Problems

Sarawut Suebsang

July 23, 2021

§1 Number theory

Example 1.1

ให้ m, n เป็นจำนวนเต็มบวกโดยที่ $\gcd(m, n) = 1$, m เป็นจำนวนคู่และ n เป็นจำนวนคี่ จงหาค่าของ

$$\frac{1}{2n} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{\left\lfloor \frac{km}{n} \right\rfloor} \left\{ \frac{km}{n} \right\}$$

Proof. ให้ $r_k = (km \mod n)$ จะได้ $\left\{ \frac{km}{n} \right\} = \frac{r_k}{n}$ และ $\left\lfloor \frac{km}{n} \right\rfloor = \frac{km - r_k}{n}$ พิจารณา

$$\frac{km - r_k}{n} \equiv r_k \pmod 2$$

จะได้ $(-1)^{\left\lfloor \frac{km}{n} \right\rfloor} = (-1)^{r_k}$ และจาก $\gcd(m, n) = 1$ แสดงว่า $(km \mod n), k = 1, 2, \ldots, n-1$ ต่างกันหมด ดังนั้นจากโจทย์จะเขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{1}{2n} + \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^r r = \frac{1}{2}$$

□

Example 1.2

จงหาจำนวนเฉพาะ p ทั้งหมด ซึ่ง $p = m^2 + n^2$ และ p หาร $m^3 + n^3 - 4$ ลงตัว สำหรับจำนวนเต็มบวก m, n บางค่า

Proof.

$$(m+n)^2 \equiv 2mn \pmod p$$

จะได้

$$\begin{aligned}
(m+n)^3 &\equiv m^3 + n^3 + 3mn(m+n) \pmod p \\
m^3 + n^3 &\equiv (m+n)^3 - 3mn(m+n) \pmod p \\
2(m^3 + n^3) &\equiv 2(m+n)^3 - 3(m+n)(2mn) \pmod p \\
2(m^3 + n^3) &\equiv -(m+n)^3 \pmod p
\end{aligned}$$

จาก $m^3+n^3-4\equiv 0 \pmod p$ จะได้ $(m+n)^3+8\equiv 0 \pmod p$ นั่นคือ

$$p|(m+n+2)((m+n)^2-2(m+n)+4)$$

จะได้

$$p|m+n+2 \text{ หรือ } p|2mn-4(m+n)+4$$

ในกรณี $p=2,5$ เห็นชัดว่าสอดคล้องกับที่โจทย์ต้องการ พิจารณา กรณี $p\geq 13$ จะได้

$$p|m+n+2 \text{ หรือ } p|mn-(m+n)+2$$

จาก $p=m^2+n^2$ จะได้ $max\{m,n\}>\sqrt{\frac{13}{2}}$ นั่นคือ $max\{m,n\}\geq 3$
ดังนั้น $m(m-1)+n(n-1)>2$ หรือ $p>m+n+2$จะได้ $p\not|m+n+2$
จะได้ $p|mn-(m+n)+2$ เท่านั้น , $mn-(m+n)+2=(m-1)(n-1)+1>0$ เนื่องจาก $max\{m,n\}^2>(m-1)(n-1)$ จะได้ $p>(m-1)(n-1)+1$ ดังนั้นกรณีนี้ไม่มีคำตอบ □

Theorem (triangle inequality of floor function)
ให้ $a,b\in\mathbb{R}$

$$\lfloor a+b\rfloor\geq\lfloor a\rfloor+\lfloor b\rfloor$$

Theorem (Legendre's formula)
สำหรับ p เป็นจำนวนเฉพาะให้ $v_p(n)$ คือเลขชี้กำลังที่มากของสุดของ p ซึ่งหาร n ลงตัว จะได้

$$v_p(n!)=\sum_{i=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{n}{p^i}\right\rfloor$$

Example 1.3
ให้ $a_1,a_2,\ldots,a_k$ เป็นจำนวนเต็มบวก และ $d=\gcd(a_1,a_2,\ldots,a_k)$ และ $a_1+a_2+\cdots+a_k=n$ จงแสดงว่า $\frac{d(n-1)!}{a_1!a_2!\ldots a_k!}$ เป็นจำนวนเต็ม

Proof. ก่อนอื่นจะพิจารณาสมบัติที่ต้องใช้แก้โจทย์

Claim — ให้ $a,b\in\mathbb{Z}$ ถ้า $b\not|a$ แล้ว$\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{a-1}{b}\right\rfloor$

เนื่องจาก $b\not|a$ ให้ $a=bq+r$ เมื่อ $0<r<b$ จะได้ $q=\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{a-1}{b}\right\rfloor$
ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะใดๆ ต่อไปเราจะแสดงว่า $v_p(d(n-1)!)\geq\sum_{i=1}^{k}v_p(a_i!)$
เราจะใช้ triangle inequality of floor function และ Legendre's formula เพื่อแสดงอสมการข้างต้น
$v_p(d(n-1)!)=v_p(d)+v_p((n-1)!)=v_p(d)+\sum_{i=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{n-1}{p^i}\right\rfloor$ และ $\sum_{j=1}^{k}v_p(a_j)=\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{a_j}{p^i}\right\rfloor$
จัดรูปอสมการใหม่จะได้

$$v_p(d)+\sum_{i=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{n-1}{p^i}\right\rfloor\geq\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{a_j}{p^i}\right\rfloor$$

หรือ

$$v_p(d) + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\left\lfloor \frac{n-1}{p^i} \right\rfloor - \sum_{j=1}^{k} \left\lfloor \frac{a_j}{p^i} \right\rfloor \right) \geq 0$$

ในกรณี $p \nmid d$ จะได้ $v_p(d) = 0$ และจะมี l ซึ่ง $p \nmid a_l$ จากที่ Claim ไว้จะได้ $\left\lfloor \frac{a_l}{p^i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a_l - 1}{p^i} \right\rfloor$ ดังนั้นเราสามารถเปลี่ยน a_l เป็น $a_l - 1$ และจาก triangle inequality of floor function ทำให้ได้

$$\left\lfloor \frac{n-1}{p^i} \right\rfloor \geq \sum_{j=1}^{k} \left\lfloor \frac{a_j}{p^i} \right\rfloor$$

ดังนั้นอสมการที่เราต้องการแสดงเป็นจริงในกรณี $p \nmid d$
กรณี $p \mid d$ ถ้าหาก $i > v_p(d)$ใช้เหตุผลคล้ายกรณีแรกจะได้

$$\left\lfloor \frac{n-1}{p^i} \right\rfloor \geq \sum_{j=1}^{k} \left\lfloor \frac{a_j}{p^i} \right\rfloor$$

ถ้าหาก $i \leq v_p(d)$ เราจะแบ่ง 1 จาก $v_p(i)$ ให้กับแต่ละวงเล็บ $i \leq v_d(p)$ ซึ่งเพียงพอที่จะพิสูจน์

$$1 + \left\lfloor \frac{n-1}{p^i} \right\rfloor \geq \sum_{j=1}^{k} \left\lfloor \frac{a_j}{p^i} \right\rfloor$$

ซึ่งเป็นจริงจาก $1 + \left\lfloor \frac{n-1}{p^i} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$ และ triangle inequality of floor function □

Theorem (primitive roots)

ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ จะมีจำนวนเต็ม g เรียกว่า primitive root ซึ่ง order ของ g ใน modulo p เท่ากับ $p - 1$

Order ของ a ใน modulo p = k หมายถึงจำนวนเฉพาะที่เล็กที่สุดที่ $a^k \equiv 1 \pmod{p}$

Example 1.4

ให้ $p \geq 2$ เป็นจำนวนเฉพาะ จงหาค่า k ทั้งหมดซึ่ง $S_k = 1^k + 2^k + \cdots + (p-1)^k$ หารด้วย p ลงตัว

Proof. ให้ g เป็น primitive root ใน modulo p
จะได้ $\{1^k, 2^k, \ldots, (p-1)^k\} = \{g^{1k}, g^{2k}, \ldots, g^{(p-1)k}\}$ ใน modulo p
ในกรณี $p - 1 \mid k$ จะได้ $S_k \equiv -1 \pmod{p}$
ในกรณี $p - 1 \nmid k$ จะได้

$$\begin{aligned} S_k &\equiv g^{1k} + g^{2k} + \cdots + g^{(p-1)k} \pmod{p} \\ &\equiv \frac{g^k(g^{k(p-1)} - 1)}{g^k - 1} \pmod{p} \\ &\equiv 0 \pmod{p} \end{aligned}$$

ทุก $k \in \mathbb{N}$ โดยที่ $p - 1 \nmid k$ จะสอดคล้องกับที่โจทย์ต้องการ □

Example 1.5

ให้ $p \geq 3$ เป็นจำนวนเฉพาะ นิยาม

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k^{120}, f(p) = \frac{1}{2} - \left\{\frac{F(p)}{p}\right\} \text{ โดยที่ } x = x - \lfloor x \rfloor$$

จงหาค่าของ $f(p)$

Proof. จาก $i^2 \equiv (p-i)^2 \pmod p$ ดังนั้น $2F(p) \equiv 1^{120} + 2^{120} + \ldots (p-1)^{120} \pmod p$ จากข้อก่อนหน้าจะได้ $2F(p) \equiv \begin{cases} 0, & \text{if } p-1 \nmid 120 \\ p-1, & \text{otherwise} \end{cases}$ และ $\left\{\frac{F(p)}{p}\right\} = \frac{F(p) \mod p}{p}$

นั่นคือ $f(p) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if } p-1 \nmid 120 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{p}(2^{-1}(-1) \mod p) & \text{otherwise} \end{cases}$

$\square$

Example 1.6

ให้ $p \geq 3$ เป็นจำนวนเฉพาะ จงหาฟังก์ชัน $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ทั้งหมดซึ่ง สำหรับแต่ละ $m, n \in \mathbb{Z}$
1. ถ้า $m \equiv n \pmod p$ แล้ว $f(m) = f(n)$ 2. $f(mn) = f(m)f(n)$

Proof. ให้ g เป็น primitive root ใน modulo p พิจารณา $f(0) = f(0)^2$
ดังนั้น $f(0) = 1$ หรือ $f(0) = 0$
กรณี $f(0) = 1$, $f(0) = f(n)f(0)$ จะได้ $f(n) = 1$ ทุก $n \in \mathbb{Z}$
กรณี $f(0) = 0$ พิจารณา $f(1) = f(1)^2$ ดังนั้น $f(1) = 1$ หรือ $f(1) = 0$
กรณี $f(1) = 0$ จะได้ $f(g)^{p-1} = f(1) = 0$ ดังนั้น $f(n) = 0$ ทุก $n \in \mathbb{Z}$
กรณี $f(1) = 1$ จะได้ $f(g)^{p-1} = 1$ นั่นคือ $f(g) = 1$ หรือ $f(g) = -1$ ถ้า $f(g) = 1$ จะได้ $f(n) = 1$ ทุก $n \in \mathbb{Z}/\{0\}$ ถ้า $f(g) = -1$ จะได้ $f(n) = (-1)^k$ เมื่อ $g^k \equiv n \pmod p$

$\square$

Example 1.7

จงหาจำนวนเฉพาะ p ทั้งหมด ที่ทำให้ $\binom{100}{p} + 7$ หารด้วย p ลงตัว

Proof. พิจารณา ในกรณี$p \mid \binom{100}{p}$ จะได้ $p = 7$ ในกรณี $p \nmid \binom{100}{p}$ แสดงได้ไม่ยากว่า $50 < p < 100$ พิจารณา $\binom{100}{p} = \frac{100 \cdot 99 \ldots p \ldots (100-(p-1))}{p(p-1)!} = \frac{S}{(p-1)!}$ สังเกตว่าเดิม S' ประกอบด้วย $\{100, 99, ..., (100-(p-1))\} = \{0, 1, 2, ..., p-1\}$ ใน mod p การตัด p ออกเหมือนเป็นการเอา ศูนย์ออกจะได้ S ประกอบด้วย $\{1, 2, 3, ..., p-1\}$ นั่นคือ $S \equiv 1 \cdot 2 \ldots \cdot (p-1) \equiv -1 \pmod p$ จาก Wilson's theorem จะได้ $\binom{100}{p}((p-1)!) \equiv S \equiv -1 \pmod p$ จาก Wilson's theorem อีกรอบได้ $\binom{100}{p} + 7 \equiv 8 \pmod p$ ดังนั้น $p = 7$ $\square$

Example 1.8

จงหาจำนวนเต็มบวก N ทั้งหมดที่มีตัวประกอบเฉพาะอย่างน้อยสองจำนวนและ N มีค่าเท่ากับผลบวกของกำลังสองของตัวหารบวกที่มีค่าน้อยที่สุด 4 จำนวนแรก

Proof. ให้ตัวที่น้อยที่สุด 4 อันดับแรกเป็น $1, d_1, d_2, d_3$ โดย $1 < d_1 < d_2 < d_3$ และ $1^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = N$ พิจารณา $\pmod 2$ สมมุติ $2 \nmid N$ จะได้ $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \equiv 0 \pmod 2$ ขัดแย้ง ดังนั้น $2 \mid N$ ราจะได้ $d_1 = 2$ ต่อไป จะแสดง $4 \nmid N$ สมมุติ $4 \nmid N$ จะได้ $1^2 + 2^2 + d_2^2 + d_3^2 \equiv 0 \pmod 4$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ดังนั้น $2||N$ ต่อไปพิจารณา พิจาณา $\pmod 4$ อีกครั้งจะได้ ซึ่งจะได้ d_2, d_3 ต้องมีตัวใดตัวนึงหาร 2 เห็นได้ชัดว่า $d_2 = p$ บางจำนวนเฉพาะ p และ $d_3 = 2p$ จากโจทย์เขียนใหม่ได้เป็น $1^2 + 2^2 + p^2 + (2p)^2 = N$ จัดรูปจะได้ $5(p^2 + 1) = N$ ในกรณี $p = 3$ เห็นได้ชัดว่าเป็นไปไม่ได้ดังนั้น $p = 5$ จะได้ $N = 130$ ซึ่งตรวจสอบได้ไม่ยากว่าสอดคล้อง □

Example 1.9

ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม และ p เป็นจำนวนเฉพาะ สำหรับแต่ละจำนวนนับ k ใดๆ กำหนด$A_k = \{n \in \mathbb{N} : p^k | a^n - b^n\}$ จงแสดงว่าถ้า $A_1 \neq \emptyset$ แล้ว $A_k \neq \emptyset$ สำหรับทุก จำนวนนับ k

Proof. จากโจทย์เพียงพอที่จะแสดงทุก k จะมี n ซึ่ง $p^k \mid a^n - b^n$ จะพิสูจน์โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $p^n \mid a^{p^n} - b^{p^n}$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ

ขั้นฐาน $P(1)$ จริงโจทย์กำหนด

ขั้นอุปนัย สมมุติ $P(n)$ จริงเมื่อ $n \geq 1$ จะแสดง $P(n+1)$ เป็นจริง พิจารณา

$$a^{p^{n+1}} - b^{p^{n+1}} = (a^{p^n} - b^{p^n})(a^{p^n(p-1)} + a^{p^n(p-2)}b^{p^n} + \cdots + b^{p^n(p-1)}) = (a^{p^n} - b^{p^n})(S)$$

เพียงพอที่จะแสดง $p|S$ และจากโจทย์กำหนดจะได้ $a \equiv b \pmod p$

$$S \equiv pa^{p^n(p-1)} \equiv 0 \pmod p$$

ดังนั้น $P(n+1)$ เป็นจริง จากหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงทุก $n \in \mathbb{Z}$

□

Example 1.10

ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ จงหาเศษจากการหาร $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} k!(p-k)!$ ด้วย p

Proof.

$$\begin{aligned}
k! &\equiv (-1)^{k-1}(-1)(-2)\ldots(-(k-1))k \pmod p \\
&\equiv (-1)^{k-1}(p-1)(p-2)\ldots(p-(k-1))k \pmod p \\
k!(p-k)! &\equiv k(-1)^{k-1}(p-1)! \pmod p \\
&\equiv k(-1)^k \pmod p \text{ จาก Wilson 's theorem}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\sum_{k=0}^{p} k!(p-k)! \equiv \sum_{k=0}^{p} k(-1)^k \equiv \frac{p-1}{2} \pmod p$ □

Example 1.11

จงหา (a,b,c) ของจำนวนเต็มบวกทั้งหมดซึ่ง $(1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b})(1+\frac{1}{c})=2$

Proof. โดยไม่เสียนัยให้ $a \geq b \geq c$ สมมุติ $c \geq 4$ ซึ่งจะได้ $2 > \frac{125}{64} \geq (1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b})(1+\frac{1}{c})$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ดังนั้น $3 \geq c$ ต่อไปเราจะพิจารณา $c=1,2,3$ ตามลำดับ

กรณี $c=1$ จะได้ $(1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b})>1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

กรณี $c=2$ จะได้ $(1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b})=\frac{4}{3}$ จัดรูปใหม่ได้ $(a-3)(b-3)=12$ ซึ่งแยกกรณีหา a,b ได้ไม่ยาก

กรณี $c=3$จะได้ $(1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b})=\frac{3}{2}$ จัดรูปใหม่ได้ $(a-2)(b-2)=3$ ซึ่งแยกกรณีหา a,b ได้ไม่ยาก

□

Example 1.12

จงหาจำนวนสองหลัก $n=10a+b$ โดยที่ $a,b\in\{0,1,2,\ldots,9\}$ ซึ่ง ทุกจำนวนเต็ม k $n|k^a-k^b$

Proof. ไอเดียในการทำข้อนี้คือพิจารณาจำนวนเฉพะที่หาร n แล้วเลือก k ที่เป็น primitive root ของจำนวนเฉพาะที่หาร n ลงตัว เห็นได้ชัดว่าถ้า $a=b$ จะเป็นจริงหมด ดังนั้นจะพิจารณา $a\neq b$ ถ้า a,b มีตัวใดตัวหนึ่งเป็นศูนย์เราสามารถเลือก $k=n$ เพื่อหาข้อขัดแย้งได้ยกเว้นกรณี $n=1$ ดังนั้น n จะเป็นเลขสองหลักสมมุติ n มีตัวประกอบจำนวนเฉพาะที่ ≥ 11 เลือก $k=g$ ซึ่งเป็น primitive root ของ p จะได้ $p|g^{\min\{a,b\}}(g^{|a-b|}-1)$ ได้ $p|g^{|a-b|}-1$ แต่ $|a-b|\leq 9$ ซึ่งขัดแย้งเพราะ $p-1$ จะต้องหาร $|a-b|$ ดังนั้น n จะต้องประกอบด้วยจำนวนเฉพาะ $2,3,5,7$ และ มี 2 หลัก และถ้า p เป็นตัวประกอบของ n $p-1$ จะต้องหาร $|a-b|$ ซึ่งสามารถไล่กรณีได้ไม่ยาก □

Example 1.13

กำหนดให้ $x_1,x_2,\ldots,x_k$ เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $x_1+x_2+\cdots+x_k=1492$ จงแสดงว่า

$$x_1^7+x_2^7+\cdots+x_k^7\neq 1998$$

Proof. พิสูจน์ได้ไม่ยากว่า $x^7\equiv x \pmod 3$ ทุก $x\in\mathbb{Z}$

$$x_1+x_2+\cdots+x_k\equiv x_1^7+x_2^7+\cdots+x_k^7 \pmod 3$$

ดังนั้น

$$x_1^7+x_2^7+\cdots+x_k^7\equiv 1492\equiv 1 \pmod 3$$

แต่ $1998\equiv 0 \pmod 3$ ดังนั้น $x_1^7+x_2^7+\cdots+x_k^7\neq 1998$ □

Example 1.14

กำหนดให้ $p_1<p_2<\cdots<p_{31}$ เป็นจำนวนเฉพาะ ถ้า 30 หาร $p_1^4+p_2^4+\cdots+p_{31}^4$ ลงตัว จงแสดงว่ามี k ซึ่ง p_k,p_{k+1},p_{k+2} เป็นจำนวนเฉพาะที่เรียงติดกัน

Proof. ข้อนี้เพียงพอที่จะแสดงว่า $2, 3, 5$ อยู่ในอันดับ p_i สมมุติไม่มี 2 ในลำดับ a_i จะได้ $p_i^4 \equiv 1 \pmod 2$ จะได้ $\sum_{i=1}^{31} p_i^4 \equiv 1 \pmod 2$ ซึ่งขัดแย้งกับที่โจทย์กำหนดดังนั้นมี 2 ในลำดับ ในทำนองเดียวกันกับ mod 3 และ mod 5 จะได้ $2, 3, 5$ อยู่ในลำดับ p_i ☐

Example 1.15

จงหาจำนวนเฉพาะ p ทั้งหมดที่ทำให้ $2p^2 - 3p - 1$ เป็นกำลังสามของจำนวนเต็มบวก

Proof. TMO 2014 ☐

Example 1.16

จงหาพหุนาม $P(x)$ ทั้งหมดที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $2557^n + 213 \cdot 2014$ หารด้วย $P(n)$ ลงตัว สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n

Proof. TMO 2014 ☐

Example 1.17

ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะที่อยู่ในรูป $4k + 3$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ ถ้า m และ n เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $p|m^2 + n^2$ แล้ว $p^2|m^2 + n^2$

Proof. ข้อนี้เพียงพอที่จะแสดง $p \mid n$ และ $p \mid m$ สมมุติ$p \nmid n$ เพื่อหาข้อขัดแย้งจะได้ $p \nmid n$ ด้วยดังนั้น $(m^{-1}n)^2 \equiv -1 \pmod p$ ให้ g เป็น primitive root ของ p จะมี $a \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $g^a \equiv m^{-1}n \pmod p$ ดังนั้น $((g^a)^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$ ซึ่งได้ $1 \equiv -1 \pmod p$ ขัดแย้ง ☐

Example 1.18

จงแสดงว่าไม่มีคู่อันดับ (x, y) ของจำนวนเต็ม ที่สอดคล้องกับสมการ $2560x^2 + 5x + 6 = y^5$

Proof.

$$5(512x^2 + 5x + 5 + 5) = (y - 1)(y^4 + y^3 + y^2 + y + 1)$$

แสดงได้ไม่ยากว่า $y \equiv 1 \pmod 5$ ทำให้ได้ $y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 \equiv 5 \equiv 0 \pmod 5$ ดังนั้น $5^2 \mid y^5 - 1$ พิจารณา mod 5 จะได้ $512x^2 + 5x + 5 + 5 \not\equiv 0 \pmod 5$ ดังนั้นขัดแย้ง ☐

Example 1.19

สำหรับจำนวนเต็มบวก n กำหนดให้ $S(n)$ แทนผลรวมของเลขโดดใน n จงหาจำนวนเฉพาะ p ทั้งหมดซึ่ง $S(p^{p+2}) = S((p+2)^p)$

Proof. ถ้า $p = 2$ เห็นชัดว่าจริงจะพิจารณากรณีอื่น จาก $S(p^{p+2}) = S((p+2)^p)$ พิจารณา mod 3 จะได้ $p^{p+2} \equiv (p+2)^p \pmod 3$ แสดงได้ไม่ยากว่า $p \neq 3$ กรณี $p \equiv 1 \pmod 3$ ได้ $p + 2 \equiv 0 \pmod 3$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ที่ $p^{p+2} \equiv (p+2)^p \pmod 3$ ต่อไปจะพิจารณากรณี $p \equiv 2 \pmod 3$ จะได้ $p + 2 \equiv 1 \pmod 3$ จะได้ $p^{p+2} \equiv 2 \pmod 3$ และ $(p+2)^p \equiv 1 \pmod 3$ ซึ่งขัดแย้ง ☐

§2 Combinatorics

Example 2.1

ให้ $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n = m$ เป็นจำนวนเต็มบวก ให้ b_k เป็นจำนวนจอง a_i ซึ่ง $a_i \geq k$ จงแสดงว่า

$$a_1 + a_2 + \ldots a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_m$$

Example 2.2

กำหนดให้ $A = \{2010, 2011, 2012, \ldots, 2553\}$ ให้หาจำนวนสมาชิกใน A ที่หารด้วยจำนวนเฉพาะน้อยกว่า 10 ลงตัว

Example 2.3

กระทรวงศึกษาธิการจัดกิจกรรมโดยสุ่มเลือกนักเรียน ชั้น ม.1 จำนวน 2010 คนจาก 5 ภูมิภาคทั่วประเทศ เพื่อให้นักเรียนคู่ใด ๆ เลือกถกปัญหาร่วมกันจำนวน 1 หัวข้อ จากปัญหา 3 หัวข้อคือ ปัญหาด้านการเมือง ปัญหาด้านเศรษฐกิจ และปัญหาด้านสังคม ให้แสดงว่าจะมีนักเรียน 3 คนซึ่งเกิดเดือนเดียวกัน เป็นเพศเดียวกัน มาจากภูมิภาคเดียวกัน และนักเรียนทุก ๆ คู่ใน 3 คนนี้เลือกถกปัญหาร่วมกันในหัวข้อเดียวกันหมด

Example 2.4

ให้ (V, E) เป็นกราฟจงแสดงว่า

$$\sum_{v \in V} \deg(v)^2 = \sum_{xy \in E} (\deg(x) + \deg(y))$$

Example 2.5

ในบางบริษัท ลูกจ้างแต่ละคนจะทำงานแค่ 10 วันต่อเดือนเท่านั้น นอกจากนี้ ทุกๆ ลูกจ้าง 3 คน จะมีวันที่ทำงสนร่วมกัน 1 วันเท่านั้น จงแสดงว่าบริษัทมีลูกจ้างอย่างมาก 19 คนเท่านั้น (สมมติให้ 1 เดือนมี 30 วัน)

Example 2.6

กำหนดให้ n จุดต่างกันบนระนาบหนึ่ง จงแสดงว่ามีน้อยกว่า $2n^{3/2}$ คู่อันดับซึ่งห่างกัน 1 หน่วย

Example 2.7

ในโรงละครสัตว์มีตัวตลก n คนโดยแต่งตัวและทาสีตัวเองโดยใช้สีต่างกัน 12 สีต่างกัน ตัวตลกแต่ละคนต้องการอย่างน้อย 5 สี วันหนึ่ง หวหน้าละครสัตว์ออกคำสั่งให้ไม่มีตัวตลก 2 คนใดๆ มีสีชุดเดียวกัน และไม่มี สีใดๆที่มีตัวตลกใช้อย่างน้อย 20 คน จงหาจำนวนตัวตลกที่มากที่สุด ที่ทำให้คำสั่งของหัวหน้าละครสัตว์เป็นไปได้