

# Problems from TON NAM

S. Suebsang

July 14, 2021

**Problem 1.** กำหนดให้  $ABCD$  เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีพื้นที่  $40$ ,  $E, F$  เป็นจุดบน ส่วนของเส้นตรง  $AB, BC$  ตามลำดับโดยที่  $BE = \frac{AB}{3}$  และ  $BF = \frac{2BC}{5}$ ,  $EC$  ตัด  $BD, FD$  ที่  $G, H$  ตามลำดับ จงหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยม  $BGHF$

**Problem 2.** (Zenith GM) สามเหลี่ยมมุมแหลม  $ABC$  มีวงกลมแนบใน มีจุดศูนย์กลางที่  $I$  และสัมผัส  $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$  ที่จุด  $D, E, F$  ตามลำดับ ให้ เส้นตรง  $DI$  ตัด  $\overline{EF}$  ที่จุด  $K$  ถ้า  $BC = 34, DI = 10, IK = 4$  จงหาพื้นที่ ของรูปสามเหลี่ยม  $ABC$

**Problem 3.** หา  $x^2 + y^2 + z^2 + w^2$  ถ้า

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{2^2 - 1^2} + \frac{y^2}{2^2 - 3^2} + \frac{z^2}{2^2 - 5^2} + \frac{w^2}{2^2 - 7^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{4^2 - 1^2} + \frac{y^2}{4^2 - 3^2} + \frac{z^2}{4^2 - 5^2} + \frac{w^2}{4^2 - 7^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{6^2 - 1^2} + \frac{y^2}{6^2 - 3^2} + \frac{z^2}{6^2 - 5^2} + \frac{w^2}{6^2 - 7^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{8^2 - 1^2} + \frac{y^2}{8^2 - 3^2} + \frac{z^2}{8^2 - 5^2} + \frac{w^2}{8^2 - 7^2} &= 1\end{aligned}$$

**Problem 4.** หาค่า  $(1 - \frac{1}{1+2})(1 - \frac{1}{1+2+3}) \dots (1 - \frac{1}{1+2+\dots+2563})$

**Problem 5.** จำนวนเต็มบวก  $n$  ที่มีค่าน้อยที่สุด ซึ่งทำให้  $(2000n + 1)(2008n + 1)$  เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์

**Problem 6.**  $x^3 + y^3 + (x + y)^3 + 30xy = 2000$  ค่าของ  $x + y$

**Problem 7.** กำหนดให้  $f_0(x) = \frac{1}{1-x}$  และ  $f_n(x) = f_0(f_{n-1}(x))$  สำหรับ  $n \geq 1$  และ  $x \neq 1$  จงหาค่าของ  $f_{2002}(2002)$

Problem 8.  $z_1, z_2, \dots, z_5$  เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่แตกต่างกัน และ  $z_1 + z_2 + \dots + z_5 = 0$  และ  $|z_1| = |z_2| = \dots = |z_5|$  จงหาส่วนจริงของ  $\frac{z_1+z_2}{z_3} + \frac{z_2+z_3}{z_4} + \frac{z_3+z_4}{z_5} + \frac{z_4+z_5}{z_1} + \frac{z_5+z_1}{z_2}$

Problem 9. ถ้า  $\frac{a-b}{b-c} + \frac{b-c}{c-a} + \frac{c-a}{a-b} = 5$  แล้วจงหาค่าของ  $(\frac{a-c}{b-c})^3 + (\frac{b-a}{c-a})^3 + (\frac{c-b}{a-b})^3$

Problem 10. ให้  $\frac{2^N+1}{641} = 409^2 + 2556^2$  ถ้า  $N$  เป็นจำนวนเต็มแล้ว  $N$  เท่ากับเท่าใด

Problem 11. จงหาผลรวมของจำนวนเต็มบวก  $a$  ที่ทำให้  $\sqrt{(a+45)(a-5)}$  เป็นจำนวนเต็มบวก

Problem 12. จงหาคำตอบของสมการ  $(1 + \frac{1}{n})^{1+n} = (1 + \frac{1}{9999})^{9999}$

Problem 13. กำหนดสี่เหลี่ยม  $ABCD$  ซึ่ง  $\angle ABD = 38^\circ, \angle DBC = 46^\circ, \angle BCA = 22^\circ$  และ  $\angle ACD = 48^\circ$  จงแสดงว่า  $\angle BDA = 18^\circ$

Problem 14. สมมติ  $x_1, x_2, \dots, x_{49}$  เป็นจำนวนจริงซึ่ง  $x_1^2 + 2x_2^2 + \dots + 49x_{49}^2 = 1$ . หาค่าสูงสุดของ  $x_1 + 2x_2 + \dots + 49x_{49}$

Problem 15. ให้  $a, b, c$  เป็นจำนวนเต็มบวก จงแสดงว่า ถ้า  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$  เป็นจำนวนเต็ม จงแสดงว่า  $abc$  เป็นกำลังสามสมบูรณ์ของจำนวนเต็ม

Problem 16. ให้  $x = (12112211122211112222)_3$  แทนจำนวนในระบบฐาน 3 ถ้า  $x = (a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0)_9$  แทนจำนวนในระบบฐาน 9 และ  $a_n \neq 0$  แล้ว  $a_n$  มีค่าเท่ากับเท่าใด

Problem 17. ให้  $ABC$  เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากโดยที่  $AB = BC$  มี  $P$  เป็นจุดภายใน  $\triangle ABC$  โดยที่  $AP = 15\text{cm}, BP = 9\text{cm}, PC = 12\text{cm}$  จงหาพื้นที่  $\triangle ABC$

Problem 18. หาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มของสมการ  $(100 - x)^2 + (100 - y)^2 = (x + y)^2$

Problem 19. ถ้ากำหนดสมการ  $3^{2^{2x+1} - (9)^{2^{x+\frac{1}{2}}} + 32} = 27^{2^{x+\frac{1}{2}}}$  จงหาผลบวกของรากคำตอบของสมการ

Problem 20. ให้  $ABC$  เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก โดย  $\angle B = 90^\circ$  มี  $D$  เป็นจุดบนส่วนของเส้นตรง  $AC$  ซึ่ง  $AB = BC + CD$  ถ้า  $\angle BAC = 2x$  และ  $\angle DBC = 3x$  จงหา  $x$

Problem 21. ให้  $\tau$  เป็นครึ่งวงกลมมีเส้นผ่านศูนย์กลาง  $AB$  มีจุด  $C$  อยู่บนส่วนของเส้นตรง  $AB$  และ จุด  $E$  และ  $D$  อยู่บนคอร์ด  $BA$  โดยที่  $E$  อยู่ระหว่าง  $B$  และ  $D$  ให้ เส้นสัมผัส  $\tau$  ที่จุด  $D$  และ  $E$  ตัดกันที่จุด  $F$  ถ้า  $\angle ACD = \angle ECB$  จงแสดงว่า  $\angle EFD = \angle ACD + \angle ECB$

Problem 22. ถ้า  $\frac{3xy}{x+y} = 4, \frac{2yz}{y+z} = 3, \frac{5xz}{x+z} = 2$  แล้วค่าของ  $\frac{47xyz}{2xy+yz-4xz}$  เท่ากับเท่าใด

---

Problem 23. หาไตรอันดับของจำนวนนับ  $(a, b, c)$  ซึ่ง  $(2^a - 1)(3^b - 1) = c!$

Problem 24. จงหาผลคูณของจำนวนเต็ม  $n$  ทั้งหมดที่ทำให้  $n^2 + 59n + 881$  เป็นกำลังสองสมบูรณ์

Problem 25. จงหาจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่มีจำนวนตัวหารที่เป็นบวกเท่ากับ 24 ตัว

Problem 26. ใน  $ABC$  เป็นรูปสามเหลี่ยมแนบในวงกลมที่มีจุด  $O$  เป็นจุดศูนย์กลางถ้า  $\angle ABC = 70^\circ, \angle ACB = 50^\circ$  และเส้นแบ่งครึ่งมุม  $BAC$  ตัดวงกลมที่จุด  $D$  จงหาขนาดของ  $\angle ADO$

Problem 27. พิจารณา  $\triangle ABC$  จุด  $M$  เป็นศูนย์กลางของ  $AC$  วงกลมสัมผัสกับ  $BC$  ที่จุด  $B$  และผ่าน  $M$  พบเส้นตรง  $AB$  อีกครั้งที่จุด  $P$  จงแสดงว่า  $(AB)(BP) = 2BM^2$

Problem 28. ให้  $ABCD$  เป็นสี่เหลี่ยมที่วงกลมล้อมรอบได้ ให้  $F$  เป็นจุดศูนย์กลางของครึ่งวงกลมของ  $AB$  ของวงกลมของมันซึ่งไม่มี  $C$  หรือ  $D$  อยู่บน ให้  $DF$  และ  $AC$  ตัดกันที่จุด  $P$  และ  $CF$  และ  $BD$  ตัดกันที่จุด  $Q$  จงแสดงว่าเส้นตรง  $PQ$  และ  $AB$  ขนานกัน

Problem 29. จงหาจำนวนเฉพาะ  $p$  ทั้งหมดที่ทำให้  $\frac{2^{p-1}-1}{p}$  เป็นกำลังสองสมบูรณ์

Problem 30. หาค่าของ  $\sum_{k=1}^{11} \frac{\sin(\frac{2^{k+4}\pi}{89})}{\sin(\frac{2^k\pi}{89})}$

Problem 31. หาผลรวมของคำตอบที่เป็นจำนวนจริงซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$$x^2 + \cos x = 2563$$

Problem 32. ให้  $A$  และ  $B$  เป็นจำนวนจริงซึ่ง  $(x+1)^2$  หาร  $x^{2017} + Ax + B$  ลงตัวแล้ว  $B$  มีค่าเท่ากับเท่าไร

Problem 33. หาไตรอันดับ  $(a, b, c)$  ที่เป็นจำนวนนับ ซึ่ง

$$a^2 + b^2 = n\text{lcm}(a, b) + n^2$$

$$b^2 + c^2 = n\text{lcm}(b, c) + n^2$$

$$c^2 + a^2 = n\text{lcm}(c, a) + n^2$$

บาง  $n$  ที่เป็นจำนวนนับ

Problem 34. หาจำนวนเฉพาะที่ใหญ่ที่สุด  $p < 300$  และมีจำนวนเต็ม  $x, y, u, v$  ซึ่ง

$$p = x^2 + y^2 = u^2 + 7v^2$$

---

**Problem 35.** เลข 1, 2, 3, ..., 81 ถูกใส่ในตารางขนาด  $9 \times 9$  จงแสดงว่ามี ตารางย่อยขนาด  $2 \times 2$  ซึ่งผลรวมของตัวเลขของมันมากกว่า 137

**Problem 36.** ให้  $a, b$  เป็นจำนวนนับ จงแสดงว่า  $\frac{(2a)!(2b)!}{a!b!(a+b)!}$  เป็นจำนวนเต็ม

**Problem 37.** An experiment is performed in which each trial consists of tossing an ordinary six-sided die repeatedly and adding the numbers that come up; in each trial, as soon as the total exceeds 15, we stop tossing the die. For this experiment, what final total is expected to occur most often?

**Problem 38.** หาค่าต่ำสุดของ  $c + \sqrt{3 - c^3}$  ทุก ๆ  $c > 0$

**Problem 39.** ให้  $a, b$  เป็นจำนวนนับซึ่ง  $a > b$  จงแสดงว่า  $\frac{a^2+b}{b^2-a^3}$  ไม่เป็นจำนวนเต็ม

**Problem 40.** 41 rooks are placed on a  $10 \times 10$  chessboard Prove that you can choose five of them that do not attack each other

**Problem 41.** จงแสดงว่าทุกจำนวนนับ  $n$ ,  $\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}$

**Problem 42.** ให้  $a, b, c, d$  เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็น 0 ที่แตกต่างกัน ซึ่ง  $a+b+c+d = 0$  และ  $M = (bc - ad)(ac - bd)(ab - cd)$  และ  $96100 < M < 98000$  จงหาค่า  $M$