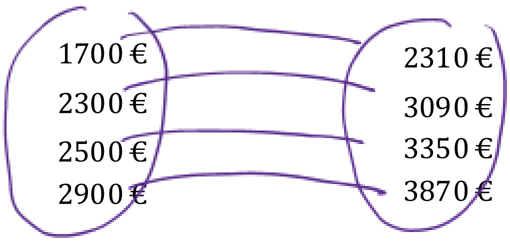
Les fonctions

Qu'est-ce qu'une fonction ?

Une **fonction** associe à chaque élément d'un **ensemble de départ,** un unique élément d'un **ensemble d'arrivée**.



Anciens salaires

Nouveaux salaires (avec prime)

Situation : un patron augmente le salaire de tous ses employés de 30% et ajoute une prime de 100€.

Représenter une fonction par son équation

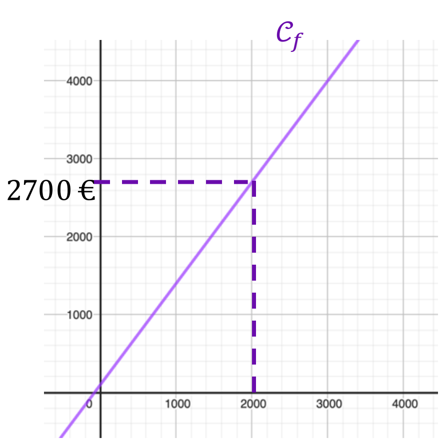
f

Anciens salaires → Nouveaux salaires (avec prime)

$2000€ \longrightarrow$ [+30 % : $2000 + 0{,}3 \times 2000 = 1{,}3 \times 2000 = 2600$] [+100 € : $2600 + 100$] $\longrightarrow 2700€$

$x \longrightarrow$ [+30 % : $1{,}3x$] $+$ [+100 € : 100] $\longrightarrow y = f(x) = 1{,}3x + 100$

Représenter une fonction par sa courbe représentative



$f(x) = 1{,}3x + 100$

$$f(x) = 1{,}3x + 100$$

$$f(2000) = 1{,}3 \times 2000 + 100 = 2700$$

> $f(x) = y$
> y est l'image de x
> x est l'antécédent de y

Le domaine de définition d'une fonction

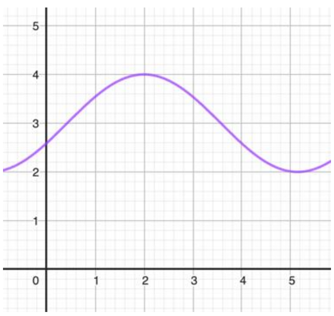
est l'ensemble de toutes les valeurs que l'on peut donner en entrée à la fonction, c'est-à-dire les valeurs pour lesquelles la fonction est bien définie.

Exemples : $f(x) = 1{,}3x + 100$ — f définie sur $\mathbb{R}$. On note : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ — On peut noter : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto 1{,}3x + 100$

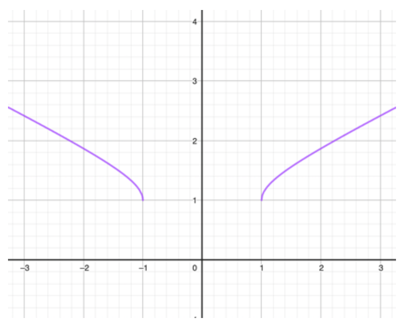
$g(x) = \dfrac{1}{x}$ — g définie sur $\mathbb{R}^*$ (les réels privés de 0 : $\mathbb{R}\backslash\{0\}$) — $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$

Une fonction est continue,

intuitivement, si on peut tracer sa courbe représentative sans lever le crayon.



Fonction continue



Fonction discontinue

Comment étudier une fonction ?

$f(x) = x^2 - 9$

Le **domaine de définition**

f est définie sur $\mathbb{R}$

Les **racines** : pour quels x, $f(x) = 0$?

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9$
$\Leftrightarrow x = 3 \ ou \ x = -3$

Le **tableau de signe**

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 9$
$\Leftrightarrow x > 3 \ ou \ x < -3$

Les **variations** – tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$		$\nearrow$	

$a, b \in \mathbb{R}$

- f est **croissante** sur un intervalle I, si pour tous a et b de I tels que $\boldsymbol{a < b}$, on a $\boldsymbol{f(a) \leq f(b)}$
- f est **décroissante** sur un intervalle I, si pour tous a et b de I tels que $\boldsymbol{a < b}$, on a $\boldsymbol{f(a) \geq f(b)}$

Comment étudier une fonction ?

Les extremums (minimum et maximum)

f, définie sur I**,** admet un **extremum local en $\boldsymbol{x_0}$** si :

- $f(x_0)$ est un **maximum local** si, pour un certain intervalle autour de x_0, on a :
  $f(x_0) \geq f(x)$ pour tout x dans cet intervalle autour de x_0

ou

- $f(x_0)$ est un **minimum local** si, pour un certain intervalle autour de x_0, on a :
  $f(x_0) \leq f(x)$ pour tout x dans cet intervalle autour de x_0

Les limites (cf. cours sur les limites)

Les symétries – la parité

- f, définie sur I, est **paire** si pour tout x de I, on a : $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$
  Symétrie par rapport à l'axe des ordonnées

- f, définie sur I, est **impaire** si pour tout x de I, on a **:** $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$
  Symétrie centrale par rapport à l'origine

La périodicité

f, définie sur I, **est $\boldsymbol{k}$-périodique** si pour tout x de I, on a : $\boldsymbol{f(x+k) = f(x)}$

L'étude d'une fonction permet d'analyser son comportement
sans avoir besoin de la tracer

Les fonctions usuelles

Fonction affine

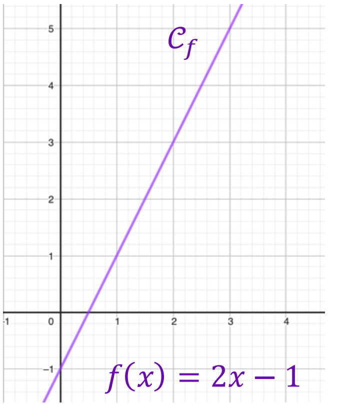
Forme de l'**équation** :
a et b des réels

$$\boxed{f(x) = ax + b}$$

Ordonnée à l'origine

Coefficient directeur

Courbe représentative : une droite



Coefficient directeur

Soient A et B des points de la droite, de coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B)

$$\boxed{a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}}$$

- Si $a = 0$, f est une fonction constante (représentée par une droite horizontale)
- Si $b = 0$, f est une fonction linéaire (représentée par une droite qui passe par 0)
- Si $a > 0$, la fonction est croissante
- Si $a < 0$, la fonction est décroissante

✔ f est **définie** et **continue** sur $\mathbb{R}$

✔ **Racine** de f

$$\boldsymbol{f(x) = 0} \Leftrightarrow ax + b = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = -\frac{b}{a}}$$

✔ **Tableau de signes**

Si $\boldsymbol{a > 0}$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

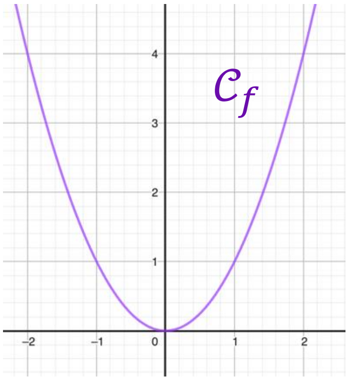
Si $\boldsymbol{a < 0}$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Fonction carrée

Forme de l'**équation** : $\boxed{f(x) = x^2}$

Courbe représentative : une parabole



- ✓ f est **définie** et **continue** sur $\mathbb{R}$
- ✓ f est **paire**

  $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

  $\mathcal{C}_f$ est **symétrique** par rapport à l'axe des ordonnées

- ✓ **Racine** de f

  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

- ✓ f est **positive** sur $\mathbb{R}$

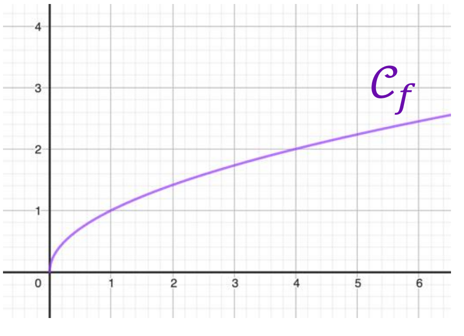
- ✓ **Tableau de variations**

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$\searrow$	0	$\nearrow$

Fonction racine carrée

Forme de l'**équation** : $\boxed{f(x) = \sqrt{x}}$

Courbe représentative :



- ✓ f est **définie** et **continue** sur $\mathbb{R}^+$
- ✓ f s'annule en 0
- ✓ f est **positive** et **croissante** sur $\mathbb{R}^+$

Propriétés

$\forall a, b \in \mathbb{R}^+$, $\quad \sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ $\qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ avec $b \neq 0$

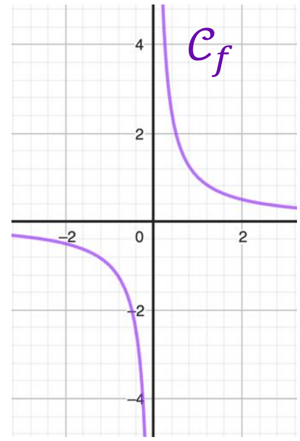
$$(\sqrt{a})^2 = a$$

$\forall a \in \mathbb{R}$ $\qquad \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a \text{ si } a > 0 \\ -a \text{ si } a < 0 \end{cases}$

Fonction inverse

Forme de l'**équation** : $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{x}}$

Courbe représentative



- ✓ f est **définie** sur $\mathbb{R}^*$
- ✓ f n'est pas **continue** sur $\mathbb{R}$
- ✓ f est **impaire**

  $f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$

  $\mathcal{C}_f$ est **symétrique** par rapport à l'origine
- ✓ f n'a pas de **racine**

✓ **Tableau de signes**

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$\Vert$	$+$

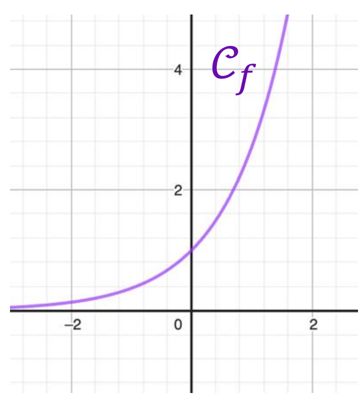
✓ **Tableau de variations**

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

Fonction exponentielle

Forme de l'**équation** : $\boxed{f(x) = e^x}$

Courbe représentative



- ✓ f est **définie** et **continue** sur $\mathbb{R}$
- ✓ f ne s'annule pas
- ✓ f est **positive** et **croissante** sur $\mathbb{R}$

Propriétés

$e^0 = 1$

Pour tous réels x et y : $e^x \times e^y = e^{x+y}$

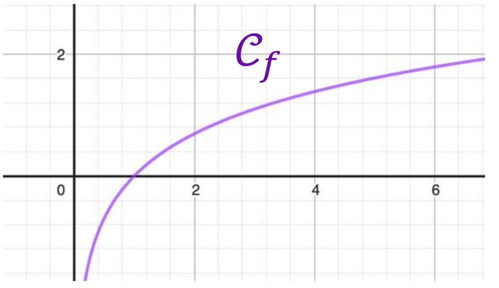
$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$$

$$(e^x)^y = e^{xy}$$

Fonction logarithme

Forme de l'**équation** : $\boxed{f(x) = \ln(x)}$

Courbe représentative



- ✓ f est **définie** et **continue** sur $\mathbb{R}_+^*$
- ✓ f s'annule en 1
- ✓ f est **croissante** sur $\mathbb{R}_+^*$
- ✓ **Tableau de signes**

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Propriétés

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$: $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$

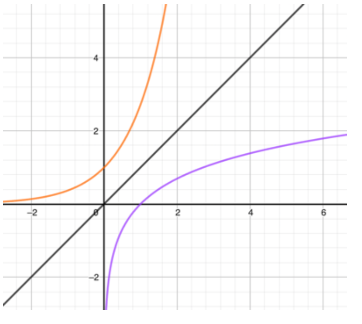
avec $y \neq 0$: $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

$\ln(x)^y = y\ln(x)$

C'est la **fonction réciproque** de la fonction exponentielle

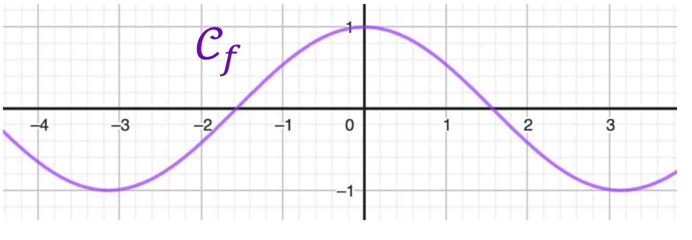
$\ln(e^x) = x \quad pour\ tout\ x \in \mathbb{R}$

$e^{lnx} = x \quad pour\ tout\ x > 0$

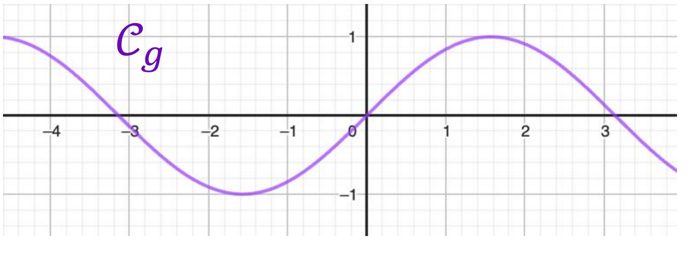


Fonction cosinus et sinus

Forme de l'**équation** : $\boxed{f(x) = cos(x)}$



$\boxed{g(x) = sin(x)}$



- ✓ **définies** et **continues** sur $\mathbb{R}$
- ✓ **continues** sur $\mathbb{R}$
- ✓ 2π **−périodiques**

$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$

$\sin(x + 2k\pi) = sin(x) \qquad (k \in \mathbb{Z})$

Fonction cosinus et sinus

✓ La fonction cosinus est **paire** $\cos(-x) = \cos(x)$

✓ La fonction sinus est **impaire** $\sin(-x) = -\sin(x)$

Les fonctions étant 2π-périodiques, on peut les étudier sur $[-\pi; \pi]$
Les fonctions étant paire et impaire, on peut les étudier sur $[0; \pi]$

✓ **Racines**

$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ La fonction cosinus s'annule pour les x de la forme $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + k\pi}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\sin(0) = \sin(\pi) = 0$ La fonction sinus s'annule pour les x de la forme $\boldsymbol{x = k\pi}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

✓ **Tableaux de signes**

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos(x)$		$+$	0	$-$	
$\sin(x)$	0		$+$		0

✓ **Tableaux de variations**

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$		↘	
$\sin(x)$	↗		↘

Fonction tangente

Forme de l'**équation** : $\boxed{f(x) = \tan(x)}$

✓ **définie** sur $\mathrm{D} = \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

✓ π −**périodique**

$\forall x \in D, \boldsymbol{\tan(x + k\pi) = \tan(x)}$

✓ **impaire**

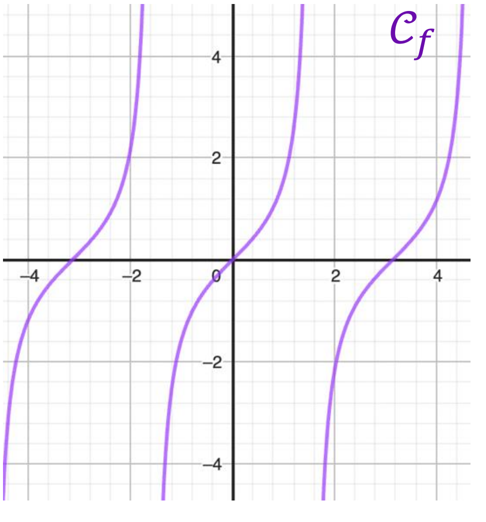
$\boldsymbol{\tan(-x) = -\tan(x)}$

✓ **racines**
Elle s'annule pour les x de la forme
$\boldsymbol{x = k\pi}$ avec $k \in \mathbb{Z}$
$\tan(0) = \tan(\pi) = 0$

✓ **positive** sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$

✓ **croissante** sur D

Courbe représentative



Machine learning et les fonctions

MSE
erreur quadratique moyenne

Fonction **affine**
Fonction **carrée**
Fonction **racine carrée**
Fonction **inverse**
Fonction **exponentielle**
Fonction **logarithme**
Fonction **cosinus**
Fonction **sinus**
Fonction **tangente**

régression linéaire

Calcul de distance
KNN

Log-vraisemblance
Optimisation

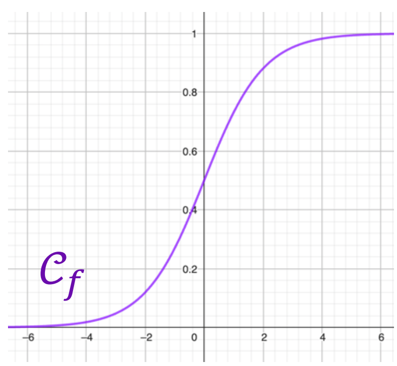
Fonction sigmoïde
Classification binaire

Mesure de similarité

Fonction sigmoïde

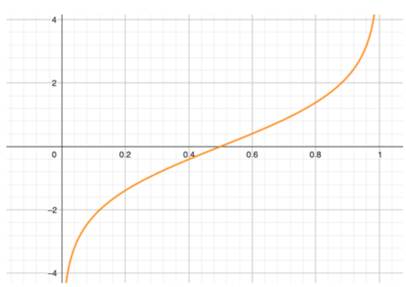
Forme de l'**équation** : $$\boxed{f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}}$$

Courbe représentative



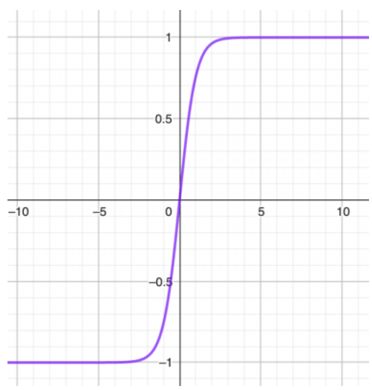
- ✓ f est **définie** et **continue** sur $\mathbb{R}$
- ✓ f ne s'annule pas
- ✓ f est croissante sur $\mathbb{R}$
- ✓ f est comprise entre 0 et 1

Fonction Logit : $\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$
réciproque de la fonction sigmoïde



Fonction sigmoïde

Forme de l'**équation** : $$\boxed{\tanh(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}}$$



- ✓ f est **définie** et **continue** sur $\mathbb{R}$
- ✓ f s'annule en 0
- ✓ f est croissante sur $\mathbb{R}$
- ✓ f est comprise entre -1 et 1

Les limites

Notion de limite

- ✓ Pour savoir comment se comporte la fonction autour de ses valeurs interdites, on calcule l'image de x quand x se rapproche de ces valeurs.

  Exemple : $\lim_{x \to 3} f(x)$

- ✓ Les limites nous aident aussi à déterminer le comportement de la fonction lorsqu'elle tend vers plus ou moins l'infini

Les limites infinies en l'infini

$$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty}$$

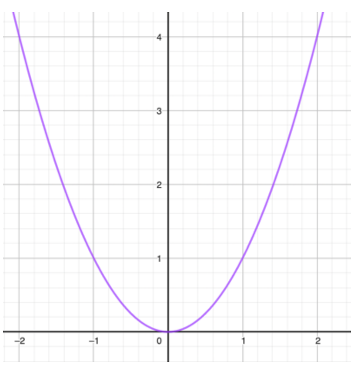
$n > 0$ — $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$

$n > 0$ et n impair — $\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$

$n > 0$ et n pair — $\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$

Exemple

$\lim_{x \to \pm\infty} x^2 = +\infty$



On peut compléter le tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

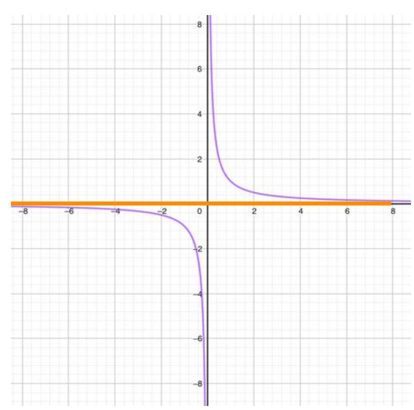
Les limites finies en l'infini

f une fonction et a un réel

$$\boxed{\begin{array}{c}\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \\ \\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = a\end{array}}$$

Exemple

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$



La droite $y = a$ est une **asymptote horizontale**.
La courbe se rapproche de la droite.

$$\boxed{\text{Si } \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \quad \text{alors} \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{f(x)} = 0}$$

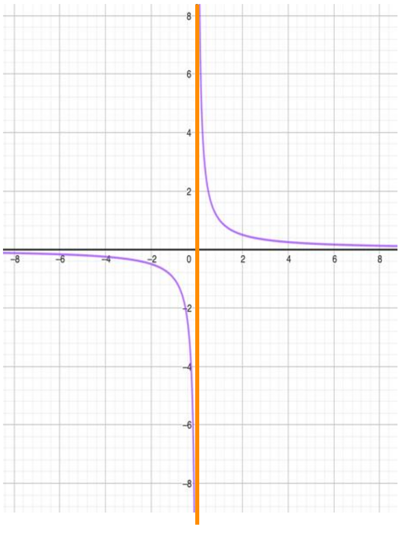
Les limites infinies en un réel

f une fonction et a un réel

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

La droite $x = a$ est une **asymptote verticale**.
La courbe se rapproche de la droite.



Exemple

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$x > 0$ $\qquad$ $x < 0$

f une fonction et a un réel

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0^+$ alors $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0^-$ alors $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

Propriétés

$$\lim\big(f(x) + g(x)\big) = \lim f(x) + \lim g(x)$$

$$\lim\big(a \times f(x)\big) = a \times \lim f(x)$$

Somme

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$F.I.$

F.I. = Forme Indéterminée

Produit

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	$L>0$	$L<0$	$L>0$	$L<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x))$	$L \times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$F.I.$

Quotient

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	L	$L>0$ ou $+\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	$L>0$ ou $+\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$L'\neq 0$	$\pm\infty$	0 avec $g(x)>0$	0 avec $g(x)>0$	0 avec $g(x)<0$	0 avec $g(x)<0$	0	$L'>0$	$L'<0$	$L'>0$	$L'<0$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$F.I.$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$F.I.$

Lever une forme indéterminée

Exemple

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x+4}=\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{4}{x}\right)}=\frac{x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1+\frac{4}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

Les limites des fonctions usuelles

Fonction **affine** (a et b des réels)

Si $a > 0$ $\lim_{x \to +\infty} (ax + b) = +\infty$ $\lim_{x \to -\infty} (ax + b) = -\infty$

Si $a < 0$ $\lim_{x \to +\infty} (ax + b) = -\infty$ $\lim_{x \to -\infty} (ax + b) = +\infty$

Fonction **carrée** $\lim_{x \to \pm\infty} x^2 = +\infty$

Fonction **inverse** $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Fonction **exponentielle** $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Fonction **logarithme** $\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

Fonction **tangente** $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$ $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan(x) = +\infty$

Fonction **sigmoïde** $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1 + e^{-x}} = 0$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + e^{-x}} = 1$

Fonction **tangente hyperbolique** $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -1$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -1$

Continuité

Une fonction f est continue en a si $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$

Définition limite

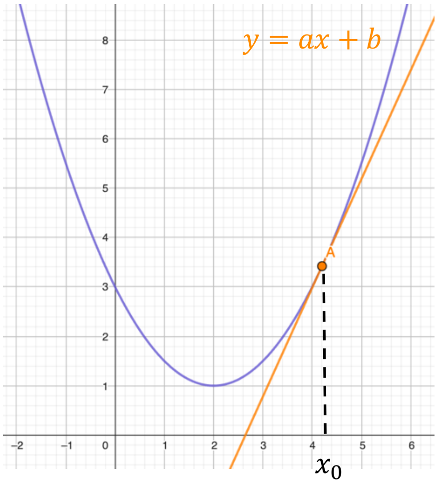
Soit f une fonction et $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition. Soient a et L des réels.

On dit que $f(x)$ admet une limite L en a si $\lim_{x \to a} f(x) = L$

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \delta \in \mathbb{R}_+^* \quad tel\ que \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad on\ a \quad (|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)}$$

Les dérivées

Qu'est-ce qu'une dérivée ?



tangente : la droite qui touche la courbe en un seul point.

Le **coefficient directeur** a de la tangente est la **dérivée** de f au point d'abscisse x_0

$$\boxed{f'(x_0) = a}$$

Équation de la tangente de f au point d'abscisse x_0 :

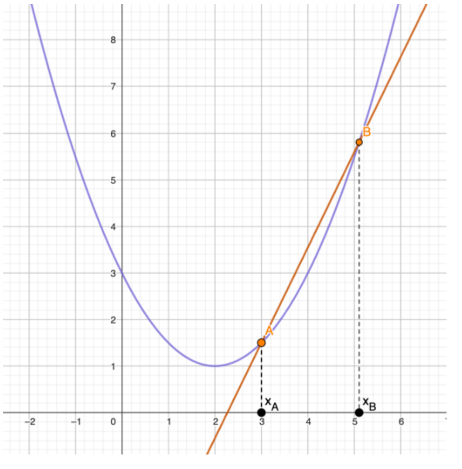
$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

Coefficient directeur d'une droite (AB) : $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Ici : $x_B = x_A + h$, $y_B = f(x_A + h)$

$$a = \frac{f(x_A+h) - f(x_A)}{(x_A+h) - x_A} = \frac{f(x_A+h) - f(x_A)}{h}$$

$$\boxed{f'(x_A) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_A+h) - f(x_A)}{h}}$$



Calcul d'une dérivée

Calculer la dérivée de f au point d'abscisse 3.

$f(x) = x^2 + 2 \qquad x_0 = 3$

$f(x_0) = f(3) = 3^2 + 2 = 11$

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) = f(3+h) &= (3+h)^2 + 2 \\ &= 3^2 + 2 \times 3 \times h + h^2 + 2 \\ &= 11 + 6h + h^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} &= \frac{11 + 6h + h^2 - 11}{h} \\ &= \frac{6h + h^2}{h} \\ &= 6 + h \end{aligned}$$

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0}(6+h) = 6$$

La dérivée de f au point d'abscisse 3 est : $f'(3) = 6$

Variations et dérivées

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I

- Si $\boldsymbol{f'(x) \leq 0}$ alors f est **décroissante** sur I.
- Si $\boldsymbol{f'(x) \geq 0}$ alors f est **croissante** sur I

Pour étudier les variations d'une fonction, on étudie le signe de sa dérivée.

Les dérivées usuelles

Fonction	Dérivée	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	
$\boldsymbol{ax+b}$	a	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$a, b \in \mathbb{R}$
$\boldsymbol{x^n}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$n \in \mathbb{N}$
$\boldsymbol{\frac{1}{x}}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	
$\boldsymbol{\frac{1}{x^n}}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$n \in \mathbb{N}^*$
$\boldsymbol{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^{+*}$	

$\boldsymbol{f(x)+g(x)}$	$f'(x)+g'(x)$
$\boldsymbol{a \times f(x)}$	$a \times f'(x)$

Fonction	Dérivée	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$\frac{1}{cos^2(x)}$	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

Formules dérivées

Soient f, g, u et v des fonctions.

Produit de fonctions

$f(x) = u(x) \times v(x)$ $\boxed{f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)}$

Exemple : $f(x) = 4x\sqrt{x}$ f est définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$u(x) = 4x$ $u'(x) = 4$

$v(x) = \sqrt{x}$ $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$f'(x) = 4\sqrt{x} + \frac{4x}{2\sqrt{x}} = 4\sqrt{x} + \frac{2x\sqrt{x}}{x} = 6\sqrt{x}$$

Inverse d'une fonction

$f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ $\boxed{f'(x) = \dfrac{-u'(x)}{u^2(x)}}$

Exemple : $f(x) = \dfrac{1}{3x^2 + x}$ f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{0; -\frac{1}{3}\right\}$

$u(x) = 3x^2 + x$

$u'(x) = 6x + 1$ $f'(x) = -\dfrac{(6x + 1)}{(3x^2 + x)^2}$

Quotient de fonctions

$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ $\boxed{f'(x) = \dfrac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v^2(x)}}$

Exemple : $f(x) = \dfrac{5x - 2}{3x^2 + x}$ f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{0; -\frac{1}{3}\right\}$

$u(x) = 5x - 2$ $u'(x) = 5$

$v(x) = 3x^2 + x$ $v'(x) = 6x + 1$

$$f'(x) = \frac{5(3x^2 + x) - (5x - 2)(6x + 1)}{(3x^2 + x)^2}$$

$$= \frac{-15x^2 + 12x + 2}{(3x^2 + x)^2}$$

Composée de fonctions

$g(f(x)) = g \circ f(x)$ $\boxed{(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))}$

Exemple : $h(x) = \sqrt{2x + 1} = g \circ f(x)$ h est définie sur $[-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty[$ et dérivable sur $]-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty[$

$g(x) = \sqrt{x}$ $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x) = 2x + 1$ $f'(x) = 2$

$$h'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$$

$$= 2 \times \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{2}{2\sqrt{2x + 1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x + 1}}$$

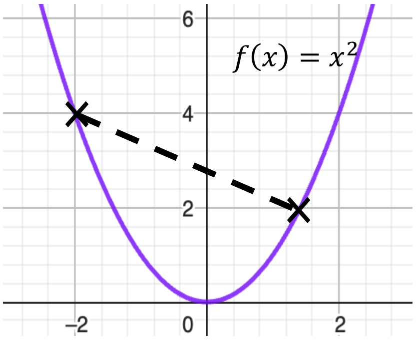
Dérivées secondes

Convexité

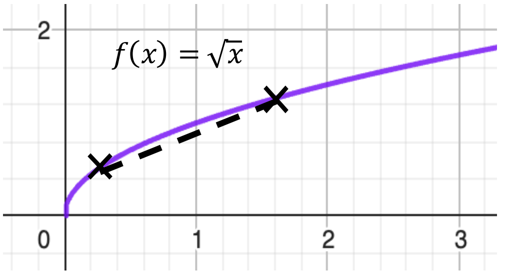
La dérivée seconde est la dérivée de la dérivée

- Si $f''(x)$ est positif alors f est **convexe**
- Si $f''(x)$ est négatif alors f est **concave**

f est **convexe :** la corde entre 2 points est **au-dessus** de la courbe



f est **concave :** la corde entre 2 points est **en-dessous** de la courbe



Une fonction f définie sur un intervalle I est **convexe** si pour tous x_1 et x_2 de I et tout λ de $[0,1]$, on a : $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$

Extremums et point d'inflexion

Quand $f'(x) = 0$: minimum ou maximum ?

Si $f''(x) > 0$ c'est un minimum. Si $f''(x) < 0$ c'est un maximum.

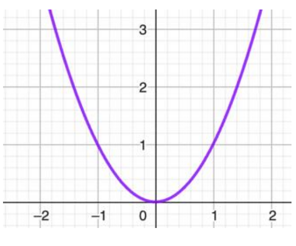
Si $f''(x)$ change de signe c'est un point d'inflexion.

Exemples

$\boldsymbol{f(x) = x^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

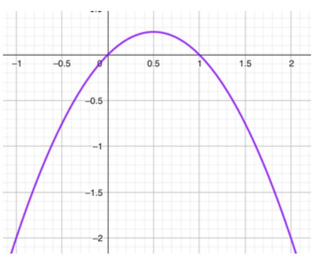
$f''(x) = 2 > 0$ f a un minimum en 0



$\boldsymbol{g(x) = -x^2 + x}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$g''(x) = -2 < 0$ g a un maximum en $\frac{1}{2}$



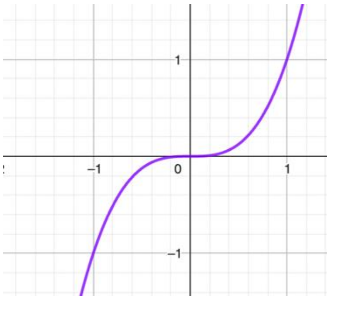
$\boldsymbol{h(x) = x^3}$ $h'(x) = 3x^2$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$h''(x) = 6x$

Si $x > 0$, on a $h''(x) > 0$

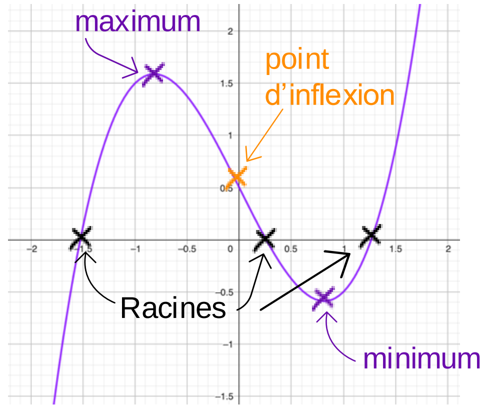
Si $x < 0$, on a $h''(x) < 0$



Étude de fonction

Les point à étudier

- ✓ Le domaine de définition
- ✓ Les signes
- ✓ Les variations
- ✓ Les extremums et points d’inflexion
- ✓ Les limites
- ✓ La parité
- ✓ La périodicité



Exemple

Étudions la fonction f : $\boldsymbol{f(x) = \ln\left(x^2 - 4\right)}$

Le domaine de définition

f est définie quand $x^2 - 4 > 0$

$x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) > 0$

$D_f =]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

La parité

Soit $x \in D_f$ $\qquad f(-x) = \ln\left((-x)^2 - 4\right) = \ln(x^2 - 4) = f(x)$ donc f est paire.

On peut étudier la fonction sur l’intervalle $]2; +\infty[$

Les racines

Soit $x \in D_f$ $\qquad \ln(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4) = 1 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = -\sqrt{5}\ ou\ x = \sqrt{5}$

$-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$ appartiennent à l’ensemble de définition. Ce sont les racines de f.

Le tableau de variations

f est dérivable sur $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$ $\qquad f(x) = \ln\left(u(x)\right)$

$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} \qquad u(x) = x^2 - 4 \qquad u'(x) = 2x$

$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 4} = \dfrac{2x}{(x-2)(x+2)}$

x	2		$+\infty$
$2x$		$+$	
$x-2$	0	$+$	
$x+2$		$+$	
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	

f croissante sur $]2; +\infty[$ et est paire, donc elle est décroissante sur $]-\infty; -2[$

x	$-\infty$		-2	2		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Les limites

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2 - 4 = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to\pm 2} x^2 - 4 = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to\pm 2} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$

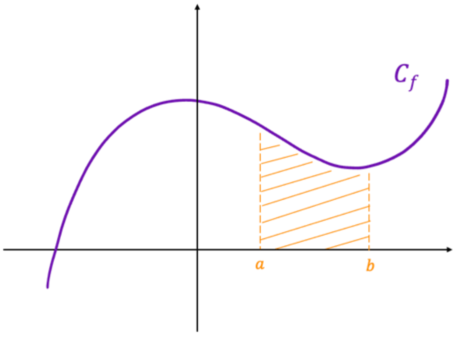
Intégrales et primitives

Intégrale

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$.

L'**intégrale** de f sur $[a; b]$ est l'aire, en unité d'aire, de la surface délimitée par :

- L'axe des abscisses
- Les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$
- La courbe représentative de la fonction f



Intervalle $[a, b]$

$\int_a^b f(x)dx =$ aire sous la courbe entre a et b

Indique à quelle variable correspondent a et b

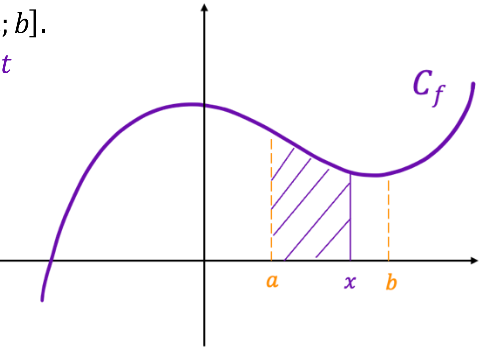
Primitive

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$.
On note F la fonction définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

F est dérivable sur $[a; b]$ et sa dérivée est la fonction f

F est une **primitive** de f

$\forall x \in [a; b]$ $\boxed{F'(x) = f(x)}$



$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemple calcul

$f(x) = x^2$

Calculons l'aire sous la courbe de f entre 0 et 2. Soit F une primitive de f.

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 x^2 dx = [F(x)]_0^2 = F(2) - F(0)$$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} \qquad F(2) - F(0) = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}$$

Donc l'aire sous la courbe de f entre 0 et 2 vaut $\frac{8}{3}$ unités d'aire.

Pourquoi une primitive ?

F est une primitive de f

f admet une infinité de primitives :

$F(x) + C$ avec C un réel

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 x^2 dx = [F(x)]_0^2$$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} \qquad F'(x) = \frac{3 \times x^2}{3} = x^2$$

$$G(x) = \frac{x^3}{3} + 8 \qquad G'(x) = \frac{3 \times x^2}{3} + 0 = x^2$$

F et G sont des primitives de f

Propriétés

Soient f et g des fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$.

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Si $f(x) \geq 0$ et $a \leq b$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

$$Si\ f(x) \leq g(x)\ et\ a \leq b\ alors\ \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Propriété de Chasles : a, b, c des réels tels que $a \leq c \leq b$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Linéarité : pour tout réel λ

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b \big(\lambda f(x)\big)dx = \lambda \times \int_a^b f(x)dx$$

Formules

Fonction		Primitives ($C \in \mathbb{R}$)	Domaine des primitives
x^n	$n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}$	$n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x}$		$\ln(x) + C$	$\mathbb{R}^{*+}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$		$2\sqrt{x} + C$	$\mathbb{R}^{*+}$
e^x		$e^x + C$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$		$\sin(x) + C$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$		$-\cos(x) + C$	$\mathbb{R}$

Intégration par partie

Soient u et v des fonctions dérivables, de dérivées continues.
Soient a et b des réels dans l'intervalle de définition des fonctions.

$$\boxed{\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx}$$

Exemple : $\int_0^1 x \times e^x dx$

$v(x) = x \quad u'(x) = e^x \quad donc \quad v'(x) = 1 \quad u(x) = e^x + c$

$$\int_0^1 x \times e^x dx = [x \times e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e-1) = 1$$

Les suites

Qu'est-ce qu'une suite ?

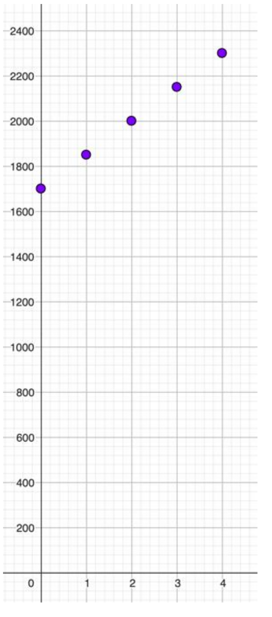
Exemple :
Au 1er janvier 2025, Sam a 1700€ sur son livret.
Le 2 janvier 2025, il décide de mettre 150€ sur son livret tous les 1ers du mois.

Les montants sur son livret au fur et à mesure des mois, constituent une **suite numérique**.

termes de la suite

rangs

Mois	Montant sur le livret
Janvier 2025	1700 €
Févier 2025	1850 €
Mars 2025	2000 €
Avril 2025	2150 €
Mai 2025	2300 €
...	



rangs

- ✓ (U_n) désigne la suite
- ✓ U_n désigne le n-ième terme de la suite
- ✓ n est le rang

Formes d'une suite

Relation de récurrence

U_0 est donné (ou U_1)

$$U_{n+1} = f(U_n)$$

Formule explicite

$$U_n = f(n)$$

Exemple : $U_0 = 1700$

$$U_{n+1} = U_n + 150$$

$$U_n = 1700 + n \times 150$$

Variation d'une suite

Une suite (U_n) est
- **croissante** --- $U_{n+1} \geq U_n$
- **décroissante** --- $U_{n+1} \leq U_n$
- **strictement croissante** --- $U_{n+1} > U_n$
- **strictement décroissante** --- $U_{n+1} < U_n$
- **constante** --- $U_{n+1} = U_n$

si pour tout entier naturel n:

Une suite peut être ni croissante ni décroissante. (exemple : $U_n = (-1)^n$)

Pour déterminer la variation d'une suite (U_n),

✓ Si on a la **forme par récurrence**, on cherche le signe de : $\boldsymbol{U_{n+1} - U_n}$ pour tout entier naturel n

$$U_{n+1} - U_n > 0 \Leftrightarrow U_{n+1} > U_n$$

Exemple :
Quelle est la variation de la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par : $V_n = 5n^2 - 3$?

$V_{n+1} - V_n$
$= (5(n+1)^2 - 3) - (5n^2 - 3)$
$= 5(n^2 + 2n + 1) - 3 - 5n^2 + 3$
$= 5n^2 + 10n + 5 - 5n^2$
$= 10n + 5 > 0$ car $n \geq 0$ (V_n) est croissante.

✓ Si on a la **forme explicite**, $U_n = f(n)$, on regarde la **variation de $\boldsymbol{f}$**

Si f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ alors (U_n) est décroissante.
Si f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ alors (U_n) est croissante.

Limite d'une suite

La suite (U_n) admet une limite l lorsque n tend vers l'infini si les termes de la suite se rapprochent de plus en plus de l lorsque n devient très grand.

On dit que la suite (U_n) **converge** vers un réel l et on note : $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = l$

si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que pour tout $n \geq N$, on a : $|U_n - l| < \varepsilon$

Exemples :

$U_n = \frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$

(U_n) converge vers 0.

$U_n = n^2 + 6$

$\lim\limits_{n\to\infty} U_n = +\infty$

(U_n) diverge vers $+\infty$

$U_n = (-1)^n$

$U_0 = 1$ $U_1 = -1$

$U_2 = 1$ $U_3 = -1$

(U_n) diverge.

Les suites arithmétiques

Qu'est-ce qu'une suite arithmétique ?

Exemple :
Au 1er janvier 2025, Sam a 1700€ sur son livret.
Le 2 janvier 2025, il décide de mettre 150€ sur son livret tous les 1ers du mois.

$\forall n \in \mathbb{N}$

$U_{n+1} = U_n + 150$ $\qquad$ $U_n = 1700 + n \times 150$

$U_0 = 1700$

(U_n) est une **suite arithmétique**.

La suite (U_n) est **arithmétique** s'il existe un réel r tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$\boldsymbol{U_{n+1} = U_n + r}$ $\qquad$ r est la **raison** de la suite.

$\boldsymbol{U_n = U_0 + nr}$ $\qquad$ Ou : $U_n = U_1 + (n-1)r$

Montrer qu'une suite est arithmétique.

Soit (U_n) une suite. On calcule $\boldsymbol{U_{n+1} - U_n}$
Si on trouve une constante, alors la suite (U_n) est arithmétique de raison la constante trouvée.

Exemple :
Soit la suite (U_n) telle que pour tout entier naturel n, $U_n = 4(n-2)$

$U_{n+1} - U_n = 4(n+1-2) - 4(n-2) = 4n - 4 - 4n + 8 = 4$

(U_n) est une suite arithmétique de raison 4
$U_0 = 4(0-2) = -8$

Variation et convergence d'une suite est arithmétique.

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r

- ✓ Si $\boldsymbol{r > 0}$ alors la suite est **croissante** et elle tend vers $+\infty$
- ✓ Si $\boldsymbol{r < 0}$ alors la suite est **décroissante** et elle tend tend vers $-\infty$
- ✓ Si $\boldsymbol{r = 0}$ alors la suite est **constante** et elle tend donc vers la valeur qu'elle prend.

Les suites géométriques

Qu'est-ce qu'une suite géométrique ?

Exemple :
Hugo a placé un capital $U_0 = 1000€$ à 5% d'intérêts composés par an.

$U_1 = 1000 + 0{,}05 \times 1000 = 1000 \times 1{,}05 = 1050\,€$

$U_2 = 1050 \times 1{,}05 = 1102{,}5$

$U_3 = 1000 \times 1{,}05 \times 1{,}05 \times 1{,}05 = 1000 \times (1{,}05)^3$

$\forall n \in \mathbb{N}.:$ $U_{n+1} = U_n \times 1{,}05$ et $U_n = U_0 \times (1{,}05)^n$ (U_n) est une **suite géométrique**.

La suite (U_n) est **géométrique** s'il existe un réel q tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$\boldsymbol{U_{n+1} = qU_n}$ q est la **raison** de la suite.

$\boldsymbol{U_n = U_0 \times q^n}$ Ou :$U_n = U_1 \times q^{n-1}$

Montrer qu'une suite est géométrique.

Soit (U_n) une suite. On calcule $\boldsymbol{\frac{U_{n+1}}{U_n}}$

Si on trouve une constante, alors la suite (U_n) est géométrique de raison la constante trouvée.

Exemple :
Soit la suite (U_n) telle que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 3U_n + 4$ et $U_0 = 2$.
On pose $V_n = U_n + 2$. On veut montrer que V_n est géométrique

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{U_{n+1} + 2}{U_n + 2} = \frac{3U_n + 4 + 2}{U_n + 2} = \frac{3U_n + 6}{U_n + 2} = \frac{3(U_n + 2)}{U_n + 2} = 3$$

(V_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme $V_0 = U_0 + 2 = 4$

Pour tout entier naturel n, on a : $V_n = 4 \times 3^n$

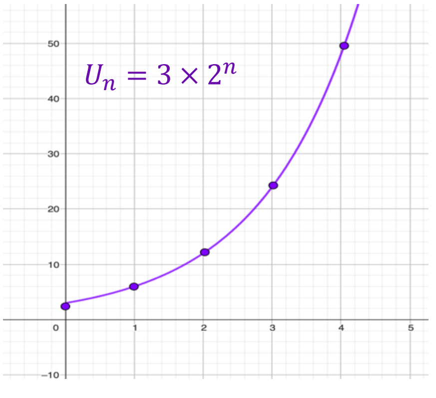
Variation d'une suite géométrique

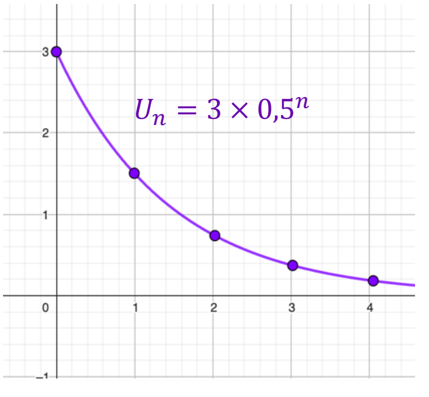
Soit (U_n) une suite géométrique de raison q.
$U_n = U_0 \times q^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- ✓ Si $\boldsymbol{q > 1}$ alors la suite est **croissante** si $\boldsymbol{U_0 > 0}$ et **décroissante** si $\boldsymbol{U_0 < 0}$
- ✓ Si $\boldsymbol{0 < q < 1}$ alors la suite est **décroissante** si $\boldsymbol{U_0 > 0}$ et **croissante** si $\boldsymbol{U_0 < 0}$
- ✓ Si $\boldsymbol{q = 1}$ alors la suite est **constante**
- ✓ Et si $\boldsymbol{q < 0}$? La suite n'est ni croissante ni décroissante.

Convergence d'une suite géométrique

- ✓ Si $\boldsymbol{|q| < 1}$ alors la suite **converge vers 0**
- ✓ Si $\boldsymbol{q > 1}$ alors la suite **diverge vers** $+\infty$ **si** $\boldsymbol{U_0 > 0}$, **vers** $-\infty$ si $\boldsymbol{U_0 < 0}$.
- ✓ Si $\boldsymbol{q \leq -1}$ la suite **diverge** et ne possède pas de limite.





Les séries

Qu'est-ce qu'une série ?

C'est la somme des termes d'une suite. $\sum_{i=0}^{\infty} U_i$

Somme n premiers termes de (Un):

$S_n = \sum_{i=0}^{i=n} U_i = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ S_n est la somme partielle d'ordre n de la **série** $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_i$

remarque : (S_n) est aussi une suite

Exemple : (U_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $U_n = n^2 + 1$

$$S_3 = \sum_{i=0}^{i=3} U_i = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 = (0^2+1) + (1^2+1) + (2^2+1) + (3^2+1) = 18$$

Soit (U_n) une suite arithmétique

Pour tout entier naturel n

premier terme

dernier terme

$$\boxed{S_n = \underbrace{(n+1)}_{\text{nombre de termes}} \times \frac{U_0 + U_n}{2}}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{i=n} U_i = n \times \frac{U_1 + U_n}{2}}$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{\infty} U_i = \lim_{n\to+\infty} S_n}$$

$$S_n = (n+1) \times \frac{U_0 + U_n}{2} = (n+1) \times \frac{U_0 + (U_0 + nr)}{2} = (n+1) \times \left(U_0 + n\frac{r}{2}\right)$$

- ✓ $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ si $\boldsymbol{r > 0}$
- ✓ $\lim_{n\to+\infty} S_n = -\infty$ si $\boldsymbol{r < 0}$
- ✓ $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ si $\boldsymbol{r = 0}$ **et** $\boldsymbol{U_0 > 0}$
- ✓ $\lim_{n\to+\infty} S_n = -\infty$ si $\boldsymbol{r = 0}$ **et** $\boldsymbol{U_0 < 0}$

Somme des n premiers entiers

Pour tout entier naturel n

$$0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \boxed{\frac{\boldsymbol{n(n+1)}}{\boldsymbol{2}}}$$

$$U_n = 0 + 1 \times n = n$$

$$S_n = (n+1) \times \frac{U_0 + U_n}{2} = (n+1) \times \frac{0+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Soit (U_n) une suite géométrique

premier terme

nombre de termes

$$\boxed{S_n = U_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

raison

$$\boxed{\sum_{i=1}^{i=n} U_i = U_1 \frac{1-q^n}{1-q}}$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{\infty} U_i = \lim_{n\to+\infty} S_n}$$

$$S_n = U_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

- ✓ Si $|q| < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{U_0}{1-q}$, la série **converge.**
- ✓ Si $|q| \geq 1$ la série **diverge**.

Le raisonnement par récurrence

Idée générale

On veut montrer que **tous** les dominos tombent.

$\boxed{1}$ **Initialisation** : on montre que le 1er domino tombe.

$\boxed{2}$ **Hérédité** : on montre que si un domino tombe, il fait tomber le suivant.

Rédaction

Soit une propriété dépendant d'un entier naturel

$\boxed{1}$ Initialisation :
Si la propriété est vraie pour un entier n_0

$\boxed{2}$ Hérédité :
Et si la propriété étant vraie pour un entier $n \geq n_0$, est vraie au rang $n+1$

Alors la propriété est vraie pour tout entier $n \geq n_0$

Exemple :

Pour tout entier naturel n, on appelle P_n la propriété : « pour tout réel x strictement positif, on a : $(1+x)^n \geq 1+nx$ »

Initialisation : Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

$(1+x)^0 = 1$ $\quad 1+0x = 1$ $\quad (1+x)^0 \geq 1+0x$ $\quad$ **Donc P_0 est vraie.**

Hérédité : On suppose que la propriété est vraie pour un certain rang n.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad (1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx)$. (car P_n est vraie)

$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$ $\quad$ **Donc P_{n+1} est vraie.**

P_0 est vraie et pour tout entier naturel n,
si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie.

Ainsi **P_n est vraie pour tout entier naturel n**

Les distances

Notion de distance

Mesure l'écart entre deux objets.

Exemple : écart entre la maison et le travail
La distance à vol d'oiseau ou la distance parcourue en voiture

La distance est une fonction : $E \times E \to \mathbb{R}^+$

$$(x, y) \longmapsto d(x, y)$$

- ✓ Symétrie : $\forall (a, b) \in E^2,\ d(a, b) = d(b, a)$
- ✓ Séparation : $\forall (a, b) \in E^2,\ d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$
- ✓ Inégalité triangulaire : $\forall (a, b, c) \in E^3,\ d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, d)$

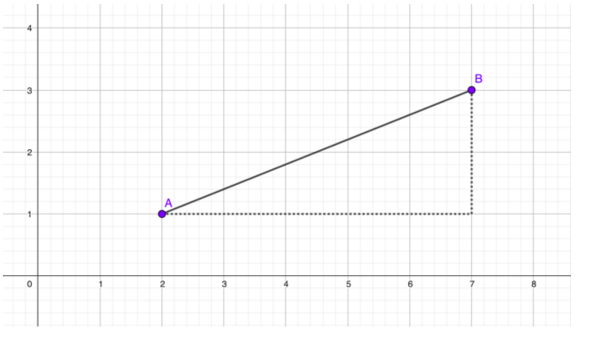
Distance euclidienne

Soit E un espace euclidien

Distance euclidienne entre deux points de E :
Longueur du segment qui sépare ces points.

$x, y \in \mathbb{R}^n$

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$



$A(x_A, y_A)$ $\quad AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$B(x_B, y_B)$

En machine learning ?

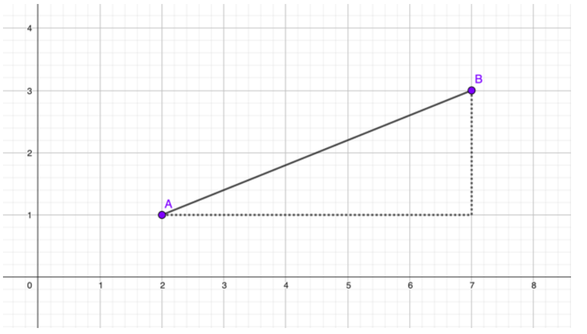
- ✓ KNN
- ✓ KMeans
- ✓ Régularisation L2 (ridge)

Distance de Manhattan

ou distance des blocs

$x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|}$$



$$d(A,B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|$$

En machine learning ?

✓ Régularisation L1 (Lasso)

Distance de Minkowski

Généralisation des distances euclidiennes et de Manhattan

$x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}}$$

Exemple pour $p = 3$:

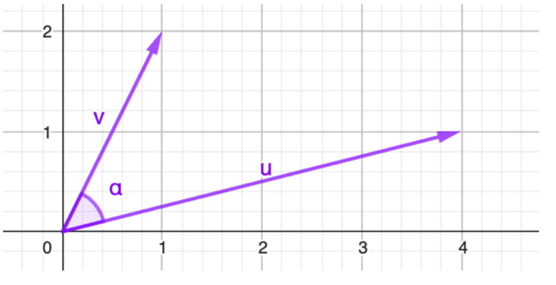
$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^3\right)^{\frac{1}{3}}$$

Distance cosinus

Mesure de l'angle entre deux vecteurs, u et v :

$$\boxed{d(u,v) = 1 - \frac{u.v}{\|u\| \times \|v\|}}$$

Similarité cosinus



Distance comprise entre 0 et 2 :

➡️ Vecteurs identiques : $d(u,v) = 0$

➡️ Vecteurs opposés : $d(u,v) = 2$

➡️ Vecteurs orthogonaux : $d(u,v) = 1$
(aucune similarité directionnelle)

En machine learning ?

✓ NLP (similarité entre des mots)

Distance de Jaccard

Soient A et B deux ensembles.

$$Jaccard(A,B) = 1 - \overbrace{\frac{|A \cap B|}{|A \cup B|}}^{\textbf{Similarité de Jaccard}}$$

$|A \cap B|$: Taille de l'intersection de A et B

$|A \cup B|$: Taille de l'union de A et B

Exemple : $A = \{« \, maison \, », « \, fleur \, », « \, jardin \, », « \, arbre \, », « \, banc \, »\}$

$B = \{« \, fleur \, », « \, fontaine \, », « \, arbre \, », « \, banc \, », « \, buisson \, », « \, jardin \, »\}$

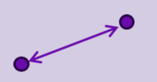
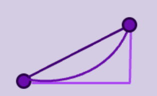
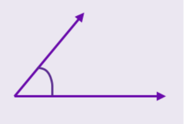
$C = \{« \, genealogie \, », « \, ancêtre \, », « \, arbre \, », « \, lien \, »\}$

$$Jaccard(A,B) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7} \qquad Jaccard(A,C) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

En machine learning ?

✓ NLP
✓ Clustering

Tableau récapitulatif

Distance	Principe	Exemples d'applications	Formule $x, y \in \mathbb{R}^n$	Image
Distance euclidienne	Longueur du segment qui sépare deux points.	Mesure de distance générale, classification, clustering. Régularisation L2.	$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$	
Distance de Manhattan	Distance basée sur des déplacements en ligne droite (sur des grilles)	Réseaux en grille, traitement d'images. Régularisation L1.	$\sum_{i=1}^{n}\lvert x_i - y_i\rvert$	
Distance de Minkowski	Généralise les distances euclidienne et de Manhattan en permettant d'ajuster la mesure avec un paramètre p	Classification, Clustering	$\left(\sum_{i=1}^{n}\lvert x_i - y_i\rvert^p\right)^{\frac{1}{p}}$	
Distance cosinus	Mesure du cosinus de l'angle entre deux vecteurs (u et v)	NLP Analyse de texte, regroupement de documents. Systèmes de recommandation.	$1 - \frac{u.v}{\lVert u\rVert \times \lVert v\rVert}$	
Distance de Jaccard	Mesure de la similarité entre deux ensembles (A et B) en utilisant l'intersection et l'union.	NLP Clustering Analyse de similarité d'ensemble. Systèmes de recommandation.	$1 - \frac{\lvert A \cap B\rvert}{\lvert A \cup B\rvert}$