

Problems from TON NAM

S. Suebsang

July 14, 2021

Problem 1. กำหนดให้ $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีพื้นที่ 40 , E, F เป็นจุดบน ส่วนของเส้นตรง AB, BC ตามลำดับโดยที่ $BE = \frac{AB}{3}$ และ $BF = \frac{2BC}{5}$, EC ตัด BD, FD ที่ G, H ตามลำดับ จงหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยม $BGHF$

Problem 2. (Zenith GM) สามเหลี่ยมมุมแหลม ABC มีวงกลมแนบใน มีจุดศูนย์กลางที่ I และสัมผัส $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ ที่จุด D, E, F ตามลำดับ ให้ เส้นตรง DI ตัด \overline{EF} ที่จุด K ถ้า $BC = 34, DI = 10, IK = 4$ จงหาพื้นที่ ของรูปสามเหลี่ยม ABC

Problem 3. หา $x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ ถ้า

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{2^2 - 1^2} + \frac{y^2}{2^2 - 3^2} + \frac{z^2}{2^2 - 5^2} + \frac{w^2}{2^2 - 7^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{4^2 - 1^2} + \frac{y^2}{4^2 - 3^2} + \frac{z^2}{4^2 - 5^2} + \frac{w^2}{4^2 - 7^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{6^2 - 1^2} + \frac{y^2}{6^2 - 3^2} + \frac{z^2}{6^2 - 5^2} + \frac{w^2}{6^2 - 7^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{8^2 - 1^2} + \frac{y^2}{8^2 - 3^2} + \frac{z^2}{8^2 - 5^2} + \frac{w^2}{8^2 - 7^2} &= 1\end{aligned}$$

Problem 4. หาค่า $(1 - \frac{1}{1+2})(1 - \frac{1}{1+2+3}) \dots (1 - \frac{1}{1+2+\dots+2563})$

Problem 5. จำนวนเต็มบวก n ที่มีค่าน้อยที่สุด ซึ่งทำให้ $(2000n + 1)(2008n + 1)$ เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์

Problem 6. $x^3 + y^3 + (x + y)^3 + 30xy = 2000$ ค่าของ $x + y$

Problem 7. กำหนดให้ $f_0(x) = \frac{1}{1-x}$ และ $f_n(x) = f_0(f_{n-1}(x))$ สำหรับ $n \geq 1$ และ $x \neq 1$ จงหาค่าของ $f_{2002}(2002)$

Problem 8. z_1, z_2, \dots, z_5 เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่แตกต่างกัน และ $z_1 + z_2 + \dots + z_5 = 0$ และ $|z_1| = |z_2| = \dots = |z_5|$ จงหาส่วนจริงของ $\frac{z_1+z_2}{z_3} + \frac{z_2+z_3}{z_4} + \frac{z_3+z_4}{z_5} + \frac{z_4+z_5}{z_1} + \frac{z_5+z_1}{z_2}$

Problem 9. ถ้า $\frac{a-b}{b-c} + \frac{b-c}{c-a} + \frac{c-a}{a-b} = 5$ แล้วจงหาค่าของ $(\frac{a-c}{b-c})^3 + (\frac{b-a}{c-a})^3 + (\frac{c-b}{a-b})^3$

Problem 10. ให้ $\frac{2^N+1}{641} = 409^2 + 2556^2$ ถ้า N เป็นจำนวนเต็มแล้ว N เท่ากับเท่าใด

Problem 11. จงหาผลรวมของจำนวนเต็มบวก a ที่ทำให้ $\sqrt{(a+45)(a-5)}$ เป็นจำนวนเต็มบวก

Problem 12. จงหาคำตอบของสมการ $(1 + \frac{1}{n})^{1+n} = (1 + \frac{1}{9999})^{9999}$

Problem 13. กำหนดสี่เหลี่ยม $ABCD$ ซึ่ง $\angle ABD = 38^\circ, \angle DBC = 46^\circ, \angle BCA = 22^\circ$ และ $\angle ACD = 48^\circ$ จงแสดงว่า $\angle BDA = 18^\circ$

Problem 14. สมมติ x_1, x_2, \dots, x_{49} เป็นจำนวนจริงซึ่ง $x_1^2 + 2x_2^2 + \dots + 49x_{49}^2 = 1$. หาค่าสูงสุดของ $x_1 + 2x_2 + \dots + 49x_{49}$

Problem 15. ให้ a, b, c เป็นจำนวนเต็มบวก จงแสดงว่า ถ้า $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ เป็นจำนวนเต็ม จงแสดงว่า abc เป็นกำลังสามสมบูรณ์ของจำนวนเต็ม

Problem 16. ให้ $x = (12112211122211112222)_3$ แทนจำนวนในระบบฐาน 3 ถ้า $x = (a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0)_9$ แทนจำนวนในระบบฐาน 9 และ $a_n \neq 0$ แล้ว a_n มีค่าเท่ากับเท่าใด

Problem 17. หาค่าของ $\frac{1}{3+1} + \frac{2}{3^2+1} + \frac{4}{3^4+1} + \dots + \frac{2^{2563}}{3^{2^{2563}}+1}$ (หาค่าตรงๆไม่ได้ทำได้แค่ประมาณ)

Problem 18. ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากโดยที่ $AB = BC$ มี P เป็นจุดภายใน $\triangle ABC$ โดยที่ $AP = 15\text{cm}, BP = 9\text{cm}, PC = 12\text{cm}$ จงหาพื้นที่ $\triangle ABC$

Problem 19. หาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มของสมการ $(100 - x)^2 + (100 - y)^2 = (x + y)^2$

Problem 20. ถ้ากำหนดสมการ $3^{2^{2x+1}-(9)^{2x+\frac{1}{2}}+32} = 27^{2^{x+\frac{1}{2}}}$ จงหาผลบวกของรากคำตอบของสมการ

Problem 21. ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก โดย $\angle B = 90^\circ$ มี D เป็นจุดบนส่วนของเส้นตรง AC ซึ่ง $AB = BC + CD$ ถ้า $\angle BAC = 2x$ และ $\angle DBC = 3x$ จงหา x

Problem 22. ให้ τ เป็นครึ่งวงกลมมีเส้นผ่านศูนย์กลาง AB มีจุด C อยู่บนส่วนของเส้นตรง AB และ จุด E และ D อยู่บนคอร์ด BA โดยที่ E อยู่ระหว่าง B และ D ให้ เส้นสัมผัส τ ที่จุด D และ E ตัดกันที่จุด F ถ้า $\angle ACD = \angle ECB$ จงแสดงว่า $\angle EFD = \angle ACD + \angle ECB$

Problem 23. ถ้า $\frac{3xy}{x+y} = 4$, $\frac{2yz}{y+z} = 3$, $\frac{5xz}{x+z} = 2$ แล้วค่าของ $\frac{47xyz}{2xy+yz-4xz}$ เท่ากับเท่าใด

Problem 24. หาไตรอันดับของจำนวนนับ (a, b, c) ซึ่ง $(2^a - 1)(3^b - 1) = c!$

Problem 25. จงหาผลคูณของจำนวนเต็ม n ทั้งหมดที่ทำให้ $n^2 + 59n + 881$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์

Problem 26. จงหาจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่มีจำนวนตัวหารที่เป็นบวกเท่ากับ 24 ตัว

Problem 27. ใน ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมแนบในวงกลมที่มีจุด O เป็นจุดศูนย์กลาง ถ้า $\angle ABC = 70^\circ$, $\angle ACB = 50^\circ$ และเส้นแบ่งครึ่งมุม BAC ตัดวงกลมที่จุด D จงหาขนาดของ $\angle ADO$

Problem 28. พิจารณา $\triangle ABC$ จุด M เป็นศูนย์กลางของ AC วงกลมสัมผัสกับ BC ที่จุด B และผ่าน M พบเส้นตรง AB อีกครั้งที่จุด P จงแสดงว่า $(AB)(BP) = 2BM^2$

Problem 29. ให้ $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมที่วงกลมล้อมรอบได้ ให้ F เป็นจุดศูนย์กลางของคอर्ड AB ของวงกลมของมันซึ่งไม่มี C หรือ D อยู่บน ให้ DF และ AC ตัดกันที่จุด P และ CF และ BD ตัดกันที่จุด Q จงแสดงว่าเส้นตรง PQ และ AB ขนานกัน

Problem 30. จงหาจำนวนเฉพาะ p ทั้งหมดที่ทำให้ $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์

Problem 31. หาค่าของ $\sum_{k=1}^{11} \frac{\sin(\frac{2^k+4}{89}\pi)}{\sin(\frac{2^k}{89}\pi)}$

Problem 32. หาผลรวมของคำตอบที่เป็นจำนวนจริงซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$$x^2 + \cos x = 2563$$

Problem 33. ให้ A และ B เป็นจำนวนจริงซึ่ง $(x+1)^2$ หาร $x^{2017} + Ax + B$ ลงตัวแล้ว B มีค่าเท่ากับเท่าไร

Problem 34. หาไตรอันดับ (a, b, c) ที่เป็นจำนวนนับ ซึ่ง

$$a^2 + b^2 = n \operatorname{lcm}(a, b) + n^2$$

$$b^2 + c^2 = n \operatorname{lcm}(b, c) + n^2$$

$$c^2 + a^2 = n \operatorname{lcm}(c, a) + n^2$$

บาง n ที่เป็นจำนวนนับ

Problem 35. หาจำนวนเฉพาะที่ใหญ่ที่สุด $p < 300$ และ มีจำนวนเต็ม x, y, u, v ซึ่ง

$$p = x^2 + y^2 = u^2 + 7v^2$$

Problem 36. เลข $1, 2, 3, \dots, 81$ ถูกใส่ในตารางขนาด 9×9 จงแสดงว่ามี ตารางย่อยขนาด 2×2 ซึ่งผลรวมของตัวเลขของมันมากกว่า 137

Problem 37. ให้ a, b เป็นจำนวนนับ จงแสดงว่า $\frac{(2a)!(2b)!}{a!b!(a+b)!}$ เป็นจำนวนเต็ม

Problem 38. An experiment is performed in which each trial consists of tossing an ordinary six-sided die repeatedly and adding the numbers that come up; in each trial, as soon as the total exceeds 15, we stop tossing the die. For this experiment, what final total is expected to occur most often?