HOMEWORK

Sarawut Suebsang

July 18, 2021

Identity I

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

จากเอกลักษณ์ I จะเห็นได้ว่า $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0 \iff a + b + c = 0$ หรือ $a = b = c$

Example 0.1

ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ จงหาคู่อันดับ (x, y) ของจำนวนนับทั้งหมด ซึ่ง

$$x^3 + y^3 - 3xy = p - 1$$

Proof. กำหนดให้ $z = 1$ จะเขียนสมการใหม่ได้เป็น $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = p$ นั่นคือ

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) = p$$

เนื่องจาก x, y, z ทำให้ $x+y+z \geq 3$ ดังนั้น $x+y+z = p$ และ $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz = 1$

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = 1$$
$$(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 = 2$$

เนื่องจาก $x, y \geq 1$ กรณี $x, y \geq 2$ ทั้งคู่จะเป็นได้กรณีเดียวคือ $x = y = 2$ กรณี x หรือ y เท่า 1 โดยไม่เสียนัยให้ $y = 1$ จะได้ $x = 2$ แต่ $x+y+z = 4$ ไม่เป็นจำนวนเฉพาะดังนั้นกรณีนี้ไม่เกิดจะได้คำตอบ $(x, y) = (2, 2)$ เท่านั้น

$\square$

Identity II

กำหนดให้ $abc = 1$ จะได้

$$\frac{1}{ab + a + 1} + \frac{1}{bc + b + 1} + \frac{1}{ca + c + 1} = 1$$

จากเงื่อนไข $abc = 1$ เราจะสามารถแทน $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$

Example 0.2
ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวก ซึ่ง $abc = 1$ จงแสดงว่า

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{2}{(a+1)^2 + b^2 + 1} \leq 1$$

Proof. จาก $(a+1)^2 + b^2 + 1 = (a^2 + b^2) + 2a + 2$ โดย AM-GM และใช้ II จะได้

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{2}{(a+1)^2 + b^2 + 1} \leq \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{ab + a + 1}$$
$$\sum_{\text{cyc}} \frac{2}{(a+1)^2 + b^2 + 1} \leq 1$$

จะเท่ากันเมื่อ $a = b = c$ จาก AM-GM

□

Theorem 0.3 (Euler)
ให้ a, n เป็นจำนวนเต็ม และ $\gcd(a, n) = 1$ จะได้

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

$\phi(n) = \#\{a \in \mathbb{N} : 1 \leq a \leq n \text{และ} \gcd(a, b) = 1\}$

Example 0.4
พิจารณาจำนวนนับ $n \geq 2$, เศษจากการหาร 2^{2^n} ด้วย $2^n - 1$ จะอยู่ในรูปกำลังของ 4 จงแสดงว่าข้อความข้างต้นจริงถ้าไม่จริงยกตัวอย่างค้าน

Proof. ไม่จริง เช่น $n = 25$ จะได้

$$2^{25} \equiv 1 \pmod{2^{25} - 1}$$
$$2^{2^{25}} \equiv 2^{2^{25} \pmod{25}} \pmod{2^{25} - 1}$$

จากออยเลอร์ จะได้ $2^{20} \equiv 1 \pmod{25}$ ดังนั้น

$$2^{2^{25}} \equiv 2^7 \pmod{2^{25} - 1}$$

ซึ่ง 2^7 ไม่เป็นกำลังของ 4

□

Identity III (Binomial coefficient)

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Identity IV

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Identity V

$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{r+1}\binom{n}{r}$$

Example 0.5
จงแสดงว่า

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j+1}}{j}\binom{n}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Proof. เนื่องจาก $\binom{n}{j} = 0$ ถ้า $j > n$ ดังนั้นจากโจทย์เขียนใหม่ได้เป็น

$$S_n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j}\binom{n}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

เราจะอุปนัยบน n ให้ $P(n)$ แทนสมการที่โจทย์ให้แสดง
ขั้นฐาน เห็นได้ชัดว่า $P(1)$ จริง
ขั้นอุปนัย สมมติ $P(n)$ จริง เมื่อ $k \geq 1$ จะแสดง $P(n+1)$ จริง
$P(n+1)$ จริง $\iff S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1}$

$$\iff \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j}\left[\binom{n+1}{j} - \binom{n}{j}\right] = \frac{1}{n+1}$$

$$\iff \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j}\binom{n}{j-1} = \frac{1}{n+1} (\text{จาก}IV)$$

$$\iff \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1}\binom{n+1}{j} = 1 \quad (\text{จาก } V \text{ และเป็นจริงจากแทน } III \text{ ด้วย } x = 1, y = -1)$$

ดังนั้น $P(n+1)$ เป็นจริงจากหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จึงสรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงทุก $n \in \mathbb{N}$ □

Lemma 0.6
ให้ $n \in \mathbb{N}, n+1 | n! \iff n+1$ เป็นจำนวนประกอบ

Proof. ให้ $n \in \mathbb{N}$
$(\Rightarrow)$ สมมุติ $n+1|n!$

จะพิสูจน์โดยหาข้อขัดแย้ง สมมุติ $n+1$ ปั็นจำนวนเฉพาะ
จะได้ $\gcd(n+1, i) = 1$ เมื่อ $i = 1, 2, 3, \ldots, n$
นั่นคือ $\gcd(n+1, n!) = 1$ ซึ่งขัดแย้ง ดังนั้น $n+1$ เป็นจำนวนประกอบ
$(\Leftarrow)$ สมมุติ n เป็นจำนวนประกอบ
ดังนั้นจะมี a, b ซึ่ง $n+1 = ab$ และ $1 < a \le b < n+1$
กรณี $a \ne b$ จะได้ $n+1 | 1 \times \cdots \times a \cdots \times b \times \cdots \times n = n!$
กรณี $a = b$ จะได้ $n+1 | 1 \times \cdots \times a \cdots \times 2a \times \cdots \times n = n!$
ดังนั้น $n+1 | n!$

$\square$

Example 0.7
หาคู่อันดับของจำนวนนับ (n, k) ทั้งหมด ซึ่ง

$$(n+1)^k = n! + 1$$

Proof. จากโจทย์ $n+1 \not| n!$ แล้วใช้ 0.6 จะได้ $n+1$ เป็นให้จำนวนเฉพาะ ให้ $p = n+1$
เขียนใหม่ได้เป็น $p^k = (p-1)! + 1$ ซึ่งจะรูปแล้วจะได้

$$p^{k-1} + p^{k-2} + \ldots + p + 1 = (p-2)!$$

กรณี $p-1$ เป็นจำนวนเฉพาะหรือหนึ่ง จะสรุปได้ว่า $(n, k) = (2, 1), (1, 1)$ ซึ่งสอดคล้องกับโจทย์
กรณี $p-1$ เป็นจำนวนประกอบ จาก 0.6 ได้ $p-1 | (p-2)!$ ทำให้

$$\begin{aligned} p^{k-1} + p^{k-2} + \ldots + p + 1 &\equiv 0 \pmod{p-1} \\ k &\equiv 0 \pmod{p-1} \\ k &= pq \text{ บาง } q \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

แทน k กลับไปสมการแรกจะได้ $p^{pq} = (p-1)! + 1$ จาก $(p-1)! \le (p-1)^p$
ทำให้ $p^{pq} \le (p-1)^p + 1$ จะเห็นได้ว่าถ้า $q > 1$ จะขัดแย้งดังนั้น $q = 1$
พิจารณา $p^p - (p-1)^p = p^{p-1} + p^{p-2}p - 1 + \ldots + (p-1)^{p-1} > 1$ ขัดแย้ง
ดังนั้นคำตอบ $(n, k) = (1, 1), (2, 1)$ เท่านั้น $\square$

Theorem 0.8 (The rearrangement Inequality)
ให้ $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ และ $b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n$ เป็นจำนวนจริง สำหรับการเรียงสับเปลี่ยน $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ ของ $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ จะได้

$$\begin{aligned} a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &\ge a'_1b_1 + a'_2b_2 + \cdots + a'_nb_n \\ &\ge a_nb_1 + a_{n-1}b_2 + \cdots + a_1b_n \end{aligned}$$

Example 0.9
ให้ $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ จงแสดงว่า

$$\sqrt{x(y+1)} + \sqrt{y(z+1)} + \sqrt{z(x+1)} \leq \frac{3}{2}\sqrt{(x+1)(y+1)(z+1)}$$

Proof. จากโจทย์จัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\sqrt{\frac{x}{(x+1)(z+1)}} + \sqrt{\frac{y}{(y+1)(x+1)}} + \sqrt{\frac{z}{(z+1)(y+1)}} \leq \frac{3}{2}$$

เนื่องจากอสมการข้างต้น Cyclic โดยไม่เสียนัยสมมุติให้ max$\{x, y, z\} = x$

<u>กรณี $x \geq y \geq z$</u>

$$\sqrt{\frac{x}{x+1}} \geq \sqrt{\frac{y}{y+1}} \geq \sqrt{\frac{z}{z+1}}$$
$$\sqrt{\frac{1}{z+1}} \geq \sqrt{\frac{1}{y+1}} \geq \sqrt{\frac{1}{x+1}}$$

โดย 0.8 จะได้

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{x}{(x+1)(z+1)}} \leq \sqrt{\frac{x}{(x+1)(z+1)}} + \sqrt{\frac{z}{(x+1)(z+1)}} + \sqrt{\frac{y}{(y+1)^2}}$$

จาก โคชีจะได้ $\sqrt{x} + \sqrt{z} \leq \sqrt{(x+1)(1+z)}$ และจาก $0 < (y-1)^2$ ได้ $\sqrt{\frac{y}{(y+1)^2}} \leq \frac{1}{2}$
ดังนั้น

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{x}{(x+1)(z+1)}} \leq \frac{3}{2}$$

<u>กรณี $x \geq z \geq y$</u>

$$\sqrt{\frac{x}{x+1}} \geq \sqrt{\frac{z}{z+1}} \geq \sqrt{\frac{y}{y+1}}$$
$$\sqrt{\frac{1}{y+1}} \geq \sqrt{\frac{1}{z+1}} \geq \sqrt{\frac{1}{x+1}}$$

โดย 0.8 จะได้

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{x}{(x+1)(z+1)}} \leq \sqrt{\frac{x}{(x+1)(y+1)}} + \sqrt{\frac{y}{(x+1)(y+1)}} + \sqrt{\frac{x}{(x+1)^2}}$$

จาก โคชีจะได้ $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{(x+1)(1+y)}$ และจาก $0 < (z-1)^2$ ได้ $\sqrt{\frac{z}{(z+1)^2}} \leq \frac{1}{2}$

□