Geometry solution for POSN Camp II WU

S. Suebsang

July 13, 2021

1 Exercise Trigonometry

Problem 1.1. *หา* $\triangle ABC$ *ซึ่ง* $\sin{(A-B)} + \sin{(B-C)} + \sin{(C-A)} = 0$

proof sketch. ——————————————————————————————

- WLOG สมมติ $\angle A, \angle B$ เป็นมุมแหลมโดย $\angle A \geq \angle B$ เพื่อลดกรณีในการแก้สมการ
- เปลี่ยน $\hat{C} = \pi - \hat{A} - \hat{B}$
- จับคู่เหมาะแล้วใช้ สูตร $\sin X - \sin Y = 2\cos{(\frac{X+Y}{2})}\sin{(\frac{X-Y}{2})}$
- ใช้สูตร $\sin{(2X)} = 2\sin X \cos X$

□

Problem 1.2. *ให้* a, b, c *เป็นความยาวด้านของสามเหลี่ยม โดยที่* $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab$ *หามุมที่อยู่ตรงข้ามกับความยาวด้าน* c

proof sketch. ถ้าสังเกตและจัดรูปสมการที่โจทย์หนดจะพบว่าถ้าสมการข้างต้นตรงกับ law of cosines ซึ่งจัดได้คือ

$$a^2 + b^2 - 2ab(\frac{1}{2}) = c^2$$

□

Problem 1.3. *ใน $\triangle ABC$ กำหนดให้ $\angle B = \angle C = 80^\circ$ P อยู่บนส่วนของเส้นตรง AB ซึ่ง $\angle BPC = 30^\circ$ จงพิสูจน์ว่า $AP = BC$*

proof sketch. ————————————————————————————

- law of sine $\triangle ABC$ จัด $|BC|$ ในรูป $|AC|$
- law of sine $\triangle ABC$ จัด $|PC|$ ในรูป $|AC|$ โดยใช้ผลจากด้านบน
- $|AP| = |AC| - |PC|$
- เพียงพอที่จะแสดง $\frac{\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ} = 1 - 2\frac{\sin 10^\circ \sin 70}{\sin 30^\circ}$
- ใช้สูตร $\sin(2X) = 2\sin X \cos X$
- ใช้สูตร $-2\sin X \sin Y = \cos(X+Y) - \cos(X-Y)$

$\square$

Problem 1.4. *ในสามเหลี่ยม $\triangle ABC$ จุด P และ Q อยู่บนส่วนของเส้นตรง BC ซึ่ง AP และ AQ แบ่งมุม $\angle A$ ออกเป็นสามส่วน และ $BQ = QC$ ถ้า $AC = \sqrt{2}AQ$ จงหา $\angle A$*

proof sketch. ————————————————————————————

- ให้ $|AB| = z, |AQ| = x, |BQ| = |QC| = y$ และ $\angle BAY = \angle YAQ = \angle QAC = \alpha$
- law of sine $\triangle AQC$ และ $\triangle ABG$ จะได้ $x = z\sqrt{2}\cos\alpha$
- law of cosine $\triangle AQC$ ได้ $3x^2 - 2\sqrt{2}x^2\cos\alpha = y^2$
- law of cosine $\triangle ABQ$ ได้ $x^2 + (\frac{x}{\sqrt{2}\cos\alpha})^2 - 2x\frac{x}{\sqrt{2}\cos\alpha}\cos 2\alpha = y^2$
- จับสมการด้านบนเท่ากันแล้วใช้ $\cos 2X = 2(\cos X)^2 - 1$
- จะได้สมการ $4(\cos\alpha)^2 - 2\sqrt{2}\cos\alpha - 1 = 0 \rightarrow \alpha = 7.5^\circ$

$\square$

Problem 1.5. *ให้* $\triangle ABC$ *เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า และ* G *เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมแนบในของมัน ถ้า* D *และ* E *เป็นจุดบน* AB *และ* AC *ตามลำดับ โดยที่* DE *สัมผัสกับ* G *จงแสดงว่า* $\frac{AD}{DB} + \frac{AE}{EC} = 1$

proof sketch. ———————————————————————————

- กำหนดให้วงกลม G รัศมี r สัมผัส AB, AC ที่ L, M ตามลำดับ และ ความยาวด้านของสามเหลี่ยมคือ d
- ให้ $\angle EDA = 2x$ จะได้ $\angle DEA = 120 - 2x$
- ลาก GD, GE ได้ $\angle GDL = 90 - x$ และ $\angle GEM = 30 + x$
- แสดง $r = \frac{d}{2\sqrt{3}}$ แล้วหา $|DC|, |EM|$ ในรูป d จาก $\triangle GDL, \triangle GEM$ ตามลำดับ
- $|AD| = \frac{d}{2} - |DL|$ และ $|AE| = \frac{d}{2} - |AE|$
- จะได้ $\frac{AD}{DB} = \frac{\sqrt{3}\tan(90-x)-1}{\sqrt{3}\tan(90-x)+1}$ และ $\frac{AE}{EC} = \frac{\sqrt{3}\tan(30+x)-1}{\sqrt{3}\tan(30+x)+1}$
- ใช้ $\tan(X+Y) = \frac{\tan X + \tan Y}{1 - \tan X \tan Y}$ กระจาย

□

Problem 1.6. *ให้* $\triangle ABC$ *เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า และ* G *เป็นจุด* $centroid$ *จุด* D *เป็นจุดบนด้าน* AB *ซึ่ง* $AD = AG$ *เส้นตรง* DG *ตัดกับ เส้นตรง* AC *และ* BC *ที่จุด* E *และ* F *ตามลำดับ จงแสดงว่า* $ED = EF$

proof sketch. ข้อนี้สังเกตได้ว่ามีรูปคล้ายกับทฤษฎี Menelaus เราต้องการหา $\frac{DE}{EF}$ ซึ่งสามารถหาได้จาก Menelaus $\triangle DBF$ และ จุด C, E, A แต่ปัญหาคือเราไม่รู้อัตราส่วน $\frac{CF}{CB}, \frac{BA}{AD}$ ดังนั้นเป้าหมายเราคือหาอัตราส่วนพวกนี้

- กำหนดให้ d คือความยาวด้านของสามเหลี่ยมนี้ และ H เป็นจุดเกิดจากลากเส้นตั้งฉากจาก A บน BC
- ไล่ได้ไม่ยากจะได้ $|AD| = \frac{d}{\sqrt{3}}$ และ $|GH| = \frac{d}{6\sqrt{3}}$
- หา $|HF|$ จาก $\triangle GHF$ จะได้ $|HF| = \frac{d}{2\sqrt{3}}(2+\sqrt{3}) \to |CF| = \frac{d}{\sqrt{3}}$
- จะได้ $\frac{CF}{CB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ และ $\frac{BA}{AD} = \sqrt{3}$ จาก Menelaus จะได้ $|DE| = |EF|$

□

Problem 1.7. *ถ้ามี $\triangle ABC$ ซึ่ง $c^2 = 4ab\cos\hat{A}\cos\hat{B}$ แล้ว สามเหลี่ยมนี้เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว*

proof sketch. ข้อนี้สังเกตได้ว่าสมการที่โจทย์ให้มามีลักษณะคล้ายกับ law of cosine แต่หลังจากทำไประยะหนึ่งจ
law of sine

- ใช้ law of sine ในรูป $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = 2R$
- จะได้สมการใหม่เป็น $(\sin\hat{C})^2 = \sin 2\hat{A}\sin 2\hat{B}$
- ใช้สูตร $(\sin X)^2 = \frac{1-\cos 2X}{2}$, แทน $\hat{C} = \pi - \hat{A} - \hat{B}$ จัดรูป
- จะได้ $1 = \cos 2(\hat{A} - \hat{B})$

□

Problem 1.8. *สี่เหลี่ยมจตุรัส $ABMN, BCKL, ACPQ$ ถูกสร้างบนด้านนอก $\triangle ABC$ ผลต่างระหว่างพื้นที่ของ $\square ABMN$ และ $\square BCKL$ คือ d หาผลต่างความยาวด้านกำลังสองของ NQ และ PK*

proof sketch. จากข้อมูลของโจทย์สังเกตได้ไม่ยากว่าใช้ law of cosine เพราะเกี่ยวข้อกับความยาวด้านกำลังสอง

- law of cosine $\triangle NAQ$ และ $\triangle ABC$ จะได้ $2(|AB|^2 + |AC|^2) = |NQ|^2 + |BC|^2$
- ในทำนองเดียวกันกับด้านบน จะได้ $2(|BC|^2 + |AC|^2) = |PK|^2 + |AB|^2$
- ดังนั้น ผลต่างระหว่าง $|NQ|^2$ กับ $|PK|^2$ เท่ากับ $3d$

□

Problem 1.9. *วงกลมแนบในของ $\triangle ABC$ สัมผัส BC ที่จุด D และวงกลมแนบนอกตรงข้าม B สัมผัส BC ที่จุด E ถ้า $AD = AE$ จงพิสูจน์ว่า $2\hat{C} - \hat{B} = 180°$*

proof sketch. ————————————————————————————

- ไล่ด้านจะ ได้ $|BD| = \frac{a+c-b}{2}, |DC| = \frac{a+b-c}{2}$ และ $|DE| = b$
- law of cosine $\triangle ABD$ จะได้ $c^2 + (\frac{a+c-b}{2})^2 - 2c\frac{a+c-b}{2}\cos\hat{B} = |AD|^2$
- law of cosine $\triangle ABE$ จะได้ $c^2 + (\frac{a+b+c}{2})^2 - 2c\frac{a+b+c}{2}\cos\hat{B} = |AE|^2$
- จับสมการด้านบนเท่ากันแล้วจะรูปจะได้ $\cos\hat{B} = \frac{a+c}{2c} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \rightarrow ac = c^2 - b^2$

- หา $\cos 2\hat{C}$ ให้อยู่ ในรูป a, b, c และใช้สมการด้านบนจัดรูปจนเท่ากับ $-\cos \hat{B}$
- ใช้ $\cos 2X = 2(\cos X)^2 - 1$

$\square$

Problem 1.10. *ให้ จุด O และ P เป็นจุดภายใน $\triangle ABC$ ซึ่ง $\angle ABO = \angle CBP$ และ $\angle BCO = \angle ACP$ จงแสดงว่า $\angle CAO = \angle BAP$*

proof sketch. ข้อนี้เห็นได้ชัดจาก Ceva's theorem version ตรีโกณว่าเป็นจริง

$\square$

Problem 1.11. *กำหนด $\triangle ABC$ โดยที่ จุด H เป็นจุด orthocenter และ M เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AC ให้ l เป็นเส้นตรงผ่านจุด M และขนานกับเส้นแบ่งครึ่ง $\angle AHC$ จงแสดงว่า l แบ่งสามเหลี่ยมออกเป็น 2 ส่วนที่มีเส้นรอบรูปยาวเท่ากัน*

proof sketch. ข้อนี้สังเกตได้ว่ามุมที่เกิดจากเส้นเหล่านั้นสามารถเขียนได้ในรูป $\angle A, \angle B, \angle C$ แสดงว่าเราสามารถคำนวณทุกด้านให้ติดในรูป a, b, c ได้

- กำหนดให้ l ตัด BC ที่จุด D
- law of cosine $\triangle DMC$ จะได้ $|DC| = \frac{b\cos(C - \frac{B}{2})}{2\cos\frac{B}{2}}$ เปลี่ยน cos ให้อยู่ในรูป a, b, c
- เปลี่ยน cos ด้านบนให้อยู่ในรูป a, b, c
- ใช้ $\cos(X - Y) = \cos X \cos Y + \sin X \sin Y, \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$
- $\tan\frac{B}{2} = \frac{2r}{a-b+c}, \frac{1}{2}ab\sin C = [ABC]$ และ $r = \frac{2[ABC]}{a+b+c}$ โดย r คือรัศมีของวงกลมแนบใน $\triangle ABC$
- แสดง $c + (a - |DC|) = |DC|$

$\square$

2 Exercise Ceva Theorem and menelaus Theorem

Problem 2.1. *ให้ D เป็นจุดบนด้าน AC ของสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ($\angle B = 90°$)โดยที่ $AB = CD$ จงแสดงว่าเส้นแบ่งครึ่ง $\angle A$, เส้นแบ่งครึ่งด้านผ่าน B และ เส้นส่วนสูงของ $\triangle ABD$ ผ่าน D ตัดกันที่จุดเดียวกัน*

proof sketch. โจทย์อาจผิดเพราะใช้ Geogebra แล้วไม่สอดคล้องกับโจทย์ □

Problem 2.2. *ให้ A_1, B_1, C_1 บนจุดบนด้าน BC, CA และ AB ของ $\triangle ABC$ ส่วนของเส้นตรง AA_1, BB_1, CC_1 ตัดกันที่จุดหนึ่ง เส้นตรง A_1B_1 และ A_1C_1 พบเส้นตรงที่ผ่านจุด A ขนาน BC ที่จุด C_2 และ B_2 ตามลำดับ จงแสดงว่า $AB_2 = AC_2$*

proof sketch. จากรูปจะสังเกตได้ว่ามีสามเหลี่ยมที่ลักษณะคล้ายกับททฤษฎีบท Ceva และมีสามเหลี่ยมคล้าย 2 คู่

- Ceva's theorem กับ $\triangle ABC, C_1, A_1, B_1$
- $\triangle A_1C_1B_2 \backsim \triangle BC_1A_1$ และ $\triangle AB_1C_2 \backsim \triangle CB_1A_1$

□

Problem 2.3. *ให้ A' เป็นจุดบนส่วนของเส้นตรง BC ของ $\triangle ABC$ เส้นแบ่งครึ่งมุมภายใน $\angle BA'A$ และ $\angle CA'A$ ตัด AB และ CA ที่จุด D และ E ตามลำดับ จงแสดงว่า AA', BE และ CD ตัดกันที่จุดเดียวกัน*

proof sketch. จากรูปสังเกตได้ว่าน่าจะต้องใช้ทฤษฎีบทCeva และ สูตรแบ่งครึ่งมุม

- Ceva's theorem $\triangle ABC, D, A', E$
- สูตรแบ่งครึ่งมุม $\triangle AA'B$ และ $\triangle AA'C$

□

Problem 2.4. *จากจุด C ของ สามเหลี่ยมมุมฉาก $ABC(\hat{C} = 90°)$ ลากส่วนสูง CK ใน $\triangle ACK$ วาดเส้นแบ่งครึ่งมุม CE เส้นตรงผ่านจุด B ขนาน CE ตัด CK ที่จุด F จงแสดงว่าเส้นตรง EF แบ่งครึ่งด้าน AC*

proof sketch. ข้อนี้สังเกตได้ไม่ยากว่าน่าจะต้องใช้ Menelaus, สูตรแบ่งครึ่งมุม และ ความคล้ายในการแก้

- กำหนดให้เส้นตรง EF ตัด AC ที่จุด L
- Menelaus's theorem กับ $\triangle ACK$ และจุด L, E, F
- สูตรแบ่งครึ่งมุม $\triangle AKC$
- พยายามแปลงด้านให้อยู่ในรูปด้าน $|AB|$ และ $\angle A$ โดยใช้ตรีโกณ
- law of sine กับ $\triangle CFB$

□

Problem 2.5. *จงแสดงว่าเส้นตรงผ่าน A และจุดศูนย์กลางของวงกลมแนบใน $\triangle ABC,$ เส้นตรงผ่าน B และจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบ $\triangle ABC$ และ เส้นตรงผ่าน C และจุด orthocenter ของ $\triangle ABC$ ตัดกันที่จุดเดียวกันถ้า $(\cos A)^2 = \cos B \cos C$*

proof sketch. ข้อนี้เห็นได้ชัดว่าใช้ทฤษฎีบท Ceva version ตรีโกณโดยให้มุมติดในรูป $\angle A, \angle B, \angle C$

□

Problem 2.6. *ในวงกลม C มี O เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี r ให้ C_1, C_2 เป็นวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางคือ O_1, O_2 และ รัศมี r_1, r_2 ตามลำดับ โดยวงกลม C_i internally tangent กับ C ที่จุด A_i เมื่อ $i = 1, 2$ และ C_1 externally tangent กับ C_2 ที่จุด A จงแสดงว่า OA, O_1A_2 และ O_2A_1 ตัดกันที่จุดเดียวกัน(หมายเหตุ สามารถหาภาพตัวอย่าง internally และ externally tangent ได้จาก google)*

proof sketch. ————————————————————————————

- ลากเส้นเชื่อม O, O_1, O_2
- Menelaus's theorem กับ $\triangle OO_1O_2, A, A_1, A_2$
- ใช้ความคล้ายคิดอัตราส่วนที่ต้องใช้ในmenelausให้อยู่ในรูป r, r_1, r_2

□

Problem 2.7. *ใน* $\triangle ABC$ *ให้* D *เป็นจุดบนรังสีจาก* B *ไป* C *และ* E *เป็นจุดบนรังสีจาก* C *ไป* A *โดยที่* $BD = CE = AB$ *ให้* l *เป็นเส้นตรงผ่าน* D *ขนาน* AB *ถ้า* l *ตัด เส้นตรง* BE *ที่* M *และ* M *ตัด* AB *ที่* F *ตามลำดับจงแสดงว่า* $(BA)^3 = AE.BF.CD$

proof sketch. ดูได้ไม่ยากในรูปสามารถใช้ Menelaus ได้ 2 รูปแต่เราควรใช้รูปที่มีด้านที่โจทย์ต้องกาให้มากที่สุด

- Menelaus's theorem กับ $\triangle ACF$ และ จุด B, E และ M
- $\triangle DCM \backsim \triangle BCF$

□

Problem 2.8. *ในสี่เหลี่ยมด้านขนาน* $ABCD$ *ซึ่ง* $\angle A < 90°$ *วงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลาง* AC *ตัด* CB *และ* CD *อีกครั้งที่จุด* E *และ* F *ตามลำดับและ เส้นสัมผัสกับวงกลมนี้ที่จุด* A *ตัด* BD *ที่จุด* P *จงแสดงว่า* P, F, E *อยู่บนส่วนของเส้นตรงเดียวกัน*

sketch proof. ข้อนี้จะเห็นได้ว่าต้องใช้ทฤษฎีบท Menelaus ในการแก้โดยสมมตีให้ EF ตัดกับเส้นสัมผัสวงกลมที่A คือ P' แล้วแสดงให้ได้ว่า A, D, P' อยู่บนเส้นตรงเดียวกันจะสรุปได้ว่า $P = P'$

- กำหนดให้ $|CA| = 2R$, $\angle ACB = \alpha$ และ $\angle ACD = \beta$
- พยายามไล่ด้าน $|CB|, |BE|, |EF|, |FP|, |DF|$ และ $|CD|$ ให้อยู่ในรูป α, β และ R โดยใช้ law of sine
- ใช้ Menelaus's theorem กับ $\triangle ECF$ และ จุด B, D และ P
- แทนค่าด้านที่หาตอนแรกในสูตร Menelaus และจัดรูปตรีโกณให้เท่ากับ 1 ซึ่งค่อนข้างเยอะ

□

Problem 2.9. *กำหนด* $\triangle ABC$ *ซึ่ง* $\angle BAC = 40°$ *และ* $\angle ABC = 60°$ *ให้* D, E *เป็นจุดบนด้าน* AC, AB *ตามลำดับ ซึ่ง* $\angle CBD = 40°$ *และ* $\angle BCE = 70°$ *ให้* BD, CE *ตัดกันที่จุด* F *จงแสดงว่า เส้นตรง* AF *ตั้งฉากกับ* BC

proof sketch. เห็นได้ชัดจากทฤษฎีบท Ceva version ตรีโกณ □

Problem 2.10. *ในสามเหลี่ยมมุมแหลม ABC ซึ่ง $AB \neq AC$ ให้ V เป็นจุดที่เกิดจากจุดตัดของเส้นแบ่งครึ่ง $\angle A$ และ BC และให้ D เป็นจุดบน BC โดยที่ AD ตั้งฉาก BC ถ้า E และ F เป็นจุดตัดของวงกลมล้อมรอบ AVD กับ CA และ AB ตามลำดับจงแสดงว่า AD, BE, CF ตัดกันที่จุดเดียวกัน*

proof sketch. เห็นได้ชัดว่าใช้ทฤษฎีบท Ceva โดยจัดรูปด้านที่ต้องการหาให้อยู่ในรูป a, b, c และ $\angle A, \angle B, \angle C$

- ใช้ Menelaus กับ $\triangle ABC$ และ จุด F, V, E
- สามารถหาด้าน $|BF|$ ได้จาก Power of point จุด B ใช้สมการ $c|BF| = |OB|^2 - R^2$
- หา $|OB|^2 - R^2$ จาก law of cosine $\triangle ABO$ (O คือจุดศูนย์กลาง AV, R คือรัศมีของวงกลม)
- หา $|BD|$ ได้จาก $\triangle ABD$
- แสดงให้ได้ว่า $-bc \sin \frac{B-C}{2} = R(c \cos B - b \cos C)$ จริง จะจบการพิสูจน์ซึ่งค่อนข้างยากโดยจะแทนค่าดั
- ขั้นแรก แสดงให้ได้ก่อนว่า $R = \frac{\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c}$ เมื่อ $s = \frac{a+b+c}{2}$
- $\cos B = \frac{a^2-b^2+c^2}{2ac}$ และ $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$
- $\sin(X - Y) = \sin X \cos Y - \cos X \sin Y$
- ใช้เอกลักษณ์ $\sin \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{(s-b)(s-c)}}{\sqrt{bc}}$, $\cos \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{s(s-a)}}{\sqrt{bc}}$ ในทำนองเดียวกันกับ $\angle B, \angle C$ ต้องแสดงด้วยว่าเอกลักษณ์พวกนี้เป็นจริง

$\square$

Problem 2.11. *ให้* O *เป็นจุดภายใน* $\triangle ABC$ *และ* D, E, F *เป็นจุดตัดของ* AO, BO, CO *กับ* BC, CA, AB *ตามลำดับ สมมุติ* P *และ* Q *เป็นจุดบนส่วนของเส้นตรง* BE *และ* CF *ตามลำดับซึ่ง* $\frac{BP}{PE} = \frac{CQ}{QF} = \frac{DO}{OA}$ *จงแสดงว่า* $PF||QE$

proof sketch. เราจะเสนอวิธีอัดแกนคาร์ทีเซียน ในการแก้โจทย์ข้อนี้

- โดยไม่เสียในสมมุติ ให้ O คือจุด $(0,0), A$ คือ $(0,a), B$ คือ (x_1,y_1) และ C คือ (x_2,y_2)
- จะได้จุด $D(0, \frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2-x_1}), E(\frac{ax_1x_2}{x_2y_1-x_1y_2+ax_1}, \frac{ay_1x_2}{x_2y_1-x_1y_2+ax_1}), F(\frac{ax_1x_2}{x_1y_2-x_2y_1+ax_2}, \frac{ay_2x_1}{x_1y_2-x_2y_1+ax_2})$
- $\frac{|DO|}{|OA|} = \frac{x_2y_1-x_1y_2}{-a(x_2-x_1)}$ ใช้อัตราส่วนนี้ในการหาจุด P, E
- $P(x_P, y_P) \to \frac{|DO|}{|OA|} = \frac{x_1-x_P}{x_P-x_E}$
- จะได้ $x_P = \frac{ax_1}{-a(x_2-x_1)+x_2y_1-x_1y_2}(\frac{x_2(x_2y_1-x_1y_2))}{x_2y_1-y_1x_2+ax_1} - (x_2-x_1))$
- ในทำนองเดียวกันจะได้ $y_P = \frac{ay_1}{-a(x_2-x_1)+x_2y_1-x_1y_2}(\frac{x_2(x_2y_1-x_1y_2))}{x_2y_1-y_1x_2+ax_1} - (x_2-x_1))$
- ให้ $M = \frac{(x_2y_1-x_1y_2)}{a}$ ความชันของเส้นตรง FP คือ $\frac{y_P-y_F}{x_P-x_F}$
- ซึ่งจัดรูปแล้วจะได้ $\frac{\frac{y_1}{M+x_1} - \frac{y_2}{-M+x_2}}{\frac{x_1}{M+x_1} - \frac{x_2}{-M+x_2}}$
- ซึ่งความชันของเส้นตรง EF เกิดจากการสลับตัวแปร x_1 เป็น x_2 และ y_1 เป็น y_2 สมการด้านบนซึ่งยังคงเป็นสมการเดิมดังนั้น $EF||FP$

□

3 Miscellaneous problems

Problem 3.1. *กำหนด* $\triangle ABC$ *ซึ่งมี* $\angle A = 45°$ *ให้* D *เป็นจุดบนด้าน* BC *โดยที่* $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ *ถ้า* $BD = 3$ *และ* $DC = 2$ *แล้ว* $[ABC]$ *มีค่าเท่าไหร่*

Problem 3.2. *ให้* A, B *เป็นจุดบนวงกลมที่มี* O *เป็นจุดศูนย์กลาง ต่อ* AB *ไปทาง* B *ถึงจุด* P *โดยที่* $\angle AOP = 90°$ *ถ้า* $\tan B\hat{O}P + \tan B\hat{P}O = 2$ *จงหาค่าของ* $\frac{PA}{PB}$

Problem 3.3. *กำหนด* $\triangle ABC$ *ซึ่งมี* $AB : AC = 4 : 3$ *ให้* M *เป็นจุดกึ่งกลางด้าน* BC *จุด* E *และ* F *เป็นจุดบน* AB *และ* AC *ตามลำดับ โดยที่* $AE : AF = 2 : 1$ *ถ้า* EF *ตัด* AM *ที่จุด* G *และ* $GF = 72$ *หน่วย แล้ว* GE *ยาวกี่หน่วย*

Problem 3.4. *กำหนด* $\triangle ABC$ *เป็นสามเหลี่ยมมุมแหลม ให้* AD, BE, CF *เป็นส่วนสูง และ* H *เป็นจุด orthocenter ของ* $\triangle ABC$ *จงแสดงว่า* $\frac{AH}{AD} + \frac{BH}{BE} + \frac{CH}{CF} = 2$

Problem 3.5. *กำหนดให้* $\triangle ABC$ *มี* D *อยู่บนเส้นตรงที่ผ่าน* BC *และ* F *อยู่บน* AB *และ* E *อยู่บน* AC *ให้* AD *แบ่งครึ่งมุมภายนอก ให้* BE *และ* CF *แบ่งครึ่งมุมภายใน* $\triangle ABC$ *จงแสดงว่า* D, E, F *อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน*

Problem 3.6. *ใน* $\triangle ABCM$ *เป็นศูนย์กลางของด้าน* $BCAD$ *แบ่งครึ่ง* $\angle A$ *ตัด* BC *ที่จุด* D *วาด* $\overline{BE} \perp \overline{AD}$ *ตัด* AD *ที่จุด* E *ถ้า* AM *ตัด* BE *ที่จุด* P *จงแสดงว่า* $AB||DP$

Problem 3.7. *ให้* O *เป็นวงกลมที่ล้อมรอบ* $\triangle ABC$ *เส้นสัมผัสวงกลมที่จุด* A, B, C *ตัดเส้นตรง* BC, AC, AB *ที่จุด* P, Q, R *ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า* P, Q, R *อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน*

Problem 3.8. *กำหนดให้* P *เป็นจุดภายใน* $\triangle ABC$ *ที่ทำให้* $\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$ D, E *เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมแนบใน* $\triangle APB, APC$ *ตามลำดับ จงแสดงว่า* AP, BD, CE *มีจุดตัดร่วมกัน*