# Problems

Sarawut Suebsang

July 22, 2021

## §1 Number theory

**Example 1.1**

ให้ $m, n$ เป็นจำนวนเต็มบวกโดยที่ $\gcd(m,n) = 1$, $m$ เป็นจำนวนคู่ และ $n$ เป็นจำนวนคี่ จงหาค่าของ

$$\frac{1}{2n} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{\left\lfloor \frac{km}{n} \right\rfloor} \left\{ \frac{km}{n} \right\}$$

*Proof.* ให้ $r_k = (km \mod n)$ จะได้ $\left\{ \frac{km}{n} \right\} = \frac{r_k}{n}$ และ $\left\lfloor \frac{km}{n} \right\rfloor = \frac{km - r_k}{n}$ พิจารณา

$$\frac{km - r_k}{n} \equiv r_k \pmod 2$$

จะได้ $(-1)^{\left\lfloor \frac{km}{n} \right\rfloor} = (-1)^{r_k}$ และจาก $\gcd(m,n) = 1$ แสดงว่า $(km \mod n), k = 1, 2, \dots, n-1$ ต่างกันหมด ดังนั้นจากโจทย์จะเขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{1}{2n} + \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^r r = \frac{1}{2}$$

$\square$

**Example 1.2**

จงหาจำนวนเฉพาะ $p$ ทั้งหมด ซึ่ง $p = m^2 + n^2$ และ $p$ หาร $m^3 + n^3 - 4$ ลงตัว สำหรับจำนวนเต็มบวก $m, n$ บางค่า

*Proof.*

$$(m+n)^2 \equiv 2mn \pmod p$$

จะได้

$$\begin{aligned}
(m+n)^3 &\equiv m^3 + n^3 + 3mn(m+n) \pmod p \\
m^3 + n^3 &\equiv (m+n)^3 - 3mn(m+n) \pmod p \\
2(m^3 + n^3) &\equiv 2(m+n)^3 - 3(m+n)(2mn) \pmod p \\
2(m^3 + n^3) &\equiv -(m+n)^3 \pmod p
\end{aligned}$$

จาก $m^3+n^3-4\equiv 0 \pmod p$ จะได้ $(m+n)^3+8\equiv 0 \pmod p$ นั่นคือ

$$p|(m+n+2)((m+n)^2-2(m+n)+4)$$

จะได้

$$p|m+n+2 \text{ หรือ } p|2mn-4(m+n)+4$$

ในกรณี $p=2,5$ เห็นชัดว่าสอดคล้องกับที่โจทย์ต้องการ พิจารณา กรณี $p\geq 13$ จะได้

$$p|m+n+2 \text{ หรือ } p|mn-(m+n)+2$$

จาก $p=m^2+n^2$ จะได้ $max\{m,n\}>\sqrt{\frac{13}{2}}$ นั่นคือ $max\{m,n\}\geq 3$
ดังนั้น $m(m-1)+n(n-1)>2$ หรือ $p>m+n+2$จะได้ $p\not|m+n+2$
จะได้ $p|mn-(m+n)+2$ เท่านั้น , $mn-(m+n)+2=(m-1)(n-1)+1>0$ เนื่องจาก $max\{m,n\}^2>(m-1)(n-1)$ จะได้ $p>(m-1)(n-1)+1$ ดังนั้นกรณีนี้ไม่มีคำตอบ □

**Theorem** (triangle inequality of floor function)
ให้ $a,b\in\mathbb{R}$

$$\lfloor a+b\rfloor \geq \lfloor a\rfloor+\lfloor b\rfloor$$

**Theorem** (Legendre's formula)
สำหรับ $p$ เป็นจำนวนเฉพาะให้ $v_p(n)$ คือเลขชี้กำลังที่มากของสุดของ $p$ ซึ่งหาร $n$ ลงตัว จะได้

$$v_p(n!)=\sum_{i=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{n}{p^i}\right\rfloor$$

**Example 1.3**
ให้ $a_1,a_2,\dots,a_k$ เป็นจำนวนเต็มบวก และ $d=\gcd(a_1,a_2,\dots,a_k)$ และ $a_1+a_2+\cdots+a_k=n$ จงแสดงว่า $\frac{d(n-1)!}{a_1!a_2!\dots a_k!}$ เป็นจำนวนเต็ม

*Proof.* ก่อนอื่นจะพิจารณาสมบัติที่ต้องใช้แก้โจทย์

**Claim** — ให้ $a,b\in\mathbb{Z}$ ถ้า $b\not|a$ แล้ว$\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{a-1}{b}\right\rfloor$

เนื่องจาก $b\not|a$ ให้ $a=bq+r$ เมื่อ $0<r<b$ จะได้ $q=\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{a-1}{b}\right\rfloor$
ให้ $p$ เป็นจำนวนเฉพาะใดๆ ต่อไปเราจะแสดงว่า $v_p(d(n-1)!)\geq\sum_{i=1}^k v_p(a_i!)$
เราจะใช้ triangle inequality of floor function และ Legendre's formula เพื่อแสดงอสมการข้างต้น $v_p(d(n-1)!)=v_p(d)+v_p((n-1)!)=v_p(d)+\sum_{i=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{n-1}{p^i}\right\rfloor$ และ $\sum_{j=1}^k v_p(a_j)=\sum_{j=1}^k\sum_{i=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{a_j}{p^i}\right\rfloor$
จัดรูปอสมการใหม่จะได้

$$v_p(d)+\sum_{i=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{n-1}{p^i}\right\rfloor\geq\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{a_j}{p^i}\right\rfloor$$

หรือ

$$v_p(d)+\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left\lfloor\frac{n-1}{p^i}\right\rfloor-\sum_{j=1}^{k}\left\lfloor\frac{a_j}{p^i}\right\rfloor\right)\geq 0$$

ในกรณี $p\nmid d$ จะได้ $v_p(d)=0$ และจะมี $l$ ซึ่ง $p\nmid a_l$ จากที่ Claim ไว้จะได้ $\left\lfloor\frac{a_l}{p^i}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{a_l-1}{p^i}\right\rfloor$ ดังนั้นเราสามารถเปลี่ยน $a_l$ เป็น $a_l-1$ และจาก triangle inequality of floor function ทำให้ได้

$$\left\lfloor\frac{n-1}{p^i}\right\rfloor\geq\sum_{j=1}^{k}\left\lfloor\frac{a_j}{p^i}\right\rfloor$$

ดังนั้นอสมการที่เราต้องการแสดงเป็นจริงในกรณี $p\nmid d$
กรณี $p\mid d$ ถ้าหาก $i>v_p(d)$ใช้เหตุผลคล้ายกรณีแรกจะได้

$$\left\lfloor\frac{n-1}{p^i}\right\rfloor\geq\sum_{j=1}^{k}\left\lfloor\frac{a_j}{p^i}\right\rfloor$$

ถ้าหาก $i\leq v_p(d)$ เราจะแบ่ง 1 จาก $v_p(i)$ ให้กับแต่ละวงเล็บ $i\leq v_d(p)$ ซึ่งเพียงพอพอที่จะพิสูจน์

$$1+\left\lfloor\frac{n-1}{p^i}\right\rfloor\geq\sum_{j=1}^{k}\left\lfloor\frac{a_j}{p^i}\right\rfloor$$

ซึ่งเป็นจริงจาก $1+\left\lfloor\frac{n-1}{p^i}\right\rfloor\geq\left\lfloor\frac{n-1}{p^i}\right\rfloor$ และ triangle inequality of floor function □

**Theorem** (primitive roots)

ให้ $p$ เป็นจำนวนเฉพาะ จะมีจำนวนเต็ม $g$ เรียกว่า primitive root ซึ่ง order ของ $g$ ใน modulo $p$ เท่ากับ $p-1$

Order ของ a ใน modulo p = k หมายถึงจำนวนเฉพาะที่เล็กที่สุดที่ $a^k\equiv 1\pmod p$

**Example 1.4**

ให้ $p\geq 2$ เป็นจำนวนเฉพาะ จงหาค่า $k$ ทั้งหมดซึ่ง $S_k=1^k+2^k+\cdots+(p-1)^k$ หารด้วย $p$ ลงตัว

*Proof.* ให้ $g$ เป็น primitive root ใน modulo $p$
จะได้ $\{1^k,2^k,\ldots,(p-1)^k\}=\{g^{1k},g^{2k},\ldots,g^{(p-1)k}\}$ ใน modulo $p$
ในกรณี $p-1\mid k$ จะได้ $S_k\equiv -1\pmod p$
ในกรณี $p-1\nmid k$ จะได้

$$\begin{aligned}S_k&\equiv g^{1k}+g^{2k}+\cdots+g^{(p-1)k}\pmod p\\&\equiv\frac{g^k(g^{k(p-1)}-1)}{g^k-1}\pmod p\\&\equiv 0\pmod p\end{aligned}$$

ทุก $k\in\mathbb{N}$ โดยที่ $p-1\nmid k$ จะสอดคล้องกับที่โจทย์ต้องการ □

**Example 1.5**

ให้ $p \geq 3$ เป็นจำนวนเฉพาะ นิยาม

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k^{120}, f(p) = \frac{1}{2} - \left\{\frac{F(p)}{p}\right\} \text{ โดยที่ } x = x - \lfloor x \rfloor$$

จงหาค่าของ $f(p)$

*Proof.* จาก $i^2 \equiv (p-i)^2 \pmod p$ ดังนั้น $2F(p) \equiv 1^{120} + 2^{120} + \dots (p-1)^{120} \pmod p$
จากข้อก่อนหน้าจะได้ $2F(p) \equiv \begin{cases} 0, & \text{if } p-1 \nmid 120 \\ p-1, & \text{otherwise} \end{cases}$ และ $\left\{\frac{F(p)}{p}\right\} = \frac{F(p) \mod p}{p}$
นั่นคือ $f(p) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if } p-1 \nmid 120 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{p}(2^{-1}(-1) \mod p) & \text{otherwise} \end{cases}$

□

**Example 1.6**

ให้ $p \geq 3$ เป็นจำนวนเฉพาะ จงหาฟังก์ชัน $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ทั้งหมดซึ่ง สำหรับแต่ละ $m, n \in \mathbb{Z}$
1. ถ้า $m \equiv n \pmod p$ แล้ว $f(m) = f(n)$ 2.$f(mn) = f(m)f(n)$

*Proof.* □

**Example 1.7**

จงหาจำนวนเฉพาะ $p$ ทั้งหมด ที่ทำให้ $\binom{100}{p} + 7$ หารด้วย $p$ ลงตัว

**Example 1.8**

จงหาจำนวนเต็มบวก $N$ ทั้งหมดที่มีตัวประกอบเฉพาะอย่างน้อยสองจำนวนและ $N$ มีค่าเท่ากับผลบวกของกำลังสองของตัวหารบวกที่มีค่าน้อยที่สุด 4 จำนวนแรก

**Example 1.9**

ให้ $a$ และ $b$ เป็นจำนวนเต็ม และ $p$ เป็นจำนวนเฉพาะ สำหรับแต่ละจำนวนนับ $k$ ใดๆ กำหนด$A_k = \{n \in \mathbb{N} : p^k | a^n - b^n\}$ จงแสดงว่าถ้า $A_1 \neq \emptyset$ แล้ว $A_k \neq \emptyset$ สำหรับทุก จำนวนนับ $k$

**Example 1.10**

ให้ $p$ เป็นจำนวนเฉพาะคี่ จงหาเศษจากการหาร $\sum_{k=0}^{p} k!(p-k)!$ ด้วย $p$

**Example 1.11**

ให้ $a, b$ และ $c$ เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $a|b^c$ จงแสดงว่า $a|b^a$

**Example 1.12**

จงหา $(a, b, c)$ ของจำนวนเต็มบวกทั้งหมดซึ่ง $(1 + \frac{1}{a})(1 + \frac{1}{b})(1 + \frac{1}{c}) = 2$

**Example 1.13**

จงหาจำนวนเต็มบวก $n$ ทั้งหมดซึ่ง $-5^4 + 5^5 + 5^n$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์ ทำนองเดียวกัน จงหาจำนวนเต็มบวก $n$ ทั้งหมด ซึ่ง $2^4 + 2^7 + 2^n$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์

**Example 1.14**

จงหาจำนวนสองหลัก $n = 10a + b$ โดยที่ $a, b \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ ซึ่ง ทุกจำนวนเต็ม $k$ $n|k^a - k^b$

**Example 1.15**

กำหนดให้ $x_1, x_2, \ldots, x_k$ เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = 1492$ จงแสดงว่า

$$x_1^7 + x_2^7 + \cdots + x_k^7 \neq 1998$$

**Example 1.16**

กำหนดให้ $p_1 < p_2 < \cdots < p_{31}$ เป็นจำนวนเฉพาะ ถ้า 30 หาร $p_1^4 + p_2^4 + \cdots + p_{31}^4$ ลงตัว จงแสดงว่ามี $k$ ซึ่ง $p_k, p_{k+1}, p_{k+2}$ เป็นจำนวนเฉพาะที่เรียงติดกัน

**Example 1.17**

ให้หาคู่อันดับของจำนวนเต็มบวก $(m, n)$ ทั้งหมดซึ่งทำให้

$$[\phi(m)]^2 - 19[\phi(m)] = [\phi(n)]^2 - 91$$

**Example 1.18**

จงหาจำนวนเฉพาะ $p$ ทั้งหมดที่ทำให้ $2p^2 - 3p - 1$ เป็นกำลังสามของจำนวนเต็มบวก

**Example 1.19**

จงหาพหุนาม $P(x)$ ทั้งหมดที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $2557^n + 213 \cdot 2014$ หารด้วย $P(n)$ ลงตัว สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก $n$

**Example 1.20**

จงแสดงว่าไม่มีจำนวนเฉพาะ $p, q$ ที่ทำให้ $2014p^{2557} + 1 = q^{2014}$

**Example 1.21**

จงหาจำนวนเต็มบวก $n$ ที่มีค่ามากที่สุด และ มีค่าน้อยที่สุด ซึ่ง 2552 เป็นตัวประกอบ และมีจำนวนตัวหารที่เป็นบวกทั้งหมดเท่ากับ 2009

**Example 1.22**

ให้ $p$ เป็นจำนวนเฉพาะที่อยู่ในรูป $4k + 3$ เมื่อ $k$ เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ ถ้า $m$ และ $n$ เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $p|m^2 + n^2$ แล้ว $p^2|m^2 + n^2$

**Example 1.23**

จงแสดงว่าไม่มีคู่อันดับ $(x, y)$ ของจำนวนเต็ม ที่สอดคล้องกับสมการ $2560x^2 + 5x + 6 = y^5$

**Example 1.24**

สำหรับจำนวนเต็มบวก $n$ กำหนดให้ $S(n)$ แทนผลรวมของเลขโดดใน $n$ จงหาจำนวนเฉพาะ $p$ ทั้งหมดซึ่ง $S(p^{p+2}) = S((p + 2)^p)$

# §2 Combinatorics

**Example 2.1**

ให้ $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n = m$ เป็นจำนวนเต็มบวก ให้ $b_k$ เป็นจำนวนจอง $a_i$ ซึ่ง $a_i \geq k$ จงแสดงว่า

$$a_1 + a_2 + \dots a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_m$$

**Example 2.2**

กำหนดให้ $A = \{2010, 2011, 2012, \dots, 2553\}$ ให้หาจำนวนสมาชิกใน $A$ ที่หารด้วยจำนวนเฉพาะน้อยกว่า 10 ลงตัว

**Example 2.3**

กระทรวงศึกษาธิการจัดกิจกรรมโดยสุ่มเลือกนักเรียน ชั้น ม.1 จำนวน 2010 คนจาก 5 ภูมิภาคทั่วประเทศ เพื่อให้นักเรียนคู่ใด ๆ เลือกถกปัญหาร่วมกันจำนวน 1 หัวข้อ จากปัญหา 3 หัวข้อคือ ปัญหาด้านการเมือง ปัญหาด้านเศรษฐกิจ และปัญหาด้านสังคม ให้แสดงว่าจะมีนักเรียน 3 คนซึ่งเกิดเดือนเดียวกัน เป็นเพศเดียวกัน มาจากภูมิภาคเดียวกัน และนักเรียนทุก ๆ คู่ใน 3 คนนี้เลือกถกปัญหาร่วมกันในหัวข้อเดียวกันหมด

**Example 2.4**

ให้ $(V, E)$ เป็นกราฟจงแสดงว่า

$$\sum_{v\in V} \text{deg}(v)^2 = \sum_{xy\in E} (\text{deg}(x) + \text{deg}(y))$$

**Example 2.5**

ในบางบริษัท ลูกจ้างแต่ละคนจะทำงานแค่ 10 วันต่อเดือนเท่านั้น นอกจากนี้ ทุกๆ ลูกจ้าง 3 คน จะมีวันที่ทำงสนร่วมกัน 1 วันเท่านั้น จงแสดงว่าบริษัทมีลูกจ้างอย่างมาก 19 คนเท่านั้น (สมมติให้ 1 เดือนมี 30 วัน)

**Example 2.6**

กำหนดให้ $n$ จุดต่างกันบนระนาบหนึ่ง จงแสดงว่ามีน้อยกว่า $2n^{3/2}$ คู่อันดับซึ่งห่างกัน 1 หน่วย

**Example 2.7**

ในโรงละครสัตว์มีตัวตลก $n$ คนโดยแต่ละตัวและทาสีตัวเองโดยใช้สีต่างกัน 12 สีต่างกัน
ตัวตลกแต่ละคนต้องการอย่างน้อย 5 สี วันหนึ่ง หวหน้าละครสัตว์ออกคำสั่งให้ไม่มีตัวตลก 2 คนใดๆ
มีสีชุดเดียวกัน และไม่มี สีใดๆที่มีตัวตลกใช้อย่างน้อย 20 คน จงหาจำนวนตัวตลกที่มากที่สุด
ที่ทำให้คำสั่งของหัวหน้าละครสัตว์เป็นไปได้