|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 修订者 | 修订时间 | 修订内容 |
| 薛雨 | 2018/4/16 | 创建 |

目录

[第八章：向量代数与空间几何 4](#_Toc513298571)

[第一节：向量及线性运算 4](#_Toc513298572)

[1. 卦象 4](#_Toc513298573)

[2. 分点 5](#_Toc513298574)

[3. 两点间距离 6](#_Toc513298575)

[第二节：数量积 向量积 6](#_Toc513298576)

[1. 数量积 6](#_Toc513298577)

[2. 向量积 7](#_Toc513298578)

[第三节：平面及方程 7](#_Toc513298579)

[1. 平面的点法式方程 7](#_Toc513298580)

[2. 平面的一般方程 7](#_Toc513298581)

[3. 平面的截距式方程 8](#_Toc513298582)

[4. 平面的夹角 9](#_Toc513298583)

[5. 点(x0, y0, z0)到平面的距离公式 9](#_Toc513298584)

[第四节：空间直线及其方程 10](#_Toc513298585)

[1. 空间直线的一般方程 10](#_Toc513298586)

[2. 空间直线的对称式方程（点向式方程）与参数方程 10](#_Toc513298587)

[3. 两直线的夹角 11](#_Toc513298588)

[4. 直接与平面的夹角 11](#_Toc513298589)

[第五节：曲面及其方程 12](#_Toc513298590)

[第六节：空间曲线及其方程 12](#_Toc513298591)

[第九章：多元函数微分法及其应用 13](#_Toc513298592)

[第一节 多元函数的基本概念 13](#_Toc513298593)

[1. 平面点集 13](#_Toc513298594)

[2. N维空间 14](#_Toc513298595)

[3. 多元函数的概念 14](#_Toc513298596)

[4. 多元函数的极限（二重极限） 14](#_Toc513298597)

[5. 多元函数的连续性 14](#_Toc513298598)

[第二节 偏导数 15](#_Toc513298599)

[1. 偏导数的定义 15](#_Toc513298600)

[2. 偏导数的几何意义 15](#_Toc513298601)

[3. 高阶偏导数 16](#_Toc513298602)

[第三节 全微分 17](#_Toc513298603)

[1. 全微分的定义 17](#_Toc513298604)

[第四节 多元复合函数的求导法则 17](#_Toc513298605)

[第五节 隐函数的求导公式 17](#_Toc513298606)

[第六节 多元函数微分学的几何应用 18](#_Toc513298607)

[1. 一元向量值及其导数 18](#_Toc513298608)

[2. 空间曲线的切线与法平面 18](#_Toc513298609)

[3. 曲面的切平面与法线 19](#_Toc513298610)

[第七节 方向导数与梯度 19](#_Toc513298611)

[1. 方向导数 19](#_Toc513298612)

[2. 梯度 21](#_Toc513298613)

[3. 数量场与向量场 21](#_Toc513298614)

[第八节 多元函数的极值及其求法 22](#_Toc513298615)

[1. 多元函数的极值 22](#_Toc513298616)

[待总结 22](#_Toc513298617)

[2. 多元函数的最大值与最小值 22](#_Toc513298618)

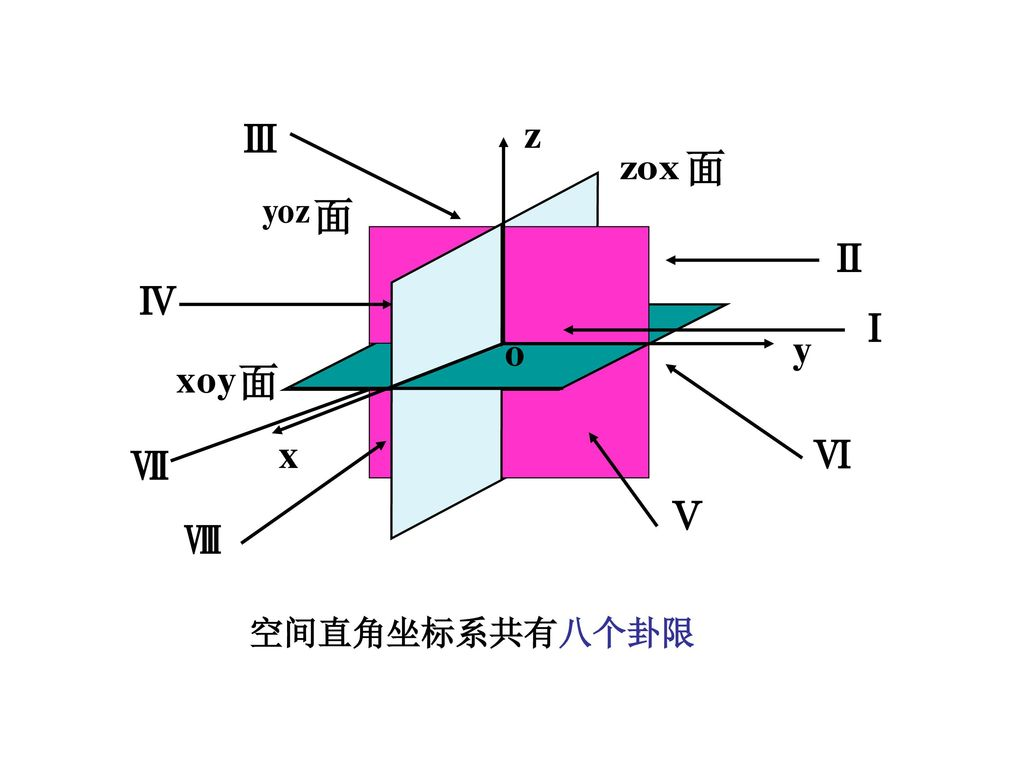
[待总结 22](#_Toc513298619)

[3. 条件极值 拉格朗日乘数法 22](#_Toc513298620)

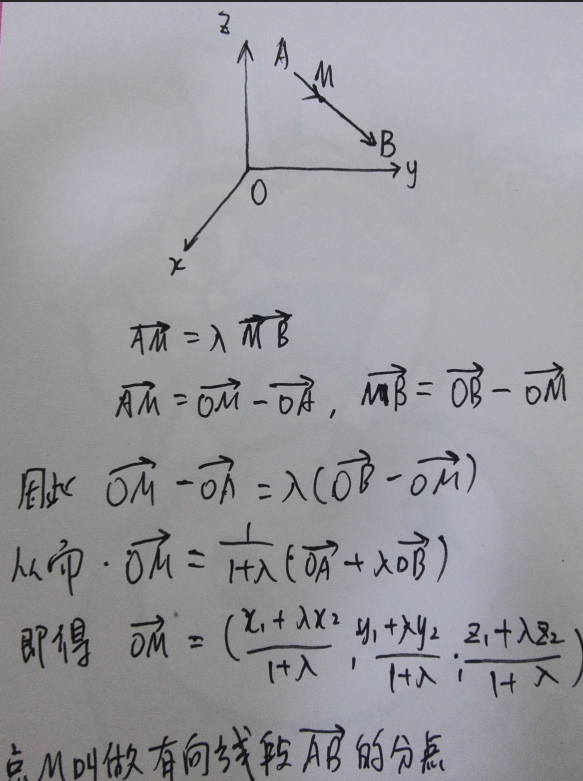
# 第八章：向量代数与空间几何

## 第一节：向量及线性运算

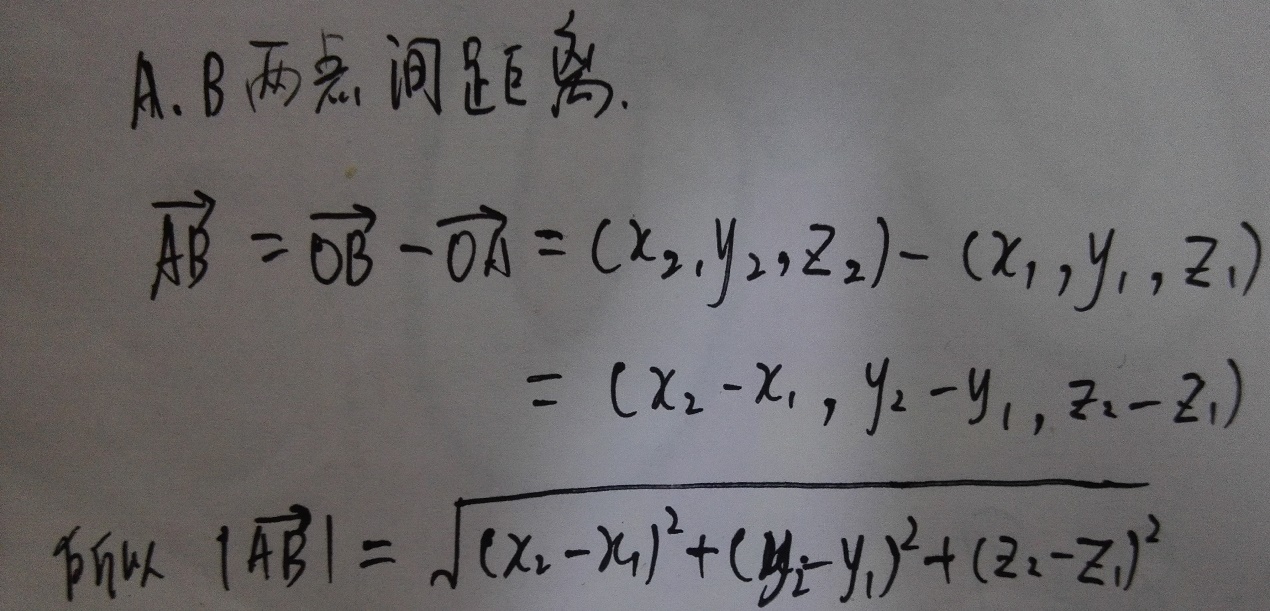
1. 卦象

、

1. 分点

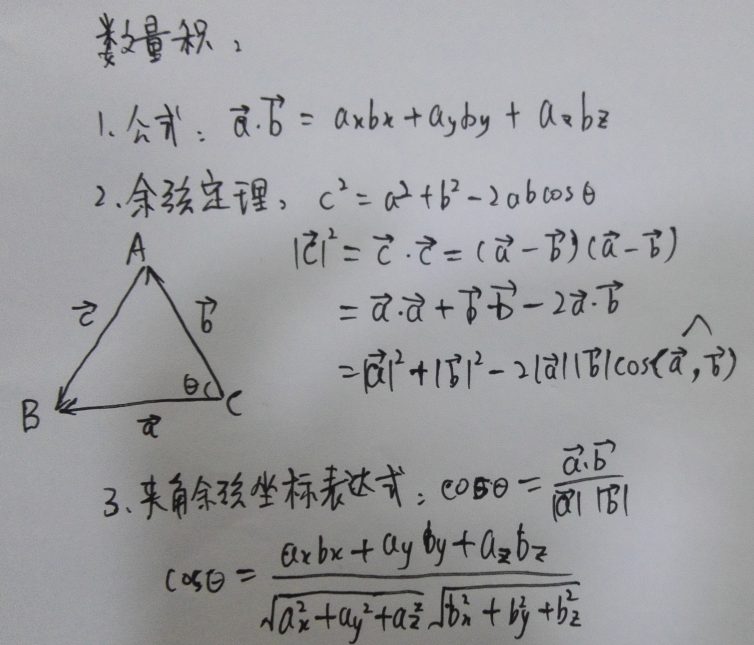


1. 两点间距离



## 第二节：数量积 向量积

1. 数量积



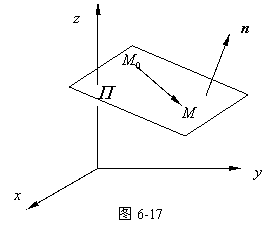
1. 向量积

待续

## 第三节：平面及方程

平面和空间直线是曲面和空间曲线的特例。

1. 平面的点法式方程



由上图，可以看出来，平面的法线向量**n**=(A, B, C)确定了平面的方向，且平面上的一点**M0**确定了平面的位置。因为**n**与**M0M**互相垂直，得出点法式方程：

**n**\***M0M** = A(x - x0) + B(y – y0) +C(z - z0) = 0

平面的法线向量：垂直于一平面的非零向量。

1. 平面的一般方程

因为平面的点法式方程是一个三元一次方程，所以平面的一般方程就是

Ax + By +Cz + D = 0

取满足方程的一组数(x0, y0, z0)，有

Ax0 + By0 + Cz0 + D = 0

上述两式相减可得

A(x – x0) + B(y – y0) + C(z – z0) = 0

也就是平面的点法式方程，说明一般方程中的ABC就是法线向量**n** = (A, B, C)

特殊情况：

D = 0：平面过原点 （因为xyz都取0等式成立）

A = 0：法线向量垂直于x轴，平面平行于x轴。B=0和C=0同理。

A=B=0：法线向量垂直于xOy平面，平面平行（或重合）于xOy平面。其它同理。

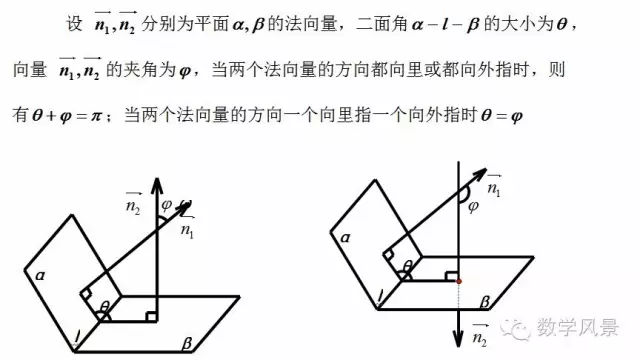
一般方程的应用，点法式搞不定就用一般方程啊，例如一个平面通过x轴，过点(a, b, c)。通过x轴说明A=0，并且D=0（过原点了）

1. 平面的截距式方程

这种比较特殊，其实就是一般方程的衍生。

x/a + y/b +z/c = 0 （证明从略）

1. 平面的夹角



http://61.139.105.132/gdsx/dzja/6/4.files/image176.gif

利用以上以上公式，得知两平面垂直的充要条件：

http://61.139.105.132/gdsx/dzja/6/4.files/image180.gif

两平面平行的充要条件

http://61.139.105.132/gdsx/dzja/6/4.files/image178.gif （也就是cos等于1）

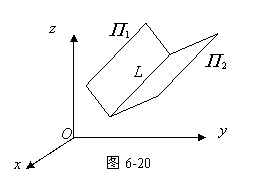
这里的角度是取锐角或者直角，cos的最后值大于或等于0就是锐角或直角

1. 点(x0, y0, z0)到平面的距离公式

http://61.139.105.132/gdsx/dzja/6/4.files/image222.gif （证明从略，自己看书，就是太多了懒得写）

## 第四节：空间直线及其方程

1. 空间直线的一般方程



通过空间一直线L的平面有无限多个，只要在这无限多个平面中任意选取两个，将它们的方程联立起来，所得的方程组就表示空间直线L.

http://61.139.105.132/gdsx/dzja/6/5.files/image020.gif

1. 空间直线的对称式方程（点向式方程）与参数方程



由上图，方向向量**s**=(m, n, p)，直线L上一点M0=(x0, y0, z0)，两向量对应坐标成比例，可得

s

直线的任一方向向量**s**的坐标m n和p叫做这直线的一组方向数，而向量**s**的方向余弦叫做该直线的方向余弦。

**方向余弦**是指在解析几何里，一个向量的三个**方向余弦**分别是这向量与三个坐标轴之间的角度的**余弦**。 两个向量之间的**方向余弦**指的是这两个向量之间的角度的**余弦**

由

可得 

1. 两直线的夹角

两直线夹角应是锐角或直角。由余弦公式可得：



1. 直接与平面的夹角



要求，需要知道直线的方向向量**s**=(m, n, p)和直线在平面的投影，而因为平面的投影不好求，所以换成平面的法线向量**n**=(A, B, C)来间接代替，因为sin=cos(/2 -)，按两向量的夹角余弦公式，有：



直线与平面垂直，相当于方向向量与法线向量平行：

A/m = B/n = C/p

直线与平面平行，相当于方向向量与法线向量垂直：

Am + Bn +Cp = 0

## 第五节：曲面及其方程

待总结

## 第六节：空间曲线及其方程

待总结

# 第九章：多元函数微分法及其应用

## 第一节 多元函数的基本概念

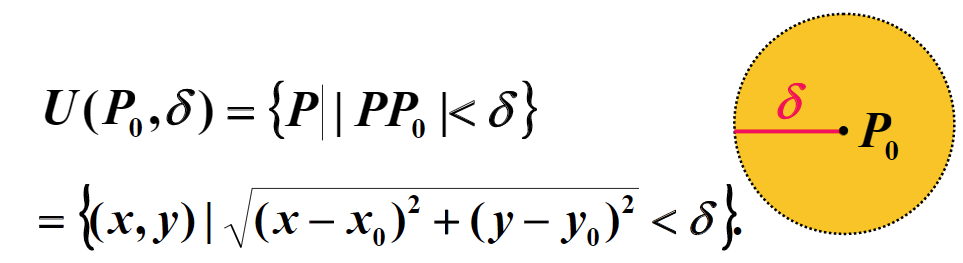
1. 平面点集

坐标平面：二元有序实数组的全体，即**R**2 = **R** x **R** = {(x, y)|x,y=**R**}

平面点集：坐标平面上具有某种性质P的点的集合，记作：

**E**={ (x, y) | (x, y)具有性质P }

邻域：



去心邻域：条件改为0<|PP0|<

点P与点集E的关系：

1. 内点：点P的某个邻域都属于E
2. 外点：点P的某个邻域都不属于E
3. 边界点：点P的任一邻域既含有属于E的点，又含有不属于E的点（边界点可以属于E，也可以不属于E，例如点P在开区域的边界上）
4. 聚点：对于任意给定的>0，点P的去心邻域中总有E中的点
5. N维空间

Rn 中点与点的距离



1. 多元函数的概念
2. 多元函数的极限（二重极限）

设函数http://netedu.xauat.edu.cn/jpkc/netedu/jpkc/gdsx/homepage/5jxsd/51/513/5308/530801.files/image142.gif在开区域（或闭区域）http://netedu.xauat.edu.cn/jpkc/netedu/jpkc/gdsx/homepage/5jxsd/51/513/5308/530801.files/image129.gif内有定义，http://netedu.xauat.edu.cn/jpkc/netedu/jpkc/gdsx/homepage/5jxsd/51/513/5308/530801.files/image152.gif是http://netedu.xauat.edu.cn/jpkc/netedu/jpkc/gdsx/homepage/5jxsd/51/513/5308/530801.files/image129.gif的内点或边界点.如果对于任意给定的正数http://netedu.xauat.edu.cn/jpkc/netedu/jpkc/gdsx/homepage/5jxsd/51/513/5308/530801.files/image154.gif，总存在正数http://netedu.xauat.edu.cn/jpkc/netedu/jpkc/gdsx/homepage/5jxsd/51/513/5308/530801.files/image006.gif，使得对于适合不等式 http://netedu.xauat.edu.cn/jpkc/netedu/jpkc/gdsx/homepage/5jxsd/51/513/5308/530801.files/image157.gif 的一切点http://netedu.xauat.edu.cn/jpkc/netedu/jpkc/gdsx/homepage/5jxsd/51/513/5308/530801.files/image131.gif，都有http://netedu.xauat.edu.cn/jpkc/netedu/jpkc/gdsx/homepage/5jxsd/51/513/5308/530801.files/image160.gif 成立，则称常数http://netedu.xauat.edu.cn/jpkc/netedu/jpkc/gdsx/homepage/5jxsd/51/513/5308/530801.files/image144.gif为函数http://netedu.xauat.edu.cn/jpkc/netedu/jpkc/gdsx/homepage/5jxsd/51/513/5308/530801.files/image142.gif当http://netedu.xauat.edu.cn/jpkc/netedu/jpkc/gdsx/homepage/5jxsd/51/513/5308/530801.files/image146.gif，http://netedu.xauat.edu.cn/jpkc/netedu/jpkc/gdsx/homepage/5jxsd/51/513/5308/530801.files/image148.gif时的极限，记作

http://netedu.xauat.edu.cn/jpkc/netedu/jpkc/gdsx/homepage/5jxsd/51/513/5308/530801.files/image162.gif，或  http://netedu.xauat.edu.cn/jpkc/netedu/jpkc/gdsx/homepage/5jxsd/51/513/5308/530801.files/image164.gif（http://netedu.xauat.edu.cn/jpkc/netedu/jpkc/gdsx/homepage/5jxsd/51/513/5308/530801.files/image166.gif），这里 http://netedu.xauat.edu.cn/jpkc/netedu/jpkc/gdsx/homepage/5jxsd/51/513/5308/530801.files/image168.gif.

必须注意，所谓二重极限存在，是指点**P**(x,y)以任何方式趋于**P**0(x0,y0)时，f(x,y)都无限接近于A。

1. 多元函数的连续性

## 第二节 偏导数

1. 偏导数的定义

设函数z=f(x,y)在点(x0,y0)的某一邻域有定义，当y固定在y0而x在增量x0处有增量

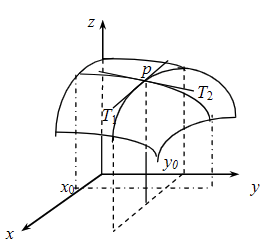


则函数z=f(x,y)在点(x0,y0)的对x的偏导数为：



如果函数在区域D内每一点(x,y)处对x的偏导数都存在，那么函数对x的偏导函数为

1. 偏导数的几何意义



由上图，若固定y=y0，对x求偏导，相当于过y=y0做一条切割线，对曲面进行降维打击，变成一条z与x的平面曲线，即函数对于x的偏导函数。而T1则表示点p处的切线，也就是函数对于x在点p处的偏导数。对y求偏导亦是同理。

另外也可以简单粗暴的理解为，一巴掌（可能是如来神掌）把曲面拍扁到z与x的二维平面上了。

1. 高阶偏导数

设函数*z*=*f*(*x*，*y*)在区域*D*内每一点处都存在偏导数*fx*(*x*，*y*)和*fy*(*x*，*y*)，如果偏导函数*fx*(*x*，*y*)及*fy*(*x*，*y*)对*x*和对*y*的偏导数也存在，那么称这些偏导数是函数*z*=*f*(*x*，*y*)的二阶偏导数，依照对两个变量x和y求偏导数的顺序不同，二阶偏导数有以下四种类型：

1、对*x*的二阶偏导数http://kjwy.5any.com/gdsx22/content/ch02/images/gdsx080203/image002.gif，常用的记号为http://kjwy.5any.com/gdsx22/content/ch02/images/gdsx080203/image004.gif等

2、对*y*的二阶偏导数http://kjwy.5any.com/gdsx22/content/ch02/images/gdsx080203/image006.gif，常用的记号为http://kjwy.5any.com/gdsx22/content/ch02/images/gdsx080203/image008.gif等

3、先对*x*再对*y*的二阶偏导数http://kjwy.5any.com/gdsx22/content/ch02/images/gdsx080203/image010.gif，常用的记号为http://kjwy.5any.com/gdsx22/content/ch02/images/gdsx080203/image012.gif等

4、先对*y*再对*x*的二阶偏导数http://kjwy.5any.com/gdsx22/content/ch02/images/gdsx080203/image014.gif，常用的记号为http://kjwy.5any.com/gdsx22/content/ch02/images/gdsx080203/image016.gif等。

定理 当函数http://kjwy.5any.com/gdsx22/content/ch02/images/gdsx080203/image040.gif的两个混合偏导数http://kjwy.5any.com/gdsx22/content/ch02/images/gdsx080203/image042.gif和http://kjwy.5any.com/gdsx22/content/ch02/images/gdsx080203/image044.gif在区域*D*内连续时，则在该区域内必有http://kjwy.5any.com/gdsx22/content/ch02/images/gdsx080203/image046.gif

拉普拉斯方程（laplace）



## 第三节 全微分

1. 全微分的定义

设函数z=f(x,y)在点(x,y)的某邻域有定义，如果函数在点(x,y)的全增量

Δz = f(x+Δx, y+Δy) – f(x,y)

可表示为

Δz = AΔx + BΔy + o(ρ)

其中A，B不依赖与Δx和Δy，仅依赖于x，y，，那么称函数在点(x,y)处可微

可微时偏导数必定存在，但偏导数存在未必可微。因为偏导数只是从特定方向进行，不能全方向完整地进行，存在缺陷。

偏导数在某点连续，则在这点可微。

## 第四节 多元复合函数的求导法则

待总结

## 第五节 隐函数的求导公式

待总结

## 第六节 多元函数微分学的几何应用

1. 一元向量值及其导数

待总结

1. 空间曲线的切线与法平面



设曲线的参数方程为



设xyz三个函数都可导，导数不全为零，则曲线在点M(x0, y0)处的切线方程为



上面三个式子其实都等于t-t0

法平面方程为:



切线方程：过某点切于曲线的直线方程。

另外还有以x为参数的参数方程的情况，暂时没有总结。

1. 曲面的切平面与法线

曲线有一个法平面和切线，而曲面则是有无数个切线和无数个法平面，只有一个切平面和一个法线。

设 ，



从求全导后的方程来看，曲面上所有的点都垂直于同一个法向量，所以曲面上通过点M的一切曲线都在同一个平面上，这个平面就是切平面，切平面方程为：



法线方程为：



## 第七节 方向导数与梯度

1. 方向导数

偏导数是考虑函数沿坐标轴的变化率，而方向导数则是考虑函数沿任何方向的变化率。可微则任意方向的方向导数都存在。



设l是xOy平面上以P(x0,y0)为始点的一条射线，是与l同方向的单位向量，射线的参数方程为



且|PP0|=t，cosβ=sina定义方向导数为：



方向导数的求值公式：



证明：



1. 梯度

方向导数最大时，则为梯度

因为方向导数为 

可以拆分为两个向量相乘，偏导数向量和方向向量。

当偏导数向量和方向向量的夹角为0时，方向导数达到最大值，所以用偏导数在x和y方向可以定义一个新的向量，就为



等值线就是曲面被平面z=c（c为常数）所截得得曲线方程：



很多条这样的曲线方程就组成了一条条等值线。

1. 数量场与向量场

如果对于空间区域http://netedu.xauat.edu.cn/jpkc/netedu/jpkc/gdsx/homepage/5jxsd/51/513/5308/530807.files/image195.gif内的任一点http://netedu.xauat.edu.cn/jpkc/netedu/jpkc/gdsx/homepage/5jxsd/51/513/5308/530807.files/image197.gif，都有一个确定的数量http://netedu.xauat.edu.cn/jpkc/netedu/jpkc/gdsx/homepage/5jxsd/51/513/5308/530807.files/image199.gif，则称在这空间区域http://netedu.xauat.edu.cn/jpkc/netedu/jpkc/gdsx/homepage/5jxsd/51/513/5308/530807.files/image195.gif内确定了一个数量场（例如温度场、密度场）等.一个数量场可用一个数量函数http://netedu.xauat.edu.cn/jpkc/netedu/jpkc/gdsx/homepage/5jxsd/51/513/5308/530807.files/image199.gif来确定.如果与点http://netedu.xauat.edu.cn/jpkc/netedu/jpkc/gdsx/homepage/5jxsd/51/513/5308/530807.files/image197.gif相对应的是一个向量http://netedu.xauat.edu.cn/jpkc/netedu/jpkc/gdsx/homepage/5jxsd/51/513/5308/530807.files/image201.gif，则称在这空间区域http://netedu.xauat.edu.cn/jpkc/netedu/jpkc/gdsx/homepage/5jxsd/51/513/5308/530807.files/image195.gif内确定了一个向量场（例如力场，速度场等）.一个向量场可用一个向量函数http://netedu.xauat.edu.cn/jpkc/netedu/jpkc/gdsx/homepage/5jxsd/51/513/5308/530807.files/image203.gif来确定，而

http://netedu.xauat.edu.cn/jpkc/netedu/jpkc/gdsx/homepage/5jxsd/51/513/5308/530807.files/image205.gif,

其中http://netedu.xauat.edu.cn/jpkc/netedu/jpkc/gdsx/homepage/5jxsd/51/513/5308/530807.files/image207.gif是点http://netedu.xauat.edu.cn/jpkc/netedu/jpkc/gdsx/homepage/5jxsd/51/513/5308/530807.files/image197.gif的数量函数.

利用场的概念，我们可以说向量函数http://netedu.xauat.edu.cn/jpkc/netedu/jpkc/gdsx/homepage/5jxsd/51/513/5308/530807.files/image146.gifhttp://netedu.xauat.edu.cn/jpkc/netedu/jpkc/gdsx/homepage/5jxsd/51/513/5308/530807.files/image199.gif确定了一个向量场——梯度场，它是由数量场http://netedu.xauat.edu.cn/jpkc/netedu/jpkc/gdsx/homepage/5jxsd/51/513/5308/530807.files/image199.gif产生的.通常称函数http://netedu.xauat.edu.cn/jpkc/netedu/jpkc/gdsx/homepage/5jxsd/51/513/5308/530807.files/image199.gif为这个向量场的势.而这个向量场又称为势场。

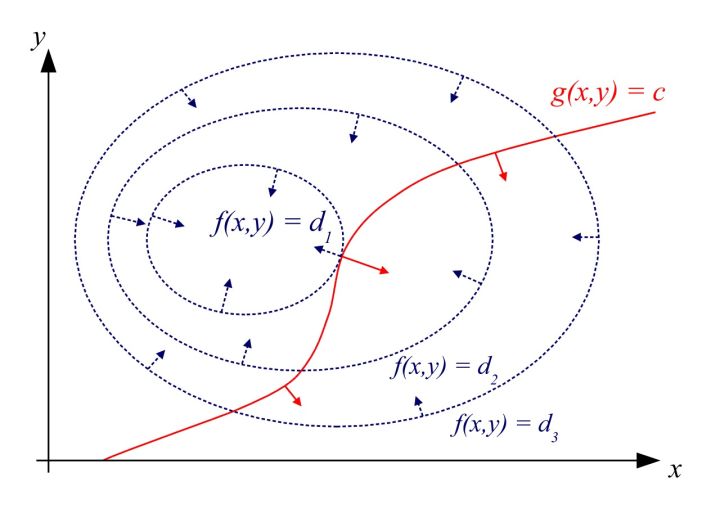
## 第八节 多元函数的极值及其求法

1. 多元函数的极值

待总结

1. 多元函数的最大值与最小值

待总结

1. 条件极值 拉格朗日乘数法

先看几何意义，由上图，假设有自变量x和y，给定约束条件g(x,y)=c，要求f(x,y)在约束g下的极值。我们可以画出f的等高线图，如下图。此时，约束g=c由于只有一个自由度，因此也是图中的一条曲线（红色曲线所示）。显然地，当约束曲线g=c与某一条等高线f=d1相切时，函数f取得极值。