演習課題 10 レポート

0500319521
尾崎　凌明

1. 計算

拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

を、初期値

$$u(x, 0) = \exp\left[-\frac{(x-1)^2}{4\sigma t_0}\right] \ (t_0 = 1/50)$$

についてディリクレ境界条件、ノイマン境界条件それぞれについて解いた。
ただしx、tそれぞれの刻み幅は$\Delta x = 1/J$、$\Delta t = (\Delta x)^2 L/(2\sigma)$、$L = 1/3$、$J = 100$とした。
また、プログラムには前回作成した”PDE”クラスを、ディリクレ境界条件、ノイマン境界条件どちらでも使えるように改良したものを用いた。今回のノイマン条件では、端点の微分係数は 0 となっているが、今後 0 でない場合の計算をすることも考えて、改良においては微分係数を自由に与えられるようにしている。

2. 計算結果

ディリクレ境界条件、ノイマン境界条件それぞれの計算結果は以下のようになった。（図 1 、図 2 ）

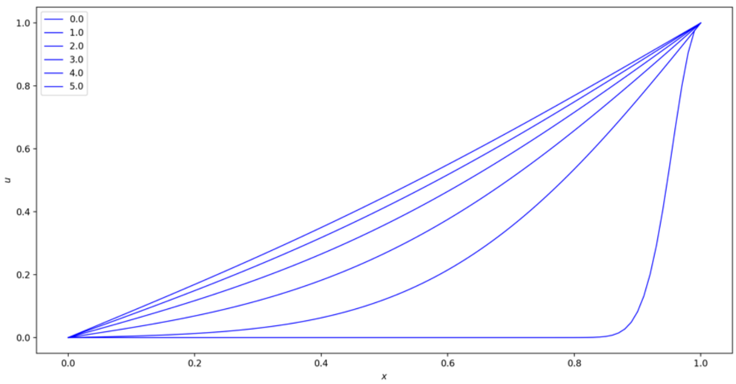

図 1　ディリクレ条件

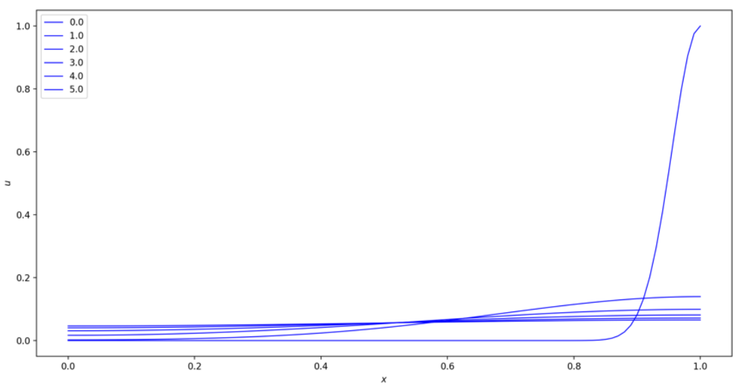

図 2　ノイマン条件

3.　考察

まず拡散方程式が収束すると仮定すると$t \to \infty$で、$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$となるので、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

となり、境界条件に関わらずuはxに関して直線に近づくとわかる。実際、図 1 、図 2 ともに、曲線は直線に近づいていることが確認できる。

図 1 において、ディリクレ条件は固定端条件なので端点の値が常に一定になっており、uは端点の値をつなぐ直線に近づいている。また、固定端から常に熱が供給されているため全体の熱量（グラフの面積）が増えていっていることがわかる。

図 2 において、ノイマン境界条件は開放端条件なので、端点の微分係数が常に0になっておりまた、開放端から熱量が外の放出されていくため、全体の熱量は0に近づいていっていることがわかる。

次に、ノイマン境界条件での端点の値の決め方について考える。 2 次で近似する場合を考えると、3 点$(x_0, u_0), (x_1, u_1), (x_2, u_2)$を 2 次関数でつないだときに、$x_0$での微分係数が指定した微分係数になるように$u_0$を決定すればいいことになる。

まず、3 点を通る 2 次関数は次のように書ける。

$$u(x) = u_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + u_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + u_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$= u_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{2\Delta x^2} + u_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{-\Delta x^2} + u_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2\Delta x^2}$$

このとき、

$$u'(x) = u_0 \frac{2x - x_1 - x_2}{2\Delta x^2} + u_1 \frac{2x - x_0 - x_2}{-\Delta x^2} + u_2 \frac{2x - x_0 - x_1}{2\Delta x^2}$$

より、

$$u'(x_0) = -u_0 \frac{3}{2\Delta x} + u_1 \frac{2}{\Delta x} - u_2 \frac{1}{2\Delta x}$$

$$= -\frac{1}{2\Delta x}(3u_0 - 4u_1 + u_2)$$

となるので、

$$u_0 = \frac{4u_1 - u_2}{3} - \frac{2}{3}\Delta x \, u'(x_0)$$

と決定できる。特に、$u'(x_0) = 0$のときは、

$$u_0 = \frac{4u_1 - u_2}{3}$$

となる。$u_{n_{Max}}$に関しても同様である。