演習課題 13　レポート

～状態フィードバックによる倒立二重振り子制御のシミュレーション～

0500319521
尾崎凌明

1.　二重振り子とその制御

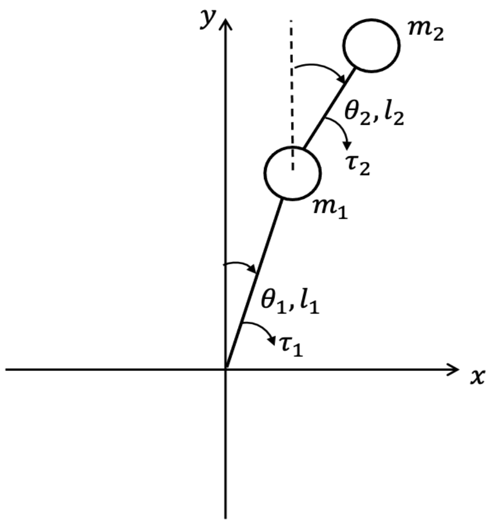

図 1　二重振り子

図 1 のような、原点に中心があり（関節 1 とする）、長さl_1の棒 1 の先に質量m_1のおもり 1（関節 2 とする）、その先に長さl_2の棒 2、その先に質量m_2のおもり 2 が付いている二重振り子を考える。ここで、棒 1、2 はどちらも重さは無視できるとする。

また、各関節にはトルクτ_1、τ_2をかける。

まずこの系のラグランジアンを求めて、運動方程式を導出する。

棒 1、2 のy軸とのなす角をそれぞれθ_1、θ_2とすると、おもり 1、2 の位置はそれぞれ

$$\boldsymbol{x_1} = \begin{pmatrix} l_1 \sin\theta_1 \\ l_1 \cos\ \theta_1 \end{pmatrix}、\boldsymbol{x_2} = \begin{pmatrix} l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2 \\ l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_1 \end{pmatrix}$$

となる。よってそれぞれの速度は、

$$\dot{\boldsymbol{x_1}} = \begin{pmatrix} l_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1 \\ -l_1 \dot{\theta}_1 \sin\theta_1 \end{pmatrix}、\dot{\boldsymbol{x_2}} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 l_1 \cos\theta_1 + \dot{\theta}_2\, l_2 \cos\theta_2 \\ -\dot{\theta}_1\, l_1 \sin\theta_1 - \dot{\theta}_2 l_2 \sin\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

となる。以上から、運動エネルギーおよび、位置エネルギーは、

$$T = \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\theta_1}^2 + \frac{m_2}{2}\left(\dot{\theta_1}^2 l_1^2 + \dot{\theta_2}^2 l_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 l_1 l_2 \cos\Delta\theta\right)$$

$$U = l_1 g(m_1 + m_2)\cos\theta_1 + m_2 g l_2 \cos\ \theta_2$$

となる。ここで、$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$、$g$は重力加速度とした。したがってラグランジアンは、

$$L = T - U$$

$$= \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\theta_1}^2 + \frac{m_2}{2}\left(\dot{\theta_1}^2 l_1^2 + \dot{\theta_2}^2 l_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 l_1 l_2 \cos\Delta\theta\right) - l_1 g(m_1 + m_2)\cos\theta_1 + m_2 g l_2 \cos\theta_2$$

となる。オイラーラグランジュ方程式に代入するために、各種微分を求めると、

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos\Delta\theta - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2\left(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1\right)\sin\Delta\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta_1} = m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin\Delta\theta + (m_1 + m_2) l_1 g \sin\theta_1$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos\Delta\theta - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1\right)\sin\Delta\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \Delta\theta + m_2 l_1 g \sin \theta_2$$

となる。よってθ_1、θ_2それぞれに関するオイラーラグランジュ方程式は次のようになる。

$$(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos \Delta\theta - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \Delta\theta - (m_1 + m_2) l_1 g \sin \theta_1 = \tau_1$$

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos \Delta\theta + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin \Delta\theta - m_2 l_1 g \sin \theta_2 = \tau_2$$

ここで、τ_1、τ_2が0の場合、上式の左辺は関節 1、2 にかかるトルクになっているので、τ_1、τ_2が0でない場合、上式のようになる。この 2 式を、それぞれ両辺を$m_2 l_1$、$m_2 l_2$で割って、$\mu = (m_1 + m_2)/m_2$とおき整理すると次の運動方程式が得られる。

$$\begin{pmatrix} \mu l_1 & l_2 \cos \Delta\theta \\ l_1 \cos \Delta\theta & l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \Delta\theta + \mu g \sin \theta_1 \\ -l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \Delta\theta + g \sin \theta_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{m_2} \begin{pmatrix} \tau_1 / l_1 \\ \tau_2 / l_2 \end{pmatrix}$$

特に、τ_1、τ_2が0の場合は

$$\begin{pmatrix} \mu l_1 & l_2 \cos \Delta\theta \\ l_1 \cos \Delta\theta & l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \Delta\theta + \mu g \sin \theta_1 \\ -l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \Delta\theta + g \sin \theta_2 \end{pmatrix}$$

となる。

次に、τ_1、τ_2にトルクを入力して、この二重振り子を釣り合い点$(\theta_1, \theta_2) = (0,0)$の周りで制御することを考える。$(\theta_1, \theta_2) = (0,0)$の周りで運動方程式を線形化すると、

$$\begin{pmatrix} \mu l_1 & l_2 \\ l_1 & l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{m_2} \begin{pmatrix} 1/l_1 & 0 \\ 0 & 1/l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix}$$

となり、$\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix}$の係数行列を$V$と置くと、（$V = \begin{pmatrix} \mu l_1 & l_2 \\ l_1 & l_2 \end{pmatrix}$）

$$\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = gV^{-1} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{m_2} V^{-1} \begin{pmatrix} 1/l_1 & 0 \\ 0 & 1/l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix}$$

となる。

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}$$

とおくと、線形化システムは、（2 入力 4 出力のシステム）

$$\dot{\theta} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ gV^{-1} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \theta + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{m_2} V^{-1} \begin{pmatrix} 1/l_1 & 0 \\ 0 & 1/l_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix}$$

$\tau_2 = 0$のときは、（1 入力 4 出力のシステム）

$$\dot{\theta} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ gV^{-1} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \theta + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} V^{-1} \begin{pmatrix} 1/l_1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \tau_1$$

τを$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix}$または$\tau_1$とすると、線形化システムは状態方程式

$$\dot{\theta} = A\theta + B\tau$$

とかける。ここで、

$$A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ gV^{-1}\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{m_2}V^{-1}\begin{pmatrix} 1/l_1 & 0 \\ 0 & 1/l_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \text{または} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2}V^{-1}\begin{pmatrix} 1/l_1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

である。この(τ_1, τ_2)またはτ_1のみをフィードバック制御することを考える。(図 2)

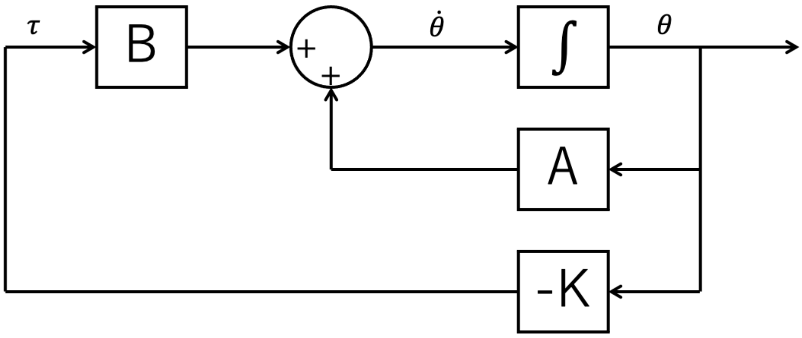

図 2　線形システムの閉ループ系

図 2 でKはフィードバックゲインであり、

$$\tau = -K\theta$$

によってτを決定する係数行列である。

これを状態方程式に代入すると、

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= A\theta + B\tau \\ &= A\theta + B(-K\theta) \\ &= (A - BK)\theta \end{aligned}$$

となって、新たなシステム$\dot{\theta} = (A - BK)\theta$が安定、つまり$A - BK$のすべての固有値の実部が負となるように、$K$を決定すればよい。しかし、このような$K$は一意ではない。

ここで、Kを決定するために次の評価関数Jを最小にする最適レギュレータを考える。

$$J(\tau, \theta_0) = \int_0^{\infty} (\theta^T Q\theta + \tau^T R\tau)dt$$

Q、Rはそれぞれ半正定値、正定値行列である。

Jの第 1 項はシステムの応答性、第 2 項は操作量に関する量であり、それぞれ小さい方が応答性がよく、操作量が少なくてすむ、という量になっており、この 2 つはトレードオフである。

最適レギュレータ問題の解は、リカッチ方程式

$$A^T X + XA - XBR^{-1}B^T X + Q = 0$$

の解を用いて、

$$K = R^{-1}B^T X$$

と与えられる。

Q、Rの決め方については、明確な決め方はないが、Rについてはアクチュエータの最大出力などを考慮して決定することになる。今回はどちらも単位行列とした。

2.　計算

(1)

まずτに何も入力しない場合、つまり自由二重振り子を考える。上で示した$\tau = 0$の場合の運動方程式を用いて、$l_1 = 0.5$、$l_2 = 0.2$、$m_1 = 0.01$、$m_2 = 0.05$、$g = 9.8$として、初期値$(\theta_{10}, \theta_{20}, \dot{\theta}_{10}, \dot{\theta}_{20}) = (-0.4, 0.4, 0, 0)$に対して、時間刻み幅$\Delta t = 0.001$で$t = 0$から$t = 100$の範囲で解いた。また、数値解法は 4 次元のルンゲクッタ法を用いた。

(2)

次に、τとしてτ_1のみに状態フィードバック制御を入力した場合を考える。(1 入力 4 出力のシステム)
このとき、解くべき運動方程式は

$$\begin{pmatrix} \mu l_1 & l_2\cos\Delta\theta \\ l_1\cos\Delta\theta & l_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_2\dot{\theta}_2^2\sin\Delta\theta + \mu g\sin\theta_1 \\ -l_1\dot{\theta}_1^2\sin\Delta\theta + g\sin\theta_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{m_2}\begin{pmatrix} \tau_1/l_1 \\ \tau_2/l_2 \end{pmatrix}$$

に$\tau_1 = -K\theta$、$\tau_2 = 0$を代入した

$$\begin{pmatrix} \mu l_1 & l_2\cos\Delta\theta \\ l_1\cos\Delta\theta & l_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_2\dot{\theta}_2^2\sin\Delta\theta + \mu g\sin\theta_1 - K\theta/l_1 m_2 \\ -l_1\dot{\theta}_1^2\sin\Delta\theta + g\sin\theta_2 \end{pmatrix}$$

となる。これを 2 つの初期値$(\theta_{10}, \theta_{20}, \dot{\theta}_{10}, \dot{\theta}_{20}) = (-0.4, 0.4, 0, 0), (0.4, 0.4, 0, 0)$に対して、$t = 0$から$t = 10$の範囲で解いた。また今回リカッチ方程式は、python の外部ライブラリ scipy の solve_continuous_are 関数を用いて解いた。

(3)

次に、制御系に外乱を与えた場合を考える。関節 1、2 に外乱のトルクが掛かるような系を考えて、正規分布に従う変数$s_1 \sim N(0, \sigma_1)$、$s_2 \sim N(0, \sigma_2)$が外乱のトルクとして関節 1、2 にかける。つまり解くべき運動方程式は、$\tau_1 = -K\theta + s_1$、$\tau_2 = s_2$とした

$$\begin{pmatrix} \mu l_1 & l_2\cos\Delta\theta \\ l_1\cos\Delta\theta & l_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_2\dot{\theta}_2^2\sin\Delta\theta + \mu g\sin\theta_1 + (-K\theta + s_1)/l_1 m_2 \\ -l_1\dot{\theta}_1^2\sin\Delta\theta + g\sin\theta_2 + s_2/l_2 m_2 \end{pmatrix}$$

となる。これを$\sigma_1 = 1$、$\sigma_2 = 0.2$として、(1)と同じ初期条件で$t = 0$から$t = 30$の範囲で解いた。

3.　計算結果

(1)、(2)、(3)それぞれの計算結果をグラフにすると次のようになった。(図 3、4、5、6)

これらの図だけでは実際に振り子がどういう運動をしているかがわかりにくいので、実際の振り子の運動については別途提出した動画もあわせて見てほしい。

また、プログラムを実行する際は、python で scipy、PyQt5、pyqtgraph の 3 つのライブラリをインストールして実行してほしい。

“init_prob.py”で各パラメータの設定を行い、(1)は”double_pendulm.py”、(2)は”double_pendulum_controled.py”、(3)は”double_pendulum_noised.py”を実行すればよい。

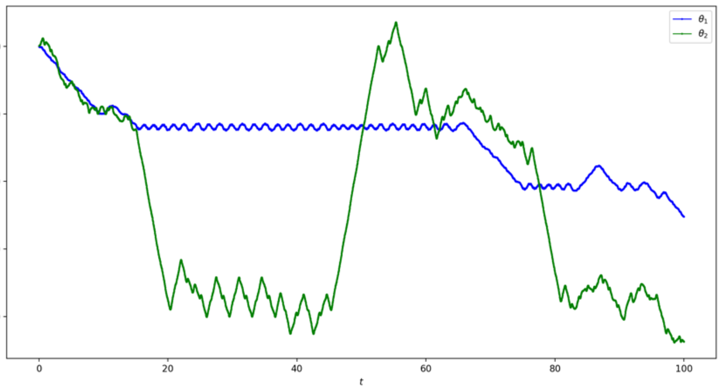

図 3　(1)自由二重振り子の角

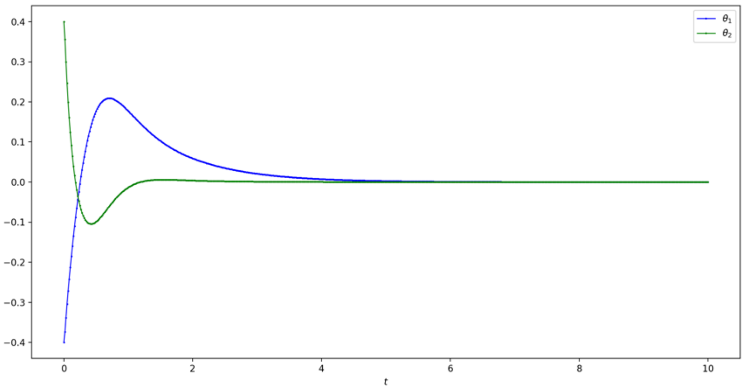

図 4　(2)制御倒立二重振り子の角度　$\boldsymbol{\theta_0 = (-0.4, 0.4, 0, 0)}$

これらの計算結果を二重振り子の動画として見るには、”render.py”のdataFileName に出力データのパスを指定して、”render.py”を実行すればよい。

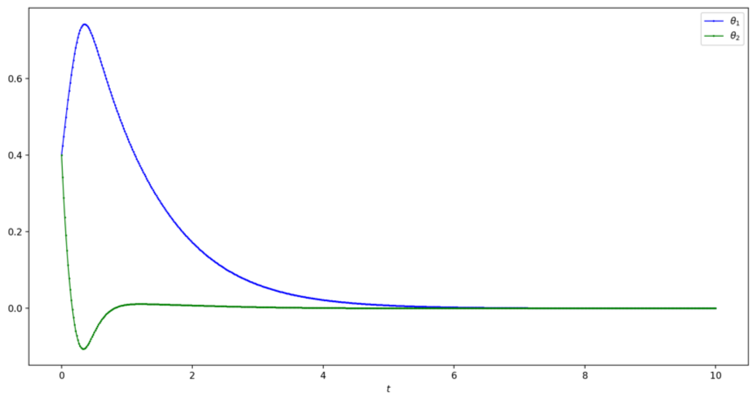

図 5 (2)制御倒立二重振り子の角度 $\boldsymbol{\theta_0 = (0.4, 0.4, 0, 0)}$

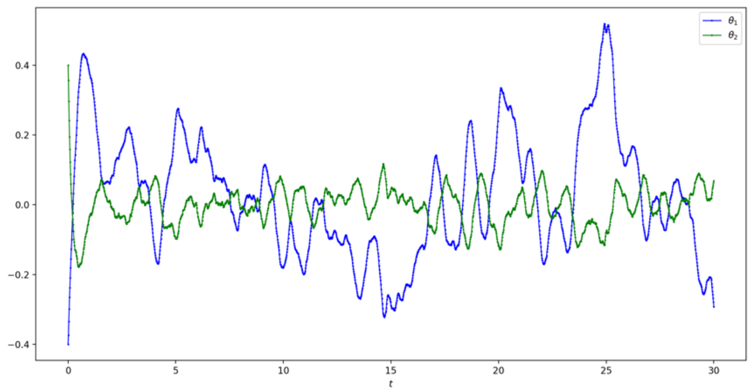

図 6 (3)外乱を加えた場合の制御倒立二重振り子の角度

4. 考察

(1)の自由振り子ではθ_1、θ_2はどちらも全く予測不能なカオス的な挙動をしている。例えば$t = 15\sim65$ぐらいではθ_1は周期運動をしているように見えるが、それ以降では急に回転しだして、$t = 75$ぐらいでまた周期運動をし始めたりしている。

θ_2も同様に、周期運動っぽくなったり急に回転しだしたりを繰り返している。

しかし、グラフをよく見ると$t = 0\sim15$や$t = 65\sim75$のようなθ_1、θ_2ともに平均的に同じように増減しているところでは、その傾きは平均的に同じ傾きになっている（大雑把に見て）。$t = 15\sim65$や$t = 75\sim85$のようなθ_1が周期的な箇所では、θ_2の傾きは符号を無視すればずっと一定になっているように見える。このように、一見カオスに見える挙動の中にも（統計的に、またはマクロ的に見れば）法則性の見いだせる部分がありそうである。

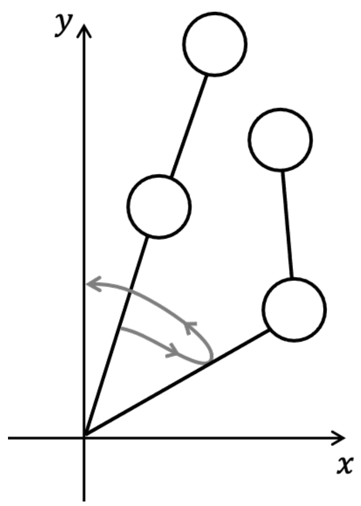

図 7 倒立二重振り子の制御過程

(2)の制御倒立二重振り子では、どちらの初期値においてもθ_1、θ_2ともに0に収束しており、きちんと制御できていることがわかる。ここで、その収束の仕方は直接0に向かうような収束の仕方ではなく、一旦0を通り過ぎて戻ってくるような収束の仕方をしている。図 5 では、θ_1は最初から0とは逆の方向に動いている。確かに直感的にも、初期値$\theta_0 = (0.4, 0.4, 0, 0)$から制御した場合、棒 1 をまず大きく傾けることで棒 2 を反対方向に傾くようにしてから棒 1 をまっすぐ上に向けるように動かす（図 7)、という風にすればいいことはわかり、その直感と合致している。こういった、複雑な動きになるところが多入力多出力系の面白いところである。

(3)ではθ_1、θ_2ともに常に0付近にいて、発散していないことから、関節 1、2 に加えた外乱に対して、

きちんと応答して制御されていることがわかる。

今回は、$(\theta_1, \theta_2) = (0,0)$付近だけの制御を考えたが、$\theta_1$、$\theta_2$の範囲を区切ってそれぞれの範囲で線形化することにより、全域での制御が可能になると思われる。

5.　参考文献

日本機械学会、制御工学（JSME テキストシリーズ）、日本機械学会、2002

6.　講義と演習についての感想

・どのように講義内容を学習したか

ー主にスライド資料を利用

・難易度の適切さ、良かった点、困った点

難易度はちょうど良かったと思う。

いろいろな数値解法に触れることができて面白かった。