0.1 Риманов интеграл

Циљ је дефинисати (евентуално и израчунати) површину испод графика задате функције $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (битно је да је функција на интервалу). Ово је проблем који су и Стари Грци, Архимед и Еудокс, умели да реше за прилично широке класе функција.

Могуће је пристпупити проблему са више гледишта, или преко посматрања лимеса, или преко супремума и инфимума. Први начин је Риманов, а други Дарбуов и оба имају своје мане, као и предности. Када докажемо њихову еквиваленцију, моћи ћемо да употребљавамо оба у зависности од тога који нам више одговара у датој ситуацији.

0.1.1 Веза са примитивном функцијом

Претпоставимо да је функција f непрекидна на интервалу $[a, b]$ и означимо са $P(x)$ површину испод графика функције f на интервалу $[a, x]$. Дакле, ако имамо $h \to 0$, онда је и $f(x+h) \to f(x)$, одакле следи $P(x+h) - P(x) \sim f(x)h$ (тј. разлику површина посматрамо заправо као површину правоугаоника). Одавде имамо да је

$$f(x) \sim \frac{P(x+h) - P(x)}{h} \xrightarrow{h \to 0} P'(x) \implies P'(x) = f(x).$$

Дакле, ако је $f C[a, b]$, P је примитивна за f.

Нагласимо да је ово неформалан доказ, служи нам чисто ради интуиције. Ово тврђење ћемо касније називати основном теоремом интегралног рачуна. Ово нам даје интуитивну представу о следећој дефиницији.

Дефиниција 0.1. *Нека је $F : [a, b] \to \mathbb{C}$ примитивна функција непрекидне функције $f : [a, b] \to \mathbb{C}$. Њутнов интеграл функције f је*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Из јединствености примтивне функције F за f на интервалу (до на адитивну константу) следи да је дефиниција добра, тј. да Њутнов интеграл не зависи од одабира примитивне функције.

Разлика $F(b) - F(a)$ се означава и са $F|_a^b$, $F(x)|_a^b$, $F(x)|_{x=a}^{x=b}$, а уместо $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b$ пишемо $\int_a^b f = F|_b^a$.

Но, природно је поставити питање када уопште постоји примитвна функција? Одавде је јасно да за непрекидне постоји примитивна функција, али то је веома јака претпоствка. Из датих дефиниција и примера не можемо да закључимо када постоји примитивна функција дате функције. Одоговор ће нам дати формална дефиниција Римановог интеграла.

Можемо формулисати и опстхији проблем. Наиме, зашто се заусавити на површини? Често ће нас занимати и запремина па чак и више димензиона запремина. Но пре тога треба дефинисати појам аналоган интервалу у више димензија.

Дефиниција 0.2. *Нека су $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_n$ интервали у $\mathbb{R}$. Декартов производ $\mathcal{J} = \mathcal{I}_1 \times \mathcal{I}_2 \times \ldots \times \mathcal{I}_n$ називамо n-димензионим квадром.*

Крајњи циљ је дефинисати (уколико је могуће и израчунати) $(n + 1)$-димензиону запремину испод графика функције $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$.