Анализа 1

Огњен Петров

2022.

Садржај

Глава 1

Увод

1.1 Елементи теорије скупова

Подразумеваћемо да су читаоцу позната основна својства теорије скупова и да је формално доказао постојање Декартовог производа, и пре свега функције.

Глава 2

Заснивање реалних бројева

Приступамо дефинисању реалних бројева преко аксиоме супремума, као и алгебарским структурама. Ово није једини приступ, могуће су и опције преко Архимедове и Канторове аксиоме, које ћемо помињати даље у току поглаваља. Такође је могуће и применити Дедекиндове пресеке за заснивање реалних бројева, сви од ових начина су еквивалентни, што нећемо експлицитно доказати, али овде нагалшавамо.

2.1 Абелове и (тотално) уређене Абелове групе

Дефиниција 2.1. *Алгебарска структура* $(A, +, 0)$ *је Абелова група ако су испуњени следећи услови:*

$$\begin{aligned}
&\textit{(Затвореност)} && (\forall x, y \in A) x + y \in A \\
&\textit{(Асоцијативност)} && (\forall x, y, z \in A) x + (y + z) = (x + y) + z \\
&\textit{(Неутрал)} && (\exists 0 \in A)(\forall x \in A) x + 0 = x = x + 0 \\
&\textit{(Инверз)} && (\forall x \in A)(\exists - x \in A) x + (-x) = (-x) + x = 0 \\
&\textit{(Комутативност)} && (\forall x, y \in A) x + y = y + x
\end{aligned}$$

Затвореност је заправо својство саме операције, па се понекад не наводи у самој дефиницији. Структура која је само затворена назива се груопоид, ако је уз то још и асоцијативна, онда је семигрупа (пулугрупа), ако још и постоји неутрал онда је моноид, а ако постоји и инверз онда је група. Комутативне група је Абелова група. Ова струкутра природно описује неке основне ствари, нпр. $(\mathbb{Z}, +, 0)$ је пример Абелове групе, $(S_n, \circ,)$ је група пермутација (није комутативна у општем случају), и у њима важе ствари које су природне за очекивати, нпр. јединственост неутрала и инверза.

Тврђење 1. *Неутрал је јединствен.*

Доказ. Претпоставимо супротно, тј. да имамо два различита неутрала, 0_1 и 0_2. Из дефиниције неутрала имамо $0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$, па је неутрал јединствен. □

Природно је дефинисати и одузимање (сличну идеју користимо и када формално, у логици, дефинишемо целе бројеве), наиме z је разлика x и y, у ознаци $z = x - y$, ако је $x + z = y$. Формалније, дефинишимо функцију $\tau_a : A \to A$ (овакву функцију називамо транслацијом из очигледних разлога), где је $\tau_a(x) = a + x$. Посебно истичемо следећа својства.

Тврђење 2. *За сваку транслацију важи:*

- $\tau_{a+b} = \tau_a \circ \tau_b = \tau_b \circ \tau_a$
- $\tau_a \circ \tau_{-a} = \tau_{-a} \circ \tau_a = \mathbb{1}_a$
- $\tau_{-a} = \tau_a^{-1}$
- *Транслација је пермутација скупа A.*

Доказ. Прво својство директно следи из асоцијативности операције $+$ и комутативности. Оно директно повалчи друго, из којег закључујемо да су τ_a и τ_{-a} међусобно инверзне бијекције, па одатле закључујемо и последње две ставке. □

Тврђење 3. *За све $x, y, z \in A$ једначина $\tau_y(z) = x$ има тачно једно решење z*

Доказ. Следи из треће ставке претходног тврђења. □

Последица 1. *Инверз је јединствен (инверз је у ствари решење једначине $\tau_x(y) = 0$).*

Сада и можемо формално рећи да је z разлика бројева x и y, у претходно наведеној ознаци, ако је $\tau_y(z) = x$

Дефиниција 2.2. *Пресликавање $\sigma : A \to A$ дато са $\sigma(x) = -x$ називамо симетријом, или рефлексијом.*

Напомена. Рефлексија је добро дефинисана јер је инверз јединствен.

Тврђење 4. *За сваку рефлексију важи $\sigma \circ \sigma = \mathbb{1}$*

Доказ. Из дефиниције следи да је $x + \sigma(x) = 0$, а самим тим је и $\sigma(x) + \sigma(\sigma(x)) = 0$, одакле следи да је $\sigma(\sigma(x)) = x$, за произвољно x. □

Сабирање се дефинише као функција $+ : A \times A \to A$. Међутим, ми смо навикли да пишемо и нпр. изразе облика $a + b + c + d$, који би имали смисла само када имамо већ асоцијативност операције. Дефиницију сабирања проширујемо на пресликавање $\Sigma : \cup_{n \in \mathbb{N}} A^n \to A$ на индуктиван начин.

Глава 3

Елементарне функције

Глава 4

Лимеси и непрекидност

4.1 Филтери

Филтери нам омогућавају да одмах разматрамо неке уопштеније случајеве лимеса, нешто што сматрамо лимесом, али не у оној обичној форми у којој смо ми навикли. Опет, могу и да олакшају знатно неке доказе, а негде су можда чак и природнији за употребу од обичних дефиниција лимеса.

Дефиниција 4.1. *Филтер на скупу S је подскуп партитивног скупа (тј. фамилија подскупова S) $\mathscr{F} \subseteq \mathcal{P}(S)$, која има својства:*

(F1) $S \in \mathscr{F}$

(F2) $\emptyset \notin \mathscr{F}$

(F3) $X, Y \in \mathscr{F} \implies X \cap Y \in \mathscr{F}$

(F4) $X \in \mathscr{F} \wedge X \subseteq Y \subseteq S \implies Y \in \mathscr{F}$

Напомена. Нагласимо да се својства (F3) и (F4) могу објединити у својство

$$X, Y \in \mathscr{F} \iff X \cap Y \in \mathscr{F},$$

но својства дата у дефиницију су интуитивна за рад, иако су нешто дуже записана.

Пример 4.1. *Скуп $\mathscr{F} = \{S\}$ је један филтер на S.*

Пример 4.2. *Ако је $\emptyset \subset A \subseteq S$, онда је $\mathscr{F} = \{X \in \mathcal{P}(S) \mid A \subseteq S\}$ један филтер на S.*

Пример 4.3. *Скуп свих кофинитних подскупова S је филтер на S, овај филтер називамо Фрешеовим филтером. Специјално, Фрешеов филтер на $\mathbb{N}$, ће бити од посебног значаја у раду са низовима.*

Пример 4.4. *Скуп $A \subseteq \mathbb{R}$ је околина тачке $a \in A$, ако садржи неки прави интервал са центром у a, тј. ако*

$$(\exists \delta > 0)]a - \delta, a + \delta[\subseteq A.$$

Скуп $\mathscr{F}_a$ који чине све околине тачке a, је један филтер на $\mathbb{R}$ који називамо филтером околине тачке a.

Пример 4.5. *За $a \in \mathbb{R}$, скуп $\mathscr{F}_a^0 = \{X \mid \cup\{a\} \in \mathscr{F}_a\}$ је филтер који називамо филтером пробушених околина тачке a.*

Напомена. Треба формално доказати да је све из наведених примера заправо филтер, што спроводимо директном провером својства $(F1)$ - $(F4)$.

Дефиниција 4.2. *Нека је $\mathscr{F}$ филтер на скупу S и ρ бинарна релација на скупу Y. На скупу $Y^S := \{f : S \to Y\}$ свих пресликавања дефинишемо бинарну релацију $\rho_{\mathscr{F}}$ са*

$$f \ \rho_{\mathscr{F}} \ g \overset{деф.}{\iff} \{s \in S \mid f(s) \ \rho \ g(s)\} \in \mathscr{F}$$

Слободније речено, тврдимо да су функције у релацији, ако је скуп координата на којима се функције поклапају елемент филтера. Дефиниција је значајна, јер нам омогућава да на неки начин проширујемо релацију дефинисану на кодомену функције до релације на скупу функција.

Тврђење 5. *Ако је ρ рефлексивна, онда је и $\rho_{\mathscr{F}}$ рефлексивна. Аналогна тврђења важе за симетричност и транзитивност.*

*Доказ.*Докажимо најрпе рефлексивност. Треба доказати да је увек $f \ \rho \ f$. По дефиницији, ово је тачно ако је скуп $\{s \in S \mid f(s) \ \rho \ f(s)\} \in \mathscr{F}$, а како је ρ рефлексивна, онда је ово исто као $S \in \mathscr{F}$, што јесте тахцно. Доказ симетричности се своди на својство да је

$$\{s \in S \mid f(s) \ \rho \ g(s)\} = \{s \in S \mid g(s) \ \rho \ f(s)\},$$

што следи директно из симетричности ρ. Доказ транзитивности се ослања на $(F3)$ (посматрамо пресек скупова, што је такође елемент филтера).

Напомена. Антисиметричност се не преноси. Конструисаћемо једноставан контрапример. Нека је $S = Y = \{1, 2, 3\}$, филтер $\mathscr{F} = \{\{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$,и нека је релација ρ= $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$ и функције $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ и $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Тада важи $f \ \rho_{\mathscr{F}} \ g$ и $g \ \rho_{\mathscr{F}} \ f$, али је $f \neq g$.

Последица 2. *Ако је ρ релација еквиваленције, онда је је $\rho_{\mathscr{F}}$ релација еквиваленције. Исто тврђење не важи ако је ρ релација поретка*

Дефиниција 4.3. *Нека је $\zeta \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}$ и $r > 0$. Отворени диск са центром у ζ полупречника r је скуп $D\,]\zeta; r\,[:= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \zeta| < r\}$. Слично дефинишемо и затоврени диск $D\,[\zeta; r\,] := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \zeta| \leqslant r\}$.*

Дефиниција 4.4. *Нека је $\mathscr{F}$ филтер на S и $f \in \mathbb{C}^S$ пресликавање из S у $\mathbb{C}$. Комплексан број ζ је лимес пресликавања f по филтеру $\mathscr{F}$ ако за све $\varepsilon > 0$ важи $|f - \zeta| <_{\mathscr{F}} \varepsilon$, тј.*

$$\zeta = \lim_{\mathscr{F}} f \overset{деф.}{\iff} (\forall \varepsilon > 0)|f - \zeta| <_{\mathscr{F}} \varepsilon.$$

Еквивалентно:

$$\begin{aligned} \zeta = \lim_{\mathscr{F}} f &\iff (\forall \varepsilon > 0) f^{-1}(D\,]\zeta; \varepsilon\,[) \in \mathscr{F} \\ &\iff (\forall \varepsilon > 0)\{s \in S \mid |f(s) - \zeta| < \varepsilon\} \in \mathscr{F} \end{aligned}$$

Тврђење 6. *Лимес по филтеру је јединствен.*

*Доказ.*Претпоставимо супротно, тј. да постоје два различита лимеса функције $f : S \to \mathbb{C}$ по филтеру $\mathscr{F}$ и нека су то $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Нека су

$$X := f^{-1}(D\,]\alpha;\varepsilon\,[) \in \mathscr{F}$$
$$Y := f^{-1}(D\,]\beta;\varepsilon\,[) \in \mathscr{F}.$$

Из $(F2)$ следи да је $X \cap Y \in \mathscr{F}$, међутим узимањем $\varepsilon = \dfrac{1}{3}|\alpha - \beta|$ добијамо да је $X \cap Y = \emptyset$, контрадикција.

Нека је $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ комплексних бројева, тј. пресликавање $z : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Кажемо да z_n конвергира ка $z_\infty \in C$ ако је

$$z_\infty = \lim_{\mathscr{F}_\mathbb{N}} z,$$

где је $\mathscr{F}_\mathbb{N}$ Фрешеов филтер на $\mathbb{N}$. Број z_∞ називамо граничном вредношћу или лимесом низа $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Поред наведене, користе се још и ознаке $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_\infty$, $z_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} z_\infty$, $z_n \to z_\infty$ кад $n \to \infty$. Ако постоји лимес, онда низ називамо конвергентим, а у супротном га називамо дивергентним.

Ова дефиниција постојања лимеса низа је еквивалентна стандардној дефиницији, иако то можда није очигледно на први поглед. Наша дефиниција каже да ће за свако $\varepsilon > 0$ скуп индекса i за које важи $z_i \in D\,]z_\infty;\varepsilon\,[$ (тј. који су на растојању мањем од ε од тачке z_∞) бити члан $\mathscr{F}_\mathbb{N}$. Међутим, по дефиницији $\mathscr{F}_\mathbb{N}$, то управо значи да је комплемент тог скупа индекса коначан, што значи да ће почев од неког n_0, за свако $n \geq n_0$ важити $z_n \in D\,]z_\infty;\varepsilon\,[$.

4.2 Непрекидност и лимес функције

Дефиниција 4.5. *Функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ је непрекидна у тачки $a \in \mathbb{R}$ ако постоји $\lim\limits_{\mathscr{F}_a} f$, где је $\mathscr{F}_a$ филтер околине тачке a. Користимо ознаку $f\,C\,a$.*

$$f\,C\,a \stackrel{\text{деф.}}{\iff} \exists \lim_{\mathscr{F}_a} f$$

.

Кажемо да је функција непрекидна на скупу $A \subseteq \mathbb{R}$ ако је непрекидна у свакој тачки тог скупа, и тада користимо ознаку $f\,C\,A$.

$$f\,C\,A \stackrel{\text{деф.}}{\iff} (\forall a \in A) f\,C\,a$$

Напомена. Постојање лимеса по филитеру околине тачке је еквивалентно са

$$\lim_{\mathscr{F}_a} = f(a).$$

Претпоставимо супротно, нека је $\lim\limits_{\mathscr{F}_a} = \gamma \neq f(a)$. Онда узимањем $\varepsilon = \dfrac{1}{3}|f(a) - \gamma|$ важи да $a \notin f^{-1}(D\,]\gamma;\varepsilon\,[)$, а самим тим и $f^{-1}(D\,]\gamma;\varepsilon\,[) \notin \mathscr{F}_a$, одакле следи контрадикција.

Еквивалентне формулације непрекидности:

$$\begin{aligned} f\,C\,a &\iff (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon \\ &\iff (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0) f(]a - \delta, a + \delta[) \subseteq D\,]f(a);\varepsilon\,[. \end{aligned}$$

Дефиниција 4.6. *Кажемо да је $\zeta \in \mathbb{C}$ лимес функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ у тачки $a \in \mathbb{R}$ ако је*

$$\zeta = \lim_{\mathscr{F}_a^0} f$$

За лимес функције у тачки чешће користимо ознаку $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, или $f(x) \to \zeta$ кад $x \to a$. Еквивалнтне дефиниције лимеса функције у тачки су:

$$\begin{aligned}\zeta = \lim_{x\to a} &\iff (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - \zeta| < \varepsilon\\ &\iff (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)f(]a - \delta, a + \delta[\setminus\{a\}) \subseteq D\,]\zeta; \varepsilon\,[.\end{aligned}$$

Приметимо да се знатно разликују дефиниције непрекидности у тачки и постојања лимеса у тачки. Наиме, вредност функције у тачки a не мора имати никакве везе са лимесом функције у тој тачки. Јасно је да уколико постоји веза, онда се повезују непрекидност и вредност лимеса у тачки, што посебно истичемо у следећем ставу.

Став 4.1. *За функцију $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ и $a \in \mathbb{R}$ следећи искази су еквивалентни:*

1. $f C a$
2. $\lim\limits_{x\to a} = f(a)$
3. *За сваки низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ у $\mathbb{R}$ важи*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$$

Доказ. Докажимо најпре да (1) имплицира (2). Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. По дефиницији постојања лимеса по филтеру околине, знамо да је $f^{-1}(D\,]f(a); \varepsilon\,[) \in \mathscr{F}_a$, а како је $\mathscr{F}_a \subseteq \mathscr{F}_a^0$, онда је и $f^{-1}(D\,]f(a); \varepsilon\,[) \in \mathscr{F}_a^0$, тј. важи (2).

Докажимо сада да (2) имплицира (3). Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Због (2) знамо да постоји $\delta > 0$ тако да важи

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

За такво δ знамо да су почев од неког $n_0 \in \mathbb{N}$ сви чланови x_n $(n \geq n_0)$ у δ околини тачке a. Дакле, (2) имплицира (3).

На крају докажимо контрапозицију, тј. да $\neg(1) \implies \neg(3)$.

$$\begin{aligned} f C a &\iff \neg[(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon]\\ &\iff (\exists\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0)|x - a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon\\ &\implies (\exists\varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N})|x_n - a| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon\\ &\implies \lim_{n\to\infty} x_n = a \wedge \neg(\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)),\end{aligned}$$

тј. ако не важи (1), онда не важи ни (3). Нагласимо још да смо до последње импликације (тј. до чињенице да из $(\forall n \in \mathbb{N})|x_n - a| < \frac{1}{n} \implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$) дошли позивајући са на Архимедову аксиому. □

Став 4.2. *За сваку функцију $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$ и $\zeta \in \mathbb{C}$ следећи искази су еквивалентни:*

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \zeta$

2. *За сваки низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ из $\mathbb{R}\setminus\{a\}$ важи*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \zeta$$

3. *Функција*

$$F(x) := \begin{cases} f(x), x \neq a \\ \zeta, x = a \end{cases},$$

је непрекидна у тачки a.

Доказ. Доказ је у потнпуности аналоган доказу става 4.2. □

Тврђење 7 (Принцип локализације)**.** *Нека је $\mathscr{F}$ филтер на скупу S. Тада за свака два пресликавања $f, g : S \to \mathbb{C}$ важи:*

$$f =_{\mathscr{F}} g \implies \lim_{\mathscr{F}} f = \lim_{\mathscr{F}} g.$$

Доказ. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно и $\gamma = \lim\limits_{\mathscr{F}} f$. Даље, нека је $X := \{s \in S \mid |f(s) - \gamma| < \varepsilon\} \in \mathscr{F}$ и $Y := \{s \in S \mid f(s) = g(s)\} \in \mathscr{F}$. Онда је $X \cap Y \in \mathscr{F}$, а како је $X \cap Y \subseteq \{s \in S \mid |g(s) - \gamma| < \varepsilon\}$, онда је, према $(F4)$, и $\{s \in S \mid |g(s) - \gamma| < \varepsilon\} \in \mathscr{F}$, одакле следи $\gamma = \lim\limits_{\mathscr{F}} g$, што је и требало доказати. □

Последица 3. *Конвергенција низа не зависи од коначно много његовиг чанова.*

Последица 4. *Непрекидност функције у тачки a зависи само од понашања функције у околини тачке a*

Приметимо да у дефиницијама 4.5 и 4.6 захтевамо да је домен функције читаво $\mathbb{R}$. Ово честхо неће бити случај када се бавимо функцијама, стога било и корисно ако можемо проширити дефиницију да важи и када је домен $S \subset \mathbb{R}$, но не морамо се ни ту зауставити, већ можемо и дефинисати чак и за $\mathbb{C}$.

Дефиниција 4.7. *Нека је $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $S \subseteq \mathbb{K}$ и $f : S \to \mathbb{C}$. Скуп $V \subseteq \mathbb{K}$ је околина тачке $a \in \mathbb{K}$ ако*

$$(\exists\delta > 0)\{x \in \mathbb{K} \mid |x - a| \leqslant \delta\} \subseteq V \tag{4.1}$$

Када је $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, онда је скуп на левој страни заправо отворен интервал $]a - \delta, a + \delta[$, а у случају $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ скуп на левој страни је заправо отворен диск $D\,]a; \delta\,[$. Касније, у метричким просторима, ову улогу ће играти отворне лопте.

Дефиниција 4.8. *Ако за сваку околину V тачке $a \in \mathbb{K}$ важи $(V \setminus \{a\}) \cap S \neq \emptyset$, онда кажемо да је a тачка нагомилавања скупа S.*

Слободније речено, a је тачка нагомилавања скупа S, ако свака околина тахцке a садржи неку тачку скупа S, различиту од a. Нагласимо да тачка нагомилавања може, али никако не мора припадати скупу S.

Пример 4.6. *Тачке нагомилавања отвореног интервала $]0, 1[$ су све тачке интервала $[0, 1]$, и ниједна више.*

Пример 4.7. *Тачке нагомилавања скупа $S = D\,]0; 1\,[\cup \{1 + i\}$ су све тачке скупа $D\,[0; 1\,]$, и ниједна више.*

Тачке које припадају скупу S, али нису тачке нагомилавања скупа S, називамо изолованим тачкама. Нпр. у примеру 4.7, $1+i$ представља једну изоловану тачку.

Тврђење 8 (Еквивалентна дефиниција тачке нагомилавања)**.** *Тачка $a \in \mathbb{K}$ је тачка нагомилавња скупа $S \subseteq \mathbb{K}$ акко свака њена околина садржи бесконачно много тачака скупа S.*

Доказ. Претпоставимо најпре да свака околина тачке a садржи бесконачно много тачака скупа S. Нека је V произвољна околина тачке a. Пошто је $V \cap S$ бесконачан, онда је и скуп $(V \setminus \{a\}) \cap S$ такође бесконачан, па је самим тим различит од $\emptyset$, тј. a јесте тачка нагомилавања.

Обрунто, претпоставимо да је a тачка нагомилавња скупа S. Претпоставио супротно, тј. да постоји околина U тачке a, која садржи коначно много тачака скупа S, тј. имамо да је скуп $(U\setminus\{a\})\cap S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ коначан. Означимо са $\delta_i = |a-a_i| > 0$. Приметимо најпре да ако из околине U избацимо коначно много тачака, можемо направити подоколину U' (тада ћемо у дефиницији околине узети $\delta' = \min\{\delta_1, \delta_2, ...\delta_n\} > 0$, што постоји јер је скуп коначан). Међутим, тада је $(U' \setminus \{a\}) \cap S = \emptyset$, што је контрадикција са претпоставком да је a тачка нагомилавња. $\square$

Став 4.3. *Нека је $\mathscr{F}$ филтер на произвољном скупу T, $L \subseteq T$ и $\mathscr{F}[L] = \{X \cap L \mid X \in \mathscr{F}\}$. Доказати еквиваленцију:*

$$\mathscr{F}[L] \text{ је филтер на } L \iff \emptyset \notin \mathscr{F}[L].$$

Доказ. Смер слева надесно је тривијалан (филтер по дефиницији не садржи празан скуп). Што се тиче супротног смера, довољно је приметити да су испуњена својства дефинисања филтера. Свакако је $(F1)$ тачно због $L = L\cap T$, $(F2)$ је тачно по претпоставци. Проверимо својство $(F3)$. Нека су $X_L = X \cap L$ и $Y_L = Y \cap L$ чланови скупа $\mathscr{F}[L]$ (нагласимо да још увек нисмо доказали да је $\mathscr{F}[L]$ филтер, засад злоуботребљавамо идентичну ознаку), где су X и Y чланови $\mathscr{F}$. Тада је

$$X_L \cap Y_L = (X \cap L) \cap (Y \cap L) = (X \cap Y) \cap L,$$

а како је $X \cap Y \in \mathscr{F}$ онда је и $X_L \cap Y_L \in \mathscr{F}_L$, што је различито од празног скупа по претпоцавци.

Преостало је још да докажемо својство $(F4)$. Нека је $X\cap L = X_L \in \mathscr{F}[L]$ и $X_L \subseteq Y_L \subseteq L$. Треба да докажемо да је $Y_L = Y \cap L$, за неко $Y \in \mathscr{F}$, јер то имплицира $Y_L \in \mathscr{F}[L]$. Посматрајмо скуп $X\cup Y_L$. Како је $X \subseteq X\cup Y_L$, онда је $X\cup Y_L \in \mathscr{F}$, па је $(X\cup Y_L)\cap L \in \mathscr{F}[L]$. Пошто је

$$(X \cup Y_L) \cap L = (X \cap L) \cup (Y_L \cap L) = X_L \cup Y_L = Y_L,$$

онда је $Y_L \in \mathscr{F}[L]$, што је и требало доказати. $\square$

Последица 5. *Нека је $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ и $S \subseteq \mathbb{K}$. Ако је a тачка нагомилавања скупа S, онда су $\mathscr{F}_a[S]$ и $\mathscr{F}_a^0[S]$ филтери.*

Због последице 5 можемо наслутити како ћемо дефинисати непрекидност и филтере на скуповима другачијим од $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, а притом, оно што је још и важније, можемо закључити да ће те дефиниције имати смисла.

Дефиниција 4.9. *Нека је $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $S \subseteq \mathbb{K}$, $a \in S$ тачка нагомилавња скупа S и $f : S \to \mathbb{C}$ функција. Кажемо да је f непрекидна у тачки a ако је*

$$\zeta = \lim_{\mathscr{F}_a} f.$$

Коистимо ознаку fCa.

Кажемо да је функције непрекидна на скупу $A \subseteq S$ (и означавамо са fCA) ако је непрекидна у свакој тачки скупа A.

Дефиниција 4.10. *Нека је $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $S \subseteq \mathbb{K}$, $a \in \mathbb{K}$ тачка нагомилавња скупа S и $f : S \to \mathbb{C}$ функција. Кажемо да је $\zeta \in \mathbb{C}$ лимес функције $\mathscr{F}$ у тачки a ако је*

$$\zeta = \lim_{\mathscr{F}_a^0} f.$$

За записивање лимеса користимо исте ознаке које су истакнуте након дефиниције 4.6.

Напомена. Кључна разлика у претходним дефиницијама је то што у дефиницији 4.9 захтевамо да тачка нагомилавња скупа припада том скупу (што је потпуно логично, јер нема смисла причати о непрекидности функције у тачки ван домена функције), док у дефинцији 4.10 захтевамо само да је у питању тачка нагомилавања.

4.3 Асимптотске релације

Глава 5

Диференцијабилност

Глава 6

Примитивна функција. Неодређени интеграл.

6.1 Примитивна функција

Дефиниција 6.1. *F је примитивна за f на I (F је решење диференцијалне једначине $F' = f$ на I), где је $I \subseteq \mathbb{R}$ прави интервал* $(\sup I > \inf I)$ *и* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}, f : I \to \mathbb{K}, F : I \to \mathbb{K}$ *ако важи:*

(1) F је непрекидна на I

(2) постоји највише пребројив скуп $P \subseteq I$ такав да је: $(\forall x \in I \setminus P) F'(x) = f(x)$.

F је тачна примитивна за f на I ако важи:

(1) F је непрекидна на I

(2) $(\forall x \in I) F'(x) = f(x)$.

Пример 6.1. *Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{sgn} x$ и $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = |x|$. F је непрекидна на $\mathbb{R}$ и важи $F'(x) = f(x)$ за $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ стога следи да је F примитивна за f на $\mathbb{R}$.*

Пример 6.2. *Нека је f карактеристична функција интервала $I = [a, b]$, односно функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$, то јест:*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in I \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus I \end{cases}$$

и нека је F функција задата на следећи начин:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ x - a, & a \leqslant x \leqslant b \\ b - a, & x > b \end{cases}$$

Како је F непрекидна на $\mathbb{R}$ и $F'(x) = f(x)$ за $x \in \mathbb{R} \setminus \{a, b\}$ закључујемо да је F примитивна за f на $\mathbb{R}$.

Пример 6.3. *Нека су f и F фунцкије задате на следећи начин:*

$$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad F(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad f(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

Функција F је непрекидна на $\mathbb{R}$ јер је непрекидна у нули ($\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to0^-}F(x)=F(0)$), а у тачкама различитим од нуле непрекидна је као композиција непрекидних. Приметимо да је F тачна примитивна за f јер увек важи $F'(x)=f(x)$.

Пример 6.4. *Нека је $I\subseteq\mathbb{R}$ отворен интервал и $F:I\to\mathbb{R}$ конвексна функција. Одатле закључујемо да $F\in\mathscr{D}_+(I)\cap\mathscr{D}_-(I)$ и F'_+,F'_- расту, па следи да F'_+ и F'_- имају највише пребројиво много прекида и сви они су прекиди прве врсте (раније доказано код монотоности). Како из*

$$F'_-C_+a \implies (\forall x\in I)(x>a\implies F'_-(a)\leqslant F'_+(a)\leqslant F'_-(x)),$$

преласком на $\lim\limits_{x\to a^+}$ добијамо $F'_+(a)=F'_-(a)$, што значи да је $F\mathscr{D}a$ у свакој тачки $a\in I$ у којој је F'_-C_+a, односно свуда осим у пребројиво много тачака. Дефинишимо скуп P на следећи начин: $P=\{a\in I\ \mid\ \neg F'_-C_+a\}$ и

$$f(x)=\begin{cases} F'(x), & x\in I\setminus P\\ \textit{било шта}, & x\in P,\end{cases}$$

тада је F примитивна за f. Стога, свака конвексна функција је примитивна.

Напомена. Наводимо и опште тврђење уз претходне примере.Ако је:

- $I\subseteq\mathbb{R}$ прави интервал ($\sup I>\inf I$)
- $P\subseteq I$ највише пребројив подскуп
- $F:I\to\mathbb{C}, F\in C(I)\cup\mathscr{D}(I\setminus P)$,

онда је F примитивна функција за $f:I\to\mathbb{C}$

$$f(x)=\begin{cases} F'(x), & x\in I\setminus P\\ \text{било шта}, & x\in P\end{cases}$$

Тврђење 9. *Функција $F:I\to\mathbb{C}$ је примитивна за $f:I\to\mathbb{C}$ ако и само ако је* $\mathrm{Re}F$ *примитивна за* $\mathrm{Re}f$ *и* $\mathrm{Im}F$ *примитивна за* $\mathrm{Im}f$.

Тврђење 10. ***(Јединственост примитивне функције)*** *Нека је функција $F:I\to\mathbb{C}$ примитивна за $f:I\to\mathbb{C}$. Тада је функција $G:I\to\mathbb{C}$ примитивна за f ако и само ако је*

$$F-G\equiv const$$

Доказ. Смер $\Longleftarrow$ следи из $(\mathrm{const})' = 0$ и непрекидности функције F на интервалу I. Смер $\Longrightarrow$ доказујемо на следећи начин. Из услова тврђења знамо да је $F' = f$ на $I \setminus P_1$ и $G' = f$ на $I \setminus P_2$, где су P_1 и P_2 највише пребројиви, и $F, G \in C(I)$. Следи да је $(F-G)' = F' - G' = f - f = 0$ на $I \setminus (P_1 \cup P_2)$, што јесте комплемент највише пребројивог скупа пошто је унија два највише пребројива скупа највише пребројив скуп. На основу опште теореме средње вредности закључујемо да је $F - G = const$. □

Напомена. Предходно тврђење нам заправо говори да уколико су F_1 и F_2 две примитивне функције функције f на интервалу, тада је разлика $F_2(x) - F_1(x)$ константна. Важно је обратити пажњу да су примитивне на интервалу. Заиста, нека су дате функције

$$F_1(x) = x^2 \quad \text{и} \quad F_2(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$$

на скупу $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ који није интревал. Тада је $F_1'(x) = F_2'(x) = 2x$ за свако x из $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, међутим, $F_2(1) - F_1(1) = 1 \neq 0 = F_2(-1) - F_1(-1)$, те разлика $F_2 - F_1$ није константна.

Последица 6. *Нека су $F, G : I \to \mathbb{C}$ примитивне за $f : I \to \mathbb{C}$. Тада важи:*

(1) $(\exists x \in I)\ F(x) = G(x) \iff (\forall x \in I)\ F(x) = G(x)$

(2) $F(x_1) - F(x_2) = G(x_1) - G(x_2)$ *за све* $x_1, x_2 \in I$.

Последица 7. *Ако је функција $F : I \to \mathbb{C}$ примитивна за $f : I \to \mathbb{C}$, онда за свако $x_0 \in I$ и свако $y_0 \in \mathbb{C}$ постоји тачно једна примитивна функција $\phi : I \to \mathbb{C}$ за f таква да је $\phi(x_0) = y_0$. При томе је $\phi(x) = F(x) - F(x_0) + y_0$.*

6.1.1 Таблица примитивних функција

$f(x)$	$F(x)$	dom F	напомена
0	c	$\mathbb{R}$	$c \in \mathbb{C}$
x^α	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	зависи од α	$\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\log\|x\|$	$\mathbb{R}^*$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$	$\mathbb{R}$	$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\log\|\frac{1+x}{1-x}\|$	$\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\frac{\pi}{2} - \arccos x$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\log\|x + \sqrt{x^2+1}\|$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{arcsh} x$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\log\|x + \sqrt{x^2-1}\|$	$\mathbb{R} \setminus (-1, 1)$	$\operatorname{arcch} x, \|x\| \geqslant 1$
$e^{\xi x}$	$\frac{1}{\xi}e^{\xi x}$	$\mathbb{R}$	$\xi \in \mathbb{C}^*$
a^x	$\frac{1}{\log a}a^x$	$\mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$	
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$	
$\sec^2 x$	$\operatorname{tg} x$	$\mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}(2\mathbb{Z}+1)$	
$\operatorname{cosec}^2 x$	$-\operatorname{ctg} x$	$\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$	
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$	
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$	

6.2 Неодређени интеграл

Дефиниција 6.2. ***Неодређени интеграл*** *функције $f : I \to \mathbb{C}$ је скуп свих њених примитивних функција на I. Ознака: $\int f(x)dx$ или $\int f$.*

Ако је $F : I \to \mathbb{C}$ нека примитивна функција за f на I, онда је

$$\int f(x)dx = \{F + C | c \in \mathbb{C}\}.$$

Тврђење 11. *(**Локалност примитивне функције**) Нека је $I \subseteq \mathbb{R}$ ограничен интервал. За функције $f : I \to \mathbb{C}$ и $F : I \to \mathbb{C}$ следећи услови су еквивалентни:*

(а) F је примитивна за f на I

(б) F је примитивна за f на сваком компактном интервалу $K \subseteq I$

(в) За свако $x \in I$ постоји отворен интервал $x \in J_x$ на ком је F примитивна за f

Доказ. Како је $P \subseteq I$ највише пребројив скуп, закључујемо да и $P \cap K$ такође највише пребројив. Из тога и локалности непрекидности и диференцијабилности закључујемо да (а) имплицира (б).
Докажимо да (б) имплицира (а). Нека је K_n растући (у односу на инклузију) низ компактних интервала такав да је $I = \cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Такав низ увек постоји, јер ако је $a_\infty = \inf I$ и $b_\infty = \sup I$, онда постоје низови a_n и b_n у I такви да важи:

- $a_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $b_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $a_\infty \in I \implies (\forall n \in \mathbb{N}) a_n = a_\infty, b_\infty \in I \implies (\forall n \in \mathbb{N}) b_n = b_\infty$

Тада је $K_n := [a_n, b_n]$ тражени низ. Из (б) следи да је за свако $n \in \mathbb{N}$ $F|_{K_n}$ примитивна за $f|_{K_n}$. Одатле следи да је за свако $n \in \mathbb{N}$ $F|_{K_n}$ непрекидна и за неки највише пребројив скуп $P_n \subseteq K_n$ важи

$$x \in K_n \setminus P_n \implies (F|_{K_n})'(x) = f|_{K_n}(x).$$

Како је $I = \cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ закључујемо да за $x \in I$ постоји природан број н такав да $x \in K_n$. Функција $F|_{K_n}$ је непрекидна као примитивна, а одатле користећи се познатим концептом локалности непрекидности закључујемо да је FCx. Означимо са $P_\infty = \cup_{n\in\mathbb{N}} P_n$ највише пребројив скуп. Тада ако $x \in I \setminus P_\infty$ онда $x \in I \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}} P_n$. Користећи Де-Морганове законе добијамо $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}}(I \setminus P_n)$. Одатле следи да $(F|_{K_n})'(x) = f|_{K_n}(x)$, односно $F'(x) = f(x)$, због локалности диференцијабилности.
Тривијално је да (а) имплицира (в), узмимо $J_x = (\inf I, \sup I)$. Да из (в) следи (б) доказујемо на следећи начин. Нека је K компактан интервал и J_x као у (в), закључујемо да

$$(\forall x \in I)(\exists j \in \{1, \dots n\}) x \in J_{x_j}.$$

Тада под претпоставком (в) следи да $(\forall j) FCJ_{x_j}$ и $F' = f$ на $J_{x_j} \setminus P_j$ за неки највише пребројив скуп $P_j \subseteq J_{x_j}$. Закључујемо да FCI и $F' = f$ на $I \setminus \cup_{j=1}^n P_j$. □

Тврђење 12. ***(Линеарност интеграла)*** *Нека је:*

- $F : I \to \mathbb{C}$ *примитивна за* $f : I \to \mathbb{C}$
- $G : I \to \mathbb{C}$ *примитивна за* $g : I \to \mathbb{C}$
- $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

Тада је $\alpha F + \beta G : I \to \mathbb{C}$ *примитивна за* $\alpha f + \beta g : I \to \mathbb{C}$.

Доказ. Доказ следи из линеарности непрекидности, линеарности извода и чињенице да је унија два највише пребројива скупа највише пребројив скуп. □

Последица 8. *За* $f, g : I \to \mathbb{C}$ *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *је*

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$$

Специјално,

$$\int f(x) dx = \int \mathrm{Re} f(x) dx + i \int \mathrm{Im} f(x) dx.$$

Пример 6.5. $\int \mathrm{tg}^2\, x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \int \sec^2 x dx - \int dx = \mathrm{tg}\, x - x + C$

Пример 6.6. $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int(1 - \frac{1}{1+x^2})dx = \int dx - \int \frac{1}{1+x^2}dx = x - \operatorname{arctg} x + C.$

Пример 6.7. $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\int e^{ax}\cos bx dx + i\int e^{ax}\sin bx dx &= \int e^{(a+ib)x}dx \\
&= \frac{1}{a+ib}e^{(a+ib)x} + C \\
&= \frac{1}{a^2+b^2}(a-ib)e^{(a+ib)x} + C \\
&= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a-ib)(\cos bx + i\sin bx) + C
\end{aligned}$$

Изједначавањем реалног дела са реалним и имагинарног са имагинарним добијамо:

$$\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C$$

$$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C$$

Напомена. У последњем примеру смо користили идентитет:

$$e^{ax}\cdot e^{ibx} = e^{(a+ib)x}$$

Из Ојлеровог идентитета

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x = \operatorname{cis} x$$

следи $\frac{d}{dx}e^{ix} = ie^{ix}$. Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = e^{ax}e^{ibx} - e^{(a+ib)x}$. Тада је $f'(x) = 0$ па је $f \equiv \text{const}$. Како је $f(0) = 0$, следи да је $f \equiv 0$.

6.2.1 Основни методи израчунавања неодређених интеграла

Тврђење 13. *(**Парцијална интеграција**) Нека су $F, G : I \to \mathbb{C}$ примитивне функције (што значи да су непрекидне на I и диференцијабилне на комплементу највише пребројивог скупа). Тада, ако једна од функција $F'G$ и FG' има примитивну, имаће је и друга и важиће*

$$\int FG' = FG - \int F'G$$

Доказ. Нека су F, G примитивне, односно $F \in C(I)\cap D(I\setminus P), G \in C(I)\cap D(I\setminus T)$, где су P и T највише пребројиви скупови. Тада је и $P\cup T$ највише пребројив скуп и важи $\forall x \in I\setminus(P\cup T)(FG)'(x) = F'(x)G(x) + F(x)G'(x)$. Одатле следи да уколико $F'G$ има примитивну, онда је има и FG' и важи $\int FG' = FG - \int F'G$. □

Последица 9. *Ако $f : I \to \mathbb{C}$ има примитивну, онда је*

$$\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx.$$

Пример 6.8.

$$\begin{aligned}
\int \log x dx = x\log x - \int x(\log x)'dx &= x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx \\
&= x\log x - x + C
\end{aligned}$$

Пример 6.9.

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int x(\arcsin x)' dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$
$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

Пример 6.10.

$$\begin{aligned}
\int \sin \log x dx &= x \sin \log x - \int x(\sin \log x)' dx \\
&= x \sin \log x - \int x \cdot \cos \log x \cdot \frac{1}{x} dx \\
&= x \sin \log x - \int \cos \log x dx \\
&= x \sin \log x - x \cos \log x + \int x \cdot (-\sin \log x) \cdot \frac{1}{x} dx \\
&= x(\sin \log x - \cos \log x) - \int \sin \log x dx
\end{aligned}$$

Одатле добијамо да је

$$2 \int \sin \log x = x(\sin \log x - \cos \log x) + C$$

Односно

$$\int \sin \log x = \frac{x}{2}(\sin \log x - \cos \log x) + C$$

Тврђење 14. *(**Уопштена парцијална интеграција**) Нека су функције $F^{(n)}$ и $G^{(n)}$ примитивне. Ако једна од функција $F^{(n+1)}G$ и $FG^{(n+1)}$ има примитивну, онда је има и друга и важи:*

$$\int FG^{(n+1)} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j F^{(j)} G^{(n-j)} + (-1)^{n+1} \int F^{(n+1)} G.$$

Доказ. Из Лајбницовог правила следи

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=0}^{n} (-1)^j F^{(j)} G^{(n-j)} \right)' &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \left(F^{(j+1)} G^{(n-j)} + F^{(j)} G^{(n-j+1)} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j F^{(j+1)} G^{(n-j)} + \sum_{j=0}^{n} (-1)^j F^{(j)} G^{(n-j+1)} \\
&= FG^{(n+1)} + (-1)^n F^{(n+1)} G
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Ако $F^{(n+1)}G$ има примитивну имаће је и $FG^{(n+1)}$ и важиће

$$\int FG^{(n+1)} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j F^{(j)} G^{(n-j)} + (-1)^{n+1} \int F^{(n+1)} G.$$

□

Тврђење 15. ***(Смена променљиве)*** *Нека важи:*

(1) $T \subseteq \mathbb{R}, X \subseteq \mathbb{R}$ *су прави интервали*

(2) $F : X \to \mathbb{C}$ *је примитивна за* $f : X \to \mathbb{C}$

(3) $\varphi : T \to X$ *је примитивна*

(4) f *је непрекидна или је* φ *строго монотона*

Тада је $F \circ \varphi : F \to \mathbb{C}$ *примитивна за* $(f \circ \varphi) \cdot \varphi' : T \to \mathbb{C}$*, тј.* $\int (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = F \circ \varphi + C$

Дато тврђење може се формулисати и на следећи начин:

Тврђење 16. *Нека је на интервалу* (a, b)

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

и нека је функција $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ *непрекидно диференцијабилна (тј. диференцијабилна, са непрекидним првим изводом) и на. Тада је*

$$\int (f \circ \varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = F \circ \varphi(t) + C \quad (*)$$

Једнакост $(*)$ добија се диференцирањем обе стране и применом правила за извод сложене функције. Она је у основи метода израчунавања интеграла сменом променљиве који се састоји у следећем. Уколико желимо да израчунамо интеграл облика $\int (f \circ \varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ сменом $x = \varphi(t), dx = \varphi'(t)dt$ добијамо интеграл који може да буде једноставнији од полазног.

Пример 6.11. ***(Линеарна смена променљиве)*** *Нека је* $F : I \to \mathbb{C}$ *примитивна за* $f : I \to \mathbb{C}$*,* $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$*. Тада је* $\frac{1}{a}F(ax + b)$ *примитивна за* $f(ax + b)$ *на* $J = \frac{1}{a}(I - b)$ *и*

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C.$$

Функција $\varphi : J \to I$ *дефинисана као* $\varphi(x) = ax+b$ *је строго монотона и диференцијабилна. Из претходног тврђења следи да је* $F \circ \varphi(x) = F(ax + b)$ *примитивна функција за* $f \circ \varphi \cdot \varphi'(x) = f(ax + b) \cdot a$*, па је* $\frac{1}{a}F(ax + b)$ *примитивна за* $f(ax + b)$*.*

Пример 6.12. *Нека је* $f : I \to \mathbb{R}$ *непрекидна,* $0 \notin f(I), P \subseteq I$ *највише пребројив и* $f \in D(I \setminus P)$*. Тада је*

$$\int \frac{f'}{f} = \log|f| + C.$$

Нека је $g(x) = \log|x|$*,* $gC\mathbb{R}^*$*,* $f(I) \subseteq \mathbb{R}^*$*. Одатле следи да је* $\log|f| = g \circ f \in C(I)$*. Из диференцијабилности функције* g *на скупу* $\mathbb{R}^*$ *и диференцијабилности функције* f *на* $I \setminus P$ *закључујемо да је* $g \circ f$ *диференцијабилна на* $I \setminus P$*. Како за* $x \in I \setminus P$ *важи* $(\log|f|)' = \frac{f'}{f}$ *следи да је* $\log|f|$ *примитивна за* $\frac{f'}{f}$*.*

Пример 6.13.

$$\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}dx = \int (\operatorname{tg}\frac{x}{2})' \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}dx = \log|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + C$$

Глава 7

Одређени интеграл

7.1 Риманов интеграл

Циљ је дефинисати (евентуално и израчунати) површину испод графика задате функције $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (битно је да је функција на интервалу). Ово је проблем који су и Стари Грци, Архимед и Еудокс, умели да реше за прилично широке класе функција.

Могуће је приступити проблему са више гледишта, или преко посматрања лимеса, или преко супремума и инфимума. Први начин је Риманов, а други Дарбуов и оба имају своје мане, као и предности. Када докажемо њихову еквиваленцију, моћи ћемо да употребљавамо оба у зависности од тога који нам више одговара у датој ситуацији.

7.1.1 Веза са примитивном функцијом

Претпоставимо да је функција f непрекидна на интервалу $[a, b]$ и означимо са $P(x)$ површину испод графика функције f на интервалу $[a, x]$. Дакле, ако имамо $h \to 0$, онда је и $f(x+h) \to f(x)$, одакле следи $P(x+h)-P(x) \sim f(x)h$ (тј. разлику површина посматрамо заправо као површину правоугаоника). Одавде имамо да је

$$f(x) \sim \frac{P(x+h) - P(x)}{h} \xrightarrow{h \to 0} P'(x) \implies P'(x) = f(x).$$

Дакле, ако је $f C[a, b]$, P је примитивна за f.

Нагласимо да је ово неформалан доказ, служи нам чисто ради интуиције. Ово тврђење ћемо касније називати основном теоремом интегралног рачуна. Ово нам даје интуитивну представу о следећој дефиницији.

Дефиниција 7.1. *Нека је $F : [a, b] \to \mathbb{C}$ примитивна функција непрекидне функције $f : [a, b] \to \mathbb{C}$. Њутнов интеграл функције f је*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Из јединствености примтивне функције F за f на интервалу (до на адитивну константу) следи да је дефиниција добра, тј. да Њутнов интеграл не зависи од одабира примитивне функције.

Разлика $F(b) - F(a)$ се означава и са $F|_a^b$, $F(x)|_a^b$, $F(x)|_{x=a}^{x=b}$, а уместо $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b$ пишемо $\int_a^b f = F|_b^a$.

Но, природно је поставити питање када уопште постоји примитвна функција? Одавде је јасно да за непрекидне постоји примитивна функција, али то је веома јака претпоствка. Из датих дефиниција и примера не можемо да закључимо када постоји примитивна функција дате функције. Одоговор ће нам дати формална дефиниција Римановог интеграла.

Можемо формулисати и опстхији проблем. Наиме, зашто се заусавити на површини? Често ће нас занимати и запремина па чак и више димензиона запремина. Но пре тога треба дефинисати појам аналоган интервалу у више димензија.

Дефиниција 7.2. *Нека су* $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \dots, \mathcal{I}_n$ *интервали у* $\mathbb{R}$. *Декартов производ* $\mathcal{J} = \mathcal{I}_1 \times \mathcal{I}_2 \times \ldots \times \mathcal{I}_n$ *називамо* n*-димензионим квадром.*

Крајњи циљ је дефинисати (уколико је могуће и израчунати) $(n+1)$-димензиону запремину испод графика функције $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$.

У случају $n = 1$ имамо „2-димензиону запремину", што је заправо површина, а у случају $n = 2$ имамо „3-димензиону запремину", што је заправо стандардна запремина.

7.1.2 Кострукција Римановог интеграла

Дефиниција 7.3. *Подела интервала* $[a, b]$ *је коначан скуп тачака* $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$, *таквих да је* $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k = b$. *Сваку тачку која је члан поделе интервала називамо подеоном тачком, а сваки од интервала* $[x_i, x_{i+1}], i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ *називамо подеоним интервалом.*

Нека су $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ поделе интервала $[a, b]$. Уколико је $\mathcal{P}_2 \subseteq \mathcal{P}_1$, онда кажемо да је $\mathcal{P}_1$ финија од $\mathcal{P}_2$. Подела $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ је суперпозиција подела $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ (и она је, тривијално, финија од обе поделе).

Ако су $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \dots, \mathcal{I}_n \subseteq \mathbb{R}$ интервали, подела квадра $\mathcal{J} = \mathcal{I}_1 \times \mathcal{I}_2 \times \ldots \times \mathcal{I}_n \subseteq \mathbb{R}^n$ је $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n)$, где је $\mathcal{P}_j$ подела интервала $\mathcal{I}_j$, за свако $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Аналогно дефинишемо појмове финије поделе и суперпозиције подела квадра. Кажемо да је једна подела квадра финија од друге поделе квадра, ако је „финија по свакој координати". Суперпозиција подела квадра је подела добијена суперпозицијама „по свим координатама". Подеони квадри су производи подеоних интервала.

Дефиниција 7.4. *Подела квадра* $\mathcal{J}$ *са уоченим тачкама је пар* $(\mathcal{P}, c)$, *где је* $\mathcal{P}$ *подела квадра* $\mathcal{J}$ *са подеоним квадрима* $\mathcal{J}_1, \dots \mathcal{J}_l$, *а* $c = (c_1, c_2, \dots, c_l)$ l*-торка бројева таква да је* $(\forall i) c_i \in \mathcal{J}_i$ *(*c_i *је уочена тачка квадра* $\mathcal{J}_i$*).*

Са $\mathcal{P}_{\mathcal{J}}$ означавамо скуп свих подела квадра $\mathcal{J}$, а са $\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{J}}$ скуп свих подела квадра $\mathcal{J}$ са уоченим тачкама. Идентификујемо $\mathcal{P} \in \mathcal{P}_{\mathcal{J}}$ са $(\mathcal{P}, \emptyset) \in \widetilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{J}}$ и сматрамо да је $\mathcal{P}_{\mathcal{J}} \subseteq \widetilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{J}}$

Дефиниција 7.5. *Параметар поделе* $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n)$ *(у ознаци* $\lambda(P)$*) је максимум дужина свих подеоних интервала подела* $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n$.

Нека је, за $\delta > 0$:

$$B_\delta := \{(\mathcal{P}, c) \in \widetilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{J}} \mid \lambda(P) < \delta\}.$$

Докажимо да је тада

$$\mathscr{B}_{\mathcal{J}} := \{B_\delta \mid \delta > 0\}$$

база филтера на $\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathcal{J}}$.

Глава 8

Редови