Problems

Sarawut Suebsang

July 19, 2021

§1 Number theory

Example 1.1

ให้ m, n เป็นจำนวนเต็มบวกโดยที่ $\gcd(a, b) = 1$, m เป็นจำนวนคู่ และ n เป็นจำนวนคี่ จงหาค่าของ

$$\frac{1}{2n} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{\left\lfloor \frac{km}{m} \right\rfloor} \left\{ \frac{km}{m} \right\}$$

Example 1.2

จงหาจำนวนเฉพาะ p ทั้งหมด ซึ่ง $p = m^2 + n^2$ และ p หาร $m^3 + n^3 - 4$ ลงตัว
สำหรับจำนวนเต็มบวก m, n บางค่า

Example 1.3

ให้ $a_1, a_2, \ldots, a_k$ เป็นจำนวนเต็มบวก และ $d = \gcd(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ และ
$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$ จงแสดงว่า $\frac{d(n-1)!}{a_1!a_2!\ldots a_k!}$ เป็นจำนวนเต็ม

Example 1.4

ให้ $p \geq 2$ เป็นจำนวนเฉพาะ จงหาค่า k ทั้งหมดซึ่ง $S_k = 1^k + 2^k + \cdots + (p-1)^k$
หารด้วย p ลงตัว

Example 1.5

ให้ $p \geq 3$ เป็นจำนวนเฉพาะ นิยาม

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k^{120}, f(p) = \frac{1}{2} - \left\{ \frac{F(p)}{p} \right\} \text{ โดยที่ } x = x - \lfloor x \rfloor$$

จงหาค่าของ $f(p)$

Example 1.6

ให้ $p \geq 3$ เป็นจำนวนเฉพาะ จงหาฟังก์ชัน $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ทั้งหมดซึ่ง สำหรับแต่ละ $m, n \in \mathbb{Z}$
1. ถ้า $m \equiv n \pmod p$ แล้ว $f(m) = f(n)$ $\quad 2. f(mn) = f(m)f(n)$

Example 1.7

จงหาจำนวนเฉพาะ p ทั้งหมด ที่ทำให้ $\binom{100}{p} + 7$ หารด้วย p ลงตัว

Example 1.8

จงหาจำนวนเต็มบวก N ทั้งหมดที่มีตัวประกอบเฉพาะอย่างน้อยสองจำนวนและ N มีค่าเท่ากับผลบวกของกำลังสองของตัวหารบวกที่มีค่าน้อยที่สุด 4 จำนวนแรก

Example 1.9

ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม และ p เป็นจำนวนเฉพาะ สำหรับแต่ละจำนวนนับ k ใดๆ กำหนด$A_k = \{n \in \mathbb{N} : p^k | a^n - b^n\}$ จงแสดงว่าถ้า $A_1 \neq \emptyset$ แล้ว $A_k \neq \emptyset$ สำหรับทุก จำนวนนับ k

Example 1.10

ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ จงหาเศษจากการหาร $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} k!(p-k)!$ ด้วย p

Example 1.11

ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $a|b^c$ จงแสดงว่า $a|b^a$

Example 1.12

จงหา (a, b, c) ของจำนวนเต็มบวกทั้งหมดซึ่ง $(1 + \frac{1}{a})(1 + \frac{1}{b})(1 + \frac{1}{c}) = 2$

Example 1.13

จงหาจำนวนเต็มบวก n ทั้งหมดซึ่ง $-5^4 + 5^5 + 5^n$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์ ทำนองเดียวกัน จงหาจำนวนเต็มบวก n ทั้งหมด ซึ่ง $2^4 + 2^7 + 2^n$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์

Example 1.14

จงหาจำนวนสองหลัก $n = 10a + b$ โดยที่ $a, b \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ ซึ่ง ทุกจำนวนเต็ม k
$n | k^a - k^b$

Example 1.15

กำหนดให้ $x_1, x_2, \ldots, x_k$ เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = 1492$ จงแสดงว่า

$$x_1^7 + x_2^7 + \cdots + x_k^7 \neq 1998$$

Example 1.16

กำหนดให้ $p_1 < p_2 < \cdots < p_{31}$ เป็นจำนวนเฉพาะ ถ้า 30 หาร $p_1^4 + p_2^4 + \cdots + p_{31}^4$ ลงตัว จงแสดงว่ามี k ซึ่ง p_k, p_{k+1}, p_{k+2} เป็นจำนวนเฉพาะที่เรียงติดกัน

Example 1.17

ให้หาคู่อันดับของจำนวนเต็มบวก (m, n) ทั้งหมดซึ่งทำให้

$$[\phi(m)]^2 - 19[\phi(m)] = [\phi(n)]^2 - 91$$

Example 1.18

จงหาจำนวนเฉพาะ p ทั้งหมดที่ทำให้ $2p^2 - 3p - 1$ เป็นกำลังสามของจำนวนเต็มบวก

Example 1.19

จงหาพหุนาม $P(x)$ ทั้งหมดที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $2557^n + 213 \cdot 2014$ หารด้วย $P(n)$ ลงตัว สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n

Example 1.20

จงแสดงว่าไม่มีจำนวนเฉพาะ p, q ที่ทำให้ $2014p^{2557} + 1 = q^{2014}$

Example 1.21

จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่มีค่ามากที่สุด และ มีค่าน้อยที่สุด ซึ่ง 2552 เป็นตัวประกอบ และมีจำนวนตัวหารที่เป็นบวกทั้งหมดเท่ากับ 2009

Example 1.22

ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะที่อยู่ในรูป $4k + 3$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ ถ้า m และ n เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $p|m^2 + n^2$ แล้ว $p^2|m^2 + n^2$

Example 1.23

จงแสดงว่าไม่มีคู่อันดับ (x, y) ของจำนวนเต็ม ที่สอดคล้องกับสมการ $2560x^2 + 5x + 6 = y^5$

Example 1.24
สำหรับจำนวนเต็มบวก n กำหนดให้ $S(n)$ แทนผลรวมของเลขโดดใน n จงหาจำนวนเฉพาะ p ทั้งหมดซึ่ง $S(p^{p+2}) = S((p+2)^p)$

§2 Combinatorics

§3 Algebra