

## แนวข้อสอบคัดเข้าค่าย 3 วลัยลักษณ์

S. Suebsang

July 13, 2021

Problem 1. ให้  $a, b \in \mathbb{Z}$  ซึ่ง  $a^2 + b^2$  หารด้วย  $a + b$  ได้ผลหารคือ  $r$  จงหา  $a, b$  ทั้งหมดที่เป็นไปได้ซึ่ง  $q^2 + r = 2017$

Problem 2. ให้  $P(x) = (x+d_1)(x+d_2)\dots(x+d_9)$  เมื่อ  $d_1, d_2, \dots, d_9$  เป็นจำนวนเต็มที่แตกต่างกัน จงพิสูจน์ว่า "มีจำนวนเต็ม  $N$  ซึ่งสำหรับทุกจำนวนเต็ม  $x \geq N, p|P(x)$  บางจำนวนเฉพาะ  $p \geq 20$ "

Problem 3. ให้  $a, b \in \mathbb{N}$  จงพิสูจน์ว่า ถ้า  $4ab - 1 | (4a^2 - 1)^2$  แล้ว  $a = b$

Problem 4. ให้  $ABC$  เป็นสามเหลี่ยมซึ่ง  $AB = AC$  และให้  $D$  เป็นจุดกึ่งกลางของ  $AC$  เส้นแบ่งครึ่งมุม  $\angle BAC$  ตัดวงกลมที่ล้อมรอบ  $D, B$  และ  $C$  ที่จุด  $E$  ซึ่งอยู่ภายใน  $\triangle ABC$  เส้นตรง  $BD$  ตัดวงกลมที่ล้อมรอบ  $A, E$  และ  $B$  ที่จุด  $B$  และ  $F$  เส้นตรง  $AF$  และ  $BE$  ตัดกันที่จุด  $I$  และ เส้นตรง  $CI$  และ  $BD$  ตัดกันที่จุด  $K$  จงแสดงว่า  $I$  เป็นจุดกึ่งกลางของวงกลมแนบใน  $\triangle KAB$

Problem 5.  $a, b, c \in \mathbb{R}^+$  จงแสดงว่า

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \leq \frac{a^9 + b^9 + c^9}{a^3b^3c^3}$$

Problem 6.  $a, b, c \in \mathbb{R}^+, a + b + c = 1$  จงแสดงว่า

$$\sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ca} + \sqrt{c+ab} \leq 2$$

Problem 7. พิจารณาจุดทุกจุดในระนาบ ระบายสีจุดเหล่านั้นด้วยปากกาซึ่งมีอยู่ 2 สีได้แก่ ปากกาสีแดง และ ปากกาลี้น้ำเงิน จงพิสูจน์ว่ามีรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้าน  $1, 2\sqrt{3}$  หน่วย ที่มีจุดยอดทั้งสามเป็นสีเดียวกันทั้งหมด

Problem 8. กำหนดให้  $S = 1, 2, \dots, 16$  ทำการแบ่งเซต  $S$  ออกเป็น 3 เซตย่อย  $S = A \cup B \cup C$  โดยที่  $A \cap B = B \cap C = C \cap A = \emptyset$  และ  $A, B, C$  ไม่ใช่เซตว่าง จงพิสูจน์ว่า จะต้องมียุ่ 1 เซตย่อยเสมอจาก  $A, B, C$  ที่บรรจุเลข  $x, y, z$  (อาจซ้ำกันได้) ซึ่ง  $x + y = z$

Problem 9. กำหนดสี่เหลี่ยมที่มีวงกลมล้อมรอบได้  $ABCD$  ให้ด้าน  $|AB| = |CD| = a, |AD| = |BC| = b, |AC| = m$  และ  $|BD| = n$  ถ้า  $a^4 + b^4 = m^2 n^2$  จงหา  $\angle A$

Problem 10.  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}; f(n) + f(n+1) = f(n+2)f(n+3) - (p-1)$  เมื่อ  $p$  เป็นจำนวนเฉพาะ จงหาฟังก์ชัน  $f$

Problem 11.  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}; f(m+n) + f(mn-1) = f(m)f(n)$  จงหาฟังก์ชัน  $f$

Problem 12.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(xy) = xf(x) + yf(y)$  จงหาฟังก์ชัน  $f$

Problem 13. ให้  $p, q, r \in \mathbb{R}^+$  และ  $p + q + r = 1$  จงแสดงว่า

$$7(pq + qr + rp) \leq 2 + 9pqr$$

Problem 14. ให้  $a, b, c \in \mathbb{R}^+$  และ  $a + b + c = 1$  จงแสดงว่า

$$\frac{a+b}{ab} + \frac{b+c}{bc} + \frac{c+a}{ca} \geq 18$$

Problem 15. ให้  $p, q, r, x, y, z \in \mathbb{R}^+$  จงแสดงว่า

$$3(x+y+z)\left(\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z}\right) \geq (a+b+c)^3$$

Problem 16. ให้  $a, b, c, d$  เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ ซึ่ง  $a + c = b + d$  จงแสดงว่า

$$\sum_{cyc} \sqrt{(1+ab)^2 + b^2 c^2} \geq 2\sqrt{3}(a+c)$$

Problem 17. กำหนดให้  $t \in \mathbb{R}^+, 0 < a < b$  จงแสดงว่า

- ถ้า  $a + t > 0$  แล้ว  $(1 + \frac{t}{b})^b \geq (1 + \frac{t}{a})^a$
- ถ้า  $a - t > 0$  แล้ว  $(1 - \frac{t}{a})^{-a} \geq (1 - \frac{t}{b})^{-b}$

Problem 18. หา  $a, b, c$  เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง

- $3^a + 4^b = 5^c$
- $5^a + 12^b = 13^c$