Informe Trabajo 3

Grupo O

Fermín Ruiz Arrabal
Pablo Yusta Aparicio
Oscar Romero Espinosa
Víctor Suárez Pañeda

Método de Gauss con pivote

El método de Gauss es una herramienta de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, cuya estrategia se basa en multiplicar las ecuaciones por constantes, de tal forma que al combinar dos de ellas se elimine una de las incógnitas, el resultado es una sola ecuación en la que se puede despejar la incógnita restante. Este valor se sustituye en cualquiera de las ecuaciones originales para calcular la otra variable.

La implementación del método se realiza en varios pasos:

1. Dado un sistema de ecuaciones es necesario descomponerlo de forma matricial de tal manera que obtengamos su matriz A de coeficientes, el vector X de incógnitas y el vector B de términos independientes con los cuales trabajaremos en el método.
2. El siguiente paso es la triangularización superior de la matriz de coeficientes A (implementado en la subrutina triangularización_gauss(n,A,B)) mediante el método de Gauss antes descrito, de tal manera que dejemos la incógnita de la última fila del sistema despejada y con ello vamos despejando las de las filas inmediatamente superiores una a una.
    1. En este paso al despejar la componente de X requerimos dividir el término en B por un coeficiente de A al cual llamaremos pivote, para evitar problemas en los cálculos dicho elemento no puede ser un número que tienda a cero, con el fin de evitar esta situación se usa la estrategia del pivoteo (implementada en la subrutina pivot(n,k,A,B)), consistente en identificar el elemento más grande (en valor absoluto) a cada paso en la columna del pivote y si se diese el caso, intercambiar la fila del pivote original por la del elemento de mayor valor, dejando a este último como nuevo pivote y evitando así la división por un número próximo a cero al despejar.
3. Una vez tenemos el sistema transformado con las ecuaciones despejadas (A ha pasado a ser una matriz triangular superior), podemos resolverlo mediante un proceso repetitivo (implementado en la subrutina solve_triang_sup(n,A,B,X)) que se encarga de ir despejando de abajo arriba una a una las ecuaciones obtenidas en el paso anterior.
4. Finalmente obtenemos el vector X solución del sistema de ecuaciones lineales.

Algoritmos de resolución Gauss:

El método se compone de tres algoritmos, el de triangulación, el de pivoteo y el de resolución del sistema triangular superior.

Fase de triangulación:

1. Dados n, A(n,n), B(n).
2. Para k = 1,2,...., n-1 *!Avanzamos por las columnas*
   a) Para i = k + 1, k + 2,..., n *!Desciende por las filas*

      !Modificamos la fila i-ésima para obtener un cero en A(i,k)

      I. Calcular $A(i,:)=A(i,:)-\frac{A(i,k)}{A(k,k)}\times A(k,:)$.
      II. Calcular $B(i)=B(i)-\frac{A(i,k)}{A(k,k)}\times B(k)$.
      III. Incrementar i en 1 y volver al paso [2.a).I.].
   b) Incrementar k en 1 y volver al paso [2.a).].

Estrategia de pivoteo:

1. Dada A(n,n), k *!Matriz de coeficientes y contador de columnas en la fase de triangulación*
2. Definimos:

   $p=k$ *!columna en la que se encuentra k*

   $big=|A(k,k)|$ *!pivote actual que compararemos con los demás elementos*

   a) Para ii = k + 1, n.
      I. Hacer $dummy=|A(ii,k)|$
         1. Si dummy > big cambiamos big por dummy y p = ii *!Guardamos el elemento mayor y su fila asociada en las nuevas variables temporales.*
   b) Si p =/ k:
      I. Para jj = k, n *!Intercambiamos la fila del elemento original con la del pivote más grande*
         1. dummy = A(p,jj)
         2. A(p,jj) = A(k,jj)
         3. A(k,jj) = dummy
      II. Definir:
         1. dummy = b(p)
         2. B(p) = B(k)
         3. B(k) = dummy

Fase de resolución del sistema triangular superior:

1. Dados n, A(n,n) *!Ya triangularizada*, B(n).
2. Para k = n, n-1,...., 1

   a) Calcular $X(k)=\frac{1}{A(k,k)}\times\left(B(k)-\sum_{h=k+1}^{n}A(k,h)*X(h)\right)$.

   b) Incrementar k en -1 y volver a [2.a)].

Ejemplos:

Ej 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ej 2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Soluciones ofrecidas por el programa principal para los ejemplos:

```
informatico@informatica: ~/Documentos/Informatica/Trabajo3/Workfiles/gauss_pivote
$ gfortran -o main.exe main.f90 sistemas_lineales.o
informatico@informatica:~/Documentos/Informatica/Trabajo3/Workfiles/gauss_pivote
$ ./main.exe
 MÉTODO DE GAUSS CON PIVOTEO
 EJEMPLO 1
 ---------
 La solución es:
-0.100000E+01    0.100000E+01    0.100000E+01
 EJEMPLO 2
 ---------
 La solución es:
-0.100000E+01    0.100000E+01   -0.100000E+01    0.100000E+01
informatico@informatica:~/Documentos/Informatica/Trabajo3/Workfiles/gauss_pivote
$ 
```

Ejemplos resueltos a mano:

Ejemplo 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 - 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$2x_3 = 2 \rightarrow x_3 = 1$

$x_2 - x_3 = 0 \rightarrow x_2 = 1$

$2x_1 + 4x_2 = 2 \rightarrow x_1 = -1$

Solución $\rightarrow (-1, 1, 1)$

Ejemplo 2:

$$\begin{bmatrix}0&1&1&2\\0&1&1&-1\\1&2&-1&3\\1&1&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\\5\\-2\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&3&5\\0&1&1&-1&-1\\0&1&1&2&2\\1&1&2&0&-2\end{array}\right]\xrightarrow{F_1-F_4}\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&3&5\\0&1&1&-1&-1\\0&1&1&2&2\\0&1&-3&3&7\end{array}\right]\xrightarrow{F_2-F_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&3&5\\0&1&1&-1&-1\\0&0&0&-3&-3\\0&1&-3&3&7\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&3&5\\0&1&1&-1&-1\\0&1&-3&3&7\\0&0&0&-3&-3\end{array}\right)\xrightarrow{F_2-F_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&3&5\\0&1&1&-1&-1\\0&0&4&-4&-8\\0&0&0&-3&-3\end{array}\right)$$

$-3x_4 = -3 \rightarrow x_4 = 1$

$+4x_3 - 4x_4 = -8 \rightarrow x_3 = -1$

$x_2 + x_3 - x_4 = -1 \rightarrow x_2 = 1$

$x_1 + 2x_2 + (-x_3) + 3x_4 = 5 \rightarrow x_1 = -1$

Solución:

$\overline{X} = (-1, 1, -1, 1)$

Descomposición LU

El método de descomposición LU, al igual que el de Gauss, es una herramienta para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Este consta de dos etapas, pudiendo añadir a demás una sub-etapa de pivoteo de manera similar al método de Gauss, que consisten en una etapa de factorización y otra de sustitución, se trata por tanto, en un primer momento de escribir la matriz A de coeficientes como producto de dos matrices diagonales L (inferior) y U (superior) y resolver sendos sistemas de ecuaciones que, de esta manera, quedan despejados.

Implementación del método:

1. Dado un sistema de ecuaciones lineales dispuesto de forma matricial, donde A es la matriz de componentes utilizaremos dos matrices de incógnitas L (triangular inferior) y U (triangular superior y con los elementos de la diagonal principal iguales a 1) que cumplan que multiplicadas forman las componentes de la matriz A dato.
2. Etapa de factorización: se realiza la multiplicación de L * U y se identifica dicho producto con los términos de A, obteniendo un conjunto de ecuaciones que nos permiten despejar los elementos de L y U a cada paso, obteniendo en orden alternativamente las columnas de L y las filas de U.
3. Etapa de sustitución: Una vez factorizada la matriz A, la solución del sistema inicial A*X=B se obtiene a partir de las matrices L y U escribiéndolo de la forma L*U*X=B y si realizamos el paso intermedio U*X=Y el sistema original es equivalente a los sistemas L*Y=B y U*X=Y, de dónde el primero es triangular inferior y por tanto podemos obtener fácilmente Y despejando y una vez calculado resolver el segundo, triangular superior, obteniendo X que es el vector de incógnitas inicial del sistema.

Algoritmo de resolución LU:

Fase de factorización:

1. Dado A(n,n).
2. **Para k = 1,2,....,n** *!recorremos la diagonal principal.*
   I. Para i = k,....,n *!calculamos la columna k de L.*
      a) Calcular L(i,k) = A(i,k) - $\sum_{h=1}^{k-1} L(i,h) * U(h,k)$.
      b) Incrementar i en 1 y volver al paso I.a)
   II. Para j = k + 1,...., n *!Ahora calculamos la fila k de U.*
      a) Calcular U(k,j) = $\frac{1}{L(k,k)}$ (A(k,j) - $\sum_{h=1}^{k-1} L(k,h) * U(h,j)$.
      b) Incrementar j en 1 y volver al paso II.a)
   III. Incrementar k en 1 y volver a I.

Fase de sustitución:

Resolución de L*Y=B

1. Dados L(n,n) y B(n).
2. Para k = 1, 2,...., n.

    a) Calcular $Y(k)=\frac{1}{L(k,k)}\times(B(k)-\sum_{h=1}^{k-1}L(k,h)*Y(h))$.

    b) Incrementar k en 1 y volver a 2.a).

Resolución de U*X=Y

1. Dados U(n,n) e Y(n).
2. Para k = n, n-1,..., 1.

    a) Calcular $X(k)=Y(k)-\sum_{h=k+1}^{n}U(k,h)*X(h)$.

    b) Incrementar k en -1 y volver a 2.a).

Ejemplos:

Ej 1:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -1 & -1 & -4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ej 2:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -8 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soluciones ofrecidas por el programa principal para los ejemplos:

```
informatico@informatica: ~/Documentos/Informatica/Trabajo3/Workfiles/descomposición
informatico@informatica:~/Documentos/Informatica/Trabajo3/Workfiles/descomposici
ón_LU$ ./main.exe
 MÉTODO DE DESCOMPOSICÓN LU
 EJEMPLO 1
 ---------
 La solución es:
 0.100000E+01    0.100000E+01   -0.100000E+01
 EJEMPLO 2
 ---------
 La solución es:
 0.100000E+00    0.400000E+00    0.100000E+00   -0.100000E+00
informatico@informatica:~/Documentos/Informatica/Trabajo3/Workfiles/descomposici
ón_LU$
```

Ejemplos resueltos a mano:

Ejemplo 1:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A_{11} = L_{11} = 3$

$A_{21} = L_{21} = -1$

$A_{31} = L_{31} = 2$

$\rightarrow$ $U_{12} = \dfrac{A_{12}}{L_{11}} = \dfrac{6}{3} = 2$

$U_{13} = \dfrac{A_{13}}{L_{11}} = \dfrac{9}{3} = 3$

$L_{22} = A_{22} - L_{21} \cdot U_{12} = -1 - (-1 \cdot 2) = 1$

$\rightarrow$ $L_{32} = A_{32} - L_{31} \cdot U_{12} = 4 - (2 \cdot 2) = 0$

$U_{23} = \dfrac{A_{23} - L_{21} U_{13}}{L_{22}} = \dfrac{-4 - (-1 \cdot 3)}{1} = -1$

$\rightarrow$ $L_{33} = A_{33} - L_{31} U_{13} - L_{32} U_{23} = 5 - (2 \cdot 3) - (0 \cdot (-1)) = -1$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L \cdot U$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$3y_1 = 0 \rightarrow y_1 = 0$

$-y_1 + y_2 = 2 \rightarrow y_2 = 2$

$2y_1 - y_3 = 1 \rightarrow y_3 = -1$

$\rightarrow$

$x_3 = y_3 = -1$

$x_2 - x_3 = y_2 = 2 \rightarrow x_2 = 1$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = y_1 \rightarrow x_1 = 1$

Solución $\rightarrow$ $\overline{x} = (1, 1, -1)$

Ejemplo 2:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -8 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} L_{11} &= 3 \\ L_{21} &= 2 \\ L_{31} &= 4 \\ L_{41} &= 3 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} U_{12} &= \frac{A_{12}}{L_{11}} = \frac{2}{3} \\ U_{13} &= \frac{A_{13}}{L_{11}} = \frac{0}{3} = 0 \\ U_{14} &= \frac{A_{14}}{L_{11}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$L_{22} = A_{22} - L_{21} U_{12} = 5 - 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$$

$$L_{32} = A_{32} - L_{31} U_{12} = -1 - 4 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{11}{3}$$

$$L_{42} = A_{42} - L_{41} U_{12} = 1 - 3 \cdot \frac{2}{3} = -1$$

$$U_{23} = \frac{A_{23} - L_{21}U_{13}}{L_{22}} = \frac{-1 - (2 \cdot 0)}{11/3} = -\frac{3}{11}$$

$$U_{24} = \frac{A_{24} - L_{21}U_{14}}{L_{22}} = \frac{1 - 2 \cdot 1/3}{11/3} = \frac{1}{11}$$

$$L_{33} = A_{33} - (L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23}) = -8 - (4 \cdot 0 + (-\tfrac{11}{3})(-\tfrac{3}{11})) = -9$$

$$L_{43} = A_{43} - (L_{41}U_{13} + L_{42}U_{23}) = -1 - (3 \cdot 0 + (-1)(-\tfrac{3}{11})) = -\frac{14}{11}$$

$$U_{34} = \frac{1}{L_{33}}(A_{34} - (L_{31}U_{14} + L_{32}U_{24})) = \frac{1}{-9}(2 - [(4 \cdot \tfrac{1}{3}) + (-\tfrac{11}{3})(\tfrac{1}{11})]) = -\frac{1}{9}$$

$$L_{44} = A_{44} - (L_{41}U_{14} + L_{42}U_{24} + L_{43}U_{34}) = 6 - 1 + \frac{1}{11} - \frac{14}{99} = \frac{490}{99}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{11}{3} & 0 & 0 \\ 4 & -\frac{11}{3} & -9 & 0 \\ 3 & -1 & -\frac{14}{11} & \frac{490}{99} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3y_1 = 1 \rightarrow y_1 = 1/3$$

$$2y_1 + \frac{11}{3}y_2 = 2 \rightarrow y_2 = 4/11$$

$$4y_1 - \frac{11}{3}y_2 - 9y_3 = -1 \rightarrow y_3 = \frac{1}{9}$$

$$3y_1 - y_2 - \frac{14}{11}y_3 + \frac{490}{99}y_4 \rightarrow y_4 = -\frac{1}{10}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{11} & \frac{1}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/11 \\ 1/9 \\ -1/10 \end{pmatrix}$$

$$x_4 = -\frac{1}{10}$$

$$x_3 - \frac{x_4}{9} = \frac{1}{9} \rightarrow x_3 = \frac{1}{10}$$

$$x_2 - \frac{3x_3}{11} + \frac{x_4}{11} = \frac{4}{11} \rightarrow x_2 = \frac{4}{10}$$

$$x_1 + \frac{2x_2}{3} + \frac{x_4}{3} = \frac{1}{3} \rightarrow x_1 = \frac{1}{10}$$

Solución $\rightarrow \overline{X} = (0'1,\ 0'4,\ 0'1,\ -0'1)$

Método de Gauss-Seidel

El método de Gauss-Seidel es una herramienta de resolución de sistemas de ecuaciones por iteración, que consiste en dada un sistema ordenado matricialmente como A*X=B obtener el vector X de soluciones a partir de realizar un proceso de aproximación iterativa desde una solución inicial dada en principio aleatoriamente, convergiendo al vector solución tras un número de pasos determinados por un criterio de parada acorde al error que queremos en nuestra aproximación.

Para ello despeja las componentes de X en cada ecuación y les otorga los valores iniciales escogidos de antemano como primera aproximación a la solución. Con ello obtenemos unos nuevos valores para las componentes de X y regresamos a la primera ecuación y volvemos a repetir el proceso, ésta vez con los valores nuevos hasta que los valores de X converjan lo suficiente a la solución real, para que el método converja se tiene un criterio de convergencia para el cual el método da buenos resultados y éste es que el elemento de la diagonal debe ser mayor (en valor absoluto) que la suma del valor absoluto de los otros elementos de la columna, el sistema es por tanto diagonal dominante.

Algoritmo para implementar el sistema:

1. Dados n, A(n,n), B(n), $X^{(0)}(n)$, n_{max}, ε
2. Para k = 1, 2,..., n_{max}.
   a) Para i = 1, 2,...., n *!Calcula las componentes del vector* $X^{(k)}$.
      I. $$X(i)^{(k)}=(B(i)-\sum_{j=1}^{i-1} A(i,j)\times X(j)^{(k)}-\sum_{j=i+1}^{n} A(i,j)\times X(j)^{(k-1)})/A(i,i)$$
      II. Incrementar i en 1 y volver a [2.a).I.].
   b) Calcular $e=\|X^{(k)}-X^{(k-1)}\|$.
   c) Calcular $ref=\|X^{(k)}\|$.
   d) Si *ref > 1,* entonces calculamos *e = e/ref.*
   e) Si $e<\varepsilon$, entonces acepta $X^{(k)}$ como solución u para.
   f) En caso contrario incrementar k en 1 y volver a 2.a).

Ejemplos:

Ej 1:

Aproximación inicial $X_0 = (10,9,10)$

Número máximo de iteraciones → 50

Error relativo suficiente para activar el criterio de parada → $1*10^{-8}$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Ej 2:

Aproximación inicial $X_0 = (10,9,10,10)$

Número máximo de iteraciones → 50

Error relativo suficiente para activar el criterio de parada → $1*10^{-8}$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & 8 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución ofrecida por el programa principal para el ejemplo 1:

```
informatico@informatica: ~/Documentos/Informatica/Trabajo3/Workfiles/gauss_seidel
informatico@informatica:~/Documentos/Informatica/Trabajo3/Workfiles/gauss_seidel$ ./main.exe
 MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL
 EJEMPLO 1
 ---------
k        X_1              X_2              X_3              error_abs        error_rel
 1 -.4000000000E+00 0.5733333333E+01 0.5166666667E+00 0.1444869275E+02 0.2503912333E+01
 2 -.9900000000E+00 0.1090000000E+01 0.1972500000E+01 0.4901846095E+01 0.1991410365E+01
 3 0.1158500000E+01 0.1459833333E+01 0.8057916667E+00 0.2472657938E+01 0.1217816411E+01
 4 0.7772250000E+00 0.9400250000E+00 0.1126381250E+01 0.7199645894E+00 0.4336459115E+00
 5 0.1049266250E+01 0.1054979583E+01 0.9616219792E+00 0.3381813349E+00 0.1908875515E+00
 6 0.9703325625E+00 0.9857555625E+00 0.1018394828E+01 0.1193551359E+00 0.6948668509E-01
 7 0.1009376741E+01 0.1007634624E+01 0.9934029737E+00 0.5126142764E-01 0.2949266456E-01
 8 0.9956267452E+00 0.9974303627E+00 0.1002829037E+01 0.1954584326E-01 0.1130024074E-01
 9 0.1001593662E+01 0.1001148908E+01 0.9989159419E+00 0.8046365094E-02 0.4643001044E-02
10 0.9993236252E+00 0.9995707001E+00 0.1000445512E+01 0.3159651061E-02 0.1824626696E-02
11 0.1000260822E+01 0.1000179286E+01 0.9998247673E+00 0.1278295650E-02 0.7379591689E-03
12 0.9998932391E+00 0.9999301771E+00 0.1000070836E+01 0.5076637344E-03 0.2931101247E-03
13 0.1000042096E+01 0.1000028402E+01 0.9999718513E+00 0.2039720436E-03 0.1177616519E-03
14 0.9999830095E+00 0.9999887574E+00 0.1000011306E+01 0.8136106741E-04 0.4697409922E-04
15 0.1000006758E+01 0.1000004527E+01 0.9999954892E+00 0.3260119123E-04 0.1882226403E-04
16 0.9999972872E+00 0.9999981968E+00 0.1000001807E+01 0.1302625830E-04 0.7520720526E-05
17 0.1000001083E+01 0.1000000723E+01 0.9999992778E+00 0.5214053635E-05 0.3010334182E-05
18 0.9999995663E+00 0.9999997112E+00 0.1000000289E+01 0.2084733213E-05 0.1203621456E-05
19 0.1000000173E+01 0.1000000116E+01 0.9999998844E+00 0.8341152418E-06 0.4815766316E-06
20 0.9999999306E+00 0.9999999538E+00 0.1000000046E+01 0.3335905913E-06 0.1925986221E-06
21 0.1000000028E+01 0.1000000018E+01 0.9999999815E+00 0.1334501104E-06 0.7704745645E-07
22 0.9999999889E+00 0.9999999926E+00 0.1000000007E+01 0.5337657525E-07 0.3081698021E-07
23 0.1000000004E+01 0.1000000003E+01 0.9999999970E+00 0.2135149720E-07 0.1232729264E-07
24 0.9999999982E+00 0.9999999988E+00 0.1000000001E+01 0.8540382077E-08 0.4930791894E-08
 La solución es:
 0.9999999982E+00 0.9999999988E+00 0.1000000001E+01
```

Solución ofrecida por el programa principal para el ejemplo 2:

```
informatico@informatica: ~/Documentos/Informatica/Trabajo3/Workfiles/gauss_seidel
 MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL
 EJEMPLO 2
 ---------
k        X_1               X_2               X_3               X_4              error_abs         error_rel
 1 -.2400000000E+01 0.1106666667E+02 0.1341666667E+01 0.1826190476E+01 0.1731499377E+02 0.1499337934E+01
 2 -.3323571429E+01 0.2804523810E+01 0.1583601190E+01 0.7086989796E+00 0.8391859647E+01 0.1792349926E+01
 3 0.2531709184E+00 0.1770621599E+01 0.6789669430E+00 0.3085023992E+00 0.3852344743E+01 0.1987920436E+01
 4 0.5658442693E+00 0.1066093960E+01 0.6388399876E+00 0.1746528164E+00 0.7833579654E+00 0.5690033762E+00
 5 0.8663998504E+00 0.9290130936E+00 0.5641050027E+00 0.1334861768E+00 0.3411815225E+00 0.2443410117E+00
 6 0.9145185277E+00 0.8630425018E+00 0.5551758274E+00 0.1197389027E+00 0.8328411496E-01 0.6036120340E-01
 7 0.9418703842E+00 0.8471456344E+00 0.5486065625E+00 0.1154374465E+00 0.3259589261E-01 0.2352975538E-01
 8 0.9477755695E+00 0.8407260762E+00 0.5473950289E+00 0.1140229213E+00 0.8919116255E-02 0.6440607029E-02
 9 0.9503839910E+00 0.8389783099E+00 0.5467845787E+00 0.1135750231E+00 0.3229831657E-02 0.2331545371E-02
10 0.9510505871E+00 0.8383380363E+00 0.5466419766E+00 0.1134290709E+00 0.9465400357E-03 0.6832859079E-03
11 0.9513073666E+00 0.8381509626E+00 0.5465829219E+00 0.1133825360E+00 0.3264739104E-03 0.2356680295E-03
12 0.9513796921E+00 0.8380861136E+00 0.5465671298E+00 0.1133674517E+00 0.9956557269E-04 0.7187211988E-04
13 0.9514054902E+00 0.8380663757E+00 0.5465612620E+00 0.1133626231E+00 0.3335971419E-04 0.2408089469E-04
14 0.9514131775E+00 0.8380597463E+00 0.5465595652E+00 0.1133610626E+00 0.1040952563E-04 0.7514171242E-05
15 0.9514158020E+00 0.8380576803E+00 0.5465589723E+00 0.1133605620E+00 0.3429110788E-05 0.2475321300E-05
16 0.9514166100E+00 0.8380569988E+00 0.5465587929E+00 0.1133604004E+00 0.1084180572E-05 0.7826213021E-06
17 0.9514168790E+00 0.8380567835E+00 0.5465587324E+00 0.1133603485E+00 0.3536564672E-06 0.2552887283E-06
18 0.9514169634E+00 0.8380567132E+00 0.5465587136E+00 0.1133603318E+00 0.1126634420E-06 0.8132668101E-07
19 0.9514169911E+00 0.8380566909E+00 0.5465587074E+00 0.1133603264E+00 0.3654216589E-07 0.2637814903E-07
20 0.9514169998E+00 0.8380566836E+00 0.5465587054E+00 0.1133603247E+00 0.1169183019E-07 0.8439807314E-08
 La solución es:
 0.9514169998E+00 0.8380566836E+00 0.5465587054E+00 0.1133603247E+00
```

Ejemplos resueltos a mano:

Ejemplo 1:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad X0 = (10, 9, 10)$$

$$x_1^1 = \frac{6 - 2x_2 + x_3}{5} = -0'4$$

$$x_2^1 = \frac{4 - x_1 + 3x_3}{6} = 5'73$$

$$x_3^1 = \frac{7 - 2x_1 - x_2}{4} = 0'517$$

$$x_1^2 = \frac{6 - 11'46 + 0'517}{5} = -0'988$$

$$x_2^2 = \frac{4 + 0'988 + 1'55}{6} = 1'09$$

$$x_3^2 = \frac{7 + 1'976 - 1'09}{4} = 1'97$$

$$x_1^3 = \frac{6 - 2 \cdot 1'09 + 1'975}{5} = 1'159$$

$$x_2^3 = \frac{4 - 1'159 + 3 \cdot 1'975}{6} = 1'461$$

$$x_3^3 = \frac{7 - 2 \cdot 1'159 - 1'461}{4} = 0'805$$

$$\overline{x}_1 = (-0'4, 5'73, 0'517)$$

$$\overline{x}_2 = (-0'988, 1'09, 1'97)$$

$$\overline{x}_3 = (1'159, 1'461, 0'805)$$

$$E(ABS) = \| X_2 - X_1 \|$$

$$E(REL) = \frac{\| X_2 - X_1 \|}{\| X_2 \|}$$

$$E_{ABS}^1 = \sqrt{(-10'4)^2 + (-3'27)^2 + (-9'48)^2} = 14'44$$

$$E_{ABS}^2 = \sqrt{0'588^2 + 4'64^2 + (-1'45)^2} = 4'89$$

$$E_{ABS}^3 = \sqrt{2'147^2 + 0'371^2 + (-1'16)^2} = 2'47$$

$$E_{REL}^1 = \frac{14'44}{5'76} = 2'503$$

$$E_{REL}^2 = \frac{4'89}{2'459} = 1'99$$

$$E_{REL}^3 = \frac{2'47}{2'03} = 1'21$$

$$|x_1| = 5'76$$

$$|x_2| = 2'459$$

$$|x_3| = 1'21$$

Ejemplo 2:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & 8 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad x^0 = (10, 9, 10, 10)$$

$$x_1^1 = \frac{6 - 2x_2 + x_3 - x_4}{5} = -2'4$$

$$x_2^1 = \frac{4 - x_1 + 3x_3 + 3x_4}{6} = 11'06$$

$$x_3^1 = \frac{7 - 2x_1 - x_2 + x_4}{8} = 1'342$$

$$x_4^1 = \frac{2 - x_1 + x_2 - 2x_3}{7} = 1'825$$

$$x_1^2 = \frac{6 - 2(11'06) + 1'342 - 1'82}{5} = -3'32$$

$$x_2^2 = \frac{4 - (-3'32) + 3(1'34) + 3(1'82)}{6} = 2'8$$

$$x_3^2 = \frac{7 - (-3'32) + 2'8 - 1(1'82)}{8} = 1'58$$

$$x_4^2 = \frac{2 - (-3'32) + 2'8 - 2(1'58)}{7} = 0'708$$

$$x_1^3 = \frac{6 - 2(2'8) + 1'58 - 0'708}{5} = 0'2544$$

$$x_2^3 = \frac{4 - 0'2544 + 3 \cdot 1'58 + 3 \cdot 0'708}{6} = 1'768$$

$$x_3^3 = \frac{7 - 2 \cdot 0'2544 - 1'768 + 0'708}{8} = 0'678$$

$$x_4^3 = \frac{2 - 0'2544 + 1'768 - 2(0'678)}{7} = 0'308$$

$\bar{x}_1 = (-2'4,\ 11'06,\ 1'342,\ 1'825)$ $\qquad |x_1| = 11'54$

$\bar{x}_2 = (-3'32,\ 2'8,\ 1'58,\ 0'708)$ $\qquad |x_2| = 4'675$

$\bar{x}_3 = (0'2544,\ 1'768,\ 0'678,\ 0'308)$ $\qquad |x_3| = 1'935$

$$E^{1}_{ABS} = \sqrt{(-11'01)^2 + 2'06^2 + (-8'66)^2 + (-8'18)^2} = 16'35$$

$$E^{2}_{ABS} = \sqrt{0'49^2 + (-8'26)^2 + 0'24^2 + (-11'12)^2} = 8'35$$

$$E^{3}_{ABS} = \sqrt{3'574^2 + (-1,032)^2 + (-0'902)^2 + (-0'4)^2} = 3'844$$

$$E^{1}_{REL} = \frac{16'35}{11'54} = 1'417$$

$$E^{2}_{REL} = \frac{8'35}{4'675} = 1'786$$

$$E^{3}_{REL} = \frac{3'844}{1'935} = 1'989$$

Aplicaciones

Las herramientas de resolución de sistemas lineales antes expuestas, tienen a demás como propósito facilitar el cálculo de aplicaciones como el determinante de una matriz o la inversa.

Cálculo del determinante de una matriz:

En este caso se ha utilizado el método de descomposición LU ya que podemos calcular el determinante de una matriz A como:

det A = det L * det U = L(1,1) * L(2,2) * … * L(n,n).

Ya que det U = 1.

Cálculo de la inversa de una matriz:

La inversa de una matriz puede obtenerse resolviendo la ecuación matricial:

A*X = I.

Siendo I la matriz unidad de tamaño n x n. Igualando la columna j de ambos miembros podemos obtener la matriz X, por columnas, resolviendo n sistemas de ecuaciones lineales, éste paso puede hacerse mediante cualquiera de los tres métodos de resolución expuestos, en nuestro caso hemos elegido el método de gauss con pivote, ya que tiene la ventaja de no necesitar unas condiciones previas de convergencia como es el caso de los métodos iterativos y a parte tiene un sistema de pivoteo que evita dividir por cero en pasos intermedios, caso que podría pasar con el método LU.