

แนวข้อสอบคัดเข้าค่าย 3 วลัยลักษณ์

S. Suebsang

July 18, 2021

Problem 1. ให้ $a, b \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $a^2 + b^2$ หารด้วย $a + b$ ได้ผลหารคือ r จงหา a, b ทั้งหมดที่เป็นไปได้ซึ่ง $q^2 + r = 2017$

Problem 2. ให้ $P(x) = (x+d_1)(x+d_2)\dots(x+d_9)$ เมื่อ d_1, d_2, \dots, d_9 เป็นจำนวนเต็มที่แตกต่างกัน จงพิสูจน์ว่า "มีจำนวนเต็ม N ซึ่งสำหรับทุกจำนวนเต็ม $x \geq N, p|P(x)$ บางจำนวนเฉพาะ $p \geq 20$ "

Problem 3. ให้ $a, b \in \mathbb{N}$ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $4ab - 1 | (4a^2 - 1)^2$ แล้ว $a = b$

Problem 4. ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมซึ่ง $AB = AC$ และให้ D เป็นจุดกึ่งกลางของ AC เส้นแบ่งครึ่งมุม $\angle BAC$ ตัดวงกลมที่ล้อมรอบ D, B และ C ที่จุด E ซึ่งอยู่ภายใน $\triangle ABC$ เส้นตรง BD ตัดวงกลมที่ล้อมรอบ A, E และ B ที่จุด B และ F เส้นตรง AF และ BE ตัดกันที่จุด I และ เส้นตรง CI และ BD ตัดกันที่จุด K จงแสดงว่า I เป็นจุดกึ่งกลางของวงกลมแนบใน $\triangle KAB$

Problem 5. $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ จงแสดงว่า

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \leq \frac{a^9 + b^9 + c^9}{a^3 b^3 c^3}$$

Problem 6. $a, b, c \in \mathbb{R}^+, a + b + c = 1$ จงแสดงว่า

$$\sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ca} + \sqrt{c+ab} \leq 2$$

Problem 7. พิจารณาจุดทุกจุดในระนาบ ระบายสีจุดเหล่านั้นด้วยปากกาซึ่งมีอยู่ 2 สีได้แก่ ปากกาสีแดง และ ปากกาลี้น้ำเงิน จงพิสูจน์ว่ามีรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้าน $1, 2\sqrt{3}$ หน่วย ที่มีจุดยอดทั้งสามเป็นสีเดียวกันทั้งหมด

Problem 8. กำหนดให้ $S = 1, 2, \dots, 16$ ทำการแบ่งเซต S ออกเป็น 3 เซตย่อย $S = A \cup B \cup C$ โดยที่ $A \cap B = B \cap C = C \cap A = \emptyset$ และ A, B, C ไม่ใช่เซตว่าง จงพิสูจน์ว่า จะต้องมียุ่ 1 เซตย่อยเสมอจาก A, B, C ที่บรรจุเลข x, y, z (อาจซ้ำกันได้) ซึ่ง $x + y = z$

Problem 9. กำหนดสี่เหลี่ยมที่มีวงกลมล้อมรอบได้ $ABCD$ ให้ด้าน $|AB| = |CD| = a, |AD| = |BC| = b, |AC| = m$ และ $|BD| = n$ ถ้า $a^4 + b^4 = m^2 n^2$ จงหา $\angle A$

Problem 10. $f : N \rightarrow N; f(n) + f(n+1) = f(n+2)f(n+3) - (p-1)$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ จงหาฟังก์ชัน f

Problem 11. $f : Z \rightarrow Z; f(m+n) + f(mn-1) = f(m)f(n)$ จงหาฟังก์ชัน f

Problem 12. $f : R \rightarrow R; f(xy) = xf(x) + yf(y)$ จงหาฟังก์ชัน f

Problem 13. ให้ $p, q, r \in R^+$ และ $p + q + r = 1$ จงแสดงว่า

$$7(pq + qr + rp) \leq 2 + 9pqr$$

Problem 14. ให้ $a, b, c \in R^+$ และ $a + b + c = 1$ จงแสดงว่า

$$\frac{a+b}{ab} + \frac{b+c}{bc} + \frac{c+a}{ca} \geq 18$$

Problem 15. ให้ $p, q, r, x, y, z \in R^+$ จงแสดงว่า

$$3(x+y+z)\left(\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z}\right) \geq (a+b+c)^3$$

Problem 16. ให้ a, b, c, d เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ ซึ่ง $a + c = b + d$ จงแสดงว่า

$$\sum_{cyc} \sqrt{(1+ab)^2 + b^2 c^2} \geq 2\sqrt{3}(a+c)$$

Problem 17. กำหนดให้ $t \in R^+, 0 < a < b$ จงแสดงว่า

- ถ้า $a + t > 0$ แล้ว $(1 + \frac{t}{b})^b \geq (1 + \frac{t}{a})^a$
- ถ้า $a - t > 0$ แล้ว $(1 - \frac{t}{a})^{-a} \geq (1 - \frac{t}{b})^{-b}$

Problem 18. หา a, b, c เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง

- $3^a + 4^b = 5^c$
- $5^a + 12^b = 13^c$

Problem 19. สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$ จงแสดงว่า $x-1$ เป็นตัวประกอบของพหุนาม $P_0(x), P_1(x), \dots, P_{n-2}(x)$ ถ้าพหุนาม $x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$ หารพหุนาม $P_0(x^n) + xP_1(x^n) + \dots + x^{n-2}P_{n-2}(x^n)$