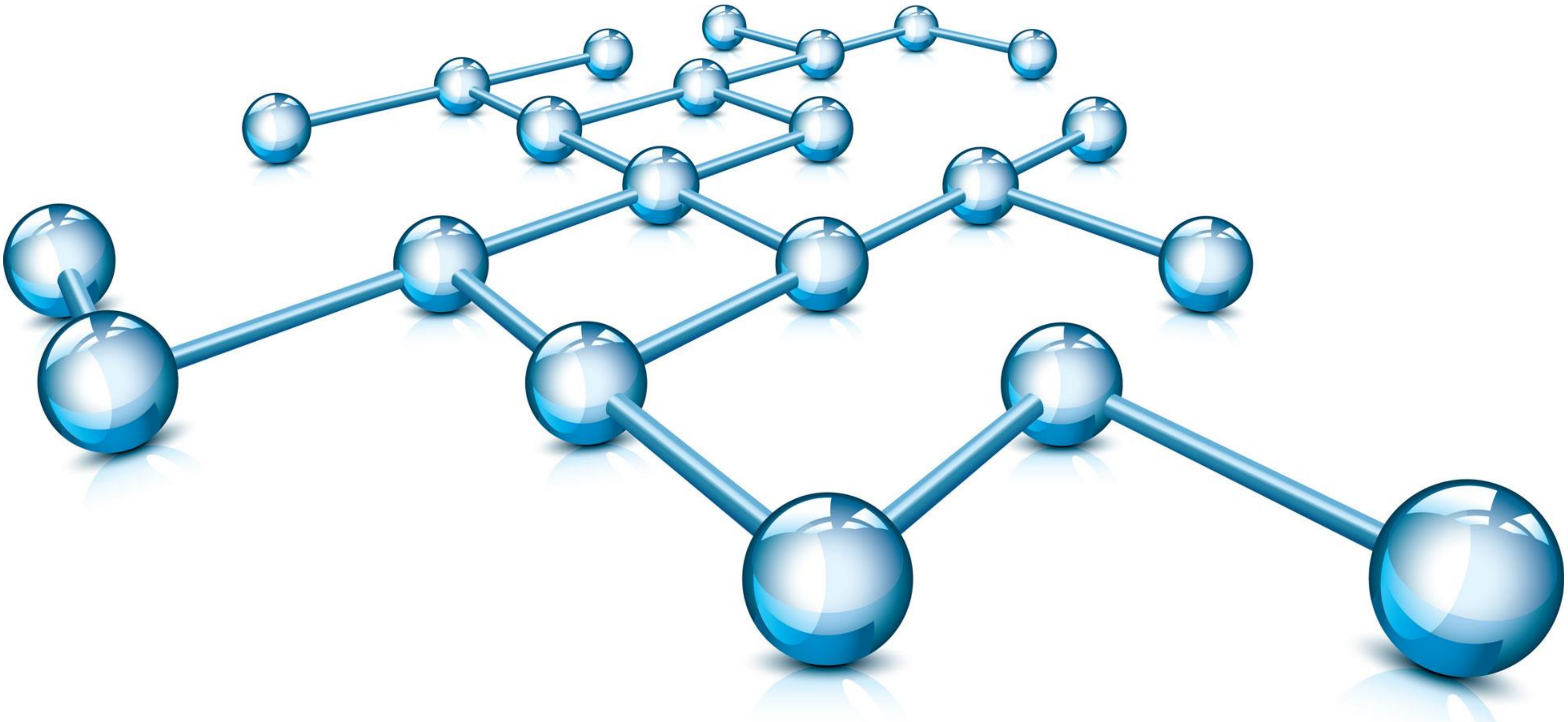


Modelos y algoritmos para logística y transporte

Agustín Pecorari

Rodrigo Maranzana

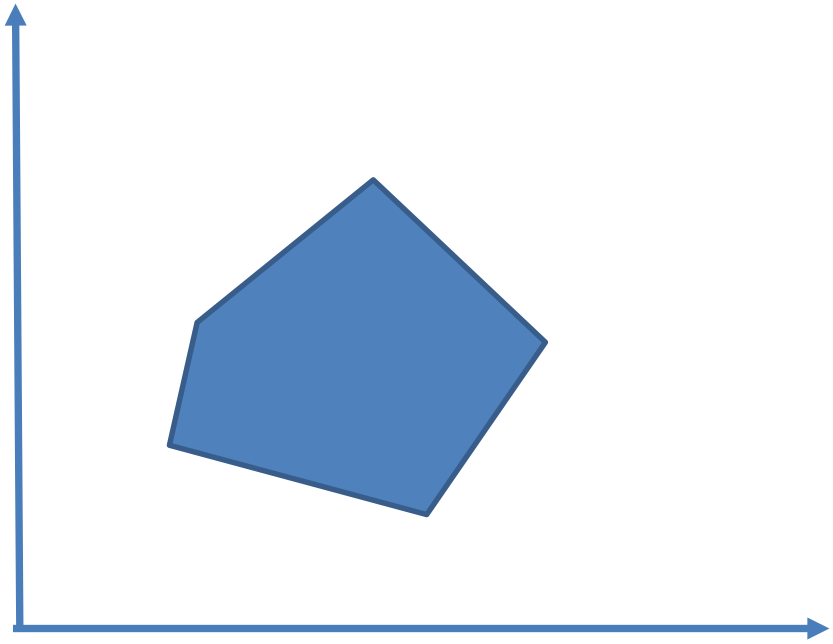
Programación lineal

- Variables de decisión continuas.
- Restricciones lineales.
- Función objetivo lineal.

$$\max c^T X$$
$$s.a.$$
$$AX \leq b,$$
$$X \geq 0.$$

Forma estándar

Convexo



- Convexo.
- Puntos extremos.
- Soluciones óptimas.
- Combinaciones lineales convexas.

Forma Estándar y Dual

Agregando variables o cambiando maximización por minimización si es necesario, siempre es posible escribir un PPL en forma estándar.

$$
\begin{aligned}
&\max c^T X\\
&s.a.\\
&AX \leq b,\\
&X \geq 0.
\end{aligned}
\qquad\longrightarrow\qquad
\begin{aligned}
&\min b^T Y\\
&s.a.\\
&A^T Y \geq c,\\
&Y \geq 0.
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{Y}$: multiplicadores asociados a las restricciones

Forma estándar

Problema Dual

Formular el dual

$$\begin{cases} 0 & \text{si } AX \le b, \\ -\infty & \text{sino.} \end{cases}$$

$$\max c^T X$$

$s.a.$

$$AX \le b,$$

$$X \ge 0.$$

$$\max_{X\ge 0}\left(c^T X + \min_{Y\ge 0} Y^T(b - AX)\right)$$

$$\max_{X\ge 0}\left(c^T X + \min_{Y\ge 0} Y^T b - Y^T A X\right)$$

$$\max_{X\ge 0}\min_{Y\ge 0}\left((c^T - Y^T A)X + Y^T b\right)$$

$$\max_{X\ge 0}\min_{Y\ge 0}\left((c - A^T Y)^T X + b^T Y\right)$$

Teorema

$$\min_{Y\ge 0}\max_{X\ge 0}\left((c - A^T Y)^T X + b^T Y\right)$$

$$\min_{Y\ge 0}\left(b^T Y + \max_{X\ge 0}(c - A^T Y)^T X\right)$$

$$\begin{cases} 0 & \text{si } A^T Y \ge c, \\ +\infty & \text{sino.} \end{cases}$$

$$\min b^T Y$$

$s.a.$

$$A^T Y \ge c,$$

$$Y \ge 0.$$

Teoremas de dualidad

- Sean X e Y soluciones factibles del problema primal y dual, entonces $c^T X \leq b^T Y$ en F.S. o $c^T X \geq b^T Y$ en F.C.

- Si además $c^T X = b^T Y$ entonces son óptimas

- Si ambos problemas tienen soluciones factibles, entonces tienen soluciones óptimas $X*$ e $Y*$ y además vale $c^T X^* = b^T Y^*$

Sensibilidad

- En el óptimo se tiene que $c^T X = b^T Y$
- Es decir que $c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n = b_1 y_1 + \cdots + b_m y_m$
- Si aumenta en una unidad el límite b_1 entonces la función objetivo aumenta en

$$f + \Delta f = (b_1 + 1) y_1 + \cdots + b_m y_m = f + y_1$$

- Luego la variación Δf es y_1

Sensibilidad

Con respecto a variaciones en las restricciones

- Para la función $$V(b) = \min_{\substack{Ax=b \\ x\geq 0}} c^T x$$
- Si (X, Y) es un par solución (primal, dual) para b entonces: $$\nabla V(b) = Y$$
- O para límite de la restricción: $$\frac{\partial}{\partial b_i} V(b) = Y_i$$
- Aproximadamente: $$V(b + \Delta b) \approx V(b) + Y\Delta b$$

Sensibilidad

Con respecto a variaciones en los coeficientes de la f. objetivo

- Para la función $V(c) = \min_{\substack{Ax=b \\ x\geq 0}} c^T x$
- Si (X, Y) es un par solución (primal, dual) para c entonces:

$$\nabla V(c) = X$$

- O para límite de la restricción: $\frac{\partial}{\partial c_i} V(c) = X_i$
- Aproximadamente: $V(c + \Delta c) \approx V(c) + X\Delta c$

Interpretación Económica

Primal: Cuánto debo producir para maximizar ganancia.

$$
\begin{aligned}
&\max 3\,x + 4y \\
&s.a. \\
&\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y \leq 200, \\
&\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y \leq 100, \\
&x, y \geq 0.
\end{aligned}
$$

Dual: Cuánto me deben pagar por materia prima para comprarme el stock.

$$
\begin{aligned}
&\min 2\,00\lambda + 100\mu \\
&s.a. \\
&\frac{3}{4}\lambda + \frac{1}{4}\mu \geq 3, \\
&\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\mu \geq 4, \\
&\lambda, \mu \geq 0.
\end{aligned}
$$

Ganancia por venta mayor o igual que beneficio por producción

El Solver de Excel

- Resolver los problemas anteriores con el Solver de Excel.
- Estudiar la sensibilidad.
- Estudiar los intervalos de variabilidad.

Dualidad en programación convexa

- Generaliza los resultados de programación lineal
- El problema $\begin{cases} \min\limits_{x} f(x) \\ s.a. \quad g(x) = 0 \end{cases}$ tiene como dual

$$\max_{\lambda} \varphi(\lambda)$$

donde

$$\varphi(\lambda) = \max_{x} f(x) + \lambda g(x)$$

Dualidad en programación convexa

- Además para cada λ se verifica que

$$\varphi'(\lambda) = g(x_\lambda)$$

Donde x_λ resuelve

$$\varphi(\lambda) = \max_x f(x) + \lambda g(x)$$

Relajación Lagrangiana

- A partir del Teorema de Multiplicadores de Lagrange tenemos que

$$\begin{cases} \min_{x} f(x) \\ s.a.\, g(x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla f(x) + \lambda \nabla g(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} max_{\lambda}\, \varphi(\lambda) \end{cases} \quad \text{donde } \varphi(\lambda) = \min_{x} f(x) + \lambda g(x)$$

SP con restricciones de tiempo

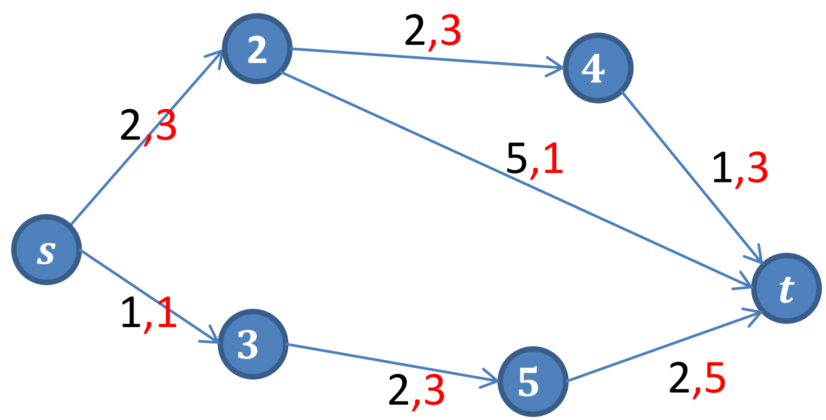
- El problema de camino más corto con restricciones de tiempo no se puede resolver con los algoritmos combinatorios clásicos (Dijkstra o Ford-Bellman)
- Para pequeñas instancias puede usarse Simplex pero para grandes no !!

Casos particulares de FMC

Problema de camino más corto de un nodo s a un nodo t, con restricciones de tiempo

Hay que elegir:

- $b(s) = 1$
- $b(t) = -1$
- $b(i) = 0,\ i \neq s, t$
- Y agregar la ecuación $\sum_{ij} t_{ij} x_{ij} \leq T$



SP con restricciones de tiempo

- Tenemos entonces

el problema de SP con restricciones que podemos transformar en

$$\min c^T x$$
$$Nx = b$$
$$l \leq x \leq u$$
$$\sum_{ij} t_{ij} x_{ij} \leq T$$

$max_{\lambda \geq 0}\, \varphi(\lambda)$ donde $\varphi(\lambda) = \min c^T x \; + \lambda(\sum_{ij} t_{ij} x_{ij} - T)$

$$Nx = b$$
$$l \leq x \leq u$$

SP con restricciones de tiempo

- Pero este último problema es equivalente a resolver $max_{\lambda\geq 0}\,\varphi(\lambda)$ donde ahora

$$\varphi(\lambda) = \min \sum_{ij}(c_{ij}+\lambda t_{ij})\, x_{ij}$$
$$Nx = b$$
$$l \leq x \leq u$$

- Que para cada valor de λ es un clásico problema de camino más corto

SP con restricciones de tiempo

- Se logró transformar un problema no resoluble por un algoritmo eficiente como Dijkstra en otro que es resoluble por una aplicación sucesiva de Dijkstra.
- Para actualizar λ se puede proponer

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \theta_n g_n$$

  donde $g_n = g(x_n)$

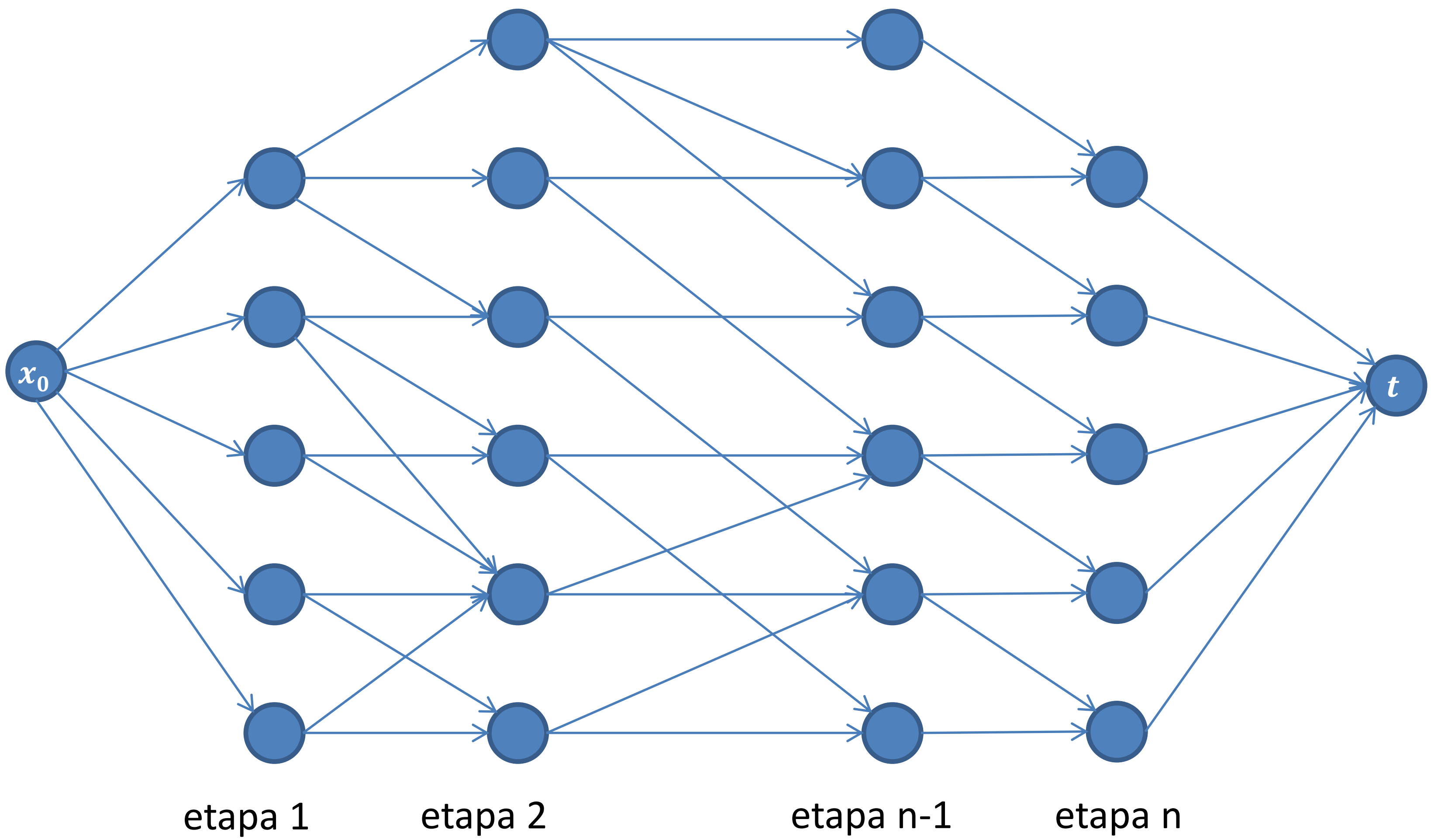
Problema de stocks

- Supongamos un inventario que opera en N períodos de tiempo.
- Si x_k es la cantidad de ítems en stock, u_k la cantidad de ítems comprados al inicio del período k y v_k las ventas. $x_{(k+1)} = x_k + u_k - v_k$
- u_k pertenece a un conjunto finito de decisiones posibles.
- Hay un estado inicia x_0 y un estado final x_n.

Problema de stocks. Cont.

- x_k negativo significa que tenemos demanda insatisfecha.
- El objetivo es minimizar el costo del stock y de las compras. $z = h_k x_k + c_k u_k$
- Convertimos el problema de programación dinámica a uno de camino más corto.

Camino más corto

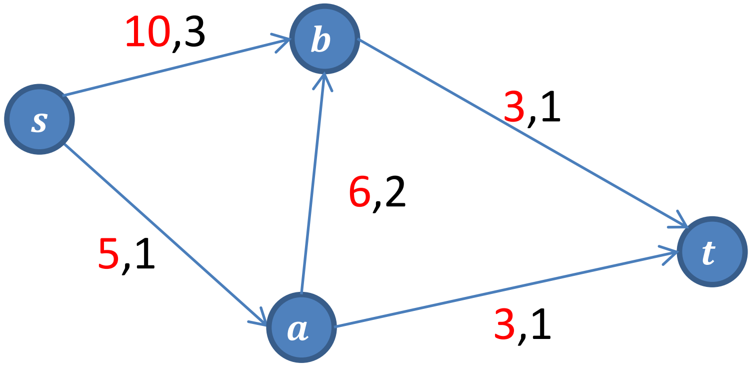


Flujos dinámicos

- En estos problemas interesa el máximo flujo que puede atravesar una red en p períodos de tiempo sabiendo que cada arco tiene asociado un tiempo de recorrido (entero).
- En este caso la capacidad de cada arco se entiende por unidad de tiempo.
- Se resuelve sobre un grafo extendido donde los nodos se repiten p veces y se unen los nodos i_k con j_l si I y j estaban unidos originalmente y $k - l = \tau_{ij}$ tiempo de recorrido del arco original.
- Ejemplo: Problema de evacuación

Evacuación de un edificio

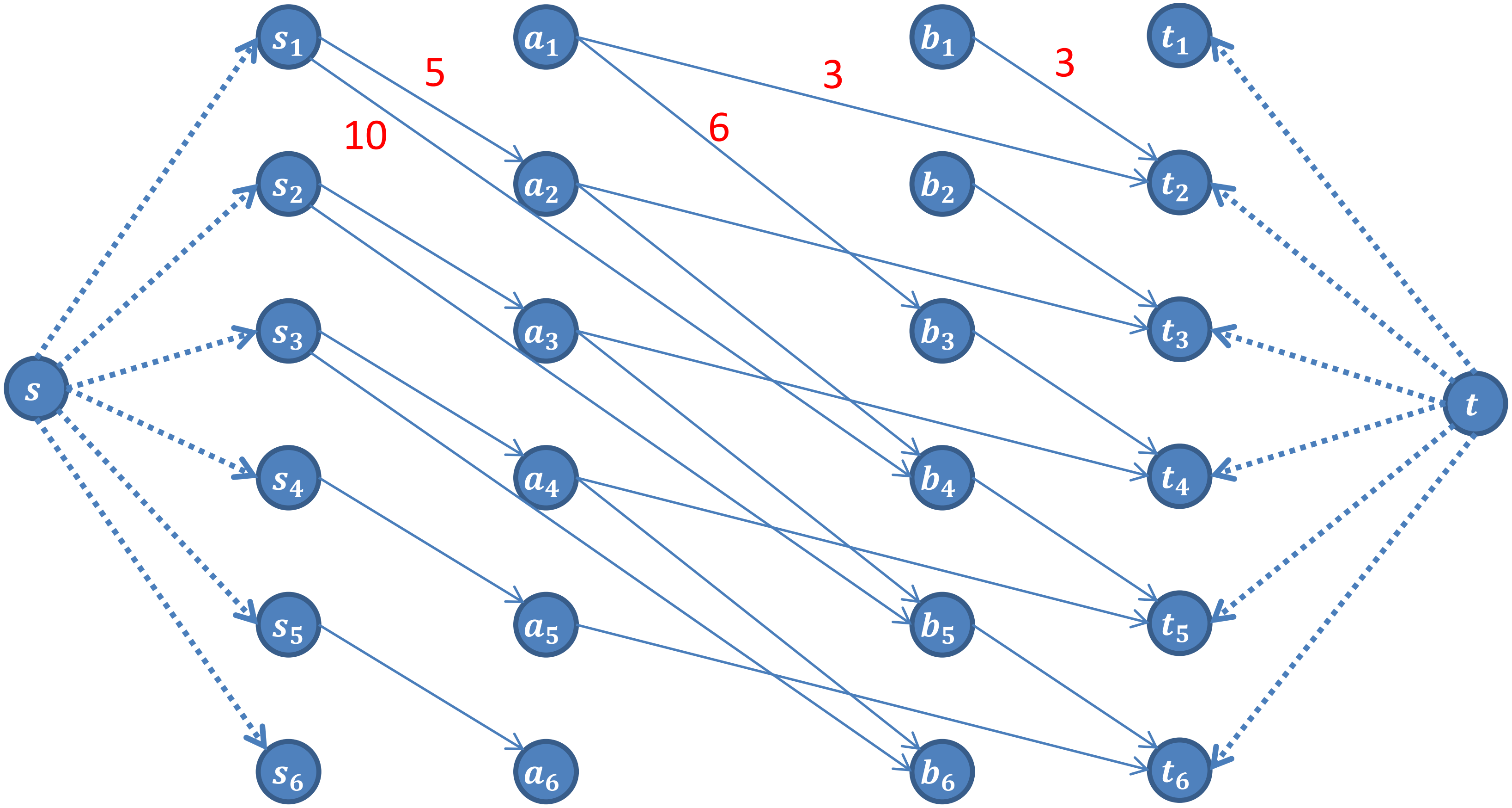
- Se quiere saber la capacidad máxima de evacuación de un edificio representada por el siguiente grafo:



- En cada arco se nota

  la capacidad de paso por unidad de tiempo (horas) y el tiempo necesario de recorrido.

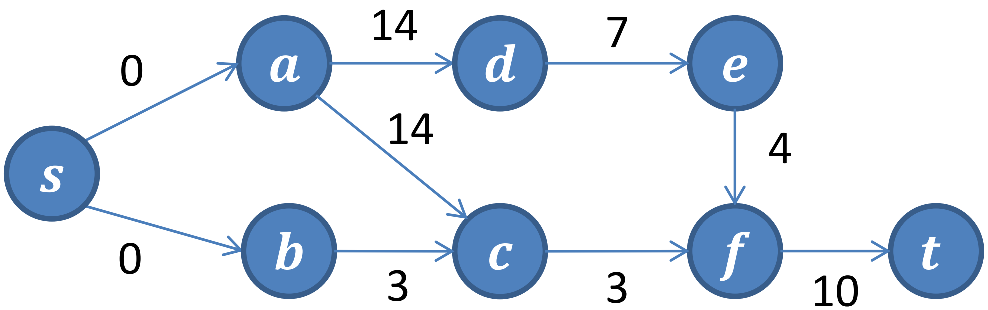
Grafo extendido



Scheduling de proyectos

Determinar la duración mínima de un proyecto con las siguientes características

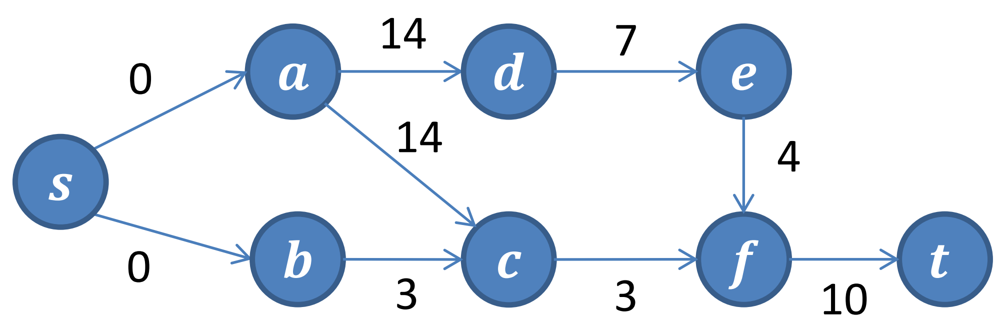
Tarea	Duración	Predecesor
a	14	
b	3	
c	3	a,b
d	7	a
e	4	d
f	10	c,e



Scheduling de proyectos

Para cada nodo (tarea) definimos la variable u_j que representa el tiempo más temprano en que puede realizarse.

Se quiere resolver:



- $\min\limits_{u} u_t - u_s$
- S.a. $u_j - u_i \geq c_{ij}, \ \forall ij \in A$

Pero, qué tiene que ver con los problemas de FMC ?

Scheduling de proyectos

- Consideremos el problema

$$\min_u u_t - u_s$$
$$s.a.\ u_j - u_i \geq c_{ij}, \forall ij \in A$$

- Como problema de optimización lineal tiene un dual que es

$$\max_x \sum_{ij \in A} c_{ij} x_{ij}$$
$$s.a. \quad \sum_{j \in i-} x_{ji} - \sum_{j \in i+} x_{ij} = b_i, \qquad \forall i \in N$$
$$x \geq 0$$

Scheduling de proyectos

- El problema puede escribirse entonces como

$$\min_{x} \sum_{ij \in A} -c_{ij} x_{ij}$$

$$s.a. \quad \sum_{j \in i-} x_{ji} - \sum_{j \in i+} x_{ij} = b_i, \qquad \forall i \in N$$

$$x \geq 0$$

- Que es un problema FMC y más precisamente un problema de camino más corto.

Scheduling de proyectos **JUST in TIME**

- Al caso anterior se agregan tareas que no pueden realizarse mucho después de otras.
- Es decir se agregan condiciones del tipo

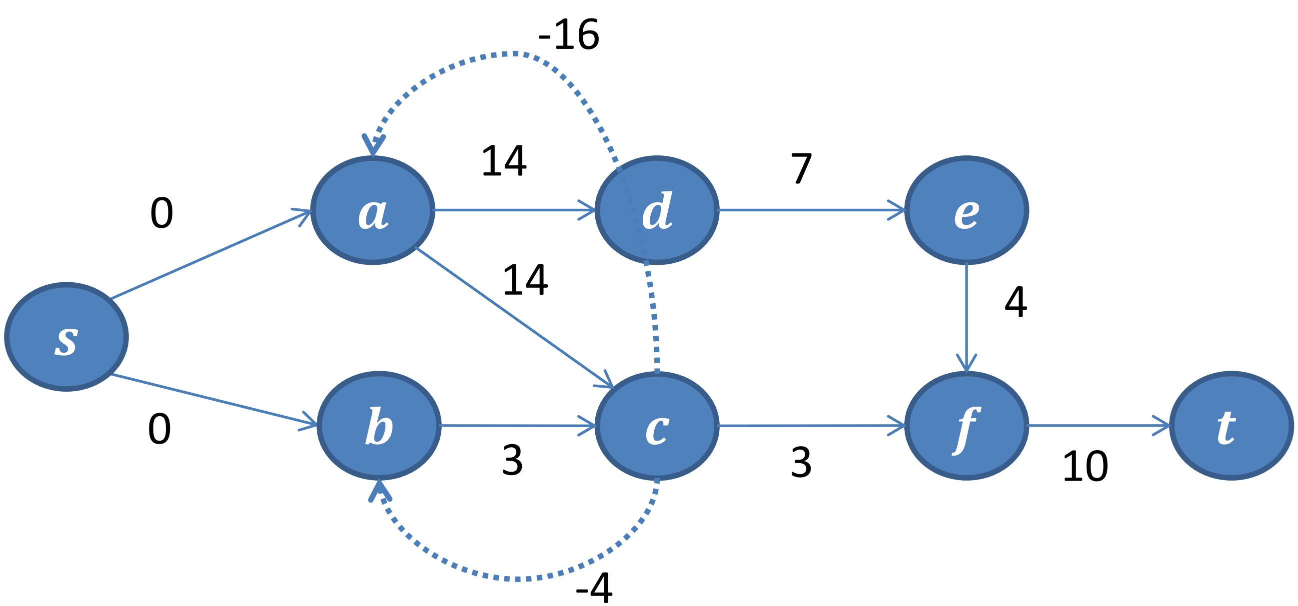
  $u_j - u_i \leq d_{ij}$ **Cota min:** No puedo esperar más de d_{ij}
- Además de las que ya teníamos

  $u_j - u_i \geq c_{ij}$ **Cota máx.:** Tengo que esperar al menos $c_{ij}+u_i$ para empezar la tarea en u_j
- Para poder dualizarlo y llevarlo a un SP primero reescribimos las nuevas restricciones como

  $-u_j + u_i \geq -d_{ij}$
- Y agregamos nuevos arcos en sentido contrario

Scheduling de proyectos **JUST in TIME**

Por ejemplo, si la tarea c debe realizarse antes que pasen 16 horas después de a y 4 después de b, agregamos los arcos ca y cb con costos -16 y -4.



Scheduling de proyectos penalizados

- Supongamos que conocemos el tiempo normal de realización de cada tarea a_i y podemos pagar para realizarla más rápido hasta cierto límite b_i a razón de d_i.
- Podemos preguntarnos cuántos es lo menos que se debe invertir para tardar en total menos de cierto tiempo T.

$$\min_{u,\beta} \sum_i \beta_i d_i$$

$$u_t - u_s \leq T$$

$$u_j \geq u_i + a_i - \beta_i, \quad \forall ij \in A.$$

$$0 \leq \beta_i \leq a_i - b_i, \quad \forall i \in N.$$