Program Studi Informatika
Fakultas Teknik
Universitas Mulawarman

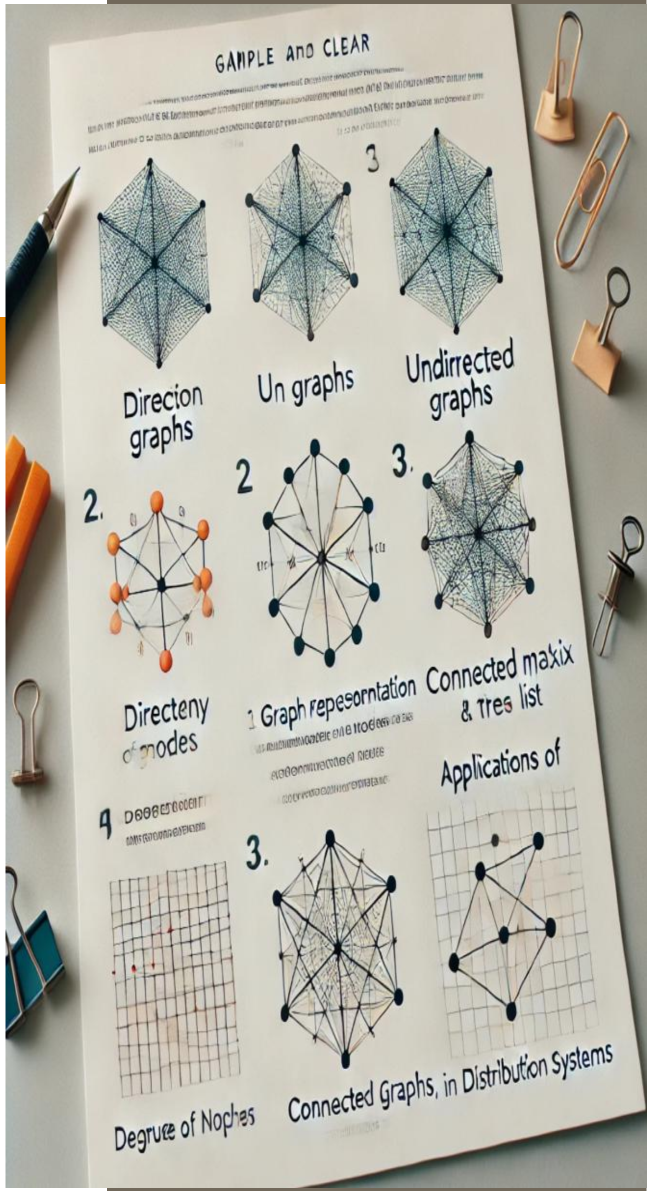
GRAF

Anindita Septiarini

GRAF

- Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut.

- Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek sebagai noktah/bulatan/titik, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis.



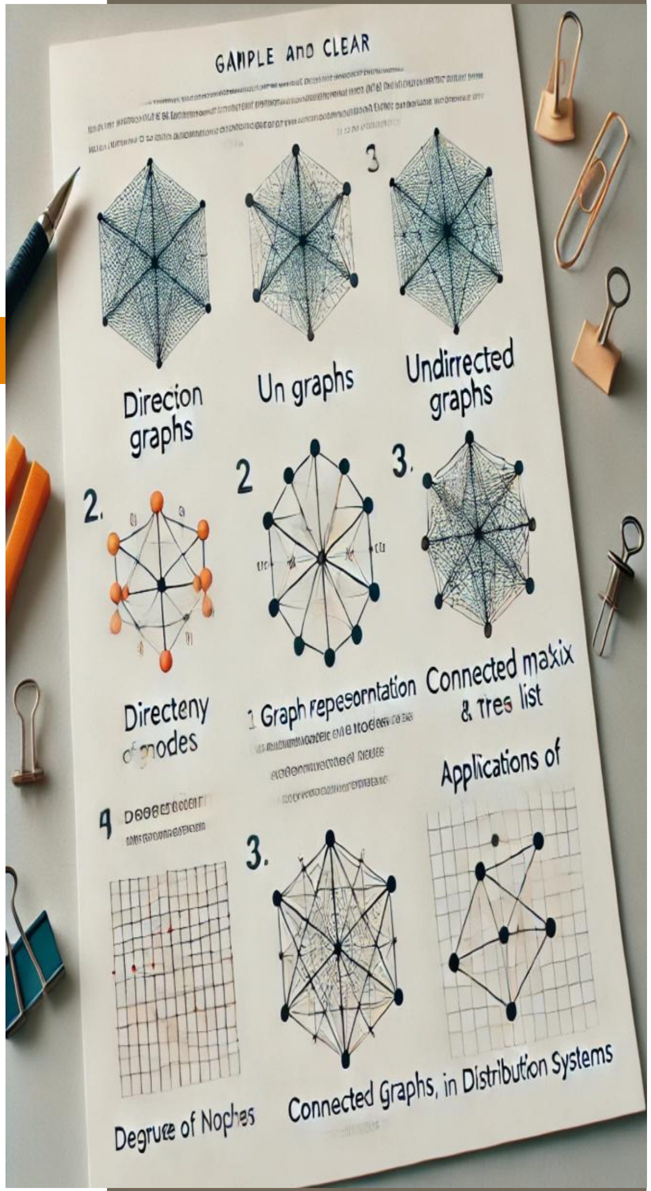
GRAF

- Secara matematis graf didefinisikan sebagai berikut :

  Suatu graf G(V,E) adalah suatu pasangan himpunan $V(v_1,v_2, \ldots, v_n)$ dan himpunan $E(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ dimana :

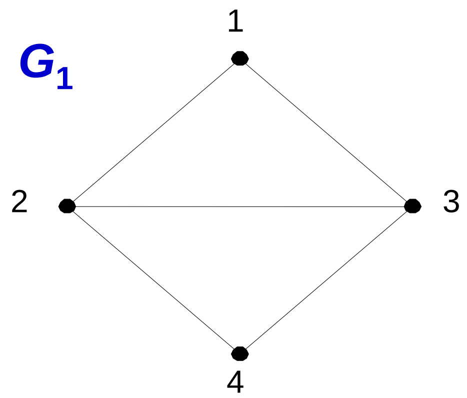
  - ✓ V : himpunan vertek dan digambarkan sebagai *titik*.
  - ✓ E : himpunan sisi (edge) yang elemennya $e_i = (v_j,v_k)$ disebut sisi dan digambarkan sebagai *garis*.

    Dan dikatakan sisi e_i bertumpu (incident) pada v_j dan v_k.



Contoh

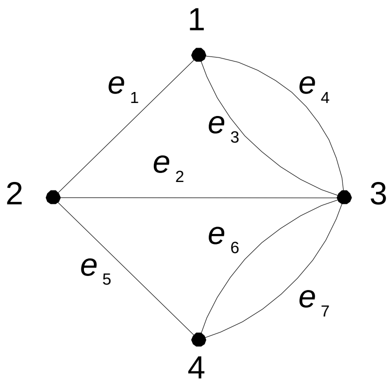
G$_1$



G_1 **adalah graf dengan**

$V = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

$E = \{ (1, 2), (1, 3), (2,3), (2, 4), (3, 4) \}$



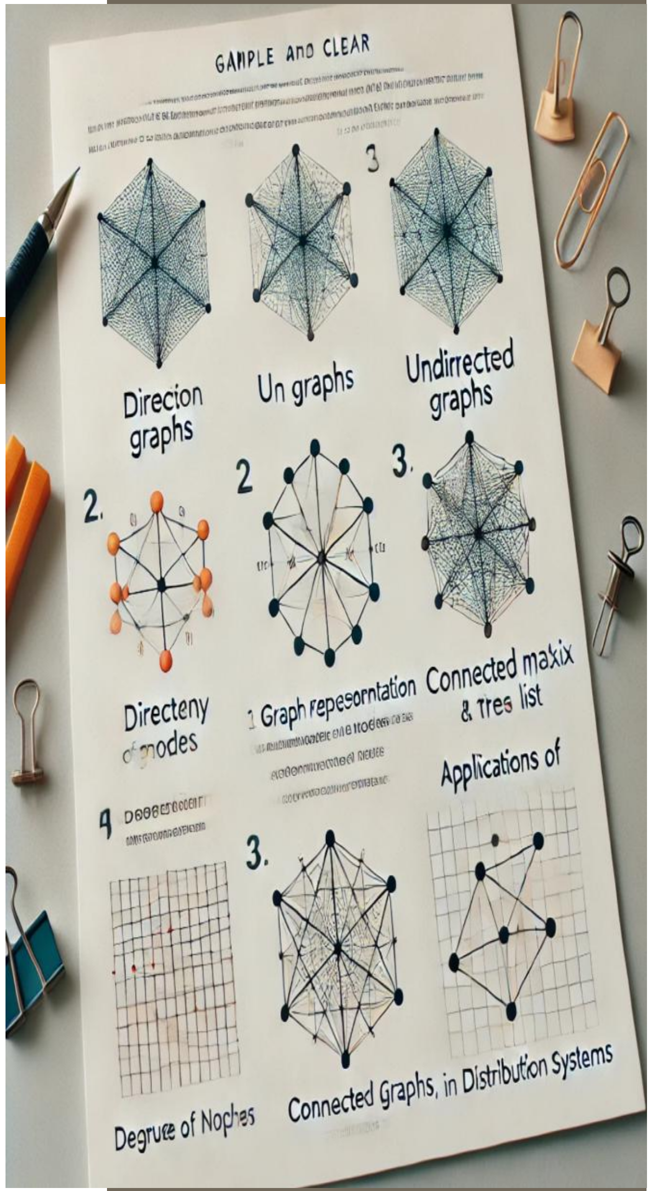
G$_2$

G_2 **adalah graf dengan**

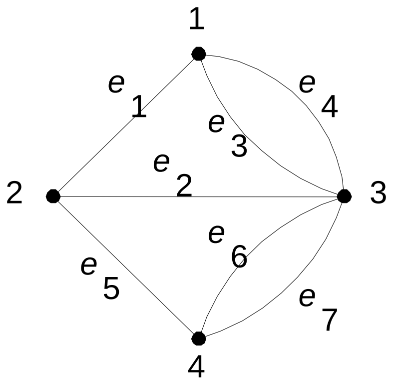
$V = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

$E = \{ (1, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 4) \}$

$= \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 \}$

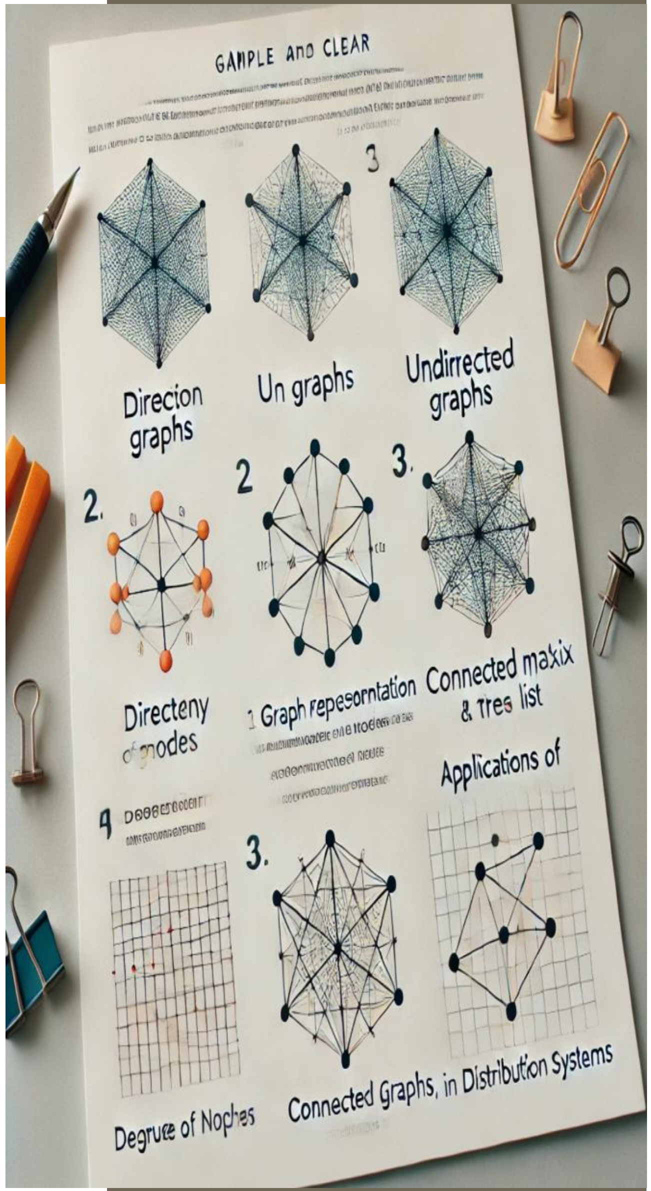


Contoh



G_2

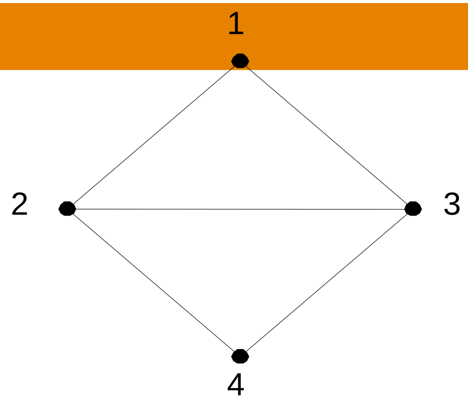
Pada G_2, sisi **e_3 = (1, 3) dan sisi e_4 = (1, 3)** dinamakan **sisi-ganda** (*multiple edges* atau *paralel edges*) karena kedua sisi ini menghubungkan dua buah simpul yang sama, yaitu simpul 1 dan simpul 3.



Jenis-Jenis Graf

1. Graf sederhana (simple graph)

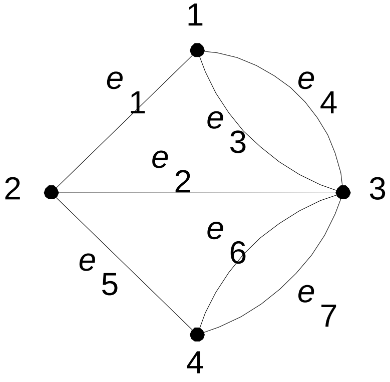
Graf yang tidak mengandung **gelang** atau **sisi-ganda**



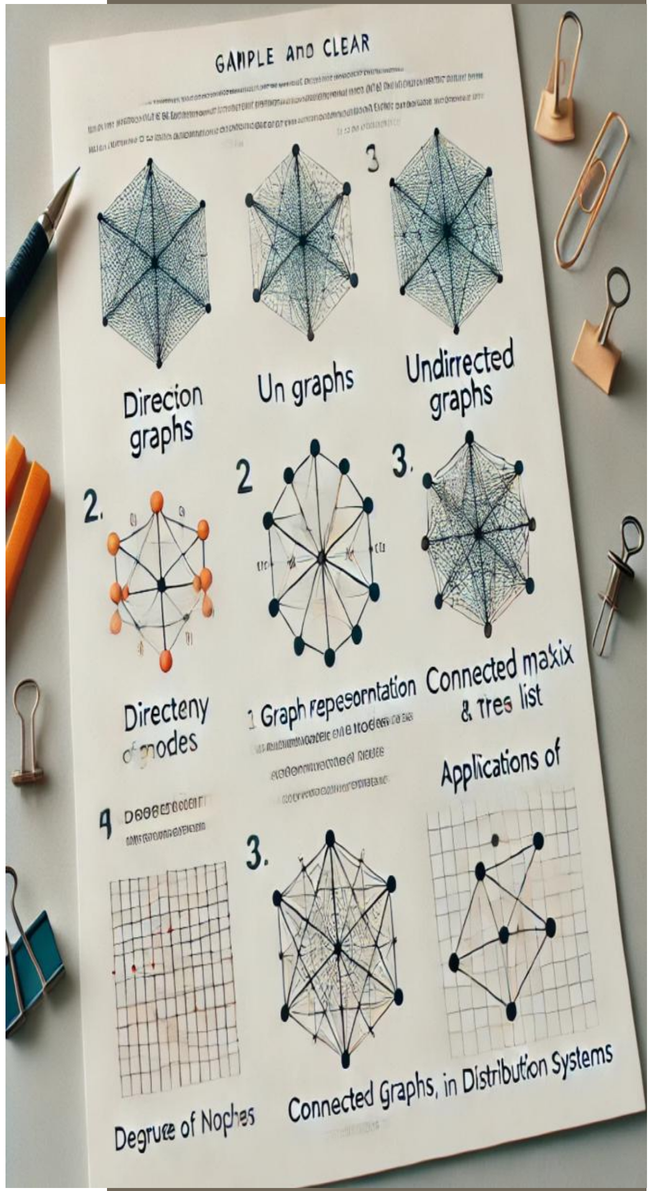
G_1

2. Graf tak-sederhana (*unsimple-graph*)

Graf yang mengandung **sisi ganda** atau **gelang** dinamakan graf tak-sederhana (*unsimple graph*)



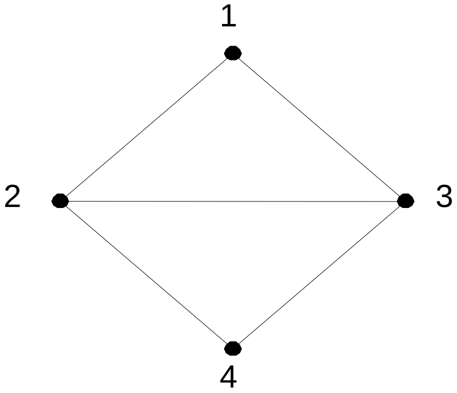
G_2



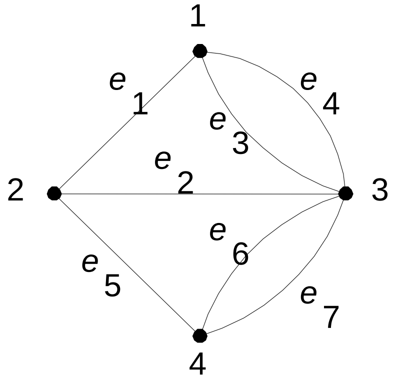
Jenis-Jenis Graf

3. Graf tak-berarah (*undirected graph*)

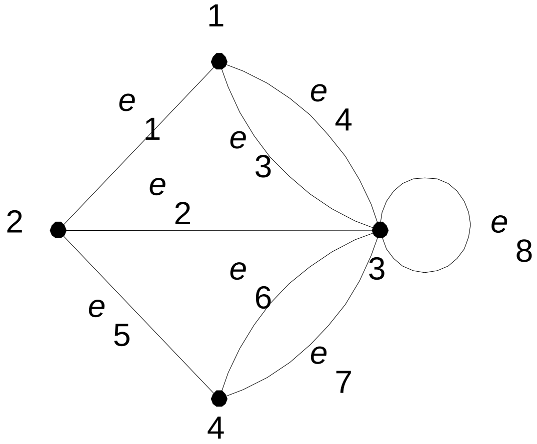
Graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tak-berarah.



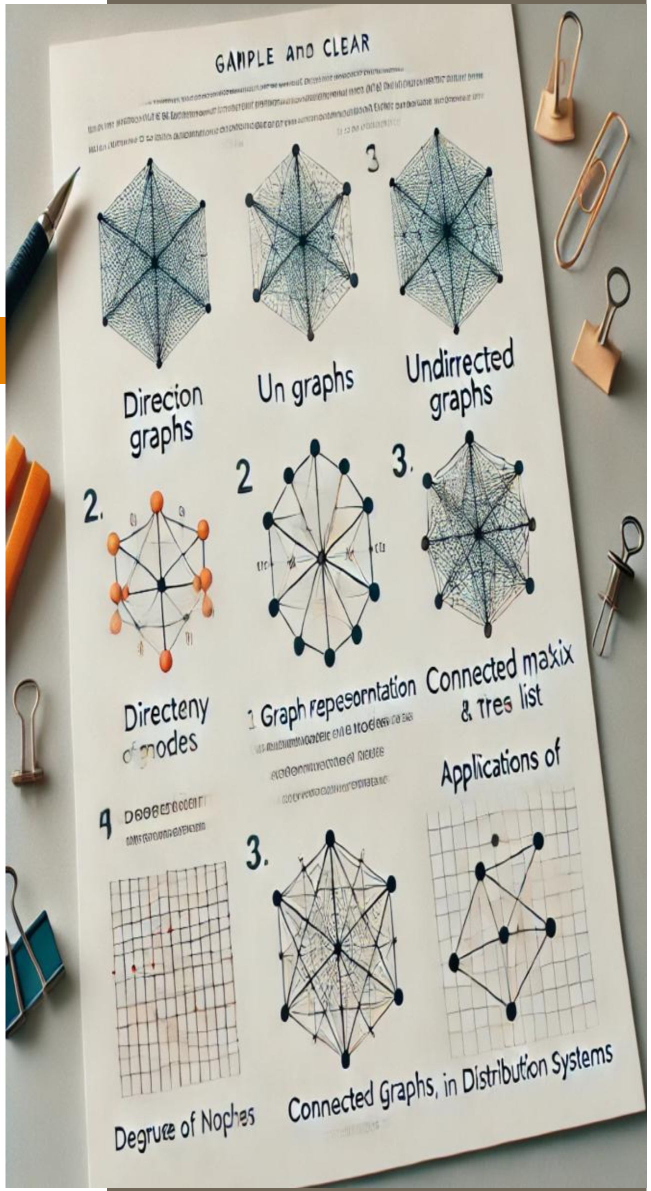
G_1



G_2



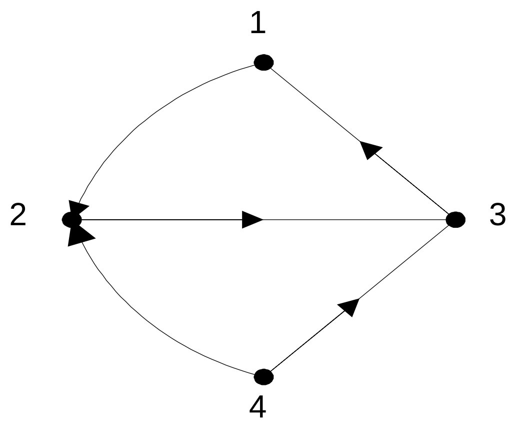
G_3



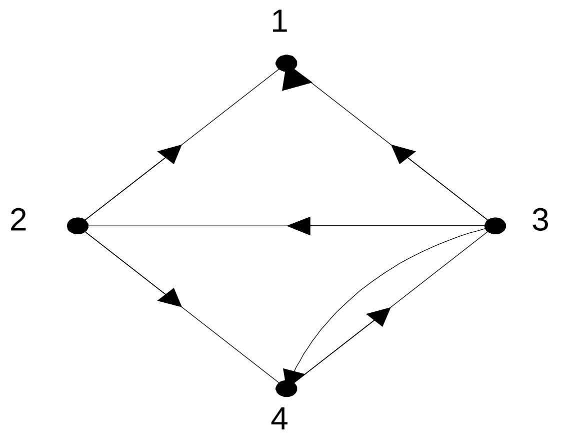
Jenis-Jenis Graf

4. Graf berarah (*directed graph* atau *digraph*)

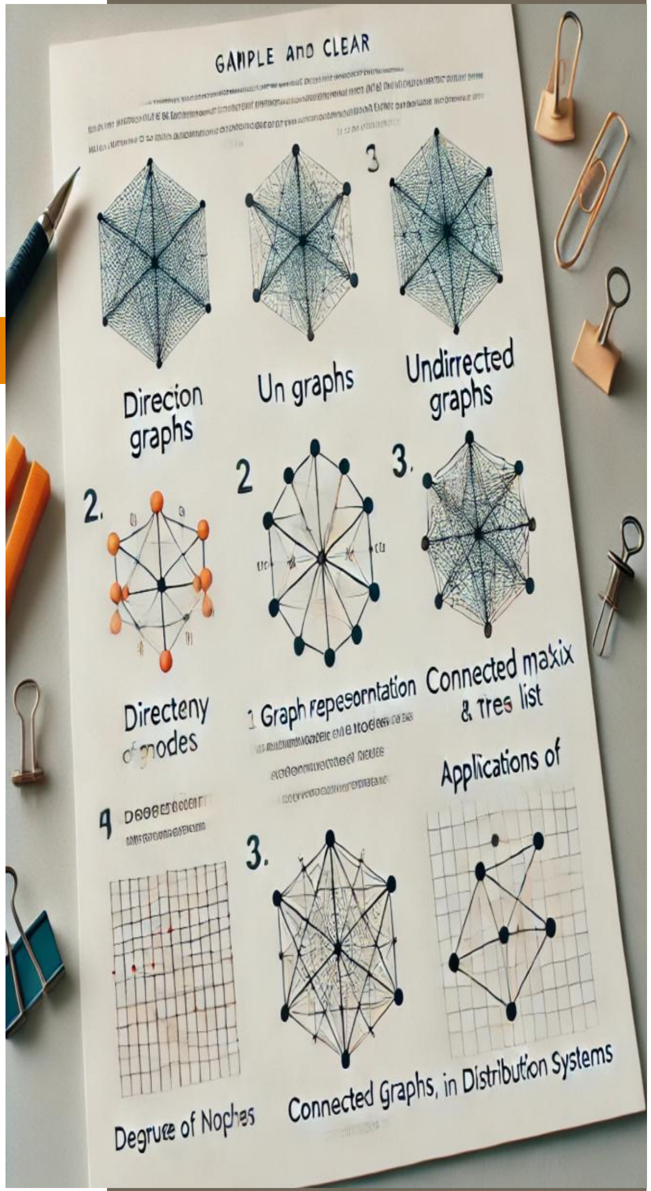
Graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah dan tidak memiliki sisi ganda.



Graf berarah



Graf-ganda berarah



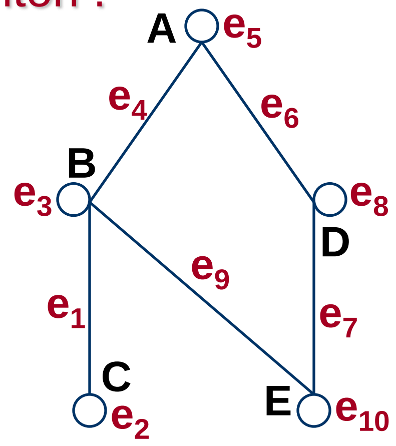
GRAF

Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dibedakan atas 2 jenis :

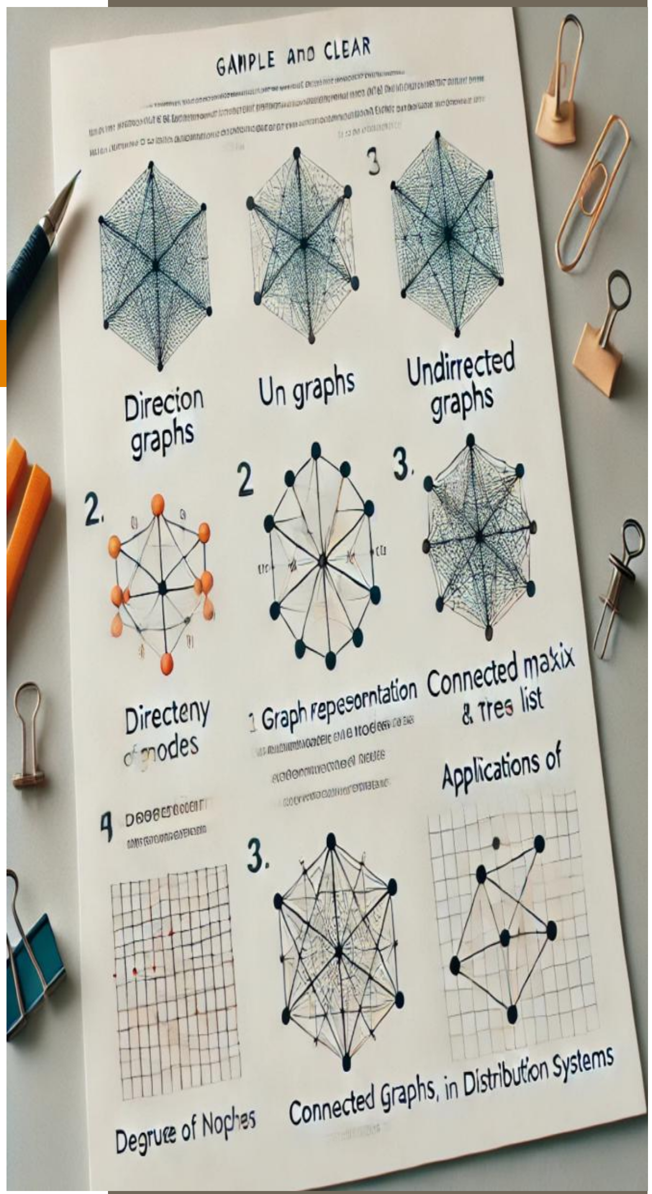
- Graf Tidak Berarah (*undirect graph*)

  Suatu graf yang mana setiap sisinya tidak mempunyai arah, dengan kata lain sisi (v_j,v_k) = sisi (v_k,v_j).

  Contoh :



- G = (V,E)
- V = {A,B,C,D,E}
- E = $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10})$ = {(B,C), (C,C), (B,B), (A,B), (A,A), (A,D), (D,E), (D,D), (B,E), (E,E)}
- e_1 = (B,C) = (C,B)
- e_4 = (A,B) = (B,A)
- e_6 = (A,D) = (D,A)
- e_7 = (D,E) = (E,D)
- e_9 = (B,E) = (B,E)

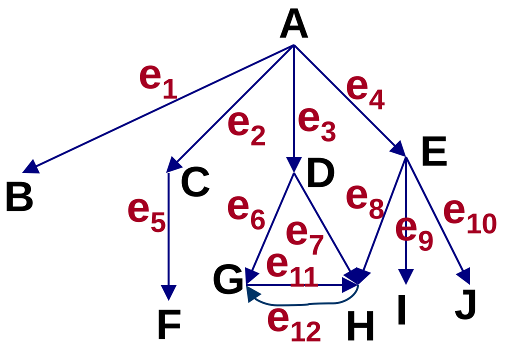


GRAF

- Graf Berarah (*direct graph*)

  Suatu graf yang mana semua sisi pada graf tersebut mempunyai arah tertentu dengan kata lain sisi $(v_j,v_k) \neq$ sisi (v_k,v_j).

  Contoh :



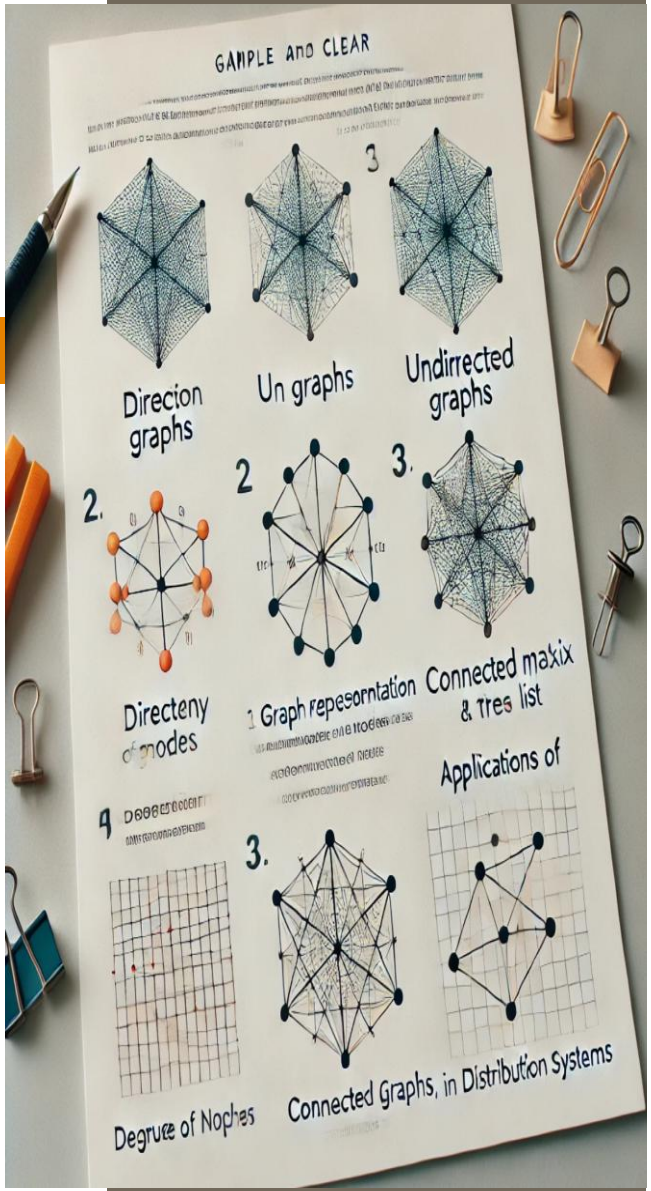
Sisi (A,B) → A dapat memerintah B

- G = (V,E)
- V = {A,B,C,D,E}
- E = $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12})$

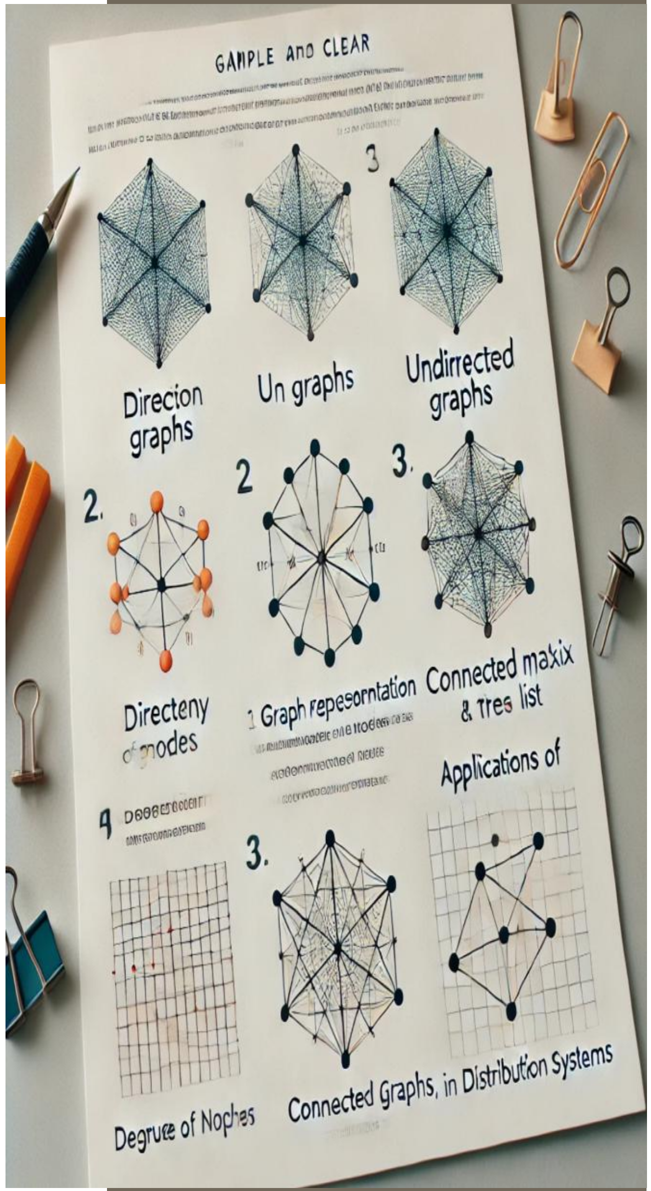
e_1 = (A,B) ≠ (B,A)
e_2 = (A,C) ≠ (C,A)
e_3 = (A,D)
e_4 = (A,E)
e_5 = (C,F)
e_6 = (D,G)
e_7 = (D,H)
e_8 = (E,H)
e_9 = (E,I)

e_{10} = (E,J)
e_{11} = (G,H)
e_{12} = (H,G)

Titik awal dari suatu sisi = initial vertek
Titik ujung dari suatu sisi = terminal vertek



GRAF



<u>Beberapa istilah pada Graf :</u>

- Loop

  Suatu sisi yang incident ke / dari vertek yang sama.

  Contoh : e = (C,C)

- Adjacent

  Dua buah vertek didalam graf G dikatakan adjacent (bersisian) bila keduanya terhubung langsung oleh sebuah sisi.

  Contoh : e = (v_1,v_2) → v_1 = adjacent ke v_2 v_2 = adjacent dari v_1

- In degree (derajat masuk) dari suatu vertek

  Banyaknya sisi yang menuju vertek tersebut.

- Out degree (derajat keluar) dari suatu vertek

  Banyaknya sisi yang incident dari vertek tersebut.

- Derajat Total = derajat

  Jumlah derajat masuk dan derajat keluar dari suatu vertek.

  Jumlah sisi yang incident pada vertek tersebut.

GRAF

TEOREMA 1 :

- *Jumlah derajat semua vertek dalam suatu graf sama dengan dua kali banyaknya sisi* → $\sum d(v_i) = 2n(E)$

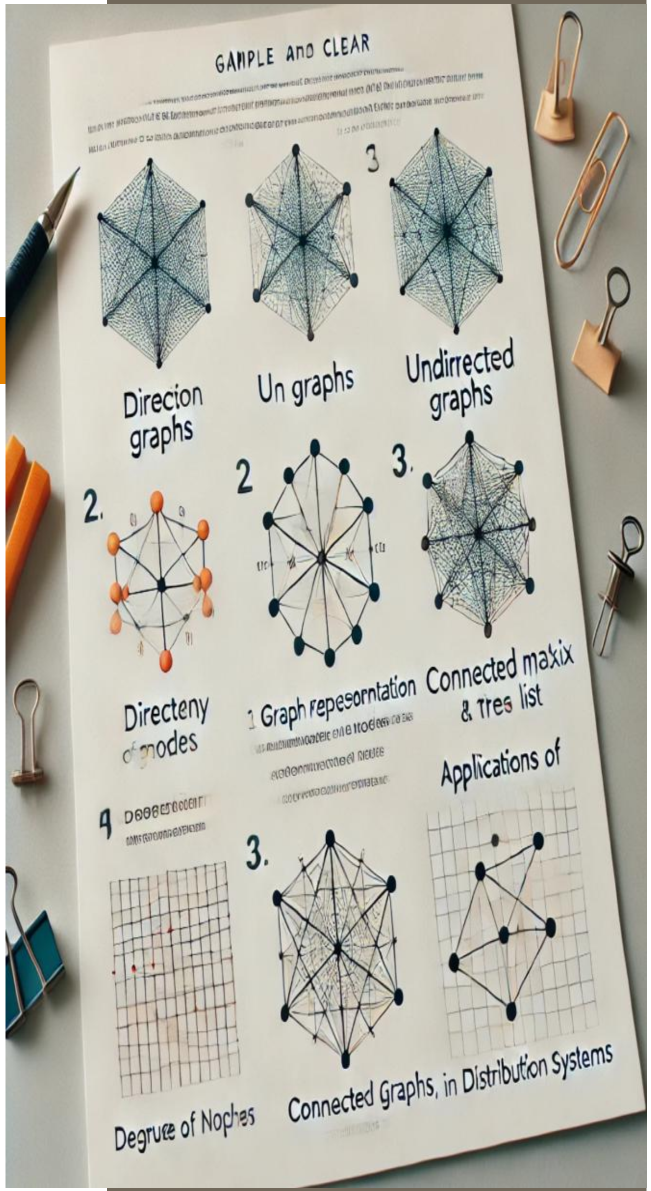
TEOREMA 2 :

- *Banyaknya vertek dengan derajat ganjil dalam suatu graf adalah genap.*

- Sebuah vertek dikatakan terasing / terisolasi, jika tidak ada rusuk / sisi yang incident pada vertek tersebut atau vertek yang mempunyai derajat 0.
- *Matrik Adjacent* dari suatu graf G = (V,E) dengan V = $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ adalah matrik yang berordo *n* dan mempunyai bentuk sebagai berikut :

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{array}$$

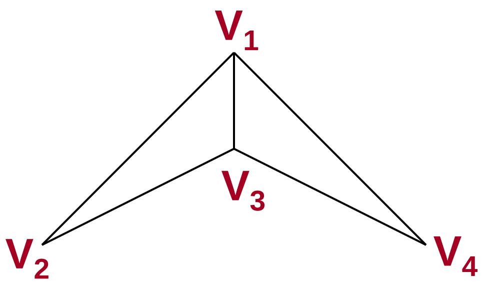
Dimana a_{ij} = 1 bila ada sisi e = (v_i, v_j)
= 0 bila tidak ada sisi yang menghubungkan vertek v_i dengan v_j.



Contoh

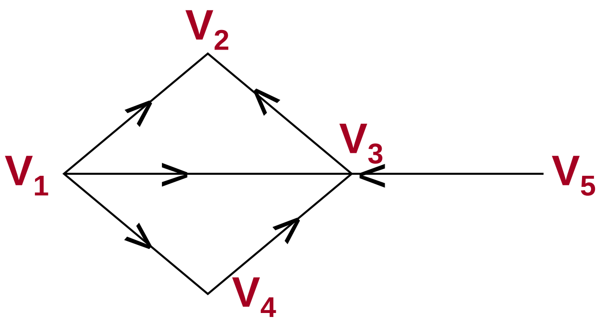
<u>Contoh :</u>

- Tidak Berarah

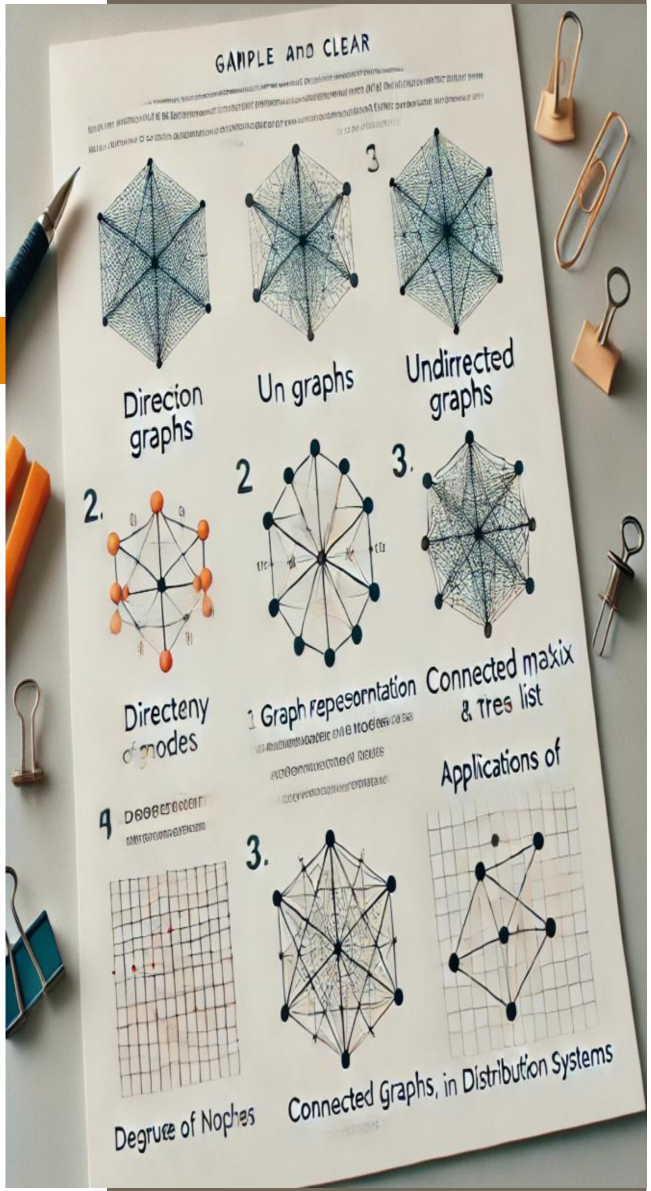


	V_1	V_2	V_3	V_4
V_1	0	1	1	1
V_2	1	0	1	0
V_3	1	1	0	1
V_4	1	0	1	0

- Berarah

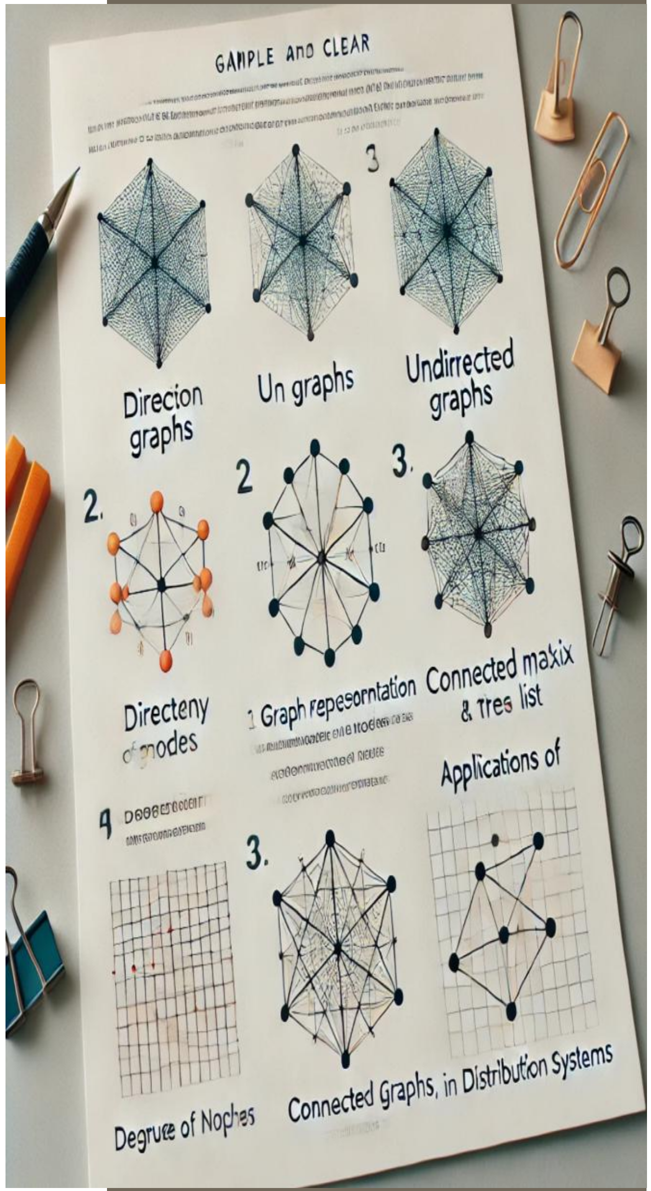


	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
V_1	0	1	1	1	0
V_2	0	0	0	0	0
V_3	0	1	0	0	0
V_4	0	0	1	0	0
V_5	0	0	1	0	0



GRAF

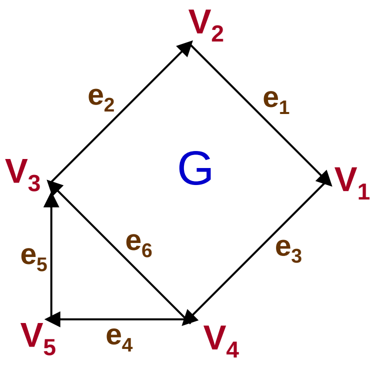
- Jadi matrik adjacent pada graf tidak berarah adalah suatu matrik simetri.
- Jadi untuk graf berarah :
  - ✓ d_{in} (v_i) = jumlah unsur pada kolom ke-i
  - ✓ d_{out} (v_i) = jumlah unsur pada baris ke-i

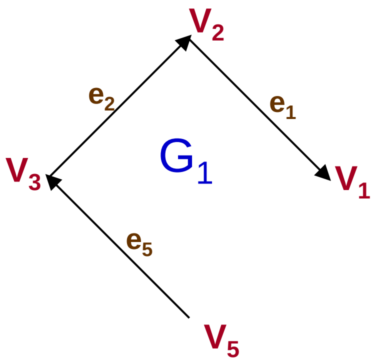


GRAF

<u>Subgraf</u>

- Graf $G_1 = (V_1, E_1)$ dinamakan *graf bagian (Subgraf)* dari graf $G = (V,E)$ bila himpunan vertek dan edge dari G_1 adalah himpunan bagian dari himpunan vertek dan edge dari G.
- $V_1 \subseteq E$, $E_1 \subseteq E$ dan G_1 sendiri merupakan suatu graf sedemikian hingga sisi-sisi dalam E_1 berinsidensi dengan vertek dalam V_1.
- Contoh :

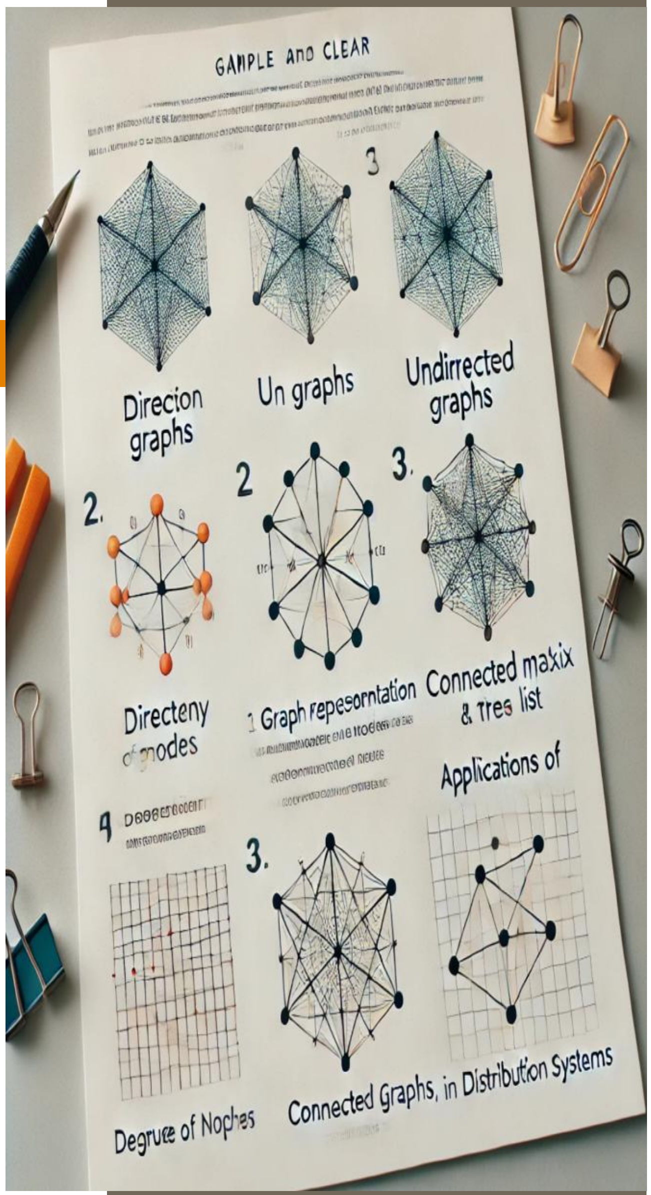




- $G = (V,E)$
- $V = (V_1, V_2, V_3, V_4, V_5)$
- $e = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$

- $G_1 = (V_1,E_1)$
- $V_1 = (V_1, V_2, V_3, V_5)$
- $e_1 = (e_1, e_2, e_5)$

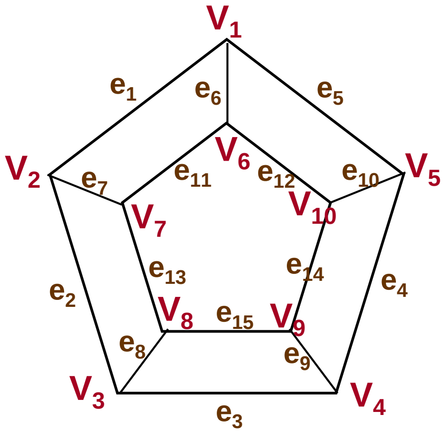
Jadi G_1 adalah subgraf dari graf G

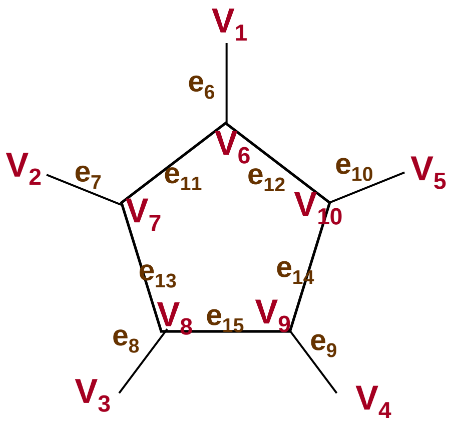


GRAF

<u>Spanning Subgraf</u>

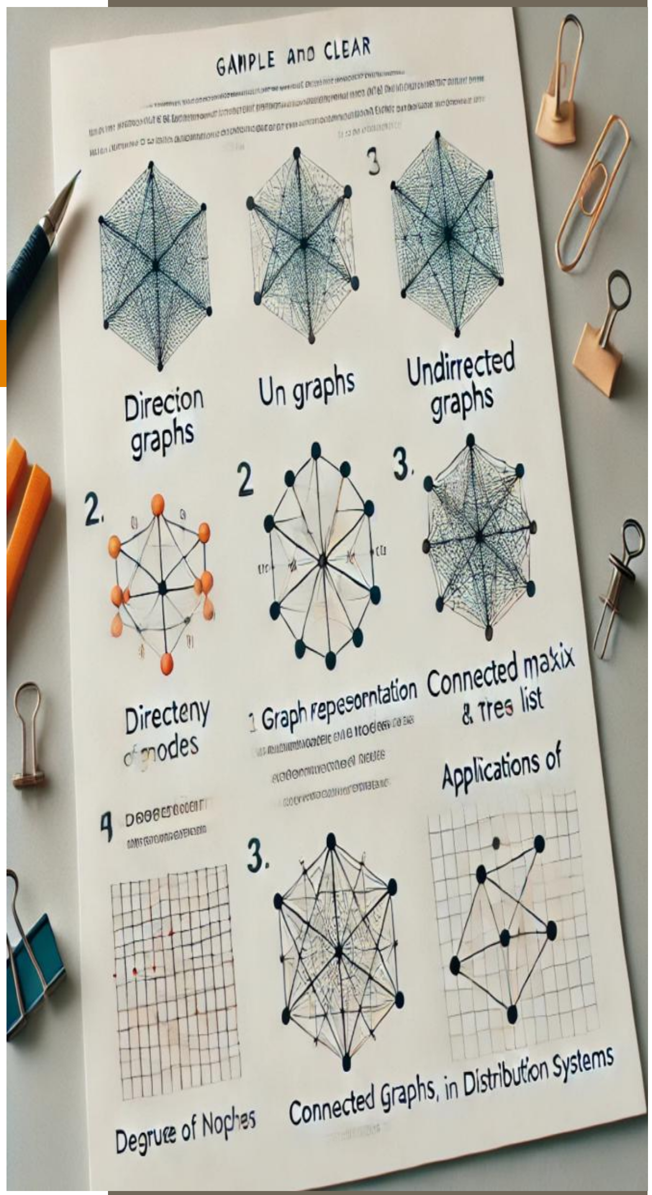
- $G_1 = (V_1, E_1)$ disebut *spanning subgraf* dari graf $G = (V, E)$ jika dipenuhi $V_1 = V$.
- Contoh :





Jadi $V_1 = V \rightarrow G_1$ = Spanning subgraf

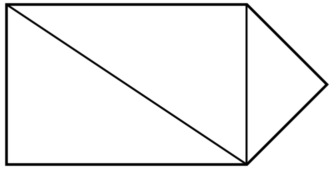
- $G = (V,E)$
- $V = (V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7, V_8, V_9, V_{10})$
- $e = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15})$
- $G_1 = (V_1,E_1)$
- $V_1 = (V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7, V_8, V_9, V_{10})$
- $e_1 = (e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15})$

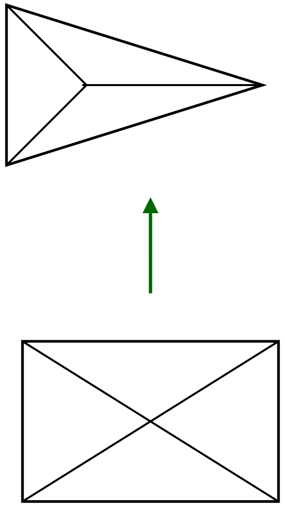


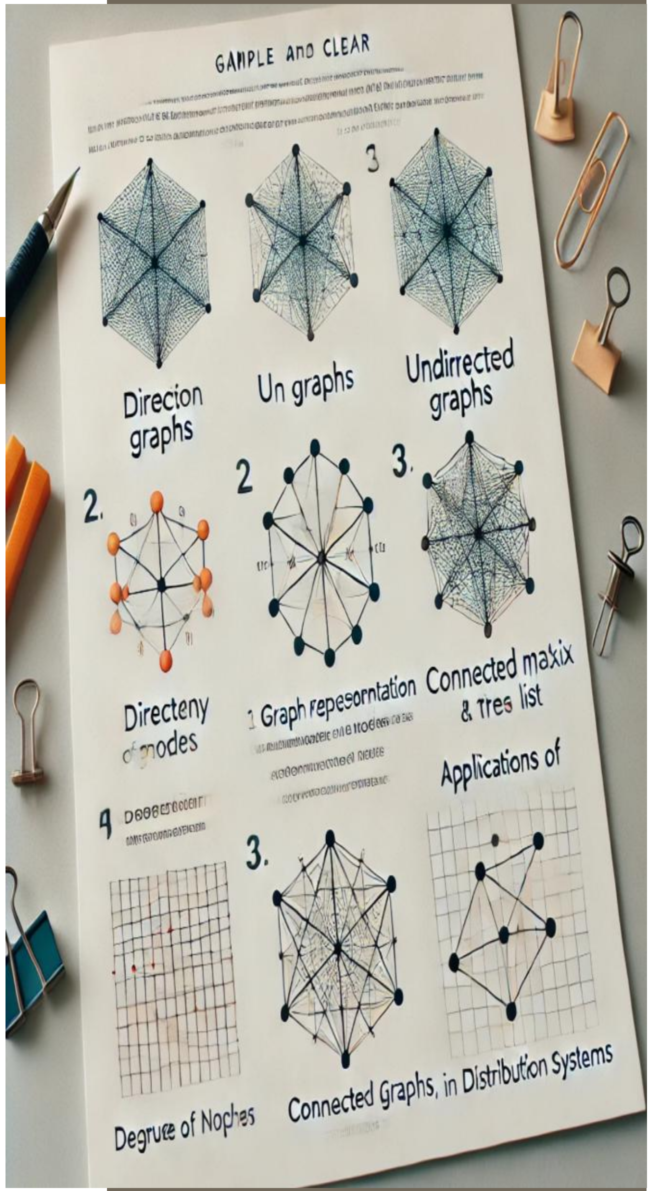
GRAF

<u>Graf Planar</u>

- Adalah graf yang dapat digambarkan pada bidang datar, tanpa ada sisi yang saling berpotongan.
- Contoh :



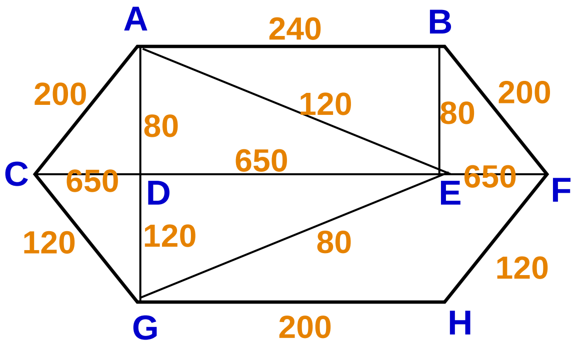




GRAF

<u>Graf Berbobot</u>

- Suatu graf dimana sisi-sisinya diberi bobot. Dinyatakan oleh G = (V,E) dimana :
  - ✓ $V = (V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n)$
  - ✓ $E_1 = (e_1 , e_2, e_3, \ldots, e_q)$ dengan
  - ✓ $e_1 = (v_{i1} , v_{i2}, v_{i3}, w_i)$, untuk setiap i = 1, 2, …, q



- G = (V,E)
- V = (A, B, C, D, E , F, G, H)
- E = ((A,B,240), (A,C,200), (A,D,80), (A,E,120), (B,E,80) , (B,F,200) , (C,D,650), (C,G,120), (D,E,650), (D,G,120) , (E,F,650) , (E,G,80), (F,H,120), (G,H,200))