HOMEWORK

S. Suebsang

July 17, 2021

Identity I

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

จากเอกลักษณ์ I จะเห็นได้ว่า $a^3+b^3+c^3-3abc=0 \iff a+b+c=0$ หรือ $a=b=c$

Example 0.1

ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ จงหาคู่อันดับ (x,y) ของจำนวนนับทั้งหมด ซึ่ง

$$x^3+y^3-3xy=p-1$$

Proof. กำหนดให้ $z=1$ จะเขียนสมการใหม่ได้เป็น $x^3+y^3+z^3-3xyz=p$ นั่นคือ

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)=p$$

เนื่องจาก x,y,z ทำให้ $x+y+z\geq 3$ ดังนั้น $x+y+z=p$ และ $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=1$

$$\begin{gathered}x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=1\\(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2=2\end{gathered}$$

เนื่องจาก $x,y\geq 1$ กรณี $x,y\geq 2$ ทั้งคู่จะเป็นได้กรณีเดียวคือ $x=y=2$ กรณี x หรือ y เท่า 1 โดยไม่เสียนัยให้ $y=1$ จะได้ $x=2$ แต่ $x+y+z=4$ ไม่เป็นจำนวนเฉพาะดังนั้นกรณีนี้ไม่เกิดจะได้คำตอบ $(x,y)=(2,2)$ เท่านั้น

$\square$

Identity II

กำหนดให้ $abc=1$ จะได้

$$\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}=1$$

จากเงื่อนไข $abc = 1$ เราจะสามารถแทน $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$

Example 0.2

ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวก ซึ่ง $abc = 1$ จงแสดงว่า

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{2}{(a+1)^2 + b^2 + 1} \leq 1$$

Proof. จาก $(a+1)^2 + b^2 + 1 = (a^2 + b^2) + 2a + 2$ โดย AM-GM และใช้ ll จะได้

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{2}{(a+1)^2 + b^2 + 1} \leq \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{ab + a + 1}$$
$$\sum_{\text{cyc}} \frac{2}{(a+1)^2 + b^2 + 1} \leq 1$$

$\square$

Example 0.3

พิจารณาจำนวนนับ $n \geq 2$, เศษจากการหาร 2^{2^n} ด้วย $2^n - 1$ จะอยู่ในรูปกำลังของ 4 จงแสดงว่าข้อความข้างต้นจริงถ้าไม่จริงยกตัวอย่างค้าน

Example 0.4

จงแสดงว่า

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \binom{n}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Example 0.5

หาคู่อันดับของจำนวนนับ (n, k) ทั้งหมด ซึ่ง

$$(n+1)^k = n! + 1$$

Example 0.6

ให้ $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ จงแสดงว่า

$$\sqrt{x(y+1)} + \sqrt{y(z+1)} + \sqrt{z(x+1)} \leq \sqrt{(x+1)(y+1)(z1)}$$