

1. 微分方程式

次の微分方程式の初期値問題を考える。

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 2 + \epsilon u^2, u(0) = 1, \frac{du}{d\theta}(0) = 0$$

問1.

$\epsilon = 0, 0.001, 0.01, 0.1$ に対して、 $\theta = 0$ から 4π までこの微分方程式を Symplectic 法を用いて数値的に解いた。以下がプログラム (problem4_1.py) の実行結果である。(図1)

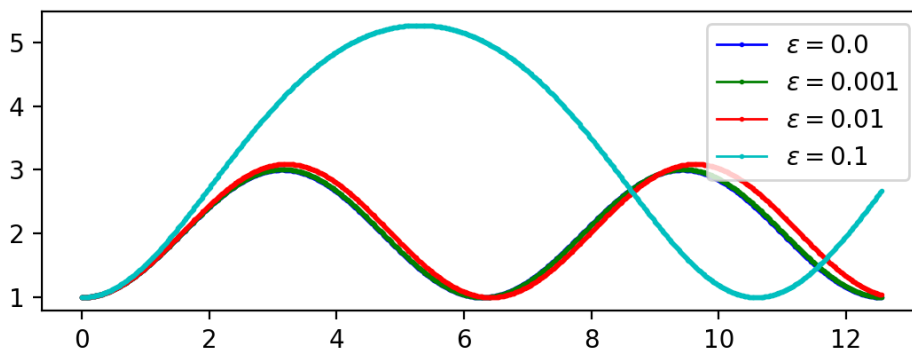
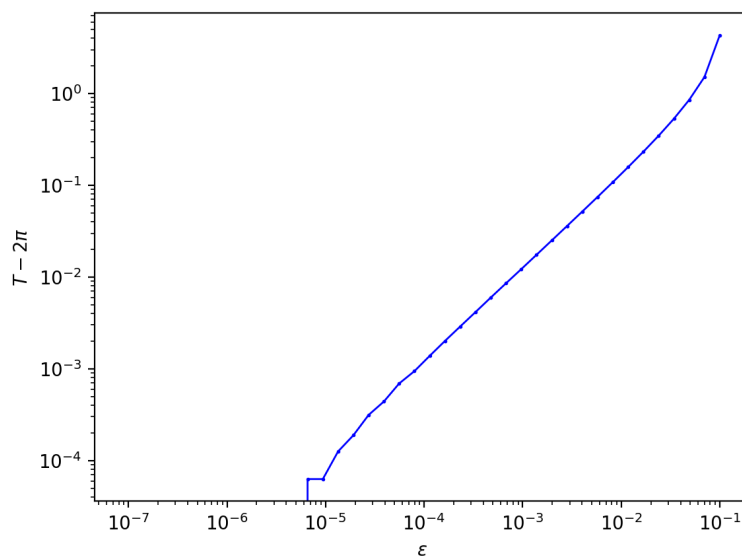


図1 Symplectic 法による解

問2.

$\epsilon = 0.1 \times 0.7^i (i = 0, \dots, 39)$ に対して、解の周期 T を計算し、縦軸に $T - 2\pi$ 、横軸に ϵ をとってプロットした。 T を求める際、計算する θ の範囲を $\theta = 0$ から 10π までとして、数周期の平均を取った。以下がプログラム (problem4_2.py) の実行結果である。(図2)



ϵ が小さすぎる箇所では、誤差が出ているが、その他の場所では、直線に近いグラフになっている。つまり、 $T - 2\pi$ は、定数 A, B を用いて、

$$T - 2\pi = A\epsilon^B$$

のように書けると考えられる。

図2 周期のプロット