演習課題５　レポート

0500319521
尾崎凌明

1

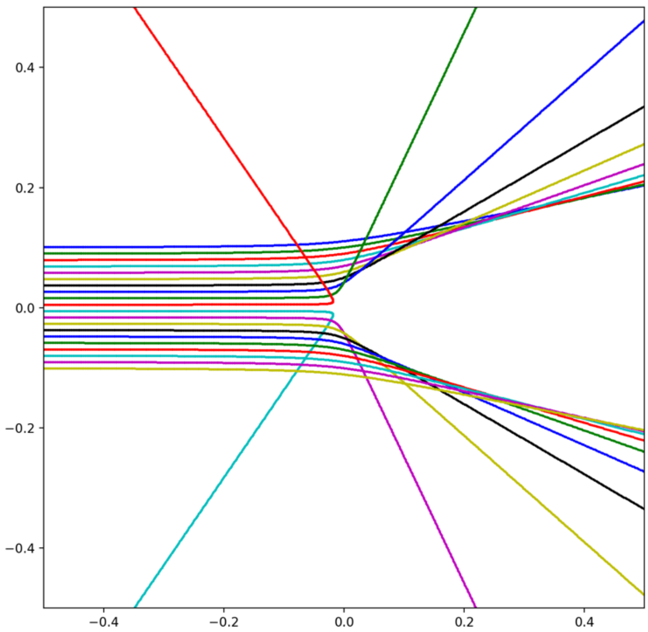
1.1　計算

微分方程式

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{\boldsymbol{x}}{r^3}$$

を 20 個の初期値の対して、Sympletic 法を用いて解いた。

1.2　計算結果



計算結果は左図のようになった。(図１)

図 1 相対論を用いない場合の計算結果

2

2.1　計算

１とは違い、相対論を用いて解く。この場合、微分方程式は次のようになる。

$$\boldsymbol{p} = \gamma\boldsymbol{v}$$

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{\boldsymbol{x}}{r^3}$$

このとき、$\boldsymbol{p} = \gamma\boldsymbol{v}$から、

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{d\gamma}{dt}\boldsymbol{v} + \gamma\boldsymbol{a}$$

よって、

$$\frac{1}{\gamma}\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{a}$$

$$= \frac{1}{\gamma}\left(\frac{d\gamma}{d\boldsymbol{v}} \cdot \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right)\boldsymbol{v} + \boldsymbol{a}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\left\{\frac{\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \boldsymbol{a}\right\}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{a}$$

$$= \frac{\frac{1}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a}$$

$$= \frac{\frac{1}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}$$

$$= \left(\frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T}{c^2 - v^2} + E\right)\boldsymbol{a}$$

したがって、

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T}{c^2 - v^2} + E\right)^{-1}\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

$$= \frac{1}{\gamma}\left(E - \frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T}{c^2}\right)\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

$$= \frac{1}{\gamma}\left(E - \frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T}{c^2}\right)\frac{\boldsymbol{x}}{r^3}$$

となって、運動量$\boldsymbol{p}$を含まない微分方程式が得られた。この方程式を、同様に 20 個の初期値に対して解いた。

2.2　計算結果

計算結果は右図のようになった。(図 2)

3　考察

相対論を考慮した場合は考慮しなかった場合に比べて、軌道はより曲がらなくなっている。

相対論では、原点付近で速度が上がると質量が増え、中心から受ける力に対して、加速度が小さくなるからだと考えられる。

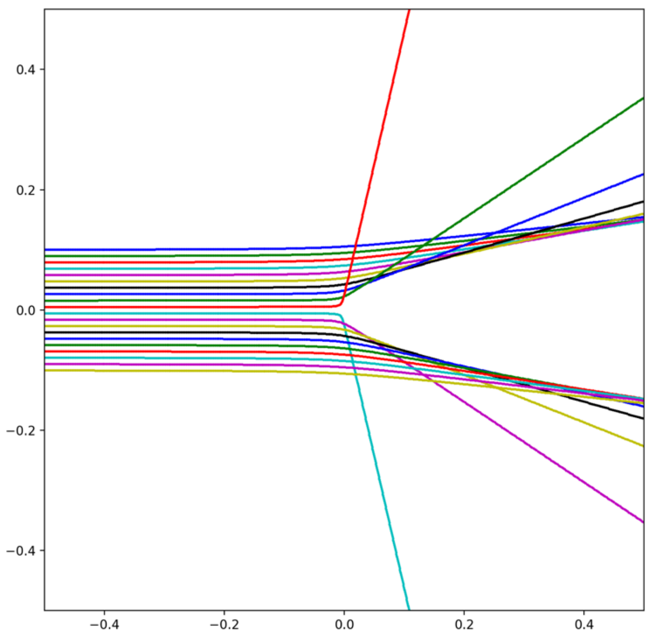


図 2 相対論を用いた場合の計算結果