R-L$ 电路 \rangle 设 $R-L$ 电路 (图12-6) 其中 L 为电感 (常数), R 为电阻 (常数) $E(t) = E_0 \sin \omega t$ 为电动势. 试求电路接通后, 电路中的电流 $i(t)$ 的变化规律.

解 据电工学中基尔霍夫电压定律: 电路中任一瞬间沿任一闭合回路循行一周, 回路中各支路电压的代数和恒等于零. 有

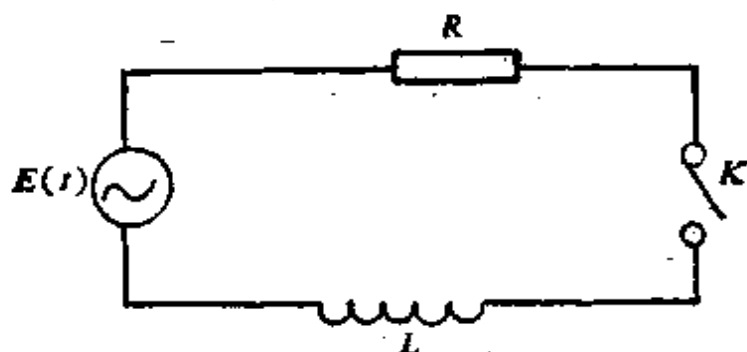


图12-6

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E(t),$$

即得 $R-L$ 电路的微分方程

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E_0 \sin \omega t.$$

这是一阶线性微分方程.

又当开关闭合时 $i = 0$, 得初始条件

$$i|_{t=0} = 0.$$

构成初值问题

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} + Ri = E_0 \sin \omega t, \\ i|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

利用常数变易法. 方程(1)对应齐次方程的通解为

$$i(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

再设方程(1)的解为

$$i(t) = u(t)e^{-\frac{R}{L}t}, \quad (u(t) \text{ 为待定函数}).$$

代入方程, 得

$$u'(t) = e^{\frac{R}{L}t} E_0 \sin \omega t.$$

积分, 得

$$u(t) = \frac{E_0}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{\frac{R}{L}t} (R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t) + C.$$

得方程(1)通解

$$i(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{R^2 + \omega^2 L^2} (R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t)$$

$$\text{由初始条件 } i|_{t=0} = 0, \text{ 得 } C = \frac{E_0 \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

故所求 $R-L$ 电路中电流变化规律:

$$i(t) = \frac{E_0 \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \varphi),$$

其中 $\varphi = \arctg \frac{\omega L}{R}$.

当 t 增大时, 上式第一项 (称为暂态电流) 逐渐衰减而趋于零. 第二项 (称为稳态电流) 是正弦函数, 它的周期和电动势的周期相同, 而相角落后 φ .

例5 设高为 H , 底半径为 R 的圆锥容器. 锥顶端有面积为 S 的小孔, 水从小孔流出, 若水流出的速度为 $v = k\sqrt{2gh}$, 其中 h 是

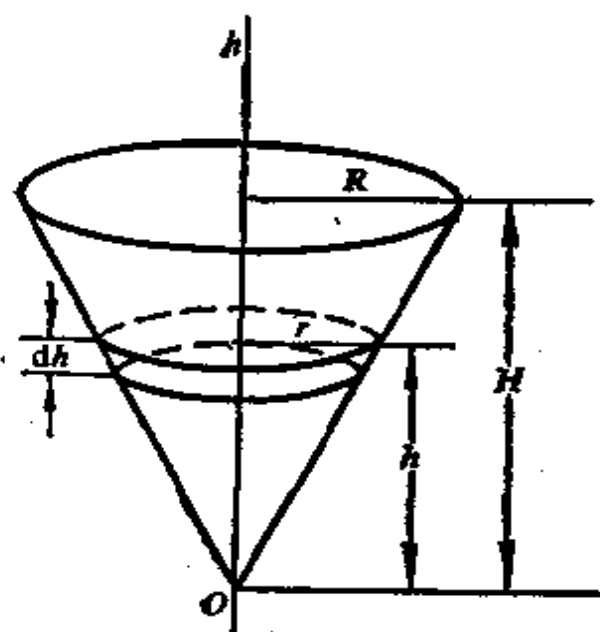


图12-7

时间为 t 时的液面高度, g 是重力加速度, k 是流量系数. 开始水面高为 H , 求小孔流水过程中, 水面高度 h 随时间 t 变化规律及容器放空的时间 T .

解 建立坐标系如图 12-7, 显然有

容器内水体积减少量 Q_1 = 水从孔口流出的流量 Q_2 .

考查时间 $(t, t+dt)$ 内 ($dt > 0$) 液面高度由 h 变到 $h+dh$ ($dh < 0$), 容器内水体积的减少量的微分是

$$dQ_1 = -\pi r^2 dh$$

其中 r 为 t 时液面半径. 负号是由于圆片厚度 $|dh| = -dh$.

又知, 在 $(t, t+dt)$ 内, 流出的水量的微分是

$$dQ_2 = S v dt = S k \sqrt{2gh} dt,$$

由于在 $(t, t+dt)$ 内, $dQ_1 = dQ_2$, 有

$$-\pi r^2 dh = S k \sqrt{2gh} dt. \quad (1)$$

又由图 12-7 可见, $r:R = h:H$, 有 $r = \frac{hR}{H}$, 代入方程 (1), 得微分方程

一阶微分方程的求解方法很有局限性，也就是说，方程的解能用解析式表示的只限于某些特殊类型的方程。有些方程的解虽然存在，但不能用初等函数或积分形式表示，这时，求微分方程近似解就显得非常必要。

1 预备知识

设有初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y|_{x=x_0} = y_0. \end{cases} \quad (2.18)$$

求其近似解的表达式，常有两种方法：

第一种方法是数值解法：即对 x 的一批值求出 y 的近似值：

x	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_n
y	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	...	y_n

这样我们就给出所求解 $y = \varphi(x)$ 的表格表示法，当然它也是近似的。

第二种方法是图解法，即设法作出微分方程通过 (x_0, y_0) 的近似积分曲线。即得到初值问题(2.18)的特解。本段只给出最简单的图解法。

2 方向场

为了讨论方程的近似解，需要明确一阶微分方程的几何意义。下面从一个简单例子导出有关概念。

例如，方程 $\frac{dy}{dx} = x$ ，它的通解为 $y = \frac{1}{2}x^2 + C$ ，对应一族积分曲线。(图12-8)这些曲线布满了整个 xOy 面。假如在曲线上每一点都作一小段切线，那末平面上每一点都对应一个有确定方向的小线段，(不区别一线段的两个方向)。而它的斜率正好是 $y' = x$ 。我们把这种每一点都对应一个确定方向的平面称为方向场。实际上，不需要先作出积分曲线，而只需从方程 $y' = x$ 本身就完

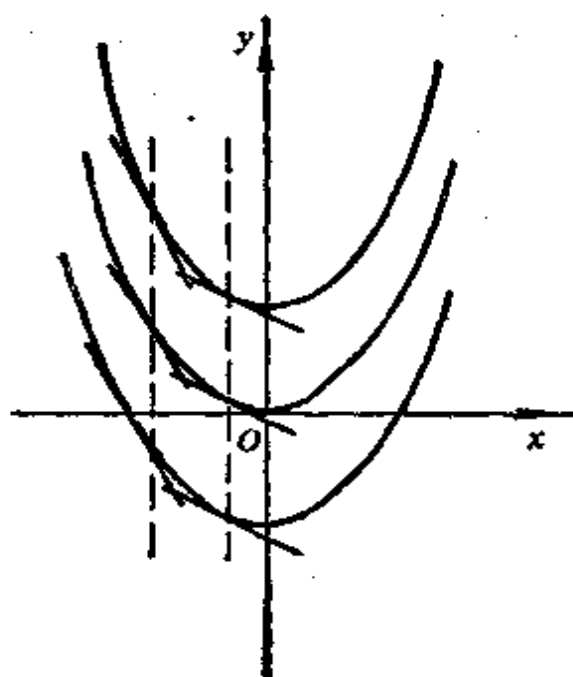


图12-8

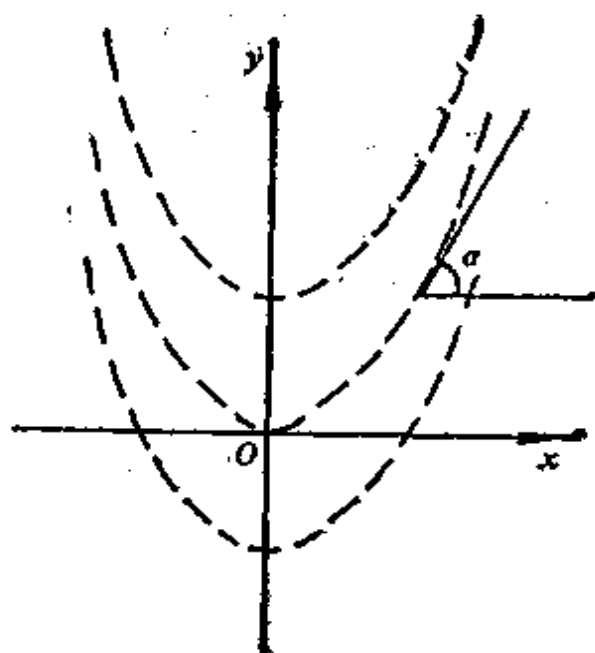


图12-9

全能作出这个方向场。即过平面上每一点 (x, y) 作一小线段，使它与 x 轴夹角的正切为 $\operatorname{tg} \alpha = y' = x$ (图12-9)。

定义 如果平面域 D 上的每一点，按照一定规律，对应一个确定的方向，则称 D 为一个方向场。

因此，微分方程 $y' = f(x, y)$ 的几何意义就清楚了。由方程 $y' = f(x, y)$ 可知，通过点 $M(x, y)$ 的积分曲线在该点切线的斜率，等于函数 $f(x, y)$ 在该点的值。这样，过 D 上每一点 (x, y) ，方程 $y' = f(x, y)$ 都定出一个方向与其对应（此方向不区分直线的两个方向）。即积分曲线在该点的切线方向。因此，方程 $y' = f(x, y)$ 在 D 上就定出一个方向场。

在应用中，往往不是根据积分曲线来作方向场。恰恰相反，而是根据微分方程本身作出方向场，当把方向场的方向作得足够密时就可以画出近似的积分曲线。为简便起见，常把方向场中方向相同的那些点找出来，这些点的轨迹（ $y' = C$ ）称为微分方程（或方向场）的等斜线。因此，等斜线的方程是

$$f(x, y) = C,$$

在同一条等斜线上各点处, 积分曲线的切线具有同一方向.

3 欧拉折线法

这是一种最简单的图解法和数值解法. 其基本思想是根据积分曲线在每一点的切线方向应与该方程 $y' = f(x, y)$ 的方向场在该点的方向一致.

设有初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & (1) \\ y|_{x=x_0} = y_0. & (2) \end{cases}$$

我们知道, 求解这个问题, 从几何上来看, 就是要求经过点 $M_0(x_0, y_0)$ 的一条积分曲线. 而求它的近似解, 就是要作通过 $M_0(x_0, y_0)$ 的一条近似积分曲线.

为简单起见, 只考虑在区间 (x_0, x) 上作出方程 (1) 的近似积分曲线.

作法如下: 先将 (x_0, x) 分为 n 等分, 分点为

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = x$$

再过各分点作纵线平行 y 轴, 为确定斜率方便起见, 在 x 轴上取 $PO=1$. 先确定 $M_0(x_0, y_0)$ 过 M_0 作斜率为 $y'_0 = f(x_0, y_0)$ 的直线段 (在 y 轴上取 $OA_0 = f(x_0, y_0)$, 则线段 PA_0 的斜率等于 $f(x_0, y_0)$). 它与第二条纵线交于 $M_1(x_1, y_1)$ 过 M_1 作斜率为 $y'_1 = f(x_1, y_1)$ 的直线段 (在 y 轴上取 $OA_1 = f(x_1, y_1)$), 则线段 PA_1 的斜率等于 $f(x_1, y_1)$. 它与第三条纵线交于 M_2 , 如此继续作下去, 得到折线 $M_0M_1M_2 \cdots M_n$ (参图 12-10). 这条折线通过 $M_0(x_0, y_0)$, 且在折点处右端折线的斜率和微分方程 (1) 的方向场一致, 这种折线称为欧拉折线: 这就是由初值问题 (1)、(2) 所求的近似积分曲线. 可以证明, 当 n 无限增加时, 欧拉折线趋向积分曲线.

若将以上方法用解析式表达, 就得到下面的数值解法.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2x + y \\ y|_{x=0} = 1. \end{cases}$$

当 $x=0.5$ 时, 函数 y 的近似值 (取 $h=0.1$).

解 这方程是一阶线性方程. 可求解析解. 这里只作为例题, 说明欧拉折线法的计算步骤.

可列表计算:

k	x_k	y_k	$y_k' = 2x_k + y_k$
0	0.0	1.0000	1.0000
1	0.1	1.1000	1.3000
2	0.2	1.2300	1.6300
3	0.3	1.3930	1.9930
4	0.4	1.5923	2.3923
5	0.5	1.8315	

说明: 表中第一行数值是 $x_0 = 0$, $y_0 = 1.0000$. 于是, $y_0' = 2x_0 + y_0 = 1.0000$. 第二行数值是 $x_1 = x_0 + h = 0.1$, $y_1 = y_0 + h y_0' = 1.1000$, $y_1' = 2x_1 + y_1 = 1.3000$. 如此继续下去, 最后, 得到方程近似解数值解

$$y|_{x=0.5} \approx 1.8315.$$

欧拉折线法, 虽然方法简便, 但一般离初值越远, 相对的绝对误差就越大. 而在实用上, 往往会因误差较大而受到限制.

另外, 还有精度较高、实用价值较大的方法, 如龙格-库塔法等. 读者可参阅有关计算方法书籍.

§ 3 可降阶的高阶微分方程

对于一般 n 阶微分方程

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0, \quad (3.1)$$

本节只讨论最高阶导数已解出的几种特殊类型的方程, 它们都是通

过逐步降阶，最后化为一阶微分方程，因此又称为可降阶的高阶微分方程。

高阶微分方程的定解条件，除初始条件外，还有其他的条件。如对二阶微分方程而言，可以给出在两个点的未知函数值： $y|_{x=x_0}=y_0$ ， $y|_{x=x_1}=y_1$ ，用来确定方程的特解。这种条件称为边界条件。由方程和边界条件构成边值问题。

一 $y^{(n)}=f(x)$ 型

微分方程

$$y^{(n)}=f(x) \quad (3.2)$$

是 n 阶方程。右端是 x 的已知连续函数。

这类方程通过 n 次积分，就可得到通解。它的解法是：逐次积分，依次得，

$$y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int \left[\int f(x) dx \right] dx + C_1 x + C_2,$$

.....

依次进行，积分 n 次，便得到方程(3.2)的含有 n 个任意常数的通解。

例1 解方程 $y^{(4)}=\sin x+x$

解 逐次积分四次，得

$$y''' = -\cos x + \frac{x^2}{2} + C_1,$$

$$y'' = -\sin x + \frac{x^3}{3!} + C_1 x + C_2,$$

$$y' = \cos x + \frac{x^4}{4!} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3,$$

$$y = \sin x + \frac{x^5}{5!} + C_1 \frac{x^3}{3!} + C_2 \frac{x^2}{2!} + C_3 + C_4$$

即
$$y = \sin x + \frac{x^5}{5!} + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4.$$

二 $y'' = f(x, y')$ 型

微分方程

$$y'' = f(x, y'), \quad (3.3)$$

其右端不显含未知函数 y .

这类方程. 只要作变量替换 $y' = P$, $y'' = \frac{dP}{dx} = P'$, 代入方程, 就可将方程(3.3)降为新未知函数 P 与自变量 x 的一阶微分方程

$$P' = f(x, P).$$

设其通解为

$$P = \varphi(x, C_1),$$

由于 $P = \frac{dy}{dx}$, 故可得到一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, C_1),$$

分离变量, 再积分, 即可得原方程(3.3)的通解

$$y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2.$$

例2 解方程 $xy'' = y' \ln y'$.

解 所给方程是 $y'' = f(x, y')$ 型.

设 $y' = P$, 有 $y'' = \frac{dP}{dx}$, 代入方程, 化为

$$x \frac{dP}{dx} = P \ln P,$$

$$\frac{dP}{P \ln P} = \frac{dx}{x},$$

积分得

$$\begin{aligned}\ln(\ln P) &= \ln x + \ln C_1 = \ln C_1 x, \\ \ln P &= C_1 x, \quad P = e^{C_1 x}.\end{aligned}$$

还原变量

$$y' = e^{C_1 x}.$$

故原方程通解为

$$y = -\frac{1}{C_1} e^{C_1 x} + C_2.$$

三 $y'' = f(y, y')$ 型

微分方程

$$y'' = f(y, y'), \quad (3.4)$$

其右端不显含自变量 x .

这类方程仍可通过变量置换使其降为一阶方程.

$$\text{设 } y' = P, \text{ 则有 } y'' = \frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = P \frac{dP}{dy}.$$

代入方程(3.4), 原方程降为新未知函数 P 与 y 的一阶方程, 即

$$P \frac{dP}{dy} = f(y, P).$$

若能求出这方程通解 $P = \psi(y, C)$

再由 $P = y'$ 得

$$\frac{dy}{\psi(y, C_1)} = dx.$$

对方程两边进行积分, 即得原方程(3.4)的通积分.

$$\int \frac{dy}{\psi(y, C_1)} = x + C_2.$$

例3 解方程 $1 + (y')^2 = 2yy''$.

解 所给方程是 $y'' = f(y, y')$ 型.

设 $y' = P$, $y'' = P \frac{dP}{dy}$, 代入方程, 得

$$1 + P^2 = 2yP \frac{dP}{dy},$$

$$\frac{2P dP}{1 + P^2} = \frac{dy}{y}.$$

对方程两边进行积分, 得

$$\ln(1 + P^2) = \ln y + \ln C_1,$$

$$1 + P^2 = C_1 y.$$

还原变量 $P = \frac{dy}{dx}$, 得

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = C_1 y,$$

$$\frac{dy}{\pm \sqrt{C_1 y - 1}} = dx,$$

$$\pm \frac{2}{C_1} \sqrt{C_1 y - 1} = x + C_2,$$

化简, 得原方程通积分

$$\frac{4}{C_1^2} (C_1 y - 1) = (x + C_2)^2.$$

四 可降阶的高阶微分方程应用举例

例 4 设有单位质量的质点 Q , 在 Ox 轴上运动, 受到一周期性变力 $F = -A\omega^2 \sin \omega t$ 的作用, 其中 A 、 ω 均为常数, 若初始条件是 $x|_{t=0} = 0$, $\frac{dx}{dt}|_{t=0} = A\omega$, 试求运动方程.

解 根据牛顿第二定律: $F = ma$ (这里 $m = 1$) 得微分方程.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin \omega t.$$

$$T \sin \alpha = \rho s, \quad T \cos \alpha = H,$$

两式相除, 得

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\rho}{H} s,$$

即

$$y' = \frac{\rho}{H} s.$$

为消去弧长 s , 两端对 x 求导, 再由弧微分公式, 得

$$y'' = \frac{\rho}{H} \frac{ds}{dx} = \frac{\rho}{H} \sqrt{1 + y'^2}.$$

令 $\frac{H}{\rho} = a$ (在图 12-11 的坐标系中, 取 $y|_{x=0} = a$) 知曲线方程应满足初值问题

$$\begin{cases} y'' = \frac{1}{a} \sqrt{1 + y'^2}, \\ y|_{x=0} = a, \quad y'|_{x=0} = 0. \end{cases}$$

此方程为 $y'' = f(x, y')$ 型. 设 $y' = P$, $y'' = P'$, 代入方程, 得

$$P' = \frac{1}{a} \sqrt{1 + P^2},$$

即

$$\frac{dP}{\sqrt{1 + P^2}} = \frac{1}{a} dx.$$

积分, 得

$$\ln(P + \sqrt{1 + P^2}) = \frac{x}{a} + C_1.$$

为计算方便, 可在求解过程中, 先代入初始条件, 由于 $y'|_{x=0} = P|_{x=0} = 0$, 得 $C_1 = 0$. 有

$$P + \sqrt{1 + P^2} = e^{\frac{x}{a}},$$

由此可得

$$P = y' = \frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{2}.$$

积分, 得方程通解

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) + C_2.$$

代入另一初始条件 $y|_{x=0} = a$, 得 $C_2 = 0$. 于是, 所求曲线方程为

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right),$$

称此曲线为悬链线.

§ 4 线性微分方程解的结构

在自然科学和工程技术中, 所遇到的微分方程很多是线性微分方程, 即未知函数及其各阶导数都是一次的. 前面已讨论过一阶线性方程. 本节进一步讨论高阶线性方程.

一般地, n 阶线性方程的一般形式为

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + P_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = f(x), \quad (4.1)$$

其中 $P_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 及 $f(x)$ 皆为已知连续函数. $f(x)$ 称为线性方程的自由项. 若方程 (4.1) 中 $f(x) \equiv 0$, 即自由项为零的线性方程, 称为线性齐次方程.

若 $f(x) \neq 0$ 则称方程 (4.1) 为线性非齐次方程. 特别, 方程

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + P_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = 0, \quad (4.2)$$

称为与线性非齐次方程 (4.1) 对应的线性齐次方程.

如果 n 阶线性方程 (4.1) 的系数 $P_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 皆为常数 p_i ($i = 1, 2, \dots, n$), 该方程称为 n 阶常系数线性

方程. 否则称为 n 阶变系数线性方程.

为了求线性微分方程的解, 需要研究线性方程解的性质, 以确定线性方程解的结构, 这样, 为求解线性微分方程奠定理论基础及求解的依据.

下面以二阶线性微分方程为例, 讨论其解的性质与结构, 所得结论皆可推广到高阶线性方程.

一 线性齐次微分方程解的结构

对于二阶线性齐次微分方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \quad (4.3)$$

其解具有什么性质? 又如何根据解的性质得到方程 (4.3) 的通解? 下面分别由定理回答这些问题.

定理 1 如果函数 y_1 与 y_2 是二阶线性齐次方程 (4.3) 的两个解, 则

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad (4.4)$$

也是方程 (4.3) 的解. 其中 C_1, C_2 是任意常数.

证明 将函数 (4.4) 代入方程 (4.3) 左端, 得

$$\begin{aligned} & (C_1 y_1' + C_2 y_2') + P(x)(C_1 y_1' + C_2 y_2') + Q(x)(C_1 y_1 + C_2 y_2) \\ &= C_1 (y_1' + P(x)y_1' + Q(x)y_1) + C_2 (y_2' + P(x)y_2' \\ & \quad + Q(x)y_2), \end{aligned}$$

由于 y_1, y_2 是方程 (4.3) 的解, 因而上式等于零, 所以 $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ 是方程 (4.3) 的解. 证毕

线性齐次方程解的这个性质, 称为解的叠加性. 说明线性齐次微分方程的解具有叠加性.

叠加起来的解 (4.4), 从形式上看, 含有 C_1, C_2 两个任意常数, 但它不一定是方程 (4.3) 的通解. 例如设 y_1 是方程 (4.3) 的一个解, 若 $y_2 = 2y_1$ 也是 (4.3) 的解. 将这两个解叠加成 (4.4) 式的解 $y = C_1 y_1 + 2C_2 y_1 = C y_1$ (其中 $C = C_1 + 2C_2$), 这显然不是方程 (4.3) 的通解. 那么在什么情况下 (4.4) 式才是方程 (4.3) 的通解呢? 要解决这个问题, 需要先引入一个新的概念,

即所谓函数的线性相关与线性无关的概念.

定义 设 y_1, y_2, \dots, y_n 是定义在区间 (a, b) 内的 n 个函数, 如果存在 n 个不全为 0 的常数 k_1, k_2, \dots, k_n , 对任何 $x \in (a, b)$ 恒有

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 + \dots + k_n y_n = 0 \quad (1)$$

成立, 那末这 n 个函数称为在区间 (a, b) 内线性相关. 如果 (1) 式当且仅当 $k_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 全为零时成立, 那么这 n 个函数称为在区间 (a, b) 内线性无关 (或称线性独立).

如 $1, \cos x, \sin^2 \frac{x}{2}$ 在整个数轴上线性相关. 因为取 $k_1 = \frac{1}{2}$,

$k_2 = -\frac{1}{2}, k_3 = -1$, 就有恒等式

$$\frac{1 - \cos x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 0$$

成立. 又如 e^{2x} 与 e^{3x} 在任何区间上线性无关. 事实上, 如果它们线性相关, 则有不全为零的 k_1, k_2 存在, 使得

$$k_1 e^{2x} + k_2 e^{3x} = 0.$$

不妨设 $k_1 \neq 0$, 则有 $\frac{e^{2x}}{e^{3x}} = -\frac{k_2}{k_1}$, 而这是不可能的. 所以 e^{2x} 与 e^{3x} 线性无关.

不难推出, 判定两个函数在某区间上是否线性无关, 可简化为考查两个函数的比值是否等于常数. 若两个函数比值不等于常数, 则这两个函数线性无关, 否则, 它们线性相关.

有了函数线性无关的概念后, 就可以得到二阶线性齐次方程 (4.3) 的通解结构定理.

定理 2 如果 y_1, y_2 是二阶线性齐次方程 (4.3) 的两个线性无关的特解, 则

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad (C_1, C_2 \text{ 是独立的任意常数}) \quad (4.5)$$

就是方程(4.3)的通解.

证明略.

如二阶线性齐次方程 $y'' - 5y' + 6y = 0$ (这里 $P(x) = -5$, $Q(x) = 6$), 容易验证 $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{3x}$ 是方程的解. 又因为 $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{2x}}{e^{3x}} \neq \text{常数}$, 即它们是线性无关的. 因此, 根据定理2, 该方程的通解是 $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

以上二定理给出了二阶线性齐次方程解的结构, 从而, 可根据定理, 有针对性地选取两个线性无关的特解, 再叠加即得二阶线性齐次方程的通解. 类推, 可得到 n 阶线性齐次方程解的结构.

二 线性非齐次微分方程解的结构

下面再以二阶线性非齐次微分方程为例, 讨论其通解的结构. 所得结论, 仍可推广到 n 阶线性非齐次微分方程.

定理3 设 y^* 是二阶线性非齐次微分方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad (4.6)$$

的一个特解. 而 Y 是方程(4.6)对应的齐次微分方程的通解. 则

$$y = y^* + Y \quad (4.7)$$

是二阶线性非齐次微分方程(4.6)的通解.

证明 将(4.7)式代入方程(4.6)左端, 得

$$\begin{aligned} & (y^{*''} + Y'') + P(x)(y^{*'} + Y') + Q(x)(y^* + Y) \\ &= (y^{*''} + P(x)y^{*'} + Q(x)y^*) + (Y'' + P(x)Y' + Q(x)Y) \end{aligned}$$

由于 y^* 是方程(4.6)的解, Y 是方程(4.3)的解. 可知上式第一个括号内的表达式等于 $f(x)$, 第二个括号等于零. 这样 $y = y^* + Y$ 代入方程(4.6), 使方程成为恒等式, 故(4.7)式是方程(4.6)的解.

又由于方程(4.6)对应的齐次方程(4.3)的通解 $Y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ 中含有两个独立的任意常数, 所以, $y = y^* + Y$ 中也含有两个

任意常数, 从而它就是二阶线性非齐次方程的通解. 证毕.

如方程 $y'' - 5y' + 6y = 6x$ 是二阶线性非齐次方程, 已知 $Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$ 是对应齐次方程的通解, 又易验证 $y^* = x + \frac{5}{6}$ 是该非齐次方程的一个特解. 因此

$$y = x + \frac{5}{6} + C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

是所给线性非齐次方程的通解.

线性非齐次方程(4.6)的特解, 有时需应用下述定理求得.

定理 4 设二阶线性非齐次方程(4.6)的自由项 $f(x)$ 是两个连续函数 $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$ 之和,

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x), \quad (4.8)$$

而 y_1^* 、 y_2^* 分别是方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x),$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$$

的特解, 则 $y^* = y_1^* + y_2^*$ 是方程(4.8)的特解.

证明 将 $y^* = y_1^* + y_2^*$ 代入方程(4.8)左端, 得

$$\begin{aligned} & (y_1^* + y_2^*)'' + P(x)(y_1^* + y_2^*)' + Q(x)(y_1^* + y_2^*) \\ &= (y_1^{*''} + P(x)y_1^{*'} + Q(x)y_1^*) \\ & \quad + (y_2^{*''} + P(x)y_2^{*'} + Q(x)y_2^*) \\ &= f_1(x) + f_2(x). \end{aligned}$$

因此, $y^* = y_1^* + y_2^*$ 是方程(4.8)的特解. 证毕.

§ 5 常系数线性微分方程

当线性微分方程中的系数都是常数时, 称为常系数线性微分方程. 此类方程应用广泛, 求解较简便, 常归结到求解代数方程. 下面着重讲二阶方程的情形, 高于二阶的情形可类推.

一 常系数线性齐次微分方程

设二阶常系数线性齐次方程为

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (5.1)$$

其中 p, q 皆为常数

欲求方程(5.1)通解. 由 § 4, 一中线性齐次方程解的结构定理已知, 方程(5.1)的通解为方程(5.1)的两个线性无关的特解的线性组合, 即通解为 $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, 其中 y_1, y_2 是方程(5.1)的两个线性无关的特解. 因此, 求方程(5.1)的通解关键是求其两个线性无关的特解.

通过对方程(5.1)的观查分析, 由于方程(5.1)系数为常数. 又因指数函数的各阶导数仍为指数函数. 因此可以设想方程有形如 $y = e^{rx}$ 的解, 再适当选取常数 r , 使其满足方程(5.1).

设方程(5.1)有解 $y = e^{rx}$, 其中 r 是待定的实数或复常数. 于是有①

$$\begin{aligned} y' &= re^{rx}, & y'' &= r^2 e^{rx}, \\ e^{rx}(r^2 + pr + q) &= 0. \end{aligned}$$

由于 $e^{rx} \neq 0$, 所以

$$r^2 + pr + q = 0, \quad (5.2)$$

由此可见, 只要 r 满足代数方程(5.2), 函数 $y = e^{rx}$ 就是线性齐次方程(5.1)的解. 这个代数方程(5.2)称为方程(5.1)的特征方程. 特征方程(5.2)的根称为方程(5.1)的特征根.

因此, 求解二阶常系数线性齐次方程的解, 可通过求特征方程(5.2)的根而得到. 下面根据特征根的不同情形, 给出方程(5.1)通解的不同形式.

(1) 特征方程有两个不相等的实根: $r_1 \neq r_2$. 这时 $y_1 = e^{r_1 x}$, $y_2 = e^{r_2 x}$ 是方程(5.1)的两个线性无关的特解(由于 $\frac{y_1}{y_2} = e^{(r_1 - r_2)x} \neq \text{常数}$) 因此, 线性齐次方程(5.1)通解为

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}. \quad (5.3)$$

①当 r 为复数 $a + ib$, x 为实数时, 导数公式 $\frac{d}{dx} e^{rx} = r e^{rx}$ 仍成立. 只需对欧拉公式 $e^{(a+ib)x} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$ 两端求导即可得出结论(规定 $[u(x) + iv(x)]' = u'(x) + iv'(x)$, 见本节第二段).

(2)特征方程有两个相等实根: $r_1=r_2$. 这时, 只得到方程(5.1)的一个特解 $y=e^{r_1x}$.

为求微分方程(5.1)通解, 还需求另一个与 y_1 线性无关的特解 y_2 . 即 $\frac{y_2}{y_1}=u(x)$ 这时可用常数变易法. 设 $y_2=u(x)e^{r_1x}$ (其中 $u(x)$ 是待定函数), 由于

$$y_2' = u'(x)e^{r_1x} + r_1u(x)e^{r_1x},$$

$$y_2'' = u''(x)e^{r_1x} + 2r_1u'(x)e^{r_1x} + r_1^2u(x)e^{r_1x},$$

代入方程(5.1), 并消去 e^{r_1x} , 得

$$u''(x) + (2r_1 + p)u'(x) + (r_1^2 + pr_1 + q)u(x) = 0.$$

注意到 r_1 是特征方程重根, 故有 $r_1^2 + pr_1 + q = 0$, $2r_1 + p = 0$, 故得

$$u''(x) = 0.$$

积分两次, 得

$$u(x) = C_1x + C_2.$$

为简便起见, 可取 $u(x) = x$ (令 $C_1 = 1$, $C_2 = 0$) 这样, 得到方程另一个解 $y_2 = xe^{r_1x}$, 它与 $y_1 = e^{r_1x}$ 线性无关, 故方程(5.1)通解为

$$y = e^{r_1x} (C_1 + C_2x). \quad (5.4)$$

(3)特征方程有共轭复根: $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$. 这时

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}, \quad y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}$$

是方程(5.1)的两个线性无关特解, 由于这种复函数形式的解使用不方便, 为了得出实函数形式的解, 利用欧拉公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

把 y_1, y_2 改写成

$$y_1 = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos\beta x + i\sin\beta x),$$

$$y_2 = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos\beta x - i\sin\beta x),$$

由于线性齐次方程的解具有叠加性, 知

$$\frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha x} \cos\beta x,$$

$$\frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

也是方程(5.1)的解, 且它们线性无关, 故方程(5.1)的通解为

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \quad (5.5)$$

综合上述, 求解二阶常系数线性齐次微分方程, 可转化为求解二次特征方程. 通过求微分方程的特征根, 可得二阶常系数线性齐次微分方程的通解, 这种方法称为特征根法.

下面概括一下特征根法的步骤, 以及通解的形式:

(1) 先写出二阶线性齐次方程的特征方程

$$r^2 + pr + q = 0,$$

且求出特征根 r_1, r_2 .

(2) 根据特征根的不同情形, 相应得到方程(5.1)的通解. 列表如下:

特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 根 r_1, r_2	微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 通解
两个不等实根 $r_1 \neq r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
两个相等实根 $r_1 = r_2$	$y = e^{r_1 x} (C_1 + C_2 x)$
两个共轭复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

例1 求微分方程 $y'' - 3y' - 4y = 0$ 的通解.

解 所给方程的特征方程为

$$r^2 - 3r - 4 = 0,$$

其特征根 $r_1 = -1, r_2 = 4$, 即有两个不相等的实根. 因此, 所求方程的通解为

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}.$$

例2 求方程 $\frac{d^2 x}{dt^2} + 6 \frac{dx}{dt} + 9x = 0$, 满足初始条件

$x|_{t=0} = 1, \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0$ 的特解.

$x^{m-1}e^{\alpha x}$; 每对 m 重共轭复根 $\alpha \pm i\beta$, 对应方程 (5.6) $2m$ 个特解 $e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, \dots, x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$. 这样, 总共可得到方程 (5.6) 的 n 个线性无关的特解, 从而得到方程 (5.6) 的含有 n 个任意独立常数的通解.

例 4 求方程 $y^{(4)} - 6y''' + 12y'' - 8y' = 0$ 的通解.

解 特征方程为

$$r^4 - 6r^3 + 12r^2 - 8r = 0,$$

$$r(r-2)^3 = 0.$$

特征根 $r_1 = 0, r_2 = r_3 = r_4 = 2$. 方程线性无关的特解是 $y_1 = 1, y_2 = e^{2x}, y_3 = xe^{2x}, y_4 = x^2e^{2x}$. 故方程通解为

$$y = C_1 + e^{2x}(C_2 + C_3x + C_4x^2).$$

例 5 求方程 $y^{(5)} + y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0$ 的通解.

解 特征方程为

$$r^5 + r^4 + 2r^3 + 2r^2 + r + 1 = 0,$$

即
$$(r+1)(r^2+1)^2 = 0.$$

特征根 $r_1 = -1, r_2 = r_3 = i, r_4 = r_5 = -i$ (两重共轭复根), 对应方程五个线性无关特解, $y_1 = e^{-x}, y_2 = \cos x, y_3 = \sin x, y_4 = x\cos x, y_5 = x\sin x$. 故方程通解为

$$y = C_1e^{-x} + (C_2 + C_3x)\cos x + (C_4 + C_5x)\sin x.$$

二 常系数线性非齐次微分方程

考虑二阶常系数线性非齐次方程

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad (5.8)$$

其中 p, q 为常数, 自由项 $f(x)$ 是已知连续函数.

由 § 4 定理 3 可知, 非齐次方程的通解可由对应的齐次方程通解与非齐次方程的一个特解组成. 而齐次方程通解, 利用特征根法已经解决. 所以这里只需要讨论二阶常系数线性非齐次方程特解 y^* 的求解方法.

在实用中, 方程 (5.8) 中的自由项 $f(x)$ 常见形式可归纳为以下两种情形

(1) $f(x) = P_n(x)e^{\lambda x}$. 其中 $P_n(x)$ 是 n 次多项式, λ 是常数.

(2) $f(x) = e^{\lambda x}(P_l(x)\cos\omega x + P_m(x)\sin\omega x)$, 其中 $P_l(x)$, $P_m(x)$ 依次为 l 次, m 次多项式, λ, ω 为常数.

对于常系数线性非齐次方程自由项 $f(x)$ 是以上两种特殊形式时, 可以根据所给方程设出特定形式的特解, 然后, 利用待定系数法确定特解中的有关系数, 即可得常系数线性非齐次方程的特解.

下面分别介绍非齐次方程自由项 $f(x)$ 为上述两种形式时, 特解 y^* 的求法.

1 $f(x) = P_n(x)e^{\lambda x}$ 型

对于二阶常系数线性非齐次方程

$$y'' + py' + qy = P_n(x)e^{\lambda x}, \quad (5.9)$$

其特解 y^* 是什么形式的函数, 才能满足方程 (5.9) 呢? 由于方程 (5.9) 的自由项是多项式 $P_n(x)$ 与指数函数 $e^{\lambda x}$ 的乘积. 又知多项式与指数函数之积的导数仍为同类函数. 因此, 可以推测方程 (5.9) 有形如 $y^* = Q(x)e^{\lambda x}$ (其中 $Q(x)$ 是某个多项式) 的特解. 问题是如何选取适当的多项式 $Q(x)$.

设方程 (5.9) 特解为 $y^* = Q(x)e^{\lambda x}$, 其中 $Q(x)$ 是待定多项式, 由于

$$y^{*'} = Q'(x)e^{\lambda x} + \lambda Q(x)e^{\lambda x}$$

$$y^{*''} = Q''(x)e^{\lambda x} + 2\lambda Q'(x)e^{\lambda x} + \lambda^2 Q(x)e^{\lambda x}$$

代入方程 (5.9), 且消去 $e^{\lambda x}$, 得

$$Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x) = P_n(x) \quad (1)$$

这个等式两端都是多项式, 要使其恒等, 必须同次幂系数相等. 因此, 通过比较系数, 可确定 $Q(x)$ 的系数, 下面分三种情况讨论:

(1) 如果 λ 不是方程 (5.9) 相应齐次方程的特征根, 即有 $\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$, 那么由 (1) 式可以看出: 由于 $P_n(x)$ 是 n 次多项式, 要使 (1) 两端恒等, 则 $Q(x)$ 应是与 $P_n(x)$ 次数相等的 n 次完全多项式 $Q_n(x)$:

$$Q_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n. \quad (2)$$

因此, 方程(5.9)应具有形如 $y^* = Q_n(x)e^{\lambda x}$ 的特解. 其中 $Q_n(x)$ 是 n 次待定多项式.

(2) 如果 λ 是特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的单根, 即有 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, $2\lambda + p \neq 0$, 要使(1)式成为恒等式, 那末, $Q'(x)$ 应是 n 次多项式. 可取 $Q(x) = xQ_n(x)$. 因此, 方程(5.9)应具有形如 $y^* = xQ_n(x)e^{\lambda x}$ 的特解. 其中 $Q_n(x)$ 为 n 次待定多项式.

(3) 如果 λ 是特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的重根, 即有 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, $2\lambda + p = 0$, 要使(1)式成为恒等式, 那末, $Q''(x)$ 应是 n 次多项式. 可取 $Q(x) = x^2Q_n(x)$. 因此, 方程(5.9)应具有形如 $y^* = x^2Q_n(x)e^{\lambda x}$ 的特解. 其中 $Q_n(x)$ 为 n 次待定多项式.

综合上述, 我们有如下结论:

如果方程自由项 $f(x) = P_k(x)e^{\lambda x}$, 则方程(5.9)具有形如

$$y^* = x^k Q_n(x)e^{\lambda x} \quad (5.10)$$

的特解, 其中 $Q_n(x)$ 是与 $P_k(x)$ 同次的完全多项式, 而 k 的值按 λ 不是特征根, 是特征单根, 或是特征重根, 依次取 0, 1 或 2.

上述结论可推广到 n 阶常系数线性非齐次微分方程, 但要注意(5.10)式中 k 是特征方程含根 λ 的重复次数, (即若 λ 不是特征方程的根, k 取为零; 若 λ 是特征方程的 s 重根, k 取为 s).

例6 求方程 $y'' + y' + y = x^2 + 1$ 的一个特解.

解 这是二阶常系数线性非齐次方程. 且 $f(x) = P_k(x)e^{\lambda x}$, 其中 $P_k(x) = x^2 + 1$, $\lambda = 0$.

对应齐次方程的特征方程为

$$r^2 + r + 1 = 0,$$

由于 $\lambda = 0$ 不是特征根, 故设所给方程的特解为

$$y^* = ax^2 + bx + c, \quad (a, b, c \text{ 为待定系数}).$$

将 y^* 代入方程, 得

$$ax^2 + (2a + b)x + (2a + b + c) = x^2 + 1,$$

比较两端同次幂的系数, 得

$$\begin{cases} a = 1, \\ 2a + b = 0, \\ 2a + b + c = 1. \end{cases}$$

解得 $a = 1$, $b = -2$, $c = 1$. 所给方程特解为

$$y^* = x^2 - 2x + 1.$$

例7 求方程 $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$ 的通解.

解 所给方程是二阶常系数线性非齐次方程, 且 $f(x) = P_n(x)e^{\lambda x}$ 型, 其中 $P_n(x) = x$, $\lambda = 2$.

对应齐次方程的特征方程

$$r^2 - 5r + 6 = 0,$$

特征根 $r_1 = 2$, $r_2 = 3$. 于是对应齐次方程通解为

$$Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

由于 $\lambda = 2$ 是特征单根, 所以所给方程特解应设为

$$y^* = x(ax + b)e^{2x}. \quad (a, b \text{ 为待定系数})$$

代入原方程, 得

$$-2ax + 2a - b = x,$$

比较等式两端同次幂系数, 得

$$\begin{cases} -2a = 1, \\ 2a - b = 0. \end{cases}$$

解得 $a = -\frac{1}{2}$, $b = -1$. 得非齐次方程特解

$$y^* = x\left(-\frac{x}{2} - 1\right)e^{2x}.$$

从而, 所求的通解为

$$y = Y + y^* = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{2}(x^2 + 2x)e^{2x}.$$

例8 求解初值问题

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = e^x, \\ y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = 0. \end{cases}$$

解 方程为非齐次方程, 且 $f(x) = P_n(x)e^{\lambda x}$ 型, 这里 $P_n(x) = 1$, $\lambda = 1$.

对应齐次方程的特征方程为

$$r^2 - 2r + 1 = 0,$$

特征根 $r_1 = r_2 = 1$, 故对应齐次方程通解为

$$Y = e^x(C_1 + C_2 x).$$

由于 $\lambda = 1$ 是特征重根, 故可设非齐次方程的特解为

$$y^* = x^2 a e^x, \quad (a \text{ 为待定系数})$$

代入方程, 解得

$$2a = 1, \quad a = \frac{1}{2}.$$

非齐次方程特解为

$$y^* = \frac{x^2}{2} e^x.$$

故原方程通解为

$$y = Y + y^* = e^x(C_1 x + C_2) + \frac{x^2}{2} e^x.$$

再代入初始条件 $y|_{x=0} = 1$, 得 $C_2 = 1$, 对上式求导, 得

$$y' = e^x \left[\frac{x^2}{2} + (C_1 + 1)x + (C_1 + 1) \right]$$

再代入初始条件 $y'|_{x=0} = 0$, 得 $C_1 = -1$, 因此满足初值问题的特解为

$$y = e^x \left[\frac{x^2}{2} - x + 1 \right].$$

2 $f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + P_m(x) \sin \omega x]$ 型

当 $f(x)$ 中含有正弦或余弦因子时, 求特解一般是较复杂的. 在

工程技术中往往利用复数运算来简化求解过程。这里需要明确有关概念。

设 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是两个实值函数, 称 $F(x) = y_1(x) + iy_2(x)$ 为复值函数。若 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 在点 x 可导, 则称 $F(x)$ 在点 x 可导, 且定义

$$F'(x) = (y_1(x) + iy_2(x))' = y_1'(x) + iy_2'(x).$$

如果复值函数 $F(x)$ 代入微分方程, 能使方程成为恒等式, 则称 $F(x)$ 为该方程的复值解。

根据以上定义, 不难得出以下定理。

定理 5 如果函数 $y = y_1(x) \pm iy_2(x)$ 是方程

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = f_1(x) \pm if_2(x) \quad (1)$$

的复值解, 则 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 分别是方程

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = f_1(x) \quad (2)$$

$$\text{与} \quad y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = f_2(x) \quad (3)$$

的解。

证明 将 $y = y_1(x) \pm iy_2(x)$ 代入方程 (1)

$$\begin{aligned} & (y_1(x) \pm iy_2(x))'' + P_1(x)[y_1(x) \pm iy_2(x)]' \\ & \quad + P_2(x)[y_1(x) \pm iy_2(x)] \\ &= (y_1'(x) + P_1(x)y_1'(x) + P_2(x)y_1(x)) \\ & \quad \pm i(y_2'(x) + P_1(x)y_2'(x) + P_2(x)y_2(x)) \\ &= f_1(x) \pm if_2(x). \end{aligned}$$

由于, 两个复数相等, 必须且只须它们的实部和虚部分别相等。故有

$$y_1'(x) + P_1(x)y_1'(x) + P_2(x)y_1(x) = f_1(x),$$

$$y_2'(x) + P_1(x)y_2'(x) + P_2(x)y_2(x) = f_2(x),$$

即 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 分别是方程 (2) 与 (3) 的解。证毕。

对于二阶常系数线性非齐次方程

$$y'' + py' + qy = e^{ix}(P_l(x)\cos\omega x + P_m(x)\sin\omega x), \quad (5.11)$$

为简化求解运算, 可将其自由项化为复数形式, 从而, 统一到自由

项为 $f(x) = P_n(x)e^{i\omega x}$ 型. 为此

令 $Q_n(x) = P_l(x) - iP_m(x)$, (其中 $n = \max\{l, m\}$),

则有

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{Re}\{Q_n(x)e^{(1+i\omega)x}\} \\ &= e^{i\omega x}(P_l(x)\cos\omega x + P_m(x)\sin\omega x). \end{aligned}$$

因此, 根据定理 5 求解方程 (5.11) 的特解 y^* , 就等价于求解方程

$$y'' + py' + qy = Q_n(x)e^{(1+i\omega)x} \quad (5.12)$$

的复值特解 Y^* 的实部, 即原方程 (5.11) 的特解 $y^* = \operatorname{Re}Y^*$.

事实上, 令方程 (5.12) 的复值解为

$$Y^* = Z(x)e^{(1+i\omega)x} = Z(x)e^{rx}, \quad (r = \lambda + i\omega),$$

其中 $Z(x)$ 为待定的复值多项式. 将 Y^* 代入方程 (5.12), 且消去 e^{rx} , 得

$$Z''(x) + (2r + p)Z'(x) + (r^2 + pr + q)Z(x) = Q_n(x) \quad (1)$$

与前段同样分析:

若 $r = \lambda + i\omega$ 不是特征根, 则 $r^2 + pr + q \neq 0$. 欲使 (1) 式成立, 只需多项式 $Z(x)$ 的次数与 $Q_n(x)$ 相同, 即方程 (5.12) 的复值特解形式为 $Y^* = Z_n(x)e^{(1+i\omega)x}$.

其中 $Z_n(x)$ 为 n 次复值多项式.

若 $r = \lambda + i\omega$ 是特征根, 且不可能是重根. 这时 $r^2 + pr + q = 0$, 而 $2r + p \neq 0$. 于是, 可取多项式 $Z(x) = xZ_n(x)$. 其中 $Z_n(x)$ 为 n 次复值多项式. 而复值特解形式为 $Y^* = xZ_n(x)e^{(1+i\omega)x}$.

综合上述, 求解二阶常系数线性非齐次方程

$$y'' + py' + qy = e^{i\omega x}(P_l(x)\cos\omega x + P_m(x)\sin\omega x)$$

的特解 y^* . 可转化为先求解方程

$$y'' + py' + qy = Q_n(x)e^{(1+i\omega)x} = Q_n(x)e^{rx} \quad (r = \lambda + i\omega)$$

的复值特解 Y^* (其中 $Q_n(x) = P_l(x) - iP_m(x)$, $n = \max\{l, m\}$), 而 Y^* 是具有形式

$$Y^* = x^k Z_n(x)e^{(1+i\omega)x}$$

的特解. 其中 $Z_n(x)$ 是 n 次复值待定多项式, k 的取值按 $\lambda + i\omega$ 不

是特征根, 是特征根依次取 0, 1.

然后, 根据定理 5, 可得原方程的特解

$$y^* = \operatorname{Re} Y^*.$$

上述结论, 可推广到 n 阶常系数线性非齐次方程. 只需注意到 (5.13) 式中 k 是特征根 $(\lambda + i\omega)$ 的重数.

特别, 若方程自由项只含正弦或余弦因子时, 即 $f(x) = e^{i\omega x} P_n(x) \cos \omega x$ 或 $f(x) = e^{i\omega x} P_n(x) \sin \omega x$ 时, ($P_n(x)$ 是 n 次多项式) 可直接求方程

$$y'' + py' + qy = P_n(x) e^{(1+i\omega)x}$$

的特解. $Y^* = y_1^* + i y_2^*$. 根据定理 5, y_1^* 就是方程

$$y'' + py' + qy = e^{i\omega x} P_n(x) \cos \omega x$$

的特解. y_2^* 就是方程

$$y'' + py' + qy = e^{i\omega x} P_n(x) \sin \omega x$$

的特解.

例 9 求方程 $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$ 的特解.

解 先求方程 $y'' - 2y' + 5y = e^{(1+2i)x}$ 的特解.

特征方程为 $r^2 - 2r + 5 = 0$.

得特征根 $r_{1,2} = 1 \pm 2i$.

由于 $1 + 2i$ 是特征根, 设方程特解为

$$Y^* = x a e^{(1+2i)x}, \quad (a \text{ 为待定复数}).$$

求导后, 代入方程, 并化简, 得 (这里记 $r = 1 + 2i$)

$$(r^2 - 2r + 5)ax + 2a(r - 1) = 1,$$

即 $2a(1 + 2i - 1) = 1$,

解得
$$a = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}.$$

得特解

$$Y^* = -\frac{i}{4} x e^{(1+2i)x} = -\frac{i}{4} x e^x (\cos 2x + i \sin 2x).$$

故原方程特解

$$y^* = \operatorname{Re} Y^* = \frac{x}{4} e^{\sin 2x}.$$

例10 求方程 $y'' + 2y' + y = x \sin x$ 的通解.

解 与所给方程对应的特征方程为

$$r^2 + 2r + 1 = 0,$$

得特征根 $r_1 = r_2 = -1$,

故对应齐次方程通解为

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{-x}.$$

再求方程 $y'' + 2y' + y = x e^{ix}$ 的特解. 由于 i 不是特征根, 故设方程特解为

$$Y^* = (ax + b) e^{ix}, \quad (a, b \text{ 为待定复数}).$$

求导数, 代入方程, 并化简, 得

$$2aix + 2a + 2(a + b)i = x,$$

比较系数, 得

$$\begin{cases} 2ai = 1, \\ 2a + 2(a + b)i = 0. \end{cases}$$

解得 $a = -\frac{i}{2}, \quad b = \frac{1+i}{2}.$

得特解

$$\begin{aligned} Y^* &= \left(-\frac{i}{2} x + \frac{1+i}{2} \right) e^{ix} \\ &= \left[\left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) i + \frac{1}{2} \right] (\cos x + i \sin x) \\ &= \left[\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \right) \sin x + \frac{1}{2} \cos x \right] + i \left[\left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) \cos x \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sin x \right]. \end{aligned}$$

$$r^2 + 2\beta r + \omega_0^2 = 0,$$

特征根为

$$r_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}.$$

微分方程的通解有三种情形:

(1) 当 $0 < \beta < \omega_0$ 时, 特征根是 $r_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ 微分方程的通解为

$$\begin{aligned} x &= e^{-\beta t} (C_1 \cos \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + C_2 \sin \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t), \\ &= A e^{-\beta t} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \varphi), \end{aligned}$$

其中 $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\varphi = \arctg \frac{C_1}{C_2}$, 且 A, φ 是任意常数. 可由初始条件加以确定, 它的图形大致如图(12-12)所示. 其振幅随时间增长迅速减小, 峰值周期是 $\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$.

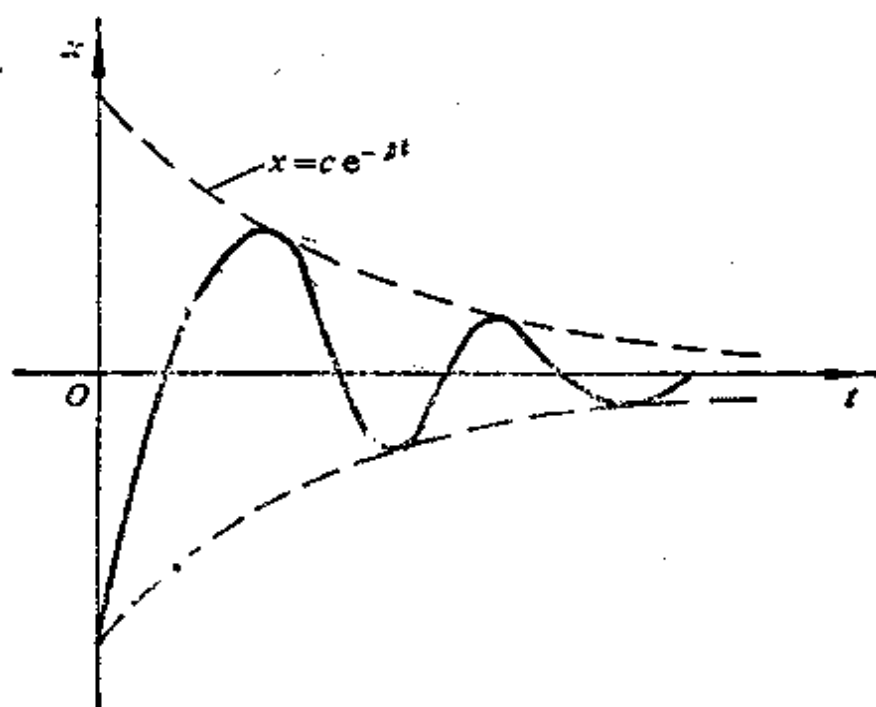


图12-12

(2) 当 $\beta = \omega_0$ 时, 特征根 $r_{1,2} = -\beta$, 方程通解为

$$x = (C_1 + C_2 t) e^{-\beta t}.$$

由于 $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\beta t} = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t e^{-\beta t} = 0$, 说明随时间增长 $x(t)$ 趋于零. 其图形如图(12-13)所示.

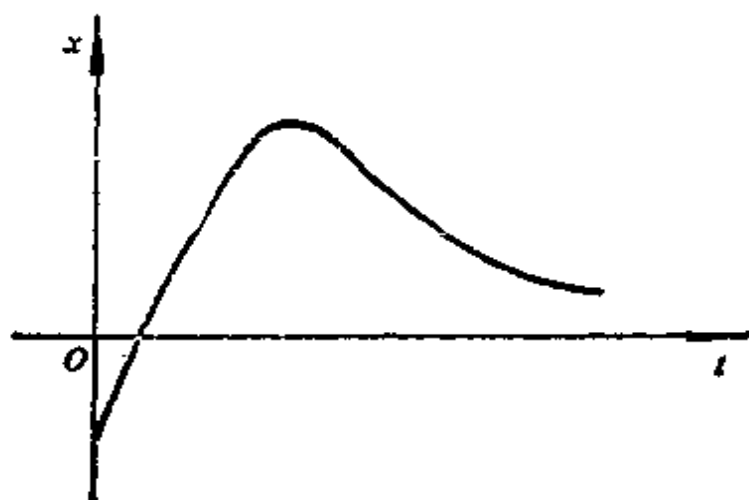


图12-13

(3) 当 $0 < \omega_0 < \beta$ 时, 特征根为 $r_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$, 通解为

$$x = C_1 e^{(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}.$$

由于 $\beta > \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ 每一项都是负指数, 将随时间 t 无限增长而趋于零. 与情形(2)类似, $x(t)$ 至多有一个极值, 而迅速趋于平衡位置, 或单调地恢复平衡位置.

例12 设振动系统除受上例11的阻力外, 还受周期外力 $f_0 = H \sin \omega t$ 作用, 求此系统的运动方程.

解 结合例11, 可建立微分方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = h \sin \omega t,$$

其中 $h = \frac{H}{m}$.

下面分别情况, 给出方程的解, 并扼要说明其力学意义.

(1) 若 $\beta = 0$ (无阻尼) 则对应齐次方程通解

$$\begin{aligned} x &= C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t \\ &= A \sin(\omega_0 t + \varphi), \end{aligned}$$

其中 $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\varphi = \arctan \frac{C_1}{C_2}$.

如果 $\omega \neq \omega_0$, 用待定系数法可求得特解

$$x^* = \frac{h}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t,$$

故方程通解为

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{h}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t.$$

可见, 当外力的频率 ω 接近系统固有频率 ω_0 时, 即使 h 很小, $\frac{h}{\omega_0^2 - \omega^2}$ 也会很大. 从而上式第二项简谐振动的振幅很大, 因此, 外力对振动影响是显著的.

如果 $\omega = \omega_0$, 用待定系数法求得特解

$$x^* = -\frac{h}{2\omega_0} t \cos \omega_0 t,$$

故通解为

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi) - \frac{h}{2\omega_0} t \cos \omega_0 t.$$

第二项的振幅随时间增长而无限增大, 这就产生共振现象.

(2) 若 $\beta \neq 0$, 则 ωi 不是特征根. 用待定系数法可求得特解

$$x^* = \frac{h}{\sqrt{4\beta^2 \omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \sin(\omega t + \varphi)$$

其中 $\varphi = \arctan \frac{-2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$. 因此

当 $\beta < \omega_0$ 时, 通解是

$$x = e^{-\beta t} (C_1 \cos \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + C_2 \sin \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t) + \frac{h}{\sqrt{4\beta^2 \omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \sin(\omega t + \varphi),$$

当 $\beta = \omega_0$ 时, 通解是

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{-\beta t} + \frac{h}{\sqrt{4\beta^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \sin(\omega t + \varphi).$$

当 $\omega_0 < \beta$ 时, 通解是

$$x = C_1 e^{(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + \frac{h}{\sqrt{4\beta^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \sin(\omega t + \varphi).$$

以上三种情形, 都是随时间增长, 系统的固有振动(齐次方程通解)迅速减弱, 而外力越来越占主要地位. 经相当长时间后, 可认为系统在外力推动下做与外力同频率的振动.

例13 $R-L-C$ 电路的电磁振荡问题.

图(12-14)是 $R-L-C$ 电路图, 其中 L 为电感, C 为电容, R 为电阻, 设电容器已充电, 则当开关 K 合上后, 电容器放电, 电路中有电流 i 通过, 产生电磁振荡, 试求电容器两极板间电压 u_c 随时间 t 变化规律.

解 据回路电压定律可知, 电容、电感、电阻上的电压 u_c , u_L , u_R 应有如下关系:

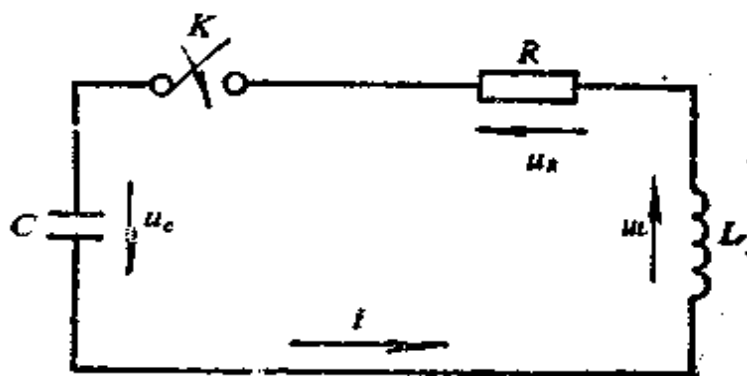


图12-14

$$u_L + u_R + u_C = 0.$$

由于 $i = C \frac{du_c}{dt}$, 则

$$u_R = Ri = RC \frac{du_C}{dt} \quad u_L = L \frac{di}{dt} = LC \frac{d^2 u_C}{dt^2}$$

代入上式，得

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0,$$

这就是电压 u_C 满足的二阶线性微分方程，将其改写成

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0,$$

若令 $\frac{R}{2L} = \delta$, $\frac{1}{LC} = \omega^2$, 方程变为

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + 2\delta \frac{du_C}{dt} + \omega^2 u_C = 0.$$

根据系数的不同情况，分三种情形讨论：

(1) 若 $\delta^2 - \omega^2 > 0$ ，即 $\delta > \omega$ (即当 $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时) 通解

$$u_C = C_1 e^{-(\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2})t} + C_2 e^{-(\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2})t}$$

这说明当电阻很大时，电容器发生非振荡性放电过程，电压 u_C 波形如图(12-15)。

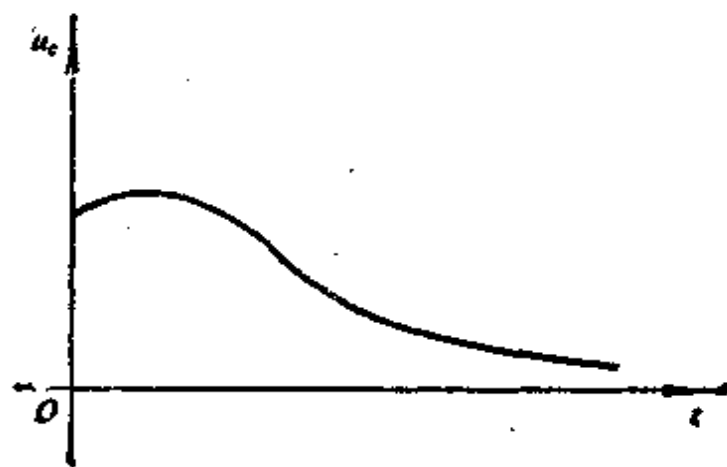


图12-15

(2) 若 $\delta = \omega$ 时 (即当 $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时, 称临界电阻), 通解为

$$u_C = (C_1 + C_2 t) e^{-\delta t}.$$

这说明在临界电阻情况下, 电容器放电过程仍是非振荡的, 其电压 u_C 的波形与上图相似。

(3) 若 $\delta < \omega$ 时 (即 $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时), 通解为

$$u_C = A e^{-\delta t} \sin(\sqrt{\omega^2 - \delta^2} t + \varphi).$$

这说明在小电阻情况下, 电容器产生振荡性放电过程, 但振荡逐渐减小, 如图(12-16)。

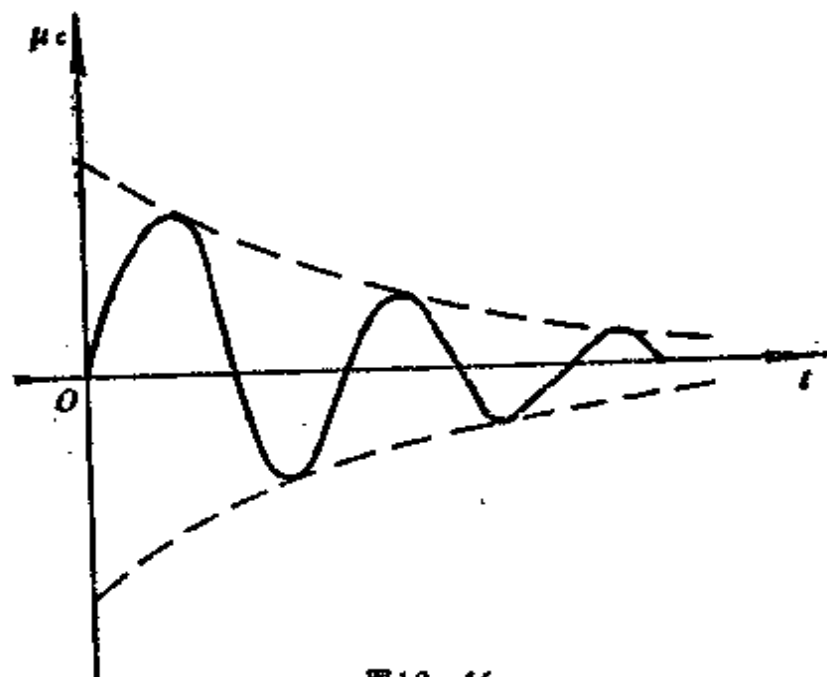


图12-16

若电阻小到可忽略不计, 则

$$u_C = A \sin(\omega t + \varphi).$$

这是等幅振荡放电, 是理想情形, 此时频率 (固有频率) 为

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

如果，电容器原来没有充电，将电路接一直流电源 E （或交流电源 $E(t)=U\sin\omega_0 t$ ），如图(12-17)，那末，当开关 K 合上后，电源向电容器充电。此时电路中有电流通过，产生电磁振荡，按上面分析方法，可得电压 u_c 满足的微分方程

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = E,$$

$$\left(LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = U \sin \omega_0 t \right).$$

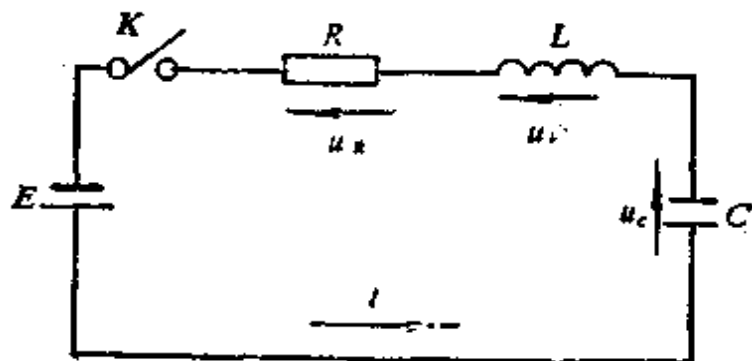


图12-17

这两个线性非齐次方程也易求解，并可相应地给出物理解释。

由上可见，机械振动与电磁振荡虽是两个不同类型的问题，但可得到同类型的微分方程。基于这种类似，常建立力学系统的“电的模型”（电模拟）因电路装配方便，且易测量。

§ 6 变系数线性微分方程

在前一节中，对于常系数线性微分方程的求解，在一定条件下较完满地解决，但还有一定的局限性。如若线性方程的自由项 $f(x)$ 不属于§5, 二中给出的两种类型如何求解？又如线性微分方程的系数是变系数时应如何求解？这一节里，将介绍对一般二阶线性方程常用的方法——常数变易法，以扩充求解的方法。另外，对满足一定

条件的简单方程, 给出求解的观察法. 最后, 对常见的特殊的变系数方程——欧拉方程, 给出求解方法.

一 二阶变系数线性齐次方程

对于二阶变系数线性齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \quad (6.1)$$

通解的结构, 在 § 4 中, 定理 2 已经给出, 问题的关键要求出方程 (6.1) 的两个线性无关的特解. 关于特解的求法, 在简单的情况下, 可以利用观察法. 观察法的根据是: 一方面是方程系数的特点, 另一方面是有关函数的性质. 然后综合分析加以确定.

下面举例说明.

例 1 求解方程 $(x-1)y'' - xy' + y = 0$.

解 根据指数函数 e^x 的各阶导数相等的性质, 即

$$e^x = (e^x)' = (e^x)''.$$

又因为方程系数为 $(x-1)$, $-x$, 1 . 且它们之和为零. 故可设方程解 $y_1 = e^x$. 代入方程, 得

$$(x-1)e^x - xe^x + e^x = 0,$$

因此 $y_1 = e^x$ 是方程一个特解.

另一特解同样考虑. 由于多项式的各阶导数仍为多项式. 且方程系数皆为多项式, 故可设方程有多项式解. 试设 $y_2 = ax + b$. 由于 $y_2' = a$, $y_2'' = 0$ 代入方程

$$(x-1) \cdot 0 - xa + ax + b = 0,$$

得 $b = 0$, a 任意常数, 故取 $y_2 = x$. ($a = 1$) 为方程另一特解.

又因 $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{e^x}{x} \neq \text{常数}$, 故特解 y_1, y_2 线性无关.

因此方程通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 x.$$

可以看出, 若第二个特解取 $y_2 = 4x$ 或 $y_2 = \frac{1}{3}x$ 对方程通解均无影响.

一般, 二阶变系数线性齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (6.1)$$

的系数关系为下列特殊情形时, 对应有相应特解.

(1) 若 $P(x) + xQ(x) = 0$ 方程(6.1)有特解 $y = x$

(2) 若 $m^2 + P(x)m + Q(x) = 0$ 其中 m 为实常数, 方程(6.1)有特解 $y = e^{mx}$.

观察法是解常微分方程中常用的方法. 有目的有分析地观察方法仍是一种科学的方法, 但有时只凭观察, 很难得到两个线性无关的特解. 如果只能观察出一个特解, 则另一个与其线性无关的特解, 还可按常数变易法的方法求解, 下面给出定理.

定理 1 如果 $y_1(x)$ 是方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \quad (6.1)$$

的一个非零特解. 则用常数变易法可求得与 $y_1(x)$ 线性无关的另一特解

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int P(x)dx} dx.$$

证明 设 $y_2(x) = u(x)y_1(x)$, 其中 $u(x)$ 是特定函数. 代入方程(6.1)

$$(y_1 u(x))'' + P(x)(y_1 u(x))' + Q(x)(y_1 u(x)) = 0,$$

求导数, 整理得

$$y_1 u''(x) + (2y_1' + P y_1)u'(x) + (y_1'' + P y_1' + Q y_1)u(x) = 0.$$

由于 $y_1'' + P y_1' + Q y_1 = 0$, 有

$$y_1 u''(x) + (2y_1' + P y_1)u'(x) = 0,$$

这是一个可降阶方程, 令 $u'(x) = v(x)$ 上式化为

$$y_1 v'(x) + (2y_1' + P y_1)v(x) = 0.$$

用分离变量法求解, 得

$$v(x) = C \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx}.$$

故方程通解为

$$y = C_1 x + C_2 x \int x^{-2} e^{\frac{x^3}{3}} dx.$$

综合上述, 对于二阶变系数线性方程的通解, 可以通过观察法及定理 1 求得某些方程的通解.

二 二阶变系数线性非齐次方程

对于二阶变系数线性非齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad (6.3)$$

的通解结构, 已由 § 4 定理 3 给出. 即方程(6.3)的通解为方程(6.3)对应的齐次方程通解 Y 与方程(6.3)的特解 y^* 之和. 而 Y 的求法在前段一已解决. 因此, 只需求解方程(6.3)的一个特解 y^* . 下面给出求特解 y^* 的常数变易法.

若 $Y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ 是方程(6.3)对应的齐次方程通解, 则可设方程(6.3)有形如

$$y^* = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 \quad (1)$$

的特解, 其中 $C_1(x)$ 、 $C_2(x)$ 为待定函数. 由于

$$y^{*'} = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2' + C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2,$$

$$y^{*''} = C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2'' + C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' \\ + (C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2)',$$

代入方程(6.3), 得

$$C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2'' + C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + (C_1'(x)y_1 \\ + C_2'(x)y_2)' + C_1(x)P(x)y_1' + C_2(x)P(x)y_2' \\ + P(x)(C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2) + C_1(x)Q(x)y_1 \\ + C_2(x)Q(x)y_2 = f(x),$$

因为 y_1 、 y_2 是齐次方程解, 上式可化为

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + (C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2)' \\ + P(x)(C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2) = f(x), \quad (2)$$

由于 $C_1(x)$ 、 $C_2(x)$ 是两个待定函数, 需要由两个条件加以确定. 除上式(2)外, 再补充一个条件, 为简单起见, 可令

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \quad (3)$$

则条件(2), 又可简化为

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \quad (4)$$

这样, 联立(3)、(4), 即

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x). \end{cases}$$

解得

$$C_1'(x) = -\frac{y_2 f(x)}{y_1 y_2' - y_1' y_2},$$

$$C_2'(x) = \frac{y_1 f(x)}{y_1 y_2' - y_1' y_2}.$$

积分, 即得待定函数.

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2 f(x)}{y_1 y_2' - y_1' y_2} dx,$$

$$C_2(x) = \int \frac{y_1 f(x)}{y_1 y_2' - y_1' y_2} dx.$$

这样, 将 $C_1(x)$ 、 $C_2(x)$ 代入(1)式, 即得非齐次方程(6.3)的特解

$$y^* = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2.$$

例3 求方程 $y'' + y = \sec x$ 的通解.

解 对应齐次方程 $y'' + y = 0$ 的通解为

$$Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

用常数变易法求非齐次方程特解. 设

$$y^* = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x,$$

其中 $C_1(x)$ 、 $C_2(x)$ 是待定函数. 且满足方程

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0, \\ C_1'(x)(-\sin x) + C_2'(x) \cos x = \sec x. \end{cases}$$

解得 $C_1'(x) = -\tan x$, $C_2'(x) = 1$.

从而, 有

$$C_1(x) = \ln |\cos x|, \quad C_2(x) = x.$$

故方程特解

$$y^* = \ln |\cos x| \cos x + x \sin x.$$

而方程通解

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \ln |\cos x| \cos x + x \sin x.$$

三 欧拉方程

欧拉方程是一种具有特殊变系数的线性方程. 设 p_1, p_2, \dots, p_n 均为实常数, 则形如

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + p_2 x^{n-2} y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x) \quad (6.4)$$

的方程称欧拉方程.

对于这种特殊类型的变系数方程, 可以通过变量代换化为常系数线性方程, 从而得解.

设变量置换, 利用 $x = e^t$, 即 $t = \ln x$, 将自变量 x 换成 t . 把 y 看成 t 的函数, 有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right),$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{1}{x^3} \left(\frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \right).$$

如采用记号 D 表示对 t 求导运算 $\frac{d}{dt}$, 那末上述计算结果可以

写成

$$x y' = D y,$$

$$x^2 y'' = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} = \left(\frac{d^2}{dt^2} - \frac{d}{dt} \right) y$$

$$=(D^2-D)y=D(D-1)y,$$

$$x^3 y''' = \frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt}$$

$$=(D^3-3D^2+2D)y=D(D-1)(D-2)y.$$

用数学归纳法不难证明一般有

$$x^k y^{(k)} = D(D-1)(D-2)\cdots(D-k+1)y.$$

把它们代入欧拉方程(6.1), 便得到一个以 t 为自变量的常系数线性微分方程. 求出这个方程解后, 再将 t 换成 $\ln x$ 即得原方程的解.

例 1 求方程 $x^2 y'' - 2y = 2x \ln x$ 通解.

解 这是欧拉方程. 设 $x = e^t$, 即 $t = \ln x$ 原方程化为

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2y = 2te^t.$$

此为常系数线性方程

方程(1)对应齐次方程的特征方程为

$$r^2 - r - 2 = 0$$

得特征根 $r_1 = -1$, $r_2 = 2$, 故对应的齐次方程通解为

$$Y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}.$$

设方程(1)的特解为 $y^* = (at + b)e^t$, 代入方程(1), 经比较系数, 得 $a = -1$, $b = -\frac{1}{2}$, 于是

$$y^* = -\left(t + \frac{1}{2}\right)e^t.$$

故方程(1)的通解为 $y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} - \left(t + \frac{1}{2}\right)e^t$.

还原变量, 令 $t = \ln x$ 即得原方程通解为

$$y = C_1 \frac{1}{x} + C_2 x^2 - \left(\ln x + \frac{1}{2}\right)x.$$

例 2 解方程 $x^3 y''' + 3x^2 y'' + xy' - y = x^3$.

解 这是欧拉方程, 设 $x=e^t$, 即 $t=\ln x$ 可得

$$\{D(D-1)(D-2)+3D(D-1)+D-1\}y=e^{2t}.$$

其中 $D=\frac{d}{dt}$, 化简为:

$$(D^3-1)y=e^{2t},$$

$$\text{即} \quad \frac{d^3 y}{dt^3} - y = e^{2t}. \quad (2)$$

对应齐次方程的特征方程为

$$r^3-1=0,$$

$$\text{特征根 } r_1=1, r_{2,3}=\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

得对应齐次方程通解.

$$Y=C_1 e^t + e^{-\frac{i}{2}t} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right),$$

非齐次方程(2)的特解为

$$y^* = \frac{1}{7} e^{2t}.$$

故方程(2)的通解为

$$y = C_1 e^t + e^{-\frac{i}{2}t} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) + \frac{1}{7} e^{2t}.$$

还原变量, 令 $t=\ln x$ (或 $x=e^t$), 得原方程通解为

$$y = C_1 x + \frac{1}{\sqrt{x}} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) + \frac{1}{7} x^2.$$

§ 7 常微分方程的幂级数解法简介

在微分方程中, 大量的方程求解相当困难, 有的方程的解不能用初等函数或积分形式表达. 我们只能寻求其他解法, 常用的有

幂级数解法和数值解法。本节只简单介绍一下二阶变系数线性方程的幂级数解法。也就是用幂级数来表达满足方程的解函数，下面简要说明。

关于二阶变系数线性齐次微分方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (7.1)$$

的幂级数求解。先给出一个定理。

定理 1 若方程(7.1)中的系数 $P(x)$ ， $Q(x)$ 可在 $-R < x < R$ 内展开为 x 的幂级数，则在 $-R < x < R$ 内，方程(7.1)必有形如幂级数

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (7.2)$$

的解。

定理证明从略。

根据定理 1，对方程(7.1)求幂级数解的步骤为，先设方程(7.1)有幂级数解为

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

其中 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 是待定系数。把它代入方程使之成为恒等式，再用比较系数法确定系数 a_0, a_1, a_2, \cdots ，于是，得到一个确定的幂级数。它在其收敛域内即为方程(7.1)的解。

例 1 求解初值问题

$$\begin{cases} y'' - xy = 0, \\ y|_{x=0} = 0, \quad y'|_{x=0} = 1. \end{cases}$$

解 这里 $P(x) = 0$ ， $Q(x) = -x$ 在整个数轴上满足定理条件。因此所求解可在整个数轴上展成 x 的幂级数。

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (1)$$

由条件 $y|_{x=0} = 0$ ，得 $a_0 = 0$ 对级数(1)求导

$$\begin{aligned}
 y' &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1},
 \end{aligned} \tag{2}$$

由条件 $y'|_{x=0} = 0$, 得 $a_1 = 0$ 对级数(2)求导

$$\begin{aligned}
 y'' &= 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots \\
 &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2},
 \end{aligned} \tag{3}$$

将(1)(3)式代入方程, 且按 x 的升幂集项, 得

$$\begin{aligned}
 &2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + (4 \cdot 3a_4 - 1)x^2 + (5 \cdot 4a_5 - a_2)x^3 + \cdots + \\
 &+ ((n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1})x^n + \cdots = 0,
 \end{aligned}$$

上式为恒等式. 因此, 方程左端各项的系数必全为零. 于是有

$$a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = \frac{1}{4 \cdot 3}, a_5 = 0, a_6 = 0, \cdots$$

一般地
$$a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}, \quad (n=3, 4, \cdots).$$

从这递推公式可以推得

$$a_7 = \frac{a_4}{7 \cdot 6} = \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}, \quad a_8 = \frac{a_5}{8 \cdot 7} = 0, \quad a_9 = \frac{a_6}{9 \cdot 8} = 0,$$

$$a_{10} = \frac{a_7}{10 \cdot 9} = \frac{1}{10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3},$$

一般
$$a_{3m-1} = a_{3m} = 0,$$

$$a_{3m+1} = \frac{1}{(3m+1)(3m) \cdots 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}, \quad (m=1, 2, \cdots).$$

于是, 所求特解为

$$\begin{aligned}
 y &= x + \frac{x^4}{4 \cdot 3} + \frac{x^7}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} + \frac{x^{10}}{10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} + \cdots + \\
 &+ \frac{x^{3m+1}}{(3m+1)(3m) \cdots 10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} + \cdots, \\
 &(-\infty, +\infty).
 \end{aligned}$$

例2 求解勒让德 (Legendre) 方程

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0,$$

其中 n 为常数.

解 这里 $P(x) = -\frac{2x}{1-x^2}$, $Q(x) = \frac{n(n+1)}{1-x^2}$ 满足定理中的条件, 它们都在 $-1 < x < 1$ 内可以展成 x 的幂级数. 设勒让德方程解为

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k,$$

求导, 得

$$y' = a_1 + 2a_2x + \cdots + ka_kx^{k-1} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} ka_kx^{k-1},$$

$$\begin{aligned} y'' &= 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \cdots + k(k-1)a_kx^{k-2} + \cdots \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_kx^{k-2}, \end{aligned}$$

代入方程, 得

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_kx^{k-2} - \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)a_kx^k - 2 \sum_{k=1}^{\infty} ka_kx^k + \\ + n(n+1) \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k = 0, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \{ (k+2)(k+1)a_{k+2} - k(k-1)a_k - 2ka_k + n(n+1)a_k \} x^k \\ = 0. \end{aligned}$$

化简, 得

$$\sum_{k=0}^{\infty} \{ (k+2)(k+1)a_{k+2} + (n-k)(n+k+1)a_k \} x^k = 0.$$

于是, 有

$$a_{k+2} = -\frac{(n-k)(n+k+1)}{(k+1)(k+2)} a_k,$$

依次令 $k=0, 1, 2, \dots$, 得

$$a_2 = -\frac{n(n+1)}{2!} a_0, \quad a_3 = -\frac{(n-1)(n+2)}{3!} a_1,$$

$$a_4 = -\frac{(n-2)(n+3)}{3 \cdot 4} a_2 = \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!} a_0,$$

$$a_5 = -\frac{(n-3)(n+4)}{4 \cdot 5} a_3 = \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!} a_1, \dots$$

由此可见, a_2, a_4, \dots 都可以用 a_0 表示; a_3, a_5, \dots 都可以用 a_1 表示, 而 a_0, a_1 都可以任意取值, 于是勒让德方程通解为

$$\begin{aligned} y = & a_0 \left[1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!} x^4 - \dots \right] + \\ & + a_1 \left[x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} x^3 \right. \\ & \left. + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!} x^5 - \dots \right]. \end{aligned}$$

根据定理 1 可知, 上式中两个级数在 $-1 < x < 1$ 内收敛。

微分方程的级数解法, 在实际应用中常常只要求出级数解的前几项, 并不一定要求系数的一般规律。另外, 若遇到线性非齐次方程自由项为 $e^x, \sin x, \cos x$ 等, 用级数求解时, 则需将自由项的有关函数也展成幂级数, 然后两边再比较系数。即可得解。



