

Algebra Problems

S. Suebsang

July 13, 2021

Problem 1. จงแสดงว่า ถ้า $a + b + c = 0$ แล้ว $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Problem 2. จงแยกตัวประกอบ $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$

Problem 3. จงแยกตัวประกอบ $(2x - y - z)^3 + (2y - z - x)^3 + (2z - x - y)^3$

Problem 4. ให้ r เป็นคำตอบของสมการ $\sqrt[3]{r} + \frac{1}{\sqrt[3]{r}} = 1$ จงหาค่าของ $r^3 + \frac{1}{r^3}$

Problem 5. จงหาจำนวนจริงทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x-2} = 1$

Problem 6. จงพิสูจน์ว่า $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ เป็นจำนวนเต็ม

Problem 7. จงหาจำนวนจริง x, y, z ทั้งหมดที่สอดคล้องระบบสมการ

$$x + y + z = 6$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = 36$$

Problem 8. ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริง โดยที่ $\sqrt[3]{a-b} + \sqrt[3]{b-c} + \sqrt[3]{c-a} = 0$ จงแสดงว่า a, b, c มีสมาชิกน้อยกว่า 3

Problem 9. จงแยกตัวประกอบ $(x + 2y - 3z)^3 + (y + 2z - 3x)^3 + (z + 2x - 3y)^3$

Problem 10. ให้ $x = 7 + 5\sqrt{2}$ จงหาค่าของ $\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

Problem 11. จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$x + y + z = 0$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = 12$$

$$x^6 + y^6 + z^6 = 264$$

Problem 12. ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงซึ่ง

$$\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = 12$$

และ

$$ab = \left(\frac{a+b+8}{6}\right)^3$$

จงหาค่าของ $a - b$

Problem 13. ให้ a, b เป็นรากของสมการ

$$\frac{(x-2563)^3 + (x-2020)^3}{(2x-4583)^3} = \left(\frac{2563}{2020}\right)^3 \times \left(\frac{2^6 \times 5^3 \times 101^3}{11^3 \times 233^3}\right)$$

Problem 14. จงแก้สมการ

$$(2015x - 2014)^3 = (2x - 2)^3 + (2013x - 2012)^3$$

Problem 15. ให้ x เป็นจำนวนเต็มบวก จงหาค่าต่ำสุดของ $x + \frac{1}{x}$

Problem 16. ให้ a, b, c, d เป็นจำนวนจริงบวก จงหาค่าต่ำสุดของ $\frac{a}{b+d} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{d+b} + \frac{d}{a+c}$

Problem 17. ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงซึ่ง $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ จงหาค่าของ

$$\left(\frac{a+b-c}{c}\right)^2 + \left(\frac{a-b+c}{b}\right)^2 + \left(\frac{-a+b+c}{a}\right)^2$$

Problem 18. จงหาจำนวนจริงทั้งหมดที่สอดคล้องสมการ $1 - 2^x - 3^x + 4^x - 6^x + 9^x = 0$

Problem 19. ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง โดยที่ $(\sqrt{a^2+1} - a)(\sqrt{b^2+1} + b) = 1$ จงหาค่าของ $a - b$

Problem 20. จงหาค่า k ที่น้อยที่สุดที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 4d^2 = a + 2b + 3c + 4d + 5k$$

Problem 21. จงหาคำตอบที่เป็นจำนวนจริงของระบบสมการต่อไปนี้

$$x(1 + y + y^2) = 1 + x + x^2$$

$$y(1 + z + z^2) = 1 + y + y^2$$

$$z(1 + x + x^2) = 1 + z + z^2$$

Problem 22. ให้ a, b, c, d เป็นจำนวนจริงซึ่ง

$$1 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a + b + c + d$$

จงหาค่าของ

$$a^2 + b^2 + c^2$$

Problem 23. จงหาค่าต่ำสุดของ

$$x^3 + x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$$

เมื่อ $x > 0$

Problem 24. ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{2}{3}(ab + bc + ca)$ จงหาค่าของ $a + b + c$

Problem 25. จงหาคำตอบที่เป็นจำนวนจริงของระบบการต่อไปนี้

$$x(1 + y + y^2) = 1 + z + z^2$$

$$y(1 + z + z^2) = 1 + x + x^2$$

$$z(1 + x + x^2) = 1 + y + y^2$$

Problem 26. ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวกซึ่งสอดคล้องกับระบบสมการ

$$\frac{8a^2}{a^2 + 9} = b, \frac{10b^2}{b^2 + 16} = c, \frac{6c^2}{c^2 + 25} = a$$

Problem 27. จงแก้ระบบสมการ

$$a(b - c + 1) = b^2 - bc + c$$

$$b(c - a + 1) = c^2 - ca + a$$

$$c(a - b + 1) = a^2 - ab + b$$

Problem 28. ให้ x เป็นจำนวนจริง จงหาค่าต่ำสุดที่เป็นไปได้ของ

$$(x - 1)^2 + (x - 2)^2 + \dots + (x - 5)^2$$

Problem 29. จงหาค่าต่ำสุดของ $\frac{5-4x+x^2}{2-x}$ เมื่อ $x < 2$

Problem 30. กำหนด a, b, c, d เป็นจำนวนจริง ซึ่ง

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 3a + 8b + 24c + 37d, 2018 = 3b + 8c + 24d + 37a$$

Problem 31. จงแยกตัวประกอบพหุนาม $x^4 - 1$

Problem 32. จงหาจำนวนจริง x ซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$$4^x + 4^{-x} = 2^x + 2^{-x}$$

Problem 33. จงหาคำตอบของสมการ

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 1$$

Problem 34. จงหาจำนวนจริง k ที่ทำให้ สมการพหุนาม

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = k$$

มีรากเป็นจำนวนจริงทั้งหมด

Problem 35. ถ้า $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8) = 945$ และ x เป็นจำนวนจริงแล้ว x เท่ากับเท่าใด

Problem 36. จงหารากที่เป็นจำนวนจริงของ

$$(x+1)(x-2)(x+6)(x-3) = 28x^2$$

Problem 37. จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$\frac{2^x + 2^{-x}}{3^x + 3^{-x}} = \frac{4^x + 4^{-x}}{9^x + 9^{-x}}$$

Problem 38. จงหาคำตอบที่เป็นจำนวนจริงของระบบสมการ

$$2z = w + \frac{13}{w}, 2w = x + \frac{13}{x}, 2x = y + \frac{13}{y}, 2y = z + \frac{13}{z}$$

Problem 39. จงหารากทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $x^4 + 16x - 12 = 0$

Problem 40. กำหนดให้ x, y, z เป็นจำนวนบวกซึ่ง

$$x + y + xy = 8$$

$$y + z + yz = 15$$

$$z + x + zx = 35$$

จงหาค่าของ $x + y + z + xy$

Problem 41. จงหาจำนวนจริง x ทั้งหมดที่ทำให้ $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x - 1}$

Problem 42. กำหนด x, y, z เป็นจำนวนจริงจงแก้ระบบสมการ

$$(x - 1)(y - 1)(z - 1) = xyz - 1$$

$$(x - 2)(y - 2)(z - 2) = xyz - 2$$

Problem 43. ให้ x, y เป็นจำนวนจริงซึ่ง

$$3^x + \left(\frac{1}{4}\right)^y = 31$$

$$9^x + \left(\frac{1}{2}\right)^y = 731$$

จงหา (x, y)

Problem 44. สัมประสิทธิ์ของ x^{88} จากการคูณ

$$(x + 1)(x + 2)(x - 3)(x + 4)(x + 5)(x - 6) \dots (x + 88)(x + 89)(x - 90)$$

มีค่าเท่าใด

Problem 45. กำหนด $S = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1000000}}$ ส่วนที่เป็นจำนวนเต็มของ $\frac{S}{2}$ มีค่าเท่าใด

Problem 46. มีสามสิ่งอันดับ (x, y, z) ที่เป็นจำนวนจริงซึ่ง

$$x + y^2 = z^3, x^2 + y^3 = z^4, x^3 + y^4 = z^5$$

ทั้งหมดมีกี่อันดับ

Problem 47. ให้ x เป็นจำนวนจริง ซึ่ง

$$\frac{\sqrt{x + 54} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + 54} - \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x - 1} + \sqrt{2}}{\sqrt{x - 1} - \sqrt{2}}$$

จงหา x

Problem 48.

$$\frac{2563\sqrt{x + 4} + 2020\sqrt{x}}{2563\sqrt{x + 4} - 2020\sqrt{x}} = \frac{2563\sqrt{x - 3} + 2020\sqrt{5}}{2563\sqrt{x - 3} - 2020\sqrt{5}}$$

Problem 49. ให้ x เป็นจำนวนจริง ซึ่ง

$$\frac{1+x+\sqrt{x^2-x+1}}{2-x+\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{x}{1-x}$$

Problem 50. กำหนด a, b, c ซึ่ง

$$a^2 + b^2 + c^2 = 61$$

$$ab + bc + ca = 54$$

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 1044$$

จงหา $a^3 + b^3 + c^3$

Problem 51. กำหนด x, y ซึ่ง

$$x^3 - 3xy^2 = 23$$

$$y^3 - 3x^2y = 10\sqrt{2}$$

จงหา $x^2 + y^2$

Problem 52. จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^7 จากการกระจายพหุนาม

$$(6x^3 + 5x^2 - 4x + 1)^3$$

Problem 53. ให้ x, y เป็นจำนวนจริงจากระบบสมการ

$$x + y + \sqrt{x^2 - y^2} = 12$$

$$y\sqrt{x^2 - y^2} = 12$$

Problem 54. สำหรับจำนวนจริง x, y ใดๆ กำหนดฟังก์ชัน f ดังนี้

$$f(x) = (2x)^3 - 30(x-1)(2x-3)$$

จงหาค่าของ $f(2563) + f(-2558)$

Problem 55. กำหนด a, b, c ซึ่ง

$$a^2 + (b-30)(c-26) = 309$$

$$b^2 + (c-28)(a-31) = 262$$

$$c^2 + (a-26)(b-27) = 582$$

จงหา $a + 2b + 3c$

Problem 56. กำหนด x, y, z ซึ่ง

$$x + y + z = 2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3$$

$$xyz = 4$$

จงหาค่าของ $\frac{1}{xy+z-1} + \frac{1}{yz+x-1} + \frac{1}{zx+y-1}$

Problem 57. จงหาค่าของ

$$\left(1 - \frac{1}{1+2}\right)\left(1 - \frac{1}{1+2+3}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{1+2+\dots+2563}\right)$$

Problem 58. ให้ a, b เป็นจำนวนจริงจงแก้ระบบสมการ

$$a + \frac{3a-b}{a^2+b^2} = 3$$

$$b - \frac{a+3b}{a^2+b^2} = 0$$

Problem 59. ถ้า $a^{4x} = \sqrt{97 - 7\sqrt{192}}$ จงหาค่าของ $\frac{a^{6x} + a^{-6x}}{a^{2x} + a^{-2x}}$

Problem 60. ให้ x, y เป็นจำนวนจริง ซึ่ง

$$x^3 + y^3 = 1957$$

และ

$$(x+y)(x+1)(y+1) = 2014$$

จงหาค่าของ $x+y$

Problem 61. ให้ x, y เป็นจำนวนจริงซึ่ง

$$(x - \sqrt{x^2 - 2018})(y - \sqrt{y^2 - 2018}) = 2018$$

จงหาค่าของ $5x^2 - 4y^2 + 3x - 3y - 2017$

Problem 62. ให้ x, y เป็นจำนวนจริง จงแก้ระบบสมการ

$$x(x+3)(x+y) = 8$$

$$x^2 + 4x = 6 - y$$

Problem 63. หารากที่เป็นจำนวนจริงของสมการ

$$(x^2 - x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 + 2x + 4)$$

Problem 64. กำหนด x, y, z ซึ่ง

$$x - \sqrt{yz} = -15$$

$$y - \sqrt{zx} = 3$$

$$z - \sqrt{xy} = 21$$

จงหา $61(x + y + z)$

Problem 65. ให้ x, y เป็นจำนวนจริง ซึ่ง

$$x + y = 4$$

$$|z + 1| = xy + 2y - 9$$

จงหา $x + 2y + 3z$

Problem 66. ให้ k เป็นจำนวนจริงซึ่ง

$$\sqrt{k + \sqrt{k}} - \sqrt{k - \sqrt{k}} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{k}{k + \sqrt{k}}}$$

จงหาผลรวมของ k

Problem 67. จงหาจำนวนจริง x ซึ่ง $\sqrt{3 - \sqrt{3 + x}} = x$

Problem 68. กำหนดให้

$$x = \frac{2}{\sqrt{400} - \sqrt{396}}$$

$$y = \frac{3}{\sqrt{900} - \sqrt{891}}$$

หา $(11x^{2020})(233y^{2020})$

Problem 69. กำหนด a, b, c ซึ่ง

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{5} - \frac{z}{7} = 12$$

$$\frac{x}{18} - \frac{y}{10} + \frac{z}{8} = 5$$

$$\frac{x}{2} - \frac{y}{20} - \frac{z}{28} = 14$$

จงหา $y(z - x)$

Problem 70. หา n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง

$$\frac{(3(n+1))!(n+19)!}{(n+21)!(3n+1)!} = \frac{n}{9}$$

Problem 71. $\frac{2020^4 + 3 \times 2020^3 - 3 \times 2020^2 + 6 \times 2020 + 8}{2020^3 - 2020^2 + 2020 + 2}$

Problem 72. กำหนด x, y ซึ่ง

$$(x + \frac{1}{y})(y + \frac{1}{x}) = 7$$

หา

$$(x^2 + \frac{1}{y^2})(y^2 + \frac{1}{x^2})$$

Problem 73. หาจำนวนจริง a, b, c ซึ่ง

$$\sqrt{a-4b+52} + 2\sqrt{b-4c+64} + 3\sqrt{c-4a+42} + 12\sqrt{3}\sqrt{a+b+c} = 158$$

Problem 74. หา x ที่เป็นจำนวนจริง ซึ่ง

$$\frac{x-30}{60} + \frac{x-60}{30} = \frac{60}{x-30} + \frac{30}{x-60}$$

Problem 75. หา a เป็นจำนวนจริง ซึ่ง

$$\frac{a^2 + 8a + 20}{a+4} - \frac{a^2 + 6a + 12}{a+3} = \frac{a^2 + 4a + 6}{a+2} - \frac{a^2 + 2a + 2}{a+1}$$

Problem 76. กำหนด a, b, c ซึ่ง

$$a = \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}$$

$$b = \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5}$$

$$c = -\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$$

หา

$$\frac{a^4}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^4}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^4}{(c-a)(c-b)}$$

Problem 77. หารากทั้งหมดของสมการ

$$\frac{13x - x^2}{x+1} \left(x + \frac{13-x}{x+1} \right) = 42$$

Problem 78. กำหนด a, b, c ซึ่ง

$$\frac{ab}{a+b} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{bc}{b+c} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{ca}{c+a} = \frac{1}{5}$$

หา

$$\frac{24abc}{ab+bc+ca}$$

Problem 79. ให้ y เป็นจำนวนจริง ซึ่ง

$$(y+7)(y-3) + \left(\frac{12}{y+2}\right)^2 = 0$$

หาผลรวมกำลังสองของ y ที่เป็นไปได้

Problem 80. ให้จงหา x, y, z เป็นจำนวนจริงบวก ซึ่ง

$$x(8-y) = 16$$

$$y(8-z) = 16$$

$$z(8-x) = 16$$

Problem 81. ให้ หา x, y, z เป็นจำนวนจริง ซึ่ง

$$x^3 + \frac{1}{3}y = x^2 + x - \frac{4}{3}$$

$$y^3 + \frac{1}{4}z = y^2 + y - \frac{5}{4}$$

$$z^3 + \frac{1}{5}x = z^2 + z - \frac{6}{5}$$

Problem 82. ให้ p, q เป็นจำนวนจริง ซึ่ง

$$2563p - 5126\sqrt{p} + 10252q - 10252\sqrt{q} + 10252\sqrt{pq} = 7689$$

หา

$$\frac{\sqrt{p} + 2\sqrt{q} + 2560}{4 - \sqrt{p} - 2\sqrt{q}}$$