Faisceaux Automorphes Liés aux Séries d'Eisenstein

G. LAUMON

0. INTRODUCTION

L'objet principal de cet exposé est de donner une interprétation géométrique des séries d'Eisenstein (principales et partout non ramifiées) pour GL_n sur un corps de fonctions. Cette interprétation géométrique nous permet alors de définir de nouveaux faisceaux automorphes qui viennent s'ajouter aux faisceaux automorphes cuspidaux construits par Drinfeld pour GL_2.

Plus précisément, le contenu de cet exposé est le suivant. Au numéro 1, nous rappelons certains traits marquants de la théorie des faisceaux caractères de Lusztig: cette théorie nous sert de modèle.

Au numéro 2, nous rappelons la théorie du corps de classes abélien géométrique de Lang et Rosenlicht (dans le cas partout non ramifié): il s'agit de la théorie des faisceaux automorphes pour GL_1 sur un corps de fonctions.

Puis nous donnons, au numéro 3, l'interprétation géométrique des séries d'Eisenstein (principales et partout non ramifiées) pour GL_n sur un corps de fonctions ainsi que du produit de ces séries d'Eisenstein par leur "dénominateur" usuel (un produit de fonctions L).

Cette interprétation géométrique conduit tout naturellement à définir un processus d'induction parabolique pour les faisceaux automorphes, ce que nous faisons au numéro 4.

Au numéro 5, nous examinons en détail la cas où le corps des fonctions est celui d'une droite projective. Dans ce cas, on peut dresser la liste complète de tous les faisceaux automorphes (partout non ramifiés) du fait de l'absence totale de faisceaux automorphes cuspidaux (partout non ramifiés).

Enfin, au numéro 6, nous donnons quelques exemples de faisceaux automorphes (partout non ramifiés) sur un corps de fonctions arbitraire et nous énonçons une conjecture sur le rang générique des faisceaux automorphes cuspidaux (partout non ramifiés), conjecture qui précise celles de [Lau 2].

Unité de recherche associée au CNRS, n° D752

Automorphic Forms, Shimura Varieties, and L-Functions

Copyright © 1990 by Academic Press, Inc.
All rights of reproduction in any form reserved.

ISBN 0-12-176651-9

Je tiens à remercier P. Deligne, D. Kazhdan et G. Lusztig pour de fructueuses discussions sur le contenu de cet exposé, ainsi que les organisateurs de cette conférence, L. Clozel et J.S. Milne, qui m'ont permis de présenter ces travaux.

Je remercie également Mme Bonnardel et M. Tinney qui ont remarquablement composé le manuscript.

1. Quelques Aspects de la Theorie des Faisceaux Caractères de Lusztig

(1.0) Soient k un corps algébriquement clos, ℓ un nombre premier inversible dans k et $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_\ell$.

(1.1) Pour tout groupe réductif connexe G sur k, Lusztig a défini un ensemble particulier de classes d'isomorphie de $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux pervers irréductibles G-équivariants sur G (G agit par conjugaison sur lui-même): les faisceaux caractères (cf. [Lu 1] pour une présentation de cette théorie et une bibliographie).

Si G est un tore, les faisceaux caractères sont les $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux pervers de la forme

$$\mathcal{F}[\dim G]$$

où $\mathcal{F}$ est un $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse de rang 1 sur G d'ordre fini premier à la caractéristique p de k si $p > 0$ (i.e. il existe un entier $N \geq 1$, premier à p si $p > 0$, tel que $\mathcal{F}^{\otimes N}$ soit isomorphe au faisceau constant $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$).

Si $G = GL_{n,k}$ pour un entier $n \geq 1$ les faisceaux caractères sur G sont tous obtenus par la construction suivante (cette construction qui vaut pour G arbitraire ne donne en général qu'une partie des faisceaux caractères). Soient $T \subset G$ un tore maximal de G et $T \subset B \subset G$ un sous-groupe de Borel de G admettant T comme facteur de Levi. On note W le groupe de Weyl de $(G\ , T\ )$. On a alors un diagramme d'induction parabolique

(1.1.1)
$$\begin{tikzcd} \tilde{G} \arrow[d] \arrow[dr, "\rho"] & \\ G & T \end{tikzcd}$$

où

$$\tilde{G} = \{(g, hB) \in G \times (G/B) | h^{-1}gh \in B\}$$
$$\pi(g, hB) = g$$
$$p(g, hB) = \overline{h^{-1}gh}$$

(on a noté

$$B \twoheadrightarrow T, \quad b \mapsto \bar{b}$$

la projection canonique). Il est important de remarquer que, si l'on note $[H/ad(H)]$ le champ algébrique sur k des classes de conjugaison dans un groupe algébrique H sur k (le quotient de H par l'action de H sur lui-même par conjugaison, [De-Mu] (4.8) et [Lau 3] (4.14.1.1)), le diagramme d'induction s'insère dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d] & \tilde{G} \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & T \arrow[d] \\ {[G/ad(G)]} & {[B/ad(B)]} \arrow[l] \arrow[r] & {[T/ad(T)]} \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les projections canoniques pour les deux extrêmes et le morphisme induit par

$$\tilde{G} \to B, \quad (g, hB) \mapsto h^{-1}gh$$

pour la médiane, où les flèches horizontales de la ligne du bas sont induites par l'inclusion $B \hookrightarrow G$ et la projection $B \twoheadrightarrow T$ et où le premier carré est cartésien.

LEMME 1.1.2.

(1) *$\tilde{G}$ est une variété quasi-projective, lisse et connexe sur k, de dimension égale à celle de G.*
(2) *ρ est lisse.*
(3) *π est projective et "small" au sens de Goresky-MacPherson ([Go-Ma](6.2)); en particulier, au-dessus de l'ouvert dense G_{rss} de G formé des éléments réguliers semi-simples, π est un revêtement fini étale galoisien de groupe de Galois W.*

Rappelons l'argument de Lusztig pour prouver que π est "small". Il suffit de démontrer que

$$Z = \tilde{G} \times_G \tilde{G}$$

est de dimension au plus égale à celle de G et que chaque composante irréductible de Z de dimension égale à celle de G domine G . Mais

$$Z = \{(g, h_1B, h_2B) | g \in h_1Bh_1^{-1} \cap h_2Bh_2^{-1}\}$$

admet une stratification $(Z_w)_{w \in W}$ où, pour chaque $w \in W$, Z_w est la partie localement fermée de Z définie par

$$Z_w = \{(g, h_1B, h_2B) | h_2^{-1}h_1 \in B\dot{w}B, g \in h_1Bh_1^{-1} \cap h_2Bh_2^{-1}\}$$

($\dot{w} \in N_G(T)$ est un représentant arbitraire de w). On vérifie alors facilement que chaque Z_w est lisse, connexe sur k, de dimension égale à celle de G et que la projection naturelle

$$Z_w \to G$$

est un isomorphisme au-dessus de G_{rss}.

Alors, si $A = \mathcal{F}[\dim T]$ est un faisceau caractère sur T, on peut former le "complexe de $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux"

$$K_A = R\pi_*\rho^* A[\dim G - \dim T] \tag{1.1.3}$$

et il résulte aussitôt du lemme que K_A est en fait un $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau pervers et que, plus précisément,

$$K_A = j_{!*}(\pi_{rss})_*\rho_{rss}^*\mathcal{F}[\dim G]$$

où $\pi_{rss} : \tilde{G}_{rss} \to G_{rss}$ et $\rho_{rss} : \tilde{G}_{rss} \to T$ sont les restrictions de π et ρ respectivement à G_{rss} et où $j : G_{rss} \hookrightarrow G$ est l'inclusion, $(\pi_{rss})_*\rho_{rss}^*\mathcal{F}$ étant un $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse semi-simple (en fait à monodromie finie) sur G_{rss}.

Par définition, les constituants irréductibles de K_A pour chaque choix de A sont des faisceaux caractères (que ces constituants soient G-équivariants résulte des considérations précédant le lemme).

(1.2) Supposons maintenant que k soit une clôture algébrique du corps fini $\mathbb{F}_q$ et que G et T soient définis sur $\mathbb{F}_q$ (on ne suppose pas que B est défini sur $\mathbb{F}_q$ ni que T est déployé sur $\mathbb{F}_q$). Si A est un faisceau caractère sur T qui est défini sur $\mathbb{F}_q$ au sens des faisceaux de Weil ([De 2] (1.1.10)), i.e. muni d'un isomorphisme

$$\varphi : \mathrm{Frob}_q^* A \tilde{\to} A$$

alors K_A est lui aussi défini sur $\mathbb{F}_q$, i.e. muni d'un isomorphisme

$$\psi : \mathrm{Frob}_q^* A \tilde{\to} A$$

induit par φ. On rigidifie φ de telle sorte que

$$tr(\varphi_1) = (-1)^{\dim T}$$

(i.e. on rigidifie $\mathcal{F}$ par $\mathcal{F}_1 \simeq \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ où $1 \in T$ est l'identité); alors la fonction "trace de Frobenius" ([SGA 5] XV)

$$\chi_{(A,\varphi)} : T(\mathbb{F}_q) \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell$$

définie par

$$\chi_{(A,\varphi)}(t) = tr(\varphi_t)$$

est de la forme

$$\chi_{(A,\varphi)} = (-1)^{\dim T}\theta_{(A,\varphi)}$$

où

$$\theta_{(A,\varphi)} : T(\mathbb{F}_q) \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$$

est un caractère du tore fini $T(\mathbb{F}_q)$.

D'après Deligne-Lusztig ([De-Lu]), le caractère $\theta_{(A,\varphi)}$ induit cohomologiquement une représentation virtuelle

$$R_T^{\theta_{(A,\varphi)}}$$

de $G(\mathbb{F}_q)$ et Lusztig a montré que (modulo certaines restrictions sur q, cf. [Lu] (9.2) pour un énoncé précis).

THÉORÈME 1.2.1. *La fonction "trace de Frobenius" de* (K_A, ψ),

$$\chi_{(K_A,\psi)} : G(\mathbb{F}_q) \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell,$$

définie par

$$\chi_{(K_A,\psi)}(g) = tr(\psi_g)$$

est liée au caractère virtuel de $R_T^{\theta_{(A,\varphi)}}$ *par la relation suivante*

$$\chi_{(K_A,\psi)}(g) = (-1)^{\dim T} tr(R_T^{\theta_{(A,\varphi)}}(g))$$

pour tout $g \in G(\mathbb{F}_q)$.

(1.3) Supposons k de caractéristique nulle. Soient $\mathfrak{G}$ l'algèbre de Lie de G et $\mathfrak{G}^*$ le k-espace vectoriel dual de G; G agit par l'action adjointe $Ad : G \to GL(\mathfrak{G})$ sur $\mathfrak{G}$ et l'action coadjointe $Ad^* : G \to GL(\mathfrak{G}^*)$ sur $\mathfrak{G}^*$.

Identifions T^*G et $G \times \mathfrak{G}^*$ par la translation à gauche.

Le cône nilpotent

$$\Lambda_G \subset T^*G = G \times \mathfrak{G}^*$$

est le fermé lagrangien défini par

$$\Lambda_G = \{(g, \xi^*) \in G \times \mathfrak{G}^* | Ad^*(g)(\xi^*) = \xi^* \text{et} \xi^* \in \mathcal{N}^*\}$$

où

$$\mathcal{N}^* = \bigcup_{h \in G} Ad^*(h)(b^\perp)$$

avec $b^\perp \subset \mathfrak{G}^*$ l'orthogonal de l'algèbre de Lie $b \subset \mathfrak{G}$ de $B \subset G$.

Le résultat suivant est dû à Mirkovic et Vilonen ([Mi-Vi]) et indépendamment à Ginsburg ([Gi](1.4.2) et (1.6.1)).

THÉORÈME 1.3.1. *Un $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ -faisceau pervers irréductible G-équivariant A sur G est un faisceau caractère si et seulement si sa variété caractéristique est contenue dans Λ_G.*

2. Corps de Classes Abelien Geometrique

(2.0) On rappelle brièvement dans ce numéro la théorie du corps de classes abélien géométrique due à Lang ([Lan]) et Rosenlicht ([Ro]) en suivant la présentation qu'en ont donnée Serre ([Se]) puis Deligne ([De 1]). On se limitera au cas partout non ramifié.

(2.1) Soit X une courbe projective, lisse et géométriquement connexe sur le corps fini $\mathbb{F}_q$ à q éléments; on note g le genre de X. Pour simplifier, on munit X d'un point base ∞ rationnel sur $\mathbb{F}_q$, $\infty \in X(\mathbb{F}_q)$.

Soit $\mathrm{Pic}_{X/\mathbb{F}_q}$ le schéma de Picard qui paramètre les classes d'isomorphie de $\mathcal{O}_X$-Modules inversibles $\mathcal{L}$. C'est un $\mathbb{F}_q$-schéma en groupes abéliens (pour le produit tensoriel des $\mathcal{O}_X$-Modules inversibles), son groupe des composantes connexes est canoniquement isomorphe à $\mathbb{Z}$ par l'application degré

$$\deg : \mathrm{Pic}_{X/\mathbb{F}_q} \to \mathbb{Z}$$

(pour tout $\mathcal{O}_X$-Module inversible $\mathcal{L}$, on a

$$\chi(X, \mathcal{L}) = \deg(\mathcal{L}) + 1 - g$$

par Riemann-Roch) et sa composante neutre $Pic^o_{X/\mathbb{F}_q}$ est une variété abélienne sur $\mathbb{F}_q$ de dimension g (la “jacobienne” de X). Le point $\infty \in X(\mathbb{F}_q)$ fournit un scindage de la suite exacte

$$1 \to \mathrm{Pic}^o_{X/\mathbb{F}_q} \to \mathrm{Pic}_{X/\mathbb{F}_q} \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \to 0 :$$

à $\ell \in \mathbb{Z}$, on associe la classe d'isomorphie du $\mathcal{O}_X$-Module inversible $\mathcal{O}_X(\ell.\infty)$.

On note F le corps des fonctions de X; son corps des constantes est exactement $\mathbb{F}_q$. On identifie l'ensemble des places de F à l'ensemble $|X|$ des points fermés de X. Pour chaque $x \in |X|$, on note F_x le complété de F en la place x, $v_x : F_x - \{0\} \to \mathbb{Z}$ la valuation discrète correspondante, $\mathcal{O}_x \subset F_x$ l'anneau de cette valuation, m_x l'idéal maximal de $\mathcal{O}_x$ et $\deg(x)$ le degré du corps résiduel $\mathcal{O}_x/m_x$ sur $\mathbb{F}_q$. On peut former alors l'anneau des adèles de F,

$$\mathbb{A} = \prod_{x \in |X|}(F_x, \mathcal{O}_x)$$

et plonger F diagonalement dans $\mathbb{A}$. On note

$$\mathcal{O} = \prod_{x \in |X|} \mathcal{O}_x$$

le sous-anneau compact maximal de $\mathbb{A}$ et

$$\deg : \mathbb{A}^\times \to \mathbb{Z}$$

l'homomorphisme défini par

$$\deg((a_x)_{x\in|X|}) = \sum_{x\in|X|} \deg(x) v_x(a_x);$$

$F^\times$ et $\mathcal{O}^\times$ sont contenus dans le noyau $(\mathbb{A}^\times)^0$ de cet homomorphisme.
On a un isomorphisme canonique de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathrm{Pic}^0_{X/\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_q) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Pic}_{X/\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_q) \arrow[r, "\deg"] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
1 \arrow[r] & F^\times\backslash(\mathbb{A}^\times)^0/\mathcal{O}^\times \arrow[r] & F^\times\backslash(\mathbb{A}^\times)/\mathcal{O}^\times \arrow[r, "\deg"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

et le scindage donné par

$$\ell \mapsto (\text{classe d'isomorphie de } \mathcal{O}_X(\ell.\infty))$$

correspond au scindage donné par

$$\ell \mapsto F^\times.a^\ell.\mathcal{O}^\times$$

où $a = (a_x)_{x\in|X|}$ avec $a_x = 1$ pour tout $x \neq \infty$ et $v_\infty(a_\infty) = 1$.
Enfin, on a un morphisme naturel

$$\imath : X \to Pic^0_{X/\mathbb{F}_q}$$

donné par

$$\imath(x) = \text{classe d'isomorphie de } \mathcal{O}_X(x - \infty)$$

et ι est un plongement dès que $g \geq 1$.
(2.2) On fixe maintenant un nombre premier ℓ distinct de la caractéristique p de $\mathbb{F}_q$ et une clôture algébrique $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ de $\mathbb{Q}_\ell$.

On considère les trois ensembles suivants:

(1) l'ensemble des $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux lisses de rang $1, \mathcal{F}$, sur X munis d'une rigidification $\infty^*\mathcal{F} \simeq \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ en $\infty : \operatorname{Spec}(\mathbb{F}_q) \hookrightarrow X$;

(2) l'ensemble des $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux lisses de rang 1, $\mathcal{G}$, sur $\operatorname{Pic}^0_{X/\mathbb{F}_q}$ munis d'une rigidification $1^*\mathcal{G} \simeq \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ en $1 : \operatorname{Spec}(\mathbb{F}_q) \hookrightarrow Pic^0_X/\mathbb{F}_q$ (l'origine);

(3) l'ensemble des caractères

$$\chi : F^\times \backslash (\mathbb{A}^\times)^0 / \mathcal{O}^\times \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times.$$

On a des applications naturelles entre ces trois ensembles,

$$(3) \to (2) \to (1).$$

A χ, on associe le $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse de rang 1, $\mathcal{G}_\chi$, sur $\operatorname{Pic}^0_{X/\mathbb{F}_q}$ rigidifié en 1 obtenu en poussant le $\operatorname{Pic}^0_{X/\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_q)$-torseur de Lang à l'aide de χ^{-1},

$$\begin{array}{c} \operatorname{Pic}^0_{X/\mathbb{F}_q} \\ \mathcal{L} \mapsto \operatorname{Frob}_q^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{\otimes -1} \downarrow \ \Big) \ \operatorname{Pic}^0_{X/\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_q) \tilde{\to} F^\times \backslash (\mathbb{A}^\times)^0 / \mathcal{O}^\times \xrightarrow{\chi^{-1}} \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times \\ \operatorname{Pic}^0_{X/\mathbb{F}_q} \end{array}$$

où $\operatorname{Frob}_q : \operatorname{Pic}^0_{X/\mathbb{F}_q} \to \operatorname{Pic}^0_{X/\mathbb{F}_q}$ est l'endomorphisme de Frobenius relatif à $\mathbb{F}_q$; à $\mathcal{G}$, on associe le $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse de rang 1, $\iota^*\mathcal{G}$, sur X avec sa rigidification naturelle en ∞.

THÉORÈME (2.2.1). *Les applications ci-dessus sont des bijections entre les ensembles (1), (2) et (3) ci-dessus.*

PREUVE: On va construire des applications inverses

$$(1) \to (2) \to (3).$$

Pour tout entier $d \geq 1$, on note $X^{(d)}$ la puissance symétrique de X et

$$\iota^{(d)} : X^{(d)} \to \operatorname{Pic}^0_{X/\mathbb{F}_q}$$

le morphisme défini par

$$\iota^{(d)}(D) = \text{classe d'isomorphie de } \mathcal{O}_X(D - d.\infty)$$

(on identifie les points $X^{(d)}$ aux diviseurs effectifs de degré d sur X); pour $d > 2g-2, \iota^{(d)}$ est un fibré projectif. A $\mathcal{F}$ (dans l'ensemble (1)), on associe dans un premier temps le $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse de rang 1, $\mathcal{F}^{(d)}$, sur $X^{(d)}$ de fibre en

$$D = \Sigma_{i\in I} d_i.x_i \in X^{(d)}$$

($x_i \neq x_j$ si $i \neq j \in I$, $\Sigma_{i\in I} d_i.deg(x_i) = d$) le $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-espace vectoriel

$$\mathcal{F}_D^{(d)} = \bigotimes_{i\in I} \mathrm{Sym}^{d^i}(\mathcal{F}_{x_i})$$

(voir [SGA 4](XVII, 5.5) pour une construction en forme); $\mathcal{F}^{(d)}$ est naturellement rigidifié en $d.\infty \in X^{(d)}(\mathbb{F}_q)$. Comme les espaces projectifs sont simplement connexes, dès que $d > 2g-2, \mathcal{F}^{(d)}$ est nécessairement de la forme

$$\iota^{(d)^*}\mathcal{G}$$

pour un $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse de rang 1, $\mathcal{G}$, sur $\mathrm{Pic}^0_{X/\mathbb{F}_q}$ rigidifié en 1; $\mathcal{G}$ est uniquement déterminé par $\mathcal{F}^{(d)}$ et il n'est pas difficile de vérifier que $\mathcal{G}$ est indépendant de $d > 2g-2$ et que

$$\iota^{(d)^*}\mathcal{G} = \mathcal{F}^{(d)}$$

pour tout $d \geq 1$ et en particulier pour $d = 1$. Ceci achève la construction de l'application (1) $\rightarrow$ (2).

Soit maintenant $\mathcal{G}$ dans l'ensemble (2) et soit

$$\chi : \mathrm{Pic}^0_{X/\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_q) \rightarrow \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$$

sa fonction "trace de Frobenius" ([SGA 5] XV). Compte-tenu de l'isomorphisme

$$\mathrm{Pic}^0_{X/\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_q) \tilde{\rightarrow} F^\times\backslash(\mathbb{A}^\times)^0/\mathcal{O}^\times,$$

pour achever la construction de l'application (2) $\rightarrow$ (3), il ne reste plus qu'à vérifier que χ est un caractère. Or, si

$$pr_1, pr_2 \text{ et } m : \mathrm{Pic}^0_{X/\mathbb{F}_q} \times_{\mathbb{F}_q} \mathrm{Pic}^0_{X/\mathbb{F}_q} \rightarrow \mathrm{Pic}^0_{X/\mathbb{F}_q}$$

sont respectivement les deux projections canoniques et la loi de composition, on a un isomorphisme canonique de $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux lisses de rang 1 rigidifiés

$$m^*\mathcal{G} \simeq pr_1^*\mathcal{G} \otimes pr_2^*\mathcal{G}$$

($\mathrm{Pic}^0_{X/\mathbb{F}_q}$ est une variété abélienne, d'où l'assertion).

La vérification que l'on a bien des applications inverses l'une de l'autre est laissée au lecteur (cf. [SGA $4\frac{1}{2}$] [Sommes trig.]1).

(2.3) On a la variante suivante des résultats du numéro (2.2). On considère les trois ensembles:

(1′) l'ensemble des classes d'isomorphie de $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux lisses de Weil de rang 1, $\mathcal{F}$, sur X;

(2′) l'ensemble des classes d'isomorphie de $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux lisses de Weil de rang 1, $\mathcal{G}$, sur $\mathrm{Pic}^0_{X/\mathbb{F}_q}$ munis d'un isomorphisme de $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux lisses de Weil

$$m^*\mathcal{G} \simeq pr_1^*\mathcal{G} \otimes pr_2^*\mathcal{G}$$

compatible à l'associativité et la commutativité où

$$pr_1, pr_2 \text{ et } m : \mathrm{Pic}^0_{X/\mathbb{F}_q} \times_{\mathbb{F}_q} \mathrm{Pic}^0_{X/\mathbb{F}_q} \to \mathrm{Pic}^0_{X/\mathbb{F}_q}$$

sont respectivement les deux projections canoniques et la loi de composition;

(3′) l'ensemble des caractères

$$\chi : F^\times \backslash \mathbb{A}^\times / \mathcal{O}^\times \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times.$$

(Pour la notion de $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux lisses de Weil, on renvoie à [De 2] (1.1.10)).

THÉORÈME 2.3.1. *Les applications*

$$(1') \leftarrow (2') \rightarrow (3'),$$

définie par

$$\mathcal{G} \mapsto \iota'^*\mathcal{G}$$

où

$$\iota' : X \to \mathrm{Pic}^1_{X/\mathbb{F}_q} \hookrightarrow Pic_{X/\mathbb{F}_q}$$

envoie x sur la classe d'isomorphie du $\mathcal{O}_X$-Module inversible $\mathcal{O}_X(x)$, et

$$\mathcal{G} \mapsto \chi$$

où χ est la "trace de Frobenius" de $\mathcal{G}$ (compte-tenu de l'identification

$$Pic_{X/\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_q) \to F^\times \backslash \mathbb{A}^\times / \mathcal{O}^\times),$$

sont bijectives.

PREUVE: A $\mathcal{F}$ (dans l'ensemble (1')), on associe $\mathcal{G}$ (dans l'ensemble (2')) de la façon suivante. Le $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse de rang 1

$$\mathcal{F} \otimes (\infty^* \mathcal{F})^{\otimes -1}$$

sur X ($\infty^*\mathcal{F}$ est considéré comme faisceau de Weil géométriquement constant sur X) est canoniquement rigidifié en ∞ et il lui correspond par (2.2.1) un unique $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse de rang 1, $\mathcal{G}^0$, sur $\mathrm{Pic}^0_{X/\mathbb{F}_q}$ rigidifié en 1. Pour tout entier $\ell \in \mathbb{Z}$, on a un isomorphisme

$$\epsilon_\ell : \mathrm{Pic}^\ell_{X/\mathbb{F}_q} \to \mathrm{Pic}^0_{X/\mathbb{F}_q}, \mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}(-\ell.\infty)$$

et on définit $\mathcal{G}$ par

$$\mathcal{G} | \mathrm{Pic}^\ell_{X/\mathbb{F}_q} = (\epsilon_\ell^* \mathcal{G}^0) \otimes (\infty^* \mathcal{F})^{\otimes \ell}.$$

Le reste de la preuve du théorème est laissé au lecteur.

Remarques (2.3.2.1) Si l'on fixe une clôture algébrique $\bar{F}$ de F (le corps des fonctions de X), l'ensemble (1') s'identifie canoniquement à l'ensemble des classes d'isomorphie de caractères ℓ-adiques

$$W(\bar{F}/F) \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$$

qui sont partout non ramifiés ($W(\bar{F}/F) \subset \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ est le groupe de Weil, cf. [De 2] (1.1.10)).

(2.3.2.2) Dans l'énoncé (2.3.1), le point ∞ ne joue plus aucun rôle.

(2.3.2.3) Soit $\mathbb{F}_{q^n} \supset \mathbb{F}_q$ une extension finie du corps fini $\mathbb{F}_q$; on note $F_n = F.\mathbb{F}_{q^n}$ le corps des fonctions de $X \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^n}$. On a un homomorphisme "norme"

$$N_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q} : \mathbb{A}_n^\times \to \mathbb{A}^\times$$

où $\mathbb{A}_n^\times$ est l'anneau des adèles de F_n. Si $\mathcal{F}$ (dans l'ensemble (1')), $\mathcal{G}$ (dans l'ensemble (2')) et χ (dans l'ensemble (3')) se correspondent par les bijections ci-dessus pour X, alors $\mathcal{F}|X \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^n}$, $\mathcal{G}|Pic_{X/\mathbb{F}_q} \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^n}$ et $\chi \circ N_n$ se correspondent par les bijections ci-dessus pour $X \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^n}$ (cf. [SGA $4\frac{1}{2}$] [Sommes trig.] (1.7.7)).

(2.4) Soient $\mathcal{F}$ (dans l'ensemble (1')), $\mathcal{G}$ (dans l'ensemble (2')) et χ (dans l'ensemble (3')) se correspondant par les bijections ci-dessus. On a alors une fonction L attachée à $\mathcal{F}$

$$L(\mathcal{F}, T) = \frac{P_1(\mathcal{F}, T)}{P_0(\mathcal{F}, T) P_2(\mathcal{F}, T)}$$

où

$$P_i(\mathcal{F},T)=\det(1-T\,\mathrm{Frob}_q^*, H^i(X\otimes_{\mathbb{F}_q}\bar{\mathbb{F}}_q,\mathcal{F}))$$

($\bar{\mathbb{F}}_q$ est une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$ et Frob_q est le Frobenius géométrique de $W(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$).

D'après la formule des traces de Grothendieck (cf. [SGA 5] (XV, §3 n° 2) et [SGA $4\frac{1}{2}$] [Rapport] (4.10)) on a:

PROPOSITION 2.4.1. *La fraction rationnelle $L(\mathcal{F},T)\in\bar{\mathbb{Q}}_\ell(T)$ admet le développement en série formelle*

$$L(\mathcal{F},T)=\Sigma_{d\geq 0}(\Sigma_{D\in X^{(d)}(\mathbb{F}_q)}\chi(\mathcal{O}_X(D)))T^d$$

dans $\bar{\mathbb{Q}}_\ell[[T]]$.

3. SERIES D'EISENSTEIN PRINCIPALES PARTOUT NON RAMIFIES POUR GL_n SUR UN CORPS DE FONCTIONS

(3.0) On va donner une interprétation géométrique des séries d'Eisenstein principales partout non ramifiées pour GL_n sur un corps de fonction ainsi que de leurs "numérateurs".

(3.1) On conserve les notations de (2.1). On fixe un entier $n\geq 1$ et on considère le champ sur $\mathbb{F}_q$

$$\mathrm{Fib}_{X/\mathbb{F}_q,n}$$

des fibrés vectoriels de rang n, $\mathcal{L}$, sur X (ou $\mathcal{O}_X$-Modules localement libres de rang n). C'est un champ algébrique sur $\mathbb{F}_q$ dont les composantes connexes sont paramétrées par $\mathbb{Z}$: pour $\ell\in\mathbb{Z}$,

$$\mathrm{Fib}^\ell_{X/\mathbb{F}_q,n}$$

classifie les fibrés vectoriels sur X de rang n et de degré ℓ. Chacune de ces composantes connexes est localement de type fini, lisse et de dimension $n^2(g-1)$ sur $\mathbb{F}_q$ (cf. [Lau 3]5 pour la notion de dimension d'un champ).

On considère aussi le champ sur $\mathbb{F}_q$

$$\mathit{Fib}_{X/\mathbb{F}_q,(1^n)}$$

des drapeaux

$$\mathcal{L}_\cdot=(0=\mathcal{L}_0\subset\mathcal{L}_1\subset\cdots\subset\mathcal{L}_n=\mathcal{L})$$

où chaque $\mathcal{L}_i$ est un fibré vectoriel de rang i sur X, localement facteur direct de $\mathcal{L}_{i+1}$ en tant que $\mathcal{O}_X$-Module localement libre ($i = 0, \ldots, n-1$). C'est un champ algébrique sur $\mathbf{F}_q$; ses composantes connexes sont paramétrées par les suites d'entiers

$$\underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{Z}^n :$$

la composante connexe

$$\mathrm{Fib}^{\underline{\lambda}}_{X/\mathbf{F}_q,(1^n)}$$

classifie les drapeaux $\mathcal{L}.$ comme ci-dessus tels que

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{L}_i/\mathcal{L}_{i-1}$$

soit un $\mathcal{O}_X$-Module inversible de degréλ_i, pour $i = 1, \ldots, n$; elle est localement de type fini, lisse sur $\mathbf{F}_q$ et

$$\dim(\mathrm{Fib}^{\underline{\lambda}}_{X/\mathbf{F}_q,(1^n)}) = \frac{n(n+1)}{2}(g-1) + \sum_{1\leq i<j\leq n}(\lambda_j - \lambda_i)$$

(cf. [Lau 1]2).

On notera

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fib}_{X/\mathbf{F}_q,(1^n)} & & \\ \downarrow \pi & \searrow^{\rho} & \\ \mathrm{Fib}_{X/\mathbf{F}_q,n} & & (\mathrm{Pic}_{X/F_q})^n \end{array}$$

les projections naturelles

$$\begin{aligned} \pi(\mathcal{L}.) &= \mathcal{L} \\ \rho(\mathcal{L}.) &= (\mathcal{L}_1/\mathcal{L}_0, \ldots, \mathcal{L}_n/\mathcal{L}_{n-1}) = (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n); \end{aligned}$$

on notera

$$\pi^{\underline{\lambda}} : \mathrm{Fib}^{\underline{\lambda}}_{X/\mathbf{F}_q,(1^n)} \to Fib^{\ell}_{X/\mathbf{F}_q,n}$$

et

$$\rho^{\underline{\lambda}} : \mathrm{Fib}^{\underline{\lambda}}_{X/\mathbf{F}_q,(1^n)} \to \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Pic}^{\lambda_i}_{X/\mathbf{F}_q}$$

les restrictions de π et ρ respectivement à $\mathrm{Fib}^{\underline{\lambda}}_{X/\mathbf{F}_q,(1^n)}$ où $\ell = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$; π est représentable et localement de type fini et en fait $\pi^{\underline{\lambda}}$ est représentable et quasi-projective pour chaque $\underline{\lambda} \in \mathbf{Z}^n$.

Suivant une remarque de Weil, on a les équivalences de catégories

$$Fib_{X/\mathbb{F}_q,n}(\mathbb{F}_q)\tilde{\to}[GL_n(F)\backslash GL_n(\mathbb{A})/GL_n(\mathcal{O})]$$

et

$$Fib_{X/\mathbb{F}_q,(1^n)}(\mathbb{F}_q)\tilde{\to}[B_n(F)/GL_n(\mathbb{A})/GL_n(\mathcal{O})]$$

où $B_n \subset GL_n$ est le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures et où, pour tout groupe G agissant sur l'ensemble X la catégorie $[G\backslash X]$ est la catégorie des G-torseurs P munis d'un G-morphisme $P \to X$. De plus, π s'identifie à la projection canonique

$$[B_n(F)\backslash GL_n(\mathbb{A})/GL_n(\mathcal{O})] \to [GL_n(F)\backslash GL_n(\mathbb{A})/GL_n(\mathcal{O})].$$

Enfin, l'inclusion $B_n \hookrightarrow GL_n$ induit une équivalence de catégories

$$[B_n(F)\backslash B_n(\mathbb{A})/B_n(\mathcal{O})]\tilde{\to}[B_n(F)\backslash GL_n(\mathbb{A})/GL_n(\mathcal{O})]$$

et ρ s'identifie à la projection

$$\begin{aligned}[B_n(F)\backslash B_n(\mathbb{A})/B_n(\mathcal{O})] &\to (F^\times\backslash\mathbb{A}^\times/\mathcal{O}^\times)^n\\ B_n(F)bB_n(\mathcal{O}) &\mapsto (F^\times b_{11}\mathcal{O}^\times,\ldots,F^\times b_{nn}\mathcal{O}^\times).\end{aligned}$$

(3.2) On choisit $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ comme en (2.2). Soient $\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_n$ des $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux lisses de Weil de rang 1 sur X. On note $\mathcal{G}_1,\ldots,\mathcal{G}_n$ les $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux lisses de Weil de rang 1 sur $\mathrm{Pic}_{X/\mathbb{F}_q}$ correspondants et $\chi_1,\ldots,\chi_n$ les fonctions "trace de Frobenius" de $\mathcal{G}_1,\ldots,\mathcal{G}_n$ respectivement (cf. (2.3.1)).

Soient $T_1,\ldots,T_n$ des indéterminées indépendantes. Pour tout $\mathcal{L} \in \mathrm{ob}\,\mathrm{Fib}_{X/\mathbb{F}_q,n}(\mathbb{F}_q)$, on forme la série d'Eisenstein

$$E(\mathcal{L},\underline{\mathcal{F}},\underline{T}) = \sum_{\underline{\lambda}\in\mathbb{Z}^n} k^{\underline{\lambda}}(\mathcal{L},\underline{\mathcal{F}})\prod_{i=1}^{n} T_i^{\lambda_i} \tag{3.2.1}$$

où on a posé, pour tout $\underline{\lambda} \in \mathbb{Z}^n$,

$$k^{\underline{\lambda}}(\mathcal{L},\underline{\mathcal{F}}) = \Sigma_{\mathcal{L}.\in(\pi^{\underline{\lambda}})^{-1}(\mathcal{L})(\mathbb{F}_q)}\prod_{i=1}^{n}(\chi_i(\mathcal{A}_i)q^{-i\lambda_i}).$$

Il résulte immédiatement de la formule des traces de Grothendieck [SGA 5] (XV, §3 n° 2) que:

LEMME 3.2.2. *Pour tout* $\underline{\lambda} \in \mathbb{Z}^n$, *posons*

$$K^{\underline{\lambda}}(\underline{\mathcal{F}}) = R(\pi^{\underline{\lambda}})_!(\rho^{\underline{\lambda}})^* \boxtimes_{i=1}^{n} (\mathcal{G}_i | \operatorname{Pic}^i_{X/\mathbb{F}_q})(i\lambda_i)$$

(c'est un objet de $D^b_c(\operatorname{Fib}^{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}_{X/\mathbb{F}_q}, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ *ou plutôt de sa variante à la Weil). Alors,* $k^{\underline{\lambda}}(\mathcal{L}, \underline{\mathcal{F}})$ *est la fonction "trace de Frobenius" de* $K^{\underline{\lambda}}(\underline{\mathcal{F}})$.

(3.3) Considérons maintenant le produit de fonctions L

$$D(\underline{\mathcal{F}}, \underline{T}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} L(\mathcal{F}_j \otimes \mathcal{F}_i^{-1}, q^{-1} T_j T_i^{-1}).$$

D'après (2.4.1), ce produit de fractions rationnelles admet le développement en série formelle

$$D(\underline{\mathcal{F}}, \underline{T}) = \Sigma_{(D_{ji})_{(1 \leq i < j \leq n)}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\chi_j \chi_i^{-1})(\mathcal{O}_X(D_{ji}))(q^{-1} T_j T_i^{-1})^{d_{ji}})$$

où les D_{ji} parcourent les diviseurs effectifs sur X rationnels sur $\mathbb{F}_q$ et où d_{ji} désigne le degré de D_{ji}. On forme le produit

(3.3.1) $$\bar{E}(\mathcal{L}, \underline{\mathcal{F}}, \underline{T}) = D(\underline{\mathcal{F}}, \underline{T}).E(\mathcal{L}, \underline{\mathcal{F}}, \underline{T});$$

c'est une série formelle

$$\bar{E}(\mathcal{L}, \underline{\mathcal{F}}, \underline{T}) = \sum_{\underline{\lambda}' \in \mathbb{Z}^n} \bar{k}^{\underline{\lambda}'}(\mathcal{L}, \underline{\mathcal{F}}) \prod_{j=1}^{n} T_j^{\lambda'_j}$$

et on se propose de donner une interprétation cohomologique de ses coefficients $\bar{k}^{\underline{\lambda}'}(\mathcal{L}, \underline{\mathcal{F}})$ analogue à (3.3.2).

Pour cela, considérons le champ sur $\mathbb{F}_q$

$$\overline{\operatorname{Fib}}_{X/\mathbb{F}_q,(1^n)}$$

des drapeaux généralisés

$$\mathcal{L}.' = (0 = \mathcal{L}'_0 \subset \mathcal{L}'_1 \subset \cdots \subset \mathcal{L}'_n = \mathcal{L})$$

où maintenant chaque $\mathcal{L}'_j$ est un $\mathcal{O}_X$-Module localement libre de rang j mais pas nécessairement localement facteur direct de $\mathcal{L}'_{j+1} (j =$

$0,\ldots,n-1$). C'est un champ algébrique localement de type fini et lisse sur $\mathbf{F}_q$, contenant $\mathrm{Fib}_{X/\mathbf{F}_q,(1^n)}$ comme ouvert dense. On note

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathrm{Fib}}_{X/\mathbf{F}_q,(1^n)} & & \\ \bar{\pi}\downarrow & \searrow^{\bar{\rho}} & \\ \mathrm{Fib}_{X/\mathbf{F}_q,n} & & (\mathrm{Pic}_{X/\mathbf{F}_q})^n \end{array}$$

les deux morphismes de champs sur $\mathbf{F}_q$ définis comme suit

$$\bar{\pi}(\mathcal{L}.') = \mathcal{L}'_n = \mathcal{L}$$
$$\bar{\rho}(\mathcal{L}.') = (\det(\mathcal{A}'_1),\ldots,\det(\mathcal{A}'_n))$$

où, pour $i = 1,\ldots,n$,

$$\mathcal{A}'_j = \mathcal{L}'_j/\mathcal{L}'_{j-1}$$

est un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent de rang générique 1 et où

$$\det(\mathcal{A}'_j) = (\overset{j}{\Lambda}\,\mathcal{L}'_j) \otimes (\overset{j-1}{\Lambda}\,\mathcal{L}'_{j-1})^{\otimes -1}$$

est le $\mathcal{O}_X$-Module inversible “déterminant” de $\mathcal{A}'_j$ (cf. [Kn-Mu]).

Bien entendu, les composantes connexes de $\overline{\mathrm{Fib}}_{X/\mathbf{F}_q,(1^n)}$ sont encore paramétrées par $\mathbf{Z}^n$ et on note

$$\bar{\pi}^{\underline{\lambda}'} : \overline{\mathrm{Fib}}^{\underline{\lambda}}_{X'/\mathbf{F}_q,(1^n)} \to \mathrm{Fib}^{\lambda'_1+\cdots+\lambda'_n}_{X/\mathbf{F}_q}$$

et

$$\bar{\rho}^{\underline{\lambda}'} : \overline{\mathrm{Fib}}^{\underline{\lambda}}_{X'/\mathbf{F}_q,(1^n)} \to \prod_{j=1}^{n} \mathrm{Pic}^{\lambda'_j}_{X/\mathbf{F}_q}$$

les restrictions de $\bar{\pi}$ et $\bar{\rho}$ respectivement à la composante connexe d'indice $\underline{\lambda}' \in \mathbf{Z}^n$. Le morphisme de champ $\bar{\pi}$ est représentable et localement de type fini et en fait $\bar{\pi}^{\underline{\lambda}'}$ est représentable et projectif pour chaque $\underline{\lambda}' \in \mathbf{Z}^n$.

THÉORÈME 3.3.2. *Pour tout $\underline{\lambda}' \in \mathbf{Z}^n$, posons*

$$\bar{K}^{\underline{\lambda}'}(\underline{\mathcal{F}}) = R(\bar{\pi}^{\underline{\lambda}'})_*(\bar{\rho}^{\underline{\lambda}'})^* \boxtimes_{j=1}^{n} (\mathcal{G}_j|\,\mathrm{Pic}^{\lambda'_j}_{X/\mathbf{F}_q})(j\lambda'_j)$$

(c'est un objet de $D_c^b(\mathrm{Fib}_{X/\mathbb{F}_q,n}^{\lambda'_1+\cdots+\lambda'_n}, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ ou plutôt de sa variante de Weil). Alors, $\bar{k}^{\underline{\lambda}'}(\mathcal{L}, \underline{\mathcal{F}})$ est la fonction "trace de Frobenius" de $\bar{K}^{\underline{\lambda}'}(\underline{\mathcal{F}})$.

PREUVE: Compte-tenu de la formule des traces de Grothendieck ([SGA 5] (XV, §3 n° 2)), on doit comparer, pour tout $\underline{\lambda}' \in \mathbb{Z}^n$, les deux expressions suivantes:

$$\sum_{\mathcal{L}.'} \prod_{j=1}^{n} \chi_j(\det \mathcal{A}'_j),$$

où $\mathcal{L}.'$ parcourt $(\bar{\pi}^{\underline{\lambda}'})^{-1}(\mathcal{L})(\mathbb{F}_q)$, et

$$\sum_{\mathcal{L}.,(D_{ji})_{1\leq i<j\leq n}} q^{\sum_{1\leq i<j\leq n}(j-i-1)d_{ji}} \prod_{j=1}^{n} \chi_j(\mathcal{A}_j(-\sum_{\ell=j+1}^{n} D_{\ell j} + \sum_{k-1}^{j-1} D_{jk})),$$

où $\mathcal{L}.$ parcourt $(\pi^{\underline{\lambda}})^{-1}(\mathcal{L})(\mathbb{F}_q)$ et les D_{ji} parcourent $X^{(d_{ji})}(\mathbb{F}_q)$ pour tous les $\underline{\lambda} \in \mathbb{Z}^n$ et $(d_{ji})_{1\leq i<j\leq n}, d_{ji} \in \mathbb{N}$, tels que

$$\lambda'_j = \lambda_j - \sum_{l=j+1}^{n} d_{lj} + \sum_{k=1}^{j-1} d_{jk} \quad (j = 1, \ldots, n)$$

(sous ces conditions, on a

$$\sum_{j=1}^{n} j\lambda'_j = \sum_{j=1}^{n} j\lambda_j + \sum_{1\leq i<j\leq n} (j-i)d_{ji}).$$

Pour cela, on va construire une application

$$\mathcal{L}.' \mapsto (\mathcal{L}., (D_{ji})_{1\leq i<j\leq n})$$

dont le cardinal de la fibre en $(\mathcal{L}., (D_{ji})_{1\leq i<j\leq n})$ est

$$q^{\sum_{1\leq i<j\leq n}(j-i-1)d_{ji}}$$

et telle que

$$\det \mathcal{A}'_j = \mathcal{A}_j(-\sum_{l=j+1}^{n} D_{lj} + \sum_{k=1}^{j-1} D_{jk})$$

si $\mathcal{L}.'$ a pour image $(\mathcal{L}., (D_{ji})_{1\leq i<j\leq n})$.

Soit donc $\mathcal{L}.' \in (\bar{\pi}^{\underline{\lambda}'})^{-1}(\mathcal{L})(\mathbb{F}_q)$ un drapeau généralisé. Pour chaque $i = 1, \ldots, n$, le sous-$\mathcal{O}_X$-Module $\mathcal{L}'_i \subset \mathcal{L}$ engendre un unique sous-fibré vectoriel de rang i, $\mathcal{L}'_i \subset \mathcal{L}_i \subset \mathcal{L}$, et, comme $\mathcal{L}'_{i-1} \subset \mathcal{L}'_i$, on a aussi $\mathcal{L}_{i-1} \subset \mathcal{L}_i$. Par suite, on a attaché à $\mathcal{L}.'$ un drapeau

$$\mathcal{L}. = (0 = \mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{L}_n = \mathcal{L}).$$

On regardera $\mathcal{L}$ comme un objet bi-filtré: on a les filtrations

$$F. = (0 = \mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{L}_n = \mathcal{L})$$

et

$$F.' = (0 = \mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{L}_n = \mathcal{L})$$

avec

$$gr_i^F \mathcal{L} = \mathcal{A}_i$$

un $\mathcal{O}_X$-Module inversible de degré λ_i et

$$gr_j^{F'} \mathcal{L} = \mathcal{A}'_j$$

un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent de rang générique 1 et de degré λ'_j. La filtration $F.'$ induit une filtration

$$0 = F'_0\mathcal{A}_i = \cdots = F'_{i-1}\mathcal{A}_i \subset F'_i\mathcal{A}_i \subset \cdots \subset F'_n\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_i$$

sur $\mathcal{A}_i$ et la filtration $F.$ induit une filtration

$$0 = F_0\mathcal{A}'_j \subset F_1\mathcal{A}'_j \subset \cdots \subset F_j\mathcal{A}'_j = F_{j+1}\mathcal{A}'_j = \cdots = F_n\mathcal{A}'_j = \mathcal{A}'_j$$

sur $\mathcal{A}'_j$ (on a $\mathcal{L}'_i \subset \mathcal{L}_i$ pour tout i). De plus, on a

$$gr_j^{F'} \mathcal{A}_i = gr_i^F \mathcal{A}'_j = gr_j^{F'}\, gr_i^F \mathcal{L}$$

pour tous i, j.

On définit alors des diviseurs effectifs $D_{ji} (1 \leq i < j \leq n)$ rationnels sur $\mathbb{F}_q$ par

$$F'_j\mathcal{A}_j = \mathcal{A}_i(-D_{j+1i} - \cdots - D_{ni}) \quad (1 \leq i < j \leq n)$$

ou encore

$$gr_j^{F'}\mathcal{A}_i \simeq \mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X(-D_{ji}) \quad (1 \le i < j \le n).$$

Comme

$$gr_j^F\mathcal{A}_i = \begin{cases} \mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X(-D_{jk}), & \text{si } k < j \\ \mathcal{A}_j(-\sum_{l=j+1}^n D_{lj}), & \text{si } k = j \\ 0, & \text{si } k > j \end{cases}$$

on a bien

$$\det \mathcal{A}'_j = \mathcal{A}_j(-\sum_{l=j+1}^{n} D_{lj} + \sum_{k=1}^{j-1} D_{jk})$$

et

$$\lambda'_j = \lambda_j - \sum_{l=j+1}^{n} d_{lj} + \sum_{k=1}^{j-1} d_{jk}$$

où d_{ji} est le degré de D_{ji}.

Fixons enfin $\mathcal{L}.$ et $(D_{ji})_{1\le i<j\le n}$ et calculons le nombre $\mathcal{L}.'$ donnant $(\mathcal{L}., (D_{ji})_{1\le i<j\le n})$ par le procédé ci-dessus. On doit montrer que le nombre de ces $\mathcal{L}.'$ est q^N où

$$N = \sum_{1\le i<j\le n} (j-i-1)d_{ji}$$

i.e.

$$N = \sum_{i=1}^{n} N_i$$

où

$$N_i = \sum_{\substack{1\le k\le i-1 \\ i+1\le l\le n}} d_{lk}$$

Pour cela, on va montrer par récurrence sur i que le nombre de filtrations

$$0 = F'_0\mathcal{L}_i \subset F'_1\mathcal{L}_i \subset \cdots \subset F'_n\mathcal{L}_i = \mathcal{L}_i$$

de la forme

$$F'_j\mathcal{L}_i = \mathcal{L}'_j \cap \mathcal{L}_i \quad (j = 0, \ldots, n)$$

pour un $\mathcal{L}.'$ comme ci-dessus est égal à

$$q^{N_1+\ldots+N_i}$$

ce qui achèvera bien entendu la démonstration du théorème.

Tout revient à voir que pour chaque diagramme

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathcal{L}_{i-1} & \hookrightarrow & \mathcal{L}_i & \twoheadrightarrow & \mathcal{A}_i \\
\| & & & & \| \\
F'_n\mathcal{L}_{i-1} & & & & \mathcal{A}_i \\
\uparrow & & & & \uparrow \\
F'_{n-1}\mathcal{L}_{i-1} & & & & \mathcal{A}_i(-D_{ni}) \\
\uparrow & & & & \uparrow \\
\vdots & & & & \vdots \\
\uparrow & & & & \uparrow \\
F'_i\mathcal{L}_{i-1} & & & & \mathcal{A}_i(-D_{i+1,i}-\cdots-D_{ni}) \\
\uparrow & & & & \uparrow \\
F'_{i-1}\mathcal{L}_{i-1} & & & & 0 \\
\uparrow & & & & \| \\
\vdots & & & & \vdots \\
\uparrow & & & & \| \\
F'_1\mathcal{L}_{i-1} & & & & 0
\end{array}
\tag{3.3.2.1}
$$

il y a q^{N_i} façons de le compléter en un diagramme

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathcal{L}_{i-1} & \hookrightarrow & \mathcal{L}_i & \twoheadrightarrow & \mathcal{A}_i \\
\| & & \| & & \| \\
F'_n\mathcal{L}_{i-1} & \hookrightarrow & F'_n\mathcal{L}_i & \twoheadrightarrow & \mathcal{A}_i \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
F'_{n-1}\mathcal{L}_{i-1} & \hookrightarrow & F'_{n-1}\mathcal{L}_i & \twoheadrightarrow & \mathcal{A}_i(-D_{ni}) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
F'_i\mathcal{L}_{i-1} & \hookrightarrow & F'_i\mathcal{L}_i & \twoheadrightarrow & \mathcal{A}_i(-D_{i+1i}-\cdots-D_{ni}) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
F'_{i-1}\mathcal{L}_{i-1} & \hookrightarrow & F'_{i-1}\mathcal{L}_i & \twoheadrightarrow & 0 \\
\uparrow & & \uparrow & & \| \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\uparrow & & \uparrow & & \| \\
F'_1\mathcal{L}_{i-1} & = & F'_1\mathcal{L}_i & \twoheadrightarrow & 0
\end{array}
\tag{3.3.2.2}
$$

à lignes des suites exactes courtes. Or, le "RHom filtré"

$$R\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}((\mathcal{A}_i, F.'), (\mathcal{L}_{i-1}, F.'))$$

donne lieu à un triangle distingué

$$\begin{array}{ccc} & \frac{F_n'}{F_0'} R\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}((\mathcal{A}_i, F.'), (\mathcal{L}_{i-1}, F.')) & \\ \cdot \swarrow & & \nwarrow \\ F_0' R\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}((\mathcal{A}_i, F.'), (\mathcal{L}_{i-1}, F.')) & \longrightarrow & R\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{A}_i, \mathcal{L}_{i-1}) \end{array}$$

(cf. [Il] (V, 2.2) et [B-B-D] (3.1)) et pour que l'on puisse compléter le diagramme (3.3.2.1) en un diagramme (3.3.2.2), il faut et il suffit que l'image de la classe d'extension

$$(\mathcal{L}_{i-1} \hookrightarrow \mathcal{L}_i \twoheadrightarrow \mathcal{A}_i) \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{A}_i, \mathcal{L}_{i-1})$$

dans

$$H^1(\frac{F_n'}{F_0'} R\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}((\mathcal{A}_i, F.'), (\mathcal{L}_{i-1}, F.')))$$

soit nulle, le nombre des diagrammes (3.3.2.2) complétant le diagramme (3.3.2.1) étant alors égal au cardinal de l'espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{F}_q$

$$H^0(\frac{F_n'}{F_0'} R\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}((\mathcal{A}_i, F.'), (\mathcal{L}_{i-1}, F.'))).$$

Le théorème est donc conséquence du lemme:

LEMME 3.3.2.3. *Pour tout entier $p \neq 0$,*

$$H^p(\frac{F_n'}{F_0'} R\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}((\mathcal{A}_i, F.'), (\mathcal{L}_{i-1}, F.'))) = 0$$

et

$$\chi(\frac{F_n'}{F_0'} R\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}((\mathcal{A}_i, F.'), (\mathcal{L}_{i-1}, F.'))) = N_i.$$

PREUVE DU LEMME: On a (cf. [Il] (V, 2.2))

$$\frac{F_n'}{F_0'} R\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}((\mathcal{A}_i, F.'), (\mathcal{L}_{i-1}, F.')))$$
$$= R\Gamma(X, \frac{F_n'}{F_0'} R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}((\mathcal{A}_i, F.'), (\mathcal{L}_{i-1}, F.'))).$$

Or

$$\frac{F'_n}{F'_0} R\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}((\mathcal{A}_i, F.'), (\mathcal{L}_{i-1}, F.'))$$

n'a de cohomologie qu'en degré 0 car

$$R\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{A}_i, \mathcal{L}_{i-1})$$

n'a de cohomologie qu'en degré 0 et car

$$F'_0 R\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{A}_i, \mathcal{L}_{i-1})$$

n'a de cohomologie qu'en degrés 0 et 1($\mathcal{A}_i$ et $\mathcal{L}_{i-1}$ sont localement libres et $\dim(X) = 1$). En outre

$$\underline{H}^0(\frac{F'_n}{F'_0} R\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}((\mathcal{A}_i, F.'), (\mathcal{L}_{i-1}, F.')))$$

est à support fini sur X car il en est ainsi de

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(gr_k^{F'} \mathcal{A}_i, gr_\ell^{F'} \mathcal{L}_{i-1})$$

pour tous $k < l$ (seul $gr_k^{F'} \mathcal{A}_i$ n'est pas à support fini mais $gr_\ell^{F'} \mathcal{L}_{i-1}$ est à support fini pour tout $l > i$ comme on le voit aisément par récurrence sur i). D'où la première assertion.

Pour ce qui est de la seconde assertion, on a

$$\begin{aligned}
\chi(\frac{F'_n}{F'_0} & R\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}((\mathcal{A}_i, F.'),(\mathcal{L}_{i-1}, F.'))) \\
&= \sum_{0 \leq k \leq l \leq n} \chi(R\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(gr_k^{F'} \mathcal{A}_i, gr_\ell^{F'} \mathcal{L}_{i-1})) \\
&= \sum_{i+1 \leq l \leq n} \deg(gr_\ell^{F'} \mathcal{L}_{i-1}) \\
&= \sum_{\substack{1 \leq k \leq i-1 \\ i+1 \leq l \leq n}} d_{lk} \\
&= N_i
\end{aligned}$$

d'où le lemme.

4. Induction Parabolique

(4.0) Sur le modèle des constructions géométriques du numéro précédant, nous allons maintenant définir et étudier un processus général d'induction parabolique géométrique.

(4.1) Nous nous placerons dans le cadre suivant. Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique $p \geq 0$ et soit X une courbe projective, lisse et connexe sur k de genre g. On fixe une clôture algébrique $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ de $\mathbb{Q}_\ell$ pour un nombre premier $\ell \neq p$.

Soient n un entier ≥ 1 et

$$\underline{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_s)$$

une partition de n $(\nu_1, \ldots, \nu_s \in \mathbb{Z}, \nu_1, \ldots, \nu_s > 0 \text{ et } \nu_1 + \cdots + \nu_s = n)$. On a alors un diagramme d'induction

$$\text{(4.1.1)} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Fib}_{X/k,\underline{\nu}} & & \\ \pi_{\underline{\nu}} \downarrow & \searrow^{\rho_{\underline{\nu}}} & \\ \mathrm{Fib}_{X/k,n} & & \prod_{i=1}^{s} \mathrm{Fib}_{X/k,\nu_s} \end{array}$$

où $\mathrm{Fib}_{X/k,n}$ (resp. $\mathrm{Fib}_{X/k,\nu_i} (i = 1, \ldots, s)$) est le champ sur k des fibrés vectoriels sur X de rang n (resp. ν_i) et où $Fib_{X/k,\nu.}$ est le champ sur k des drapeaux

$$\mathcal{L}. = (0 = \mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{L}_s = \mathcal{L})$$

avec $\mathcal{L}_i$ un fibré vectoriel de rang ν_i sur X, localement facteur direct de $\mathcal{L}_{i+1}$ en tant que $\mathcal{O}_X$-Module localement libre $(i = 0, \ldots, s-1)$; $\pi_{\underline{\nu}}$ et $\rho_{\underline{\nu}}$ sont les projections définies par

$$\pi_{\underline{\nu}}(\mathcal{L}.) = \mathcal{L}$$

et

$$\rho_{\underline{\nu}}(\mathcal{L}.) = (\mathcal{L}_1/\mathcal{L}_0, \ldots, \mathcal{L}_s/\mathcal{L}_{s-1}).$$

Si l'on fixe les degrés ℓ de $\mathcal{L}$ et λ_i de $\mathcal{L}_i/\mathcal{L}_{i-1}$ $(i = 1, \ldots, s)$, on obtient un diagramme

$$\text{(4.1.2)} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Fib}^{\underline{\lambda}}_{X/k,\underline{\nu}} & & \\ \pi^{\underline{\lambda}}_{\underline{\nu}} \downarrow & \searrow^{\rho^{\underline{\lambda}}_{\underline{\nu}}} & \\ \mathrm{Fib}^{\ell}_{X/k,n} & & \prod_{i=1}^{s} \mathrm{Fib}^{\lambda_i}_{X/k,\nu_i} \end{array}$$

$(\underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s),\ \ell = \lambda_1 + \cdots + \lambda_s,\ \lambda_i \in \mathbb{Z}\ (i = 1, \ldots, s))$.

Rappelons que:

LEMME 4.1.3.

(1) *Le champ* $\mathrm{Fib}^{\ell}_{X/k,n}$ *est algébrique, lisse et connexe de dimension* $n^2(g-1)$.

(2) *Le champ* $\mathrm{Fib}^{\underline{\lambda}}_{X/k,\underline{\nu}}$ *est algébrique, lisse et connexe de dimension*

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq s}(\nu_i\nu_j(g-1)+\nu_i\lambda_j-\nu_j\lambda_i).$$

(3) *Le morphisme* $\pi^{\underline{\lambda}}_{\underline{\nu}}$ *est représentable et quasi-projectif.*

PREUVE: Voir [Lau1]2.

Remarque 4.1.4. Le morphisme $\rho^{\underline{\lambda}}_{\underline{\nu}}$ n'est pas représentable mais il est facile de vérifier qu'il est lisse, de dimension relative

$$\sum_{1\leq i<j\leq s}(\nu_i\nu_j(g-1)+\nu_i\lambda_j-\nu_j\lambda_i).$$

Pour toute suite $\underline{\lambda}=(\lambda_1,\ldots,\lambda_s)\in\mathbb{Z}^s$ et toute suite

$$\underline{A}=(A_1,\ldots,A_s)$$

où

$$A_i\in \text{ ob } D^b_c(\mathrm{Fib}^{\lambda_i}_{X/k,\nu_i},\bar{\mathbb{Q}}_\ell)\quad (i=1,\ldots,s),$$

on peut alors former

$$(4.1.5)\qquad K^{\underline{\lambda}}_{\underline{\nu}}(\underline{A})=R(\pi^{\underline{\lambda}}_{\underline{\nu}})_!(\rho^{\underline{\lambda}}_{\underline{\nu}})^*\boxtimes_{i=1}^{s}A_i\in \text{ ob } D^b_c(\mathrm{Fib}^{\ell}_{X/k,n},\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$$

où $\ell=\lambda_1+\cdots+\lambda_s$.

(4.2) Le morphisme $\pi^{\underline{\lambda}}_{\underline{\nu}}$ de (4.1.2) est représentable et quasi-projectif mais non projectif en général. Cependant, il admet une compactification naturelle

$$(4.2.1)\qquad \begin{tikzcd} \overline{\mathrm{Fib}}^{\underline{\lambda}}_{X/k,\underline{\nu}} \arrow[d, "\bar{\pi}^{\underline{\lambda}}_{\underline{\nu}}"'] \arrow[dr, "\bar{\rho}^{\underline{\lambda}}_{\underline{\nu}}"] & \\ \mathrm{Fib}^{\ell}_{X/k,n} & \prod_{i=1}^{s}\mathrm{Coh}^{\lambda_i}_{X/k,\nu_i} \end{tikzcd}$$

où $\overline{\mathrm{Fib}}^{\underline{\lambda}}_{X/k,\underline{\nu}}$ est le champ sur k des drapeaux généralisés

$$\mathcal{L}_\cdot=(0=\mathcal{L}_0\subset\mathcal{L}_1\subset\cdots\subset\mathcal{L}_n=\mathcal{L})$$

avec $\mathcal{L}_i$ un $\mathcal{O}_X$-Module localement libre de rang $\nu_1+\cdots+\nu_i$ et de degré $\lambda_1+\cdots+\lambda_i$ pour $i=1,\ldots,s$ (on n'exige plus que $\mathcal{L}_i$ soit localement facteur direct de $\mathcal{L}_{i+1}$) et où $\mathrm{Coh}^{\lambda_i}_{X/k,\nu_i}$ est le champ sur k des $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents de rang générique ν_i et de degré λ_i ($i=1,\ldots,s$); les morphismes $\bar{\pi}^{\underline{\lambda}}_{\underline{\nu}}$ et $\bar{\rho}^{\underline{\lambda}}_{\underline{\nu}}$ sont définis par

$$\bar{\pi}^{\underline{\lambda}}_{\underline{\nu}}(\mathcal{L}_\cdot)=\mathcal{L}$$

et

$$\bar{\rho}^{\underline{\lambda}}_{\underline{\nu}}(\mathcal{L}_\cdot)=(\mathcal{L}_1/\mathcal{L}_0,\ldots,\mathcal{L}_s/\mathcal{L}_{s-1}).$$

De plus, le diagramme (4.2.1) s'étend naturellement en

$$\begin{array}{lcc} & \mathrm{Coh}^{\underline{\lambda}}_{X/k,\underline{\nu}} & \\ (4.2.2) & \bar{\pi}^{\underline{\lambda}}_{\underline{\nu}}\downarrow & \searrow^{\bar{\rho}^{\underline{\lambda}}_{\underline{\nu}}} \\ & \mathrm{Coh}^{\ell}_{X/k,n} & \prod_{i=1}^{s}\mathrm{Coh}^{\lambda_i}_{X/k,\nu_i} \end{array}$$

où $\mathrm{Coh}^{\underline{\lambda}}_{X/k,\underline{\nu}}$ est le champ sur k des drapeaux

$$\mathcal{L}_\cdot=(0=\mathcal{L}_0\subset\mathcal{L}_1\subset\cdots\subset\mathcal{L}_n=\mathcal{L})$$

avec $\mathcal{L}_i$ un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent de rang générique $\nu_1+\cdots+\nu_i$ et de degré $\lambda_1+\cdots+\lambda_i$ pour $i=1,\ldots,s$ et où $\mathrm{Coh}^{\ell}_{X/k,n}$ est le champ sur k des $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents de rang générique n et de degré ℓ; les morphismes $\bar{\pi}^{\underline{\lambda}}_{\underline{\nu}}$ et $\bar{\rho}^{\underline{\lambda}}_{\underline{\nu}}$ sont définis comme ci-dessus.

LEMME 4.2.3.

(1) *Le champ* $\mathrm{Coh}^{\ell}_{X/k,n}$ *est algébrique, lisse et connexe, de dimension* $n^2(g-1)$ *et contient le champ* $\mathrm{Fib}^{\ell}_{X/k,n}$ *comme ouvert dense.*

(2) *Le champ* $\mathrm{Coh}^{\underline{\lambda}}_{X/k,\underline{\nu}}$ *est algébrique, lisse et connexe, de dimension*

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq s}(\nu_i\nu_j(g-1)+\nu_i\lambda_j-\nu_j\lambda_i)$$

et

$$\mathrm{Fib}^{\underline{\lambda}}_{X/k,\underline{\nu}}\subset\overline{\mathrm{Fib}}^{\underline{\lambda}}_{X/k,\underline{\nu}}\subset\mathrm{Coh}^{\underline{\lambda}}_{X/k,\underline{\nu}}$$

sont des ouverts denses.

(3) *Le morphisme* $\bar{\pi}^{\underline{\lambda}}_{\underline{\nu}}$ *est représentable et projectif.*

PREUVE: Voir [Lau 1]2 (le fait d'avoir remplacé $\mathrm{Fib}^{\ell}_{X/k,n}$ par $\mathrm{Coh}^{\ell}_{X/k,n}$ ne change en rien les arguments de loc. cit.).

Remarque (4.2.4). Le morphisme $\bar{\rho}^{\underline{\lambda}}_{\underline{\nu}}$ n'est pas représentable mais est lisse, de dimension relative

$$\sum_{1\leq i<j\leq s}(\nu_i\nu_j(g-1)+\nu_i\lambda_j-\nu_j\lambda_i).$$

Pour toute suite $\underline{\lambda}=(\lambda_1,\ldots,\lambda_s)\in\mathbb{Z}^s$ et toute suite

$$\underline{B}=(B_1,\ldots,B_s),$$

où

$$B_i\in \text{ ob } D^b_c(\mathrm{Coh}^{\lambda_i}_{X/k,\nu_i},\bar{\mathbb{Q}}_\ell)\quad (i=1,\ldots,s),$$

on peut alors former

$$(4.2.5)\qquad \bar{K}^{\underline{\lambda}}_{\underline{\nu}}(\underline{B})=R(\bar{\pi}^{\underline{\lambda}}_{\underline{\nu}})_*(\bar{\rho}^{\underline{\lambda}}_{\underline{\nu}})^*\boxtimes_{i=1}^s B_i\in \text{ ob } D^b_c(\mathrm{Coh}^{\ell}_{X/k,n},\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$$

où $\ell=\lambda_1+\cdots+\lambda_s$.

DEFINITION 4.2.6. *On dira qu'un $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau pervers irréductible B sur $\mathrm{Coh}^{\ell}_{X/k,n}$ est obtenu à partir des $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux pervers irréductibles $B_1,\ldots,B_s$ sur $\mathrm{Coh}^{\lambda_1}_{X/k,\nu_1},\ldots,\mathrm{Coh}^{\lambda_s}_{X/k,\nu_s}$ respectivement par induction parabolique si B est isomorphe à un sous-quotient de*

$${}^p\mathcal{H}^i(\bar{K}^{\underline{\lambda}}_{\underline{\nu}}(\underline{B}))$$

pour au moins un $j\in\mathbb{Z}$ (on a bien entendu $\underline{\nu}$ qui est une partition de n et $\ell=\lambda_1+\cdots+\lambda_n$).

(4.3) Nous allons maintenant étudier la géométrie des morphismes $\bar{\pi}^{\underline{\lambda}}_{\underline{\nu}}$; celle-ci est en partie contrôlée par la dimension des composantes irréductibles des produits fibrés

$$\mathrm{Coh}^{\underline{\lambda}'}_{X'/k,\underline{\nu}'}\times_{\mathrm{Coh}^{\ell}_{X/k,n}}\mathrm{Coh}^{\underline{\lambda}''}_{X/k,\underline{\nu}''}$$

où $\underline{\nu}'$ et $\underline{\nu}''$ sont des partitions de n, $\underline{\nu}'=(\nu'_1,\ldots,\nu'_{s'})$ et $\underline{\nu}''=(\nu''_1,\ldots,\nu''_{s''})$, et où $\underline{\lambda}'=(\lambda'_1,\ldots,\lambda'_{s'})$ et $\underline{\lambda}''=(\lambda''_1,\ldots,\lambda''_{s''})$ avec $\lambda'_1+\cdots+\lambda'_{s'}=\ell=\lambda''_1+\cdots+\lambda''_{s''}$.

Fixons $\underline{\nu}'$, $\underline{\nu}''$,$\underline{\lambda}'$ et $\underline{\lambda}''$ et notons $\mathcal{Z}$ le produit fibré ci-dessus; ce produit fibré s'interprète comme le champ sur k des triples

$$(\mathcal{L}, \mathcal{L}'_., \mathcal{L}''_.)$$

où $\mathcal{L}$ est un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent de rang générique n et de degré ℓ et où

$$\mathcal{L}'_. = (0 = \mathcal{L}'_0 \in \mathcal{L}'_1 \subset \cdots \subset \mathcal{L}'_{s'} = \mathcal{L})$$

et

$$\mathcal{L}''_. = (0 = \mathcal{L}''_0 \in \mathcal{L}''_1 \subset \cdots \subset \mathcal{L}''_{s''} = \mathcal{L})$$

sont des drapeaux de sous-$\mathcal{O}_X$-Modules cohérents de $\mathcal{L}$ avec

$$\mathrm{rang}(\mathcal{L}'_i/\mathcal{L}'_{i-1}) = \nu'_i, \deg(\mathcal{L}'_i/\mathcal{L}'_{i-1}) = \lambda'_i$$

pour $i = 1, \ldots, s'$ et

$$\mathrm{rang}(\mathcal{L}''_j/\mathcal{L}''_{j-1}) = \nu''_j, \deg(\mathcal{L}''_j/\mathcal{L}''_{j-1}) = \lambda''_j$$

pour $j = 1, \ldots, s''$. Ce champ est algébrique mais n'est ni lisse ni même irréductible. Cependant on va voir que l'on peut stratifier naturellement $\mathcal{Z}$ en sous-champs localement fermés qui eux sont lisses sur k (et probablement connexes ou vides mais je n'ai pas su vérifier ce dernier point).

Pour cela, considérons l'ensemble W des couples

$$w = ((\nu_{ij})_{\substack{1\leq i\leq s'\\ 1\leq j\leq s''}}, (\lambda_{ij})_{\substack{1\leq i\leq s'\\ 1\leq j\leq s''}})$$

où $\nu_{ij} \in \mathbb{N}, \lambda_{ij} \in \mathbb{Z}$ et où

$$\begin{cases} \nu_{i1} + \cdots + \nu_{is''} = \nu'_i, & (i = 1, \ldots, s') \\ \nu_{ij} + \cdots + \nu_{s'j} = \nu''_j, & (j = 1, \ldots, s'') \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \lambda_{i1} + \cdots + \lambda_{is''} = \lambda'_i, & (i = 1, \ldots, s') \\ \lambda_{ij} + \cdots + \lambda_{s'j} = \lambda''_j, & (j = 1, \ldots, s'') \end{cases}$$

(on peut aussi imposer $\lambda_{ij} \geq 0$ si $\nu_{ij} = 0$). Chaque triple $(\mathcal{L}, \mathcal{L}'_., \mathcal{L}''_.)$ définit un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent bifiltré

$$(\mathcal{L}, F'_., F''_.)$$

de manière évidente, de bigradué

$$gr_i^{F'} gr_j^{F''} \mathcal{L} = (\mathcal{L}'_i \cap \mathcal{L}''_j)/((\mathcal{L}'_{i-1} \cap \mathcal{L}''_j) + (\mathcal{L}'_i \cap \mathcal{L}''_{j-1})).$$

Alors, pour chaque $w \in W$, on introduit le sous-champ

$$\mathcal{Z}_w \subset \mathcal{Z}$$

des triples $(\mathcal{L}, \mathcal{L}'_., \mathcal{L}''_.)$ tels que

$$\begin{cases} \operatorname{rang}(gr_i^{F'} gr_j^{F''} \mathcal{L}) = \nu_{ij} \\ \deg(gr_i^{F'} gr_j^{F''} \mathcal{L}) = \lambda_{ij} \end{cases}$$

pour $1 \leq i \leq s'$, $1 \leq j \leq s''$.

PROPOSITION 4.3.1. *Pour chaque $w \in W$, $\mathcal{Z}_w$ est un sous-champ algébrique localement fermé de $\mathcal{Z}$, lisse sur k, purement de dimension*

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq k \leq s' \\ 1 \leq j \leq l \leq s''}} (\nu_{ij}\nu_{k\ell}(g-1) + \nu_{ij}\lambda_{k\ell} - \nu_{k\ell}\lambda_{ij}).$$

De plus $\mathcal{Z}$ est réunion disjointe des $\mathcal{Z}_w$.

PREUVE: Le fait que $\mathcal{Z}_w$ soit localement fermé et que $\mathcal{Z}$ soit réunion disjointe des $\mathcal{Z}_w$ résulte aussitôt du théorème de platitude générique et du théorème de semi-continuité du polynôme de Hilbert ([EGA] (IV, 6.9.1) et (III, 7.9); [Mu] Lecture 8).

La théorie du complexe cotangent ([Il] II) entraîne alors la proposition. En effet, la fibre en $(\mathcal{L}, \mathcal{L}'_., \mathcal{L}''_.) \in \mathcal{Z}_w$ du complexe cotangent $L_{\mathcal{Z}_w/k}$ s'identifie canoniquement au complexe

$$(F'_{s'}F''_{s''}/(F'_{-1} + F''_{-1}))\, R\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}((\mathcal{L}, F'_., F''_.), \Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{L}, F'_., F''_.))$$

(il s'agit d'un "RHom bifiltré", cf. [Il] (V, 2.2) et [De 3] (7.1)). Or ce dernier complexe est d'amplitude parfaite [0,1] et donc $\mathcal{Z}_w$ est lisse en $(\mathcal{L}, \mathcal{L}'_., \mathcal{L}''_.)$ de dimension la caractéristique d'Euler-Poincaré de ce dernier complexe, soit encore

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq k \leq s' \\ 1 \leq j \leq l \leq s''}} \chi(R\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(gr_i^{F'} gr_j^{F''} \mathcal{L}, \Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} gr_k^{F'} gr_\ell^{F''} \mathcal{L}))$$

et il ne reste plus qu'à appliquer le théorème de Riemann-Roch pour les courbes.

Avant de discuter plus en détails deux cas particuliers de la proposition ci-dessus, rappelons le critère suivant:

LEMME 4.3.2. *Soit $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un morphisme représentable et projectif entre deux champs algébriques connexes et lisses sur k. Notons $\mathcal{Z}$ le produit fibré $\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}$ et $(\mathcal{Z}_\alpha)_{\alpha \in A}$ les composantes irréductibles de $\mathcal{Z}$. Alors:*

(1) *pour que le morphisme*

$$f : \mathcal{X} \to f(\mathcal{X})$$

soit "semi-small" au sens de Goresky-MacPherson (cf. [Go-Ma] (6.2) (et en particulier génériquement fini), il faut et il suffit que

$$\dim \mathcal{Z}_\alpha \leq \dim \mathcal{X}, \forall \alpha \in A;$$

(2) *pour que le morphisme*

$$f : \mathcal{X} \to f(\mathcal{X})$$

soit "small" au sens de Goresky-MacPherson (cf. [Go-Ma] (6.2)), il faut et il suffit que

$$\dim \mathcal{Z}_\alpha \leq \dim \mathcal{X}, \forall \alpha \in A,$$

et que, pour chaque $k \in A$ tel que

$$\dim \mathcal{Z}_\alpha = \dim \mathcal{X}$$

le morphisme de projection sur $\mathcal{Y}$

$$z_\alpha \to f(\mathcal{X})$$

soit dominant.

Si $\underline{\nu}' = \underline{\nu}'' = (1^n)$, la donnée de $(\nu_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $\nu_{ij} \in \mathbb{N}$ et

$$\begin{aligned} \nu_{i1} + \cdots + \nu_{in} &= 1 \qquad (i = 1, \ldots, n) \\ \nu_{ij} + \cdots + \nu_{nj} &= 1 \qquad (i = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

équivaut à celle de

$$\sigma \in \mathfrak{S}_n$$

(on a

$$\nu_{ij} = \begin{cases} 0 \ si \ j \neq \sigma(i) \\ 1 \ si \ j = \sigma(i) \end{cases}$$

pour tous $i, j = 1, \ldots, n$).

COROLLAIRE 4.3.3. *Si $\underline{\nu}' = \underline{\nu}'' = (1^n)$ et $\underline{\lambda}' = \underline{\lambda}'' = \underline{\lambda}$, pour chaque*

$$w = (\sigma, (\lambda_{ij})_{1\leq i,j\leq n}) \in W,$$

$\mathcal{Z}_w$ est lisse sur k, purement de dimension

$$d_w = \frac{n(n+1)}{2}(g-1) + \sum_{1\leq i\leq j\leq n}(\lambda_j - \lambda_i) + \sum_{\substack{1\leq i\leq j\leq n \\ \sigma(i)>\sigma(j)}}(\lambda_{j\sigma(i)} - \lambda_{i\sigma(j)} + 1 - g).$$

Un autre cas particulier intéressant de la proposition (4.3.1) est celui où $\underline{\nu}' = \underline{\nu}'' = (1, n-1)$; alors, pour

$$w = ((\nu_{ij})_{1\leq i,j\leq 2}, (\lambda_{ij})_{1\leq i,j\leq 2}) \in W,$$

on a soit

$$\nu_{11} = 1, \nu_{12} = \nu_{21} = 0, \nu_{22} = n-1$$

soit

$$\nu_{11} = 0, \nu_{12} = \nu_{21} = 1, \nu_{22} = n-2$$

COROLLAIRE 4.3.4. *Si $\underline{\nu}' = \underline{\nu}'' = (1, n-1)$ et $\underline{\lambda}' = \underline{\lambda}'' = (\lambda_1, \lambda_2)$, $\mathcal{Z}_w$ est lisse sur k, purement de dimension*

$$d_w = \begin{cases} (n^2 - n + 1)(g-1) & \\ \qquad + \lambda_2 - (n-1)\lambda_1 - (n-2)\lambda_{12}, & \text{si } \nu_{11} = 1 \\ (n^2 - 2n + 2)(g-1) & \\ \qquad + 2\lambda_2 - 2(n-1)\lambda_1 - (n-2)\lambda_{11}, & \text{si } \nu_{11} = 0 \end{cases}$$

pour tout $w \in W$.

Remarque 4.3.5. Si $\underline{\nu}' = \underline{\nu}'' = (1, n-1), \underline{\lambda}' = \underline{\lambda}'' = (\lambda_1, \lambda_2)$ et

$$\lambda_2 - (n-1)\lambda_1 \leq (n-1)(g-1)$$

(resp.

$$\lambda_2 - (n-1)\lambda_1 < (n-1)(g-1) \text{ et } n > 2),$$

alors

$$\pi_{\underline{\nu}}^{\underline{\lambda}} : \overline{\mathrm{Fib}}_{X/k,(1,n-1)}^{(\lambda_1\lambda_2)} \to \pi_{\underline{\nu}}^{\underline{\lambda}} : \mathrm{Fib}_{X/k,(1,n-1)}^{(\lambda_1\lambda_2)}$$

est "semi-small" (resp. "small") au sens de Goresky-MacPherson. En effet, on a

$$\begin{aligned}\dim \overline{\mathrm{Fib}}^{(\lambda_1\lambda_2)}_{X/k,(1,n-1)}&\\ &= (n^2-n+1)(g-1)+\lambda_2-(n-1)\lambda_1,\end{aligned}$$

$$(n^2-2n+2)(g-1)+2\lambda_2-2(n-1)\lambda_1 \leq (n^2-n+1)(g-1) + \lambda_2-(n-1)\lambda_1$$

(resp.

$$(n^2-2n+2)(g-1)+2\lambda_2-2(n-1)\lambda_1 < (n^2-n+1)(g-1) + \lambda_2-(n-1)\lambda_1),$$

$$\lambda_{12}\geq 0 \text{ si } \nu_{11}=1$$

et

$$\lambda_{11}\geq 0 \text{ si } \nu_{11}=1$$

(en effet, si $\nu_{11} = 1, \lambda_{12}$ est le degré du $\mathcal{O}_X$-Module de torsion $\mathcal{L}'_1/(\mathcal{L}'_1\cap\mathcal{L}''_1)$ et, si $\nu_{11}=0, \mathcal{L}'_1\cap\mathcal{L}''_1$ est de torsion et donc nul puisque $\mathcal{L}$ est sans torsion).

(4.4) Si k est de caractéristique nulle, on peut aussi étudier la géométrie des morphismes $\bar{\pi}^{\underline{\lambda}}$ d'un point de vue microlocal.

Pour chaque morphisme de champs algébriques

$$f : \mathcal{X}\to\mathcal{Y}$$

on a un triangle distingué correspondant

$$f^*L_{\mathcal{Y}/k}\to L_{\mathcal{X}/k}\to L_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}\to$$

dans $D^{[-\infty,1]}_{q\,\mathrm{Coh}}(\mathcal{O}_X)$ par la théorie du complexe cotangent ([Il] (II, 2.1)); on notera simplement $L(f)$ ce triangle distingué dans la suite de cet article.

Lemme 4.4.1. *Soit $\mathcal{L}. \in$ ob $\mathrm{Coh}^{\underline{\lambda}}_{X/k,\underline{\nu}}(k)$. Alors la fibre en $\mathcal{L}.$ de $L(\bar{\pi}^{\underline{\lambda}}_{\underline{\nu}})$ s'identifie canoniquement au triangle distingué*

$$\begin{array}{ccc} & F_{-1}\,R\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}((\mathcal{L},F.),\Omega^1_X\otimes_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L},F.))[1] & \\ \cdot\swarrow & & \searrow \\ R\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}((\mathcal{L},\Omega^1_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{L}) & \to \left(\dfrac{F_s}{F_{-1}}\right) R\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}((\mathcal{L},F.),\Omega^1_X\otimes_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L},F.)) & \end{array}$$

et celle de $L(\bar{\rho}^{\lambda}_{\underline{\nu}})$ au triangle distingué

$$\begin{array}{ccc} & (\frac{F_s}{F_0})\, R\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}((\mathcal{L},F.),\Omega^1_X\otimes_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L},F.)) & \\ \cdot\swarrow & & \searrow \\ \bigoplus_{i=1}^{s} R\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\frac{\mathcal{L}_i}{\mathcal{L}_{i-1}},\Omega^1_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\frac{\mathcal{L}_i}{\mathcal{L}_{i-1}}) & \to & (\frac{F_s}{F_{-1}})\, R\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}((\mathcal{L},F.),\Omega^1_X\otimes_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L},F.)) \end{array}$$

(on a muni $\mathcal{L}$ de la filtration

$$F. = (0=\mathcal{L}_0\subset\mathcal{L}_1\subset\cdots\subset\mathcal{L}_s=\mathcal{L})$$

et les RHom sont filtrés).

PREUVE: Cela résulte aussitôt de la théorie de la déformation ([Il] IV) (voir aussi [Lau 1]2).

Remarque 4.4.2. Comme

$$\frac{F_s}{(F_0)}\, R\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}((\mathcal{L},F.),\Omega^1_X\otimes_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L},F.))$$

est d'amplitude parfaite $[0,1]$, on retrouve bien le fait que $\bar{\rho}^{\lambda}_{\underline{\nu}}$ est lisse (cf. (4.1.4) et (4.2.4)).

Le champ $T^*\,\mathrm{Coh}^{\ell}_{X/k,n}$ s'identifie naturellement au champ sur k des couples

$$(\mathcal{L},u)$$

avec $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent de rang générique n et de degré ℓ et

$$u:\mathcal{L}\to\Omega^1_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{L}$$

un homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-Modules; c'est un champ algébrique sur k (cf. [Lau 1] (1.1)).

On a défini dans [Lau 1] (1.14) un fermé conique lagrangien

$$\Lambda^{\ell}_{X/k,n}\subset T^*\,\mathrm{Fib}^{\ell}_{X/k,n},$$

le **cône nilpotent**. On étend $\Lambda^{\ell}_{X/k,n}$ à $\mathrm{Coh}^{\ell}_{X/k,n}$ de la façon suivante. On considère le sous-champ

$$\bar{\Lambda}^{\ell}_{X/k,n}\subset T^*\,\mathrm{Coh}^{\ell}_{X/k,n} \tag{4.4.3}$$

des couples $(\mathcal{L}, u)$ tels que

$$(u \otimes id_{(\Omega^1_X)^{\otimes(n-1)}}) \circ \cdots \circ (u \otimes id_{\Omega^1_X}) \circ u = 0$$

(u est nilpotent d'ordre n).

Les arguments de loc. cit. se généralisent sans difficultés et donnent:

PROPOSITION 4.4.4. *Le sous-champ* $\bar{\Lambda}^{\ell}_{X/k,n}$ *de* $T^* \operatorname{Coh}^{\ell}_{X/k,n}$ *est un fermé conique lagrangien.*

Soient

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{Z} \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ \mathcal{X} & & \mathcal{Y} \end{tikzcd}$$

une correspondance entre champs algébriques sur k; on suppose que $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Z}$ sont des champs algébriques lisses sur k. Alors, on a un diagramme correspondant au niveau des fibrés cotangents

$$\begin{tikzcd} & T^*\mathcal{X} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{Z} \arrow[dl, "\bar{f}"'] \arrow[dr, "F"] & & T^*\mathcal{Y} \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{Z} \arrow[dl, "G"'] \arrow[dr, "\bar{g}"] & \\ T^*\mathcal{X} & & T^*\mathcal{Z} & & T^*\mathcal{Y} \end{tikzcd}$$

Supposons de plus f représentable et propre et g lisse et soit $\Lambda \subset T^*\mathcal{Y}$ un fermé conique lagrangien. On appelle **image de** Λ par la correspondance ci-dessus le fermé conique isotrope

$$\bar{f}(F^{-1}(G(\bar{g}^{-1}(\Lambda))))$$

(G est propre car g est lisse et f est propre car f l'est).

Le résultat suivant est crucial pour le calcul des variétés caractéristiques des faisceaux automorphes.

PROPOSITION 4.4.5. *Soient* $\underline{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_s)$ *une partition de* n *et* $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \in \mathbb{Z}^s$ *avec* $\lambda_1 + \cdots + \lambda_s = \ell$. *Alors, l'image du fermé conique lagrangien*

$$\prod_{i=1}^{s} \bar{\Lambda}^{\lambda_i}_{X/k,\nu_i} \subset \prod_{i=1}^{s} T^* \operatorname{Coh}^{\lambda_i}_{X/k,\nu_i}$$

par la correspondance

$$\begin{tikzcd} & \operatorname{Coh}^{\underline{\lambda}}_{X/k,\underline{\nu}} \arrow[dl, "\pi^{\underline{\lambda}}_{\underline{\nu}}"'] \arrow[dr, "\bar{\rho}^{\underline{\lambda}}_{\underline{\nu}}"] & \\ \operatorname{Coh}^{\ell}_{X/k,n} & & \prod_{i=1}^{s} \operatorname{Coh}^{\lambda_i}_{X/k,\nu_i} \end{tikzcd}$$

est contenue dans $\bar{\Lambda}^{\lambda}_{X/k,n}$.

PREUVE: Compte-tenu de (4.4.1), on est ramené à prouver l'assertion suivante: soit $\mathcal{L}.$ un drapeau dans $\mathrm{Coh}^{\underline{\lambda}}_{X/k,\underline{\nu}}$ et soit $u : \mathcal{L} \to \Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}$ un homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-Modules ($\mathcal{L} = \mathcal{L}_s$) tels que

$$u(\mathcal{L}_i) \subset \Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}_i (i = 1, \ldots, s)$$

et que l'homomorphisme induit par u

$$\frac{\mathcal{L}_i}{\mathcal{L}_{i-1}} \to \Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \frac{\mathcal{L}_i}{\mathcal{L}_{i-1}}$$

est nilpotent d'ordre $\nu_i (i = 1, \ldots, s)$, alors u est nilpotent d'ordre n. Mais cette assertion est claire.

5. FAISCEAUX AUTOMORPHES SUR $\mathbb{P}^1_k$.

(5.0) Dans ce numéro, on va dresser la liste complète des "faisceaux automorphes" sur la droite projective sur k et calculer leur fonction "trace de Frobenius" quand $k = \mathbb{F}_q$.

(5.1) Soient $X = \mathbb{P}^1_k$ la droite projective sur k obtenue en adjoignant le point $\infty \in \mathbb{P}^1_k(k)$ à la droite affine $\mathbb{A}^1_k = \mathrm{Spec}(k[t])$.

D'après Grothendieck ([Gr]), tout fibré vectoriel de rang n sur X est isomorphe à

$$\mathcal{O}(\underline{\lambda}) = \mathcal{O}_X(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_X(\lambda_n)$$

pour une unique suite

$$\underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$$

avec $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$; le degré de $\mathcal{O}(\underline{\lambda})$ est

$$\ell = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n.$$

Le groupe des automorphismes $G(\underline{\lambda})$ de $\mathcal{O}(\underline{\lambda})$ est un groupe algébrique sur k admettant le dévissage

$$1 \to G_u(\underline{\lambda}) \to G(\underline{\lambda}) \to \bar{G}(\underline{\lambda}) \to 1$$

où $G_u(\underline{\lambda})$ est le radical unipotent de $G(\underline{\lambda})$ et $\bar{G}(\underline{\lambda})$ est réductif. Plus précisément, soient $B_n \subset GL_n$ le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures et $T_n \subset B_n \subset GL_n$ le tore maximal des matrices diagonales. Chaque $\underline{\lambda} \in \mathbb{Z}^n$ définit un sous-groupe à 1 paramètre noté encore

$$\underline{\lambda} : \mathbb{G}_m \to T_n, \mathcal{Z} \mapsto \mathrm{diag}(\mathcal{Z}^{\lambda_1}, \dots, \mathcal{Z}^{\lambda_n})$$

et la condition $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ équivaut à la condition

$$< \alpha_i, \underline{\lambda} > \geq 0 \qquad (i = 1, \dots, n-1),$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ sont les racines simples de (GL_n, T_n) relativement à B_n. Par suite, chaque $\underline{\lambda} \in \mathbb{Z}^n$ tel que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ définit un sous-groupe parabolique $P(\underline{\lambda})$ de GL_n contenant B_n, à savoir le sous-groupe engendré par le centralisateur $L(\underline{\lambda})$ de $\underline{\lambda}$ dans GL_n et B_n; $L(\underline{\lambda})$ est le facteur de Levi de $P(\underline{\lambda})$ contenant T_n; on note $U(\underline{\lambda})$ le radical unipotent de $P(\underline{\lambda})$. On a alors

$$\bar{G}(\underline{\lambda}) = L(\underline{\lambda})_k$$

et

$$G_u(\underline{\lambda}) = H^0(X, \mathcal{U}(\underline{\lambda}))$$

où $\mathcal{U}(\underline{\lambda})$ est le $U(\underline{\lambda})_k$-torseur sur X associé au $\mathbb{G}_{m,k}$-torseur tautologique

$$\begin{array}{c} \mathbb{A}_k^2 - \{(0,0)\} \\ \downarrow \\ \mathbb{P}_k^1 \end{array}$$

par l'action de $\mathbb{G}_{m,k}$ sur $U(\underline{\lambda})_k$ suivante:

$$(\mathcal{Z}, u) \mapsto \underline{\lambda}(\mathcal{Z})^{-1} u \underline{\lambda}(\mathcal{Z}).$$

En particulier, si $R \subset X^*(T_n)$ est l'ensemble des racines de (GL_n, T_n), on a

$$\dim \bar{G}(\underline{\lambda}) = n + \#\{\alpha \in R| < \alpha, \underline{\lambda} >= 0\}$$

et

$$\dim G_u(\underline{\lambda}) = \sum_{\substack{\alpha \in R \\ <\alpha, \underline{\lambda}> > 0}} (1 + < \alpha, \underline{\lambda} >).$$

Sur $X_*(T_n)$ et donc sur l'ensemble des $\underline{\lambda} \in \mathbb{Z}^n$ tels que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ on a un ordre partiel $\underline{\lambda} \geq \underline{\mu}$ défini par $\underline{\lambda} - \underline{\mu}$ combinaison linéaire à coefficients ≥ 0 de coracines simples pour (GL_n, T_n) relativement à B_n, i.e.

$$\begin{cases} \lambda_1 \geq \mu_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \geq \mu_1 + \mu_2 \\ \quad \cdots\cdots \\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1} \geq \mu_1 + \cdots + \mu_{n-1} \\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \mu_1 + \cdots + \mu_n \end{cases}$$

Pour chaque $\ell \in \mathbf{Z}$, l'ensemble des $\underline{\lambda} \in \mathbf{Z}^n$ tels que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ et $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \ell$ admet alors un plus petit élément pour cet ordre partiel à savoir

$$\underline{\lambda}(\ell) = (\lambda + 1, \ldots, \lambda + 1, \lambda, \ldots, \lambda)$$

(r fois $\lambda + 1$, $n - r$ fois λ où

$$\ell = n\lambda + r \quad (\lambda \in \mathbf{Z}, 0 \leq r \leq n-1)).$$

Le champ algébrique connexe et lisse sur k, de dimension $-n^2$, des fibrés vectoriels de rang n et degré ℓ sur X, $\mathrm{Fib}^{\ell}_{X/k,n}$, admet donc la stratification de Harder-Narasimhan-Shatz suivante (cf. [Sh] et [Ra]). On a

$$\mathrm{Fib}^{\ell}_{X/k,n} = \bigcup_{\substack{\underline{\lambda} \in \mathbf{Z}^n \\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \ell}} \mathcal{S}^{\underline{\lambda}}$$

(réunion disjointe), où chaque strate $\mathcal{S}^{\underline{\lambda}}$ est localement fermée dans $\mathrm{Fib}^{\ell}_{X/k,n}$ et isomorphe au champ algébrique sur k

$$BG(\underline{\lambda})$$

classifiant les $G(\underline{\lambda})$-torseurs; en particulier, chaque strate est connexe et lisse, de dimension

$$-\dim G(\underline{\lambda}) = -n - \sum_{\substack{\alpha \in R \\ <\alpha, \underline{\lambda}> \geq 0}} (1 + <\alpha, \underline{\lambda}>)$$

sur k. La strate ouverte est $\mathcal{S}^{\underline{\lambda}(\ell)}$ et, pour tout $\underline{\lambda}$, l'adhérence de la strate $\mathcal{S}^{\underline{\lambda}}$ est la réunion disjointe de strates

$$\bar{\mathcal{S}}^{\underline{\lambda}} = \bigcup_{\underline{\lambda} \leq \underline{\mu}} \mathcal{S}^{\underline{\mu}}.$$

On note

$$\mathcal{S}^{\underline{\lambda}} \overset{j^{\underline{\lambda}}}{\hookrightarrow} \mathrm{Fib}^{\ell}_{X/k,n}$$

l'inclusion.

(5.2) Pour chaque $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{Z}^n$ avec$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ et $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \ell$, on a alors le complexe d'intersection

$$A^{\underline{\lambda}} = \underline{IC}(\bar{\mathcal{S}}^{\underline{\lambda}}, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$$

qui, à un décalage près de $-\dim G(\underline{\lambda})$, est le $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau pervers irréductible $j^{\underline{\lambda}}_{!*}\bar{\mathbb{Q}}_\ell[\dim G(\underline{\lambda})]$ sur $\mathrm{Fib}^{\ell}_{X/k,n}$ supporté par $\bar{\mathcal{S}}^{\underline{\lambda}}$.

On note $\bar{A}^{\underline{\lambda}}$ le prolongement intermédiaire de $A^{\underline{\lambda}}$ par l'immersion ouverte

$$\mathrm{Fib}^{\ell}_{X/k,n} \hookrightarrow \mathrm{Coh}^{\ell}_{X/k,n};$$

c'est aussi, à un décalage près de $-\dim G(\underline{\lambda})$, un $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau pervers irréductible sur $\mathrm{Coh}^{\ell}_{X/k,n}$ supporté par l'adhérence de $\bar{\mathcal{S}}^{\underline{\lambda}}$ dans $\mathrm{Coh}^{\ell}_{X/k,n}$.

PROPOSITION 5.2.1. *Pour chaque $\underline{\lambda}, A^{\underline{\lambda}}$ est facteur direct dans D^b_c $(\mathrm{Coh}^{\ell}_{X/k,n}, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ du complexe*

$$\bar{K}^{\underline{\lambda}}_{(1n)}(\bar{\mathbb{Q}}_\ell) = R(\bar{\pi}^{\underline{\lambda}}_{(1n)})_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell$$

défini en (4.2.5).

PREUVE: C'est une conséquence du théorème de décomposition ([B-B-D] (6.2.5)). En effet, pour $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ et $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \ell$, l'image de $\overline{\mathrm{Fib}}^{\underline{\lambda}}_{X/k,(1^n)}$ dans $\mathrm{Fib}^{\ell}_{X/k,n}$ par $\bar{\pi}^{\underline{\lambda}}_{(1^n)}$ n'est autre que l'adhérence $\bar{\mathcal{S}}^{\underline{\lambda}}$ de la strate $\mathcal{S}^{\underline{\lambda}}$ et la restriction de $\bar{\pi}^{\underline{\lambda}}_{(1^n)}$ à la strate $\mathcal{S}^{\underline{\lambda}}$ (qui n'est autre que la restriction de $\bar{\pi}^{\underline{\lambda}}_{(1^n)}$ à $\mathcal{S}^{\underline{\lambda}}$) est un morphisme représentable, projectif et lisse, à fibres des produits de variétés de drapeaux usuelles sur k (si l'on a

$$\begin{aligned}\lambda_1 = \cdots = &\lambda_{n_1} > \lambda_{n_1+1} = \cdots = \lambda_{n_1+n_2} > \cdots \\ &\cdots > \lambda_{n_1+\dots n_{r-1}+1} = \cdots = \lambda_{n_1+\dots n_r} = \lambda_n\end{aligned}$$

la fibre type de $\bar{\pi}^{\underline{\lambda}}_{(1^n)}$ en un point de $\mathcal{S}^{\underline{\lambda}}$ n'est autre que

$$\prod_{j=1}^{r} GL_{n_j}/B_{n_j}$$

où $B_{n_j} \subset GL_{n_j}$ est le sous-groupe de Borel standard des matrices triangulaires supérieures). Par suite $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ est facteur direct dans $D_c^b(\mathcal{S}^{\underline{\lambda}}, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ de $R(\bar{\pi}^{\underline{\lambda}}_{(1^n)})_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell|\mathcal{S}^{\underline{\lambda}}$.

COROLLAIRE 5.2.2. *Si k est de caractéristique nulle la variété caractéristique de $\bar{A}^{\underline{\lambda}}$ est contenue dans le "cône nilpotent" $\bar{\Lambda}^\ell_{X/k,n} \subset T^* \mathrm{Coh}^\ell_{X/k,n}$ pour chaque $\underline{\lambda}$.*

PREUVE: C'est une conséquence directe de (5.2.1) et (4.4.5).

La proposition (5.2.1) ne donne que peu d'informations sur $\bar{A}^{\underline{\lambda}}$ car le morphisme $\bar{\pi}^{\underline{\lambda}}_{(1^n)} : \mathrm{Coh}^{\underline{\lambda}}_{X/k,(1^n)} \to \mathrm{Coh}^\ell_{X/k,n}$ n'est pas en général "small" ni même "semi-small" sur son image au sens de Goresky-MacPherson. Cependant, pour certains $\underline{\lambda}$, on a beaucoup mieux en utilisant une autre résolution des singularités de $\bar{\mathcal{S}}^{\underline{\lambda}}$.

PROPOSITION 5.2.3. *Fixons $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{Z}^2$ avec $\lambda_1 + \lambda_2 = \ell$ et $\lambda_2 \leq (n-1)(\lambda_1 - 1)$. Alors le complexe*

$$K = \bar{K}^{(\lambda_1,\lambda_2))}_{(1,n-1)}(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)|\,\mathrm{Fib}^\ell_{X/k,n}$$

sur $\mathrm{Fib}^\ell_{X/k,n}$ défini en (4.2.5) est pervers et admet la décomposition en somme directe de faisceaux pervers simples suivantes:

a) si $n = 2$,

$$K = \bigoplus_{\substack{(\mu_1,\mu_2)\in\mathbb{Z}^2 \\ \mu_1+\mu_2=\ell \\ \mu_1\geq\lambda_1}} A^{\underline{\mu}}(-\mu_1 + \lambda_1)$$

et en fait

$$A^{\underline{\mu}} = \bar{\mathbb{Q}}_{\ell,\bar{\mathcal{S}}^{(\mu_1,\mu_2)}}$$

dès que $\mu_1 > \mu_2$;

b) si $n > 2$ et $\lambda_2 < (n-1)(\lambda_1 - 1)$,

$$K = A^{\underline{\mu}}$$

où

$$\underline{\mu} = (\lambda_1, -[\frac{\lambda_1 - \ell}{n-1}], -[\frac{\lambda_1 - [\frac{\lambda_1-\ell}{n-1}] - \ell}{n-2}], \ldots),$$

i.e.

$$\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$$

avec

$$\mu_1 = \lambda_1$$

et μ_i est le plus petit entier tel que

$$\mu_i \geq \frac{\ell - (\mu_1 + \cdots + \mu_{i-1})}{n-i+1} \quad (i = 2, \ldots, n);$$

c) si $n > 2$ et $\lambda_2 = (n-1)(\lambda_1 - 1)$,

$$K = A^{\underline{\mu}} \oplus A^{\underline{\mu}'}(-1)$$

où

$$\underline{\mu} = (\lambda_1, \lambda_1 - 1, \lambda_1 - 1, \ldots, \lambda_1 - 1)$$

et

$$\underline{\mu}' = (\lambda_1, \lambda_1 - [\frac{2\lambda_1 - \ell}{n-2}], -[\frac{2\lambda_1 - [\frac{2\lambda_1 - \ell}{n-2}] - \ell}{n-3}], \ldots),$$

i.e.

$$\underline{\mu}' = (\mu'_1, \ldots, \mu'_n)$$

avec

$$\mu'_1 = \mu'_2 = \lambda_1$$

et μ'_i est le plus petit entier tel que

$$\mu'_i \geq \frac{\ell - (\mu'_1 + \cdots + \mu'_{i-1})}{n-i+1} \quad (i = 3, \ldots, n).$$

PREUVE: D'après (4.3.5), le morphisme

$$\bar{\pi}_{\underline{\nu}}^{\lambda} : \overline{\mathrm{Fib}}_{X/k,(1,n-1)}^{(\lambda_1,\lambda_2,)} \to \bar{\pi}_{\underline{\nu}}^{\lambda}(\overline{\mathrm{Fib}}_{X/k,(1,n-1)}^{(\lambda_1,\lambda_2,)})$$

est "semi-small" si $\lambda_2 \leq (n-1)(\lambda_1 - 1)$ et même "small" si $\lambda_2 \leq (n-1)(\lambda_1 - 1)$ et $n > 2$. D'autre part, d'après Shatz ([Sh]), $\bar{\pi}_{\underline{\nu}}^{\lambda}(\overline{\mathrm{Fib}}_{X/k,(1,n-1)}^{(\lambda_1,\lambda_2,)})$ n'est autre que

$$\bar{\mathcal{S}}^{\underline{\mu}} = \bar{\mathcal{S}}^{(\lambda_1, -[\frac{\lambda_1 - \ell}{n-1}], -[\frac{\lambda_1 - [\frac{\lambda_1 - \ell}{n-1}] - \ell}{n-2}], \ldots)}$$

et d'après Harder-Narasimhan ([Ha-Na]) $\bar{\pi}_{\underline{\nu}}^{\lambda}$ est un isomorphisme au-dessus de $\mathcal{S}^{\underline{\mu}}$.

L'assertion b) résulte aussitôt de ces considérations.

Pour l'assertion c), on remarque de plus que, pour $n > 2$ et $\lambda_2 = (n-1)\lambda_1$, $\bar{\pi}_{\underline{\nu}}^{\underline{\lambda}}$ n'est pas "small" uniquement à cause de la strate $\mathcal{Z}_w$, $w = ((\nu_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2}, (\lambda_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2})$, $\nu_{11} = 0, \nu_{12} = \nu_{21} = 1, \nu_{22} = n-2$ et donc $\lambda_{11} = 0, \lambda_{12} = \lambda_{21} = \lambda_1$ et $\lambda_{22} = \lambda_2 - \lambda_1$, du produit fibré

$$\mathcal{Z} = \overline{\mathrm{Fib}}_{X/k,(1,n-1)}^{(\lambda_1,\lambda_2)} \times_{\mathrm{Fib}_{X/k,n}^{\ell}} \overline{\mathrm{Fib}}_{X/k,(1,n-1)}^{(\lambda_1,\lambda_2)} :$$

la dimension de cette strate est

$$-n^2 = \dim \overline{\mathrm{Fib}}_{X/k,(1,n-1)}^{(\lambda_1,\lambda_2)} = \dim \mathrm{Fib}_{X/k,n}^{\ell} .$$

Or, l'image de cette strate $\mathcal{Z}_w$ dans $\mathrm{Fib}_{X/k,n}^{\ell}$ a pour adhérence

$$\bar{\mathcal{S}}^{\underline{\mu}} = \bar{\mathcal{S}}^{(\lambda_1, \lambda_1, -[\frac{2\lambda_1 - \ell}{n-2}], -[\frac{2\lambda_1 - [\frac{2\lambda_1-\ell}{n-2}] - \ell}{n-3}], \dots)}$$

d'après Shatz ([Sh]) et $\bar{\pi}_{\underline{\nu}}^{\underline{\lambda}}$ est un fibré en $\mathbb{P}^1$ sur $\mathcal{S}^{\underline{\mu}'}$, de sorte que l'assertion c) résulte maintenant du théorème de décomposition ([B-B-D] (6.2.5).

L'assertion a) résulte elle aussi du théorème de décomposition car, pour $\lambda_1 > \lambda_2$ et $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ avec $\mu_1 \geq \lambda_1$ et $\mu_1 + \mu_2 = \lambda_1 + \lambda_2 = \ell$, la restriction de $\bar{\pi}_{\underline{\nu}}^{\underline{\lambda}}$ à $\mathcal{S}^{\underline{\mu}}$ est un fibré en espaces projectifs de dimension $\mu_1 - \lambda_1$ (et $\mathrm{codim}_{\bar{\mathcal{S}}^{\underline{\lambda}}}(\mathcal{S}^{\underline{\mu}}) = 2(\mu_1 - \lambda_1)$).

(5.3) On va maintenant faire le lien entre les complexes d'intersection $A^{\underline{\lambda}}$ sur $\mathrm{Fib}_{X/k,n}^{\ell}$ et les polynômes de Kazhdan-Lusztig $Q_{y,w}(q)$ pour le groupe de Weyl affine associé à $GL_n(k[t,t^{-1}])$ quand k est une clôture algébrique du corps fini $\mathbb{F}_q$ (cf. [Ka-Lu] §5).

Ensemblistement, on peut décrire l'ensemble des classes d'isomorphie de fibrés vectoriels de rang n sur $X = \mathbb{P}_k^1$ (pour k un corps arbitraire) comme l'ensemble de doubles classes

$$GL_n(k[t]) \backslash GL_n(k[t,t^{-1}]) / GL_n(k[t^{-1}]) :$$

si $\mathcal{L}$ est un fibré vectoriel de rang n sur X, $\mathcal{L}_{|X-\{\infty\}}$ et $\mathcal{L}_{|X-\{0\}}$ sont non canoniquement des fibrés vectoriels triviaux et donc $\mathcal{L}$ s'obtient par recollement de $\mathcal{O}_{X-\{\infty\}}^n$ et de $\mathcal{O}_{X-\{0\}}^n$ le long de $X - \{0, \infty\}$ au moyen d'une fonction de transition appartenant à $GL_n(k[t,t^{-1}])$. Le degré de $\mathcal{L}$ n'est autre que le degré du déterminant de g si $\mathcal{L}$ correspond à la double classe $GL_n(k[t])g\,GL_n(k[t^{-1}])$, $g \in GL_n(k[t,t^{-1}])$, et le groupe des automorphismes de $\mathcal{L}$ est isomorphe à

$$g^{-1}GL_n(k[t])g \cap GL_n(k[t^{-1}]).$$

Cette description donne lieu en fait à une présentation du champ algébrique sur k

$$\mathrm{Fib}_{X/k,n} = \amalg_{\ell\in\mathbb{Z}} \mathrm{Fib}^{\ell}_{X/k,n}\,.$$

On a des k-ind-schémas réduits en groupes G, G^{+} et G^{-} tels que

$$G(A) = GL_n(A[t,t^{-1}])$$
$$G^{+}(A) = GL_n(A[t])$$

et

$$G^{-}(A) = GL_n(A[t^{-1}])$$

pour tout k-algèbre réduite A;G^{+} et G^{-} sont connexes alors que $\pi_0(G)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ par le degré du déterminant, i.e.

$$G = \coprod_{\ell\in\mathbb{Z}} G^{\ell}.$$

Le quotient $GL_n(k[t])\backslash GL_n(k[t,t^{-1}])$ est donc l'ensemble des k-points du k-ind-schéma

$$F = G^{+}\backslash G = \amalg_{\ell\in\mathbb{Z}} G^{+}\backslash G^{\ell} = \amalg_{\ell\in\mathbb{Z}} F_{\ell}.$$

Plus précisément, pour chaque $\ell \in \mathbb{Z}$,

$$F^{\ell} = \text{"}\varinjlim_{N\geq|\ell|/n}\text{"}\ F^{\ell}_{N}$$

où F^{ℓ}_{N} est le k-schéma projectif des $\mathcal{O}_X$-Modules localement libres de rang n et de degré ℓ tels que

$$\mathcal{O}_X(-N.0)^n \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{O}_X(N.0)^n$$

et où la flèche de transition $F^{\ell}_{N} \hookrightarrow F^{\ell}_{N+1}$ est l'inclusion évidente et est une immersion fermée (soient V_N le k-espace vectoriel de dimension $2nN$

$$V_N = (\mathcal{O}_X(N.0)/\mathcal{O}_X(-N.0))^n = (t^{-N}k[t]/t^{N}k[t])^n$$

et $t_N : V_N \to V_N$ l'endomorphisme nilpotent induit par la multiplication par t, alors F_N^ℓ est le fermé de la grassmannienne des Nn-plans W de V_N formé des W tels que $t_N(W) \subset W$). En d'autres termes F^ℓ est le k-ind-schéma des $\mathcal{O}_X$-Modules localement libres $\mathcal{L}$ de rang n et de degré ℓ munis d'un isomorphisme

$$\alpha : (\mathcal{O}_{X-\{0\}})^n \tilde{\to} \mathcal{L}_{|X-\{0\}}$$

de $\mathcal{O}_{X-\{0\}}$-Modules. On a un morphisme évident de k-ind-champs algébriques pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$

$$P^\ell : F^\ell \to \mathrm{Fib}^\ell_{X/k,n}$$

(oubli de la trivialisation de $\mathcal{L}_{|X-\{0\}}$) et

$$P = \amalg_{\ell\in\mathbb{Z}} P^\ell : F \to Fib_{X/k,n}$$

est la présentation de $Fib_{X/k,n}$ cherchée.

Lemme 5.3.1. *Le morphisme P de k-ind-champs algébriques est formellement lisse et en fait un G^--torseur pour l'action par translation à droite de G^- sur $G^+\backslash G$.*

Remarque 5.3.2. Pour chaque $\ell \in \mathbb{Z}$ et chaque $N \geq |\ell|/n$, on a un morphisme de k-champs algébriques

$$P^\ell_N : F^\ell_N \to \mathrm{Fib}^\ell_{X/k,n}$$

par composition de P avec le morphisme canonique $F^\ell_N \to F^\ell$; bien que

$$P = \text{"}\varinjlim_{N\geq \ell|/n}\text{"}\, P^\ell_N$$

soit formellement lisse, aucun des P^ℓ_N ne l'est dès que $n \geq 2$ (en fait les k-schémas projectifs ne sont même pas lisses en général).

On a deux stratifications de F, toutes deux indexées par les $\underline{\lambda} \in \mathbb{Z}^n$ tels que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$, l'une, $(S_{\underline{\lambda}})$, par des strates de dimension finie, l'autre, $(S^{\underline{\lambda}})$, par des strates de codimension finie (cf. [Pr-Se] (8.4)). Plus précisément, pour chaque $\underline{\lambda} \in \mathbb{Z}^n$ avec $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$, soit

$$f_{\underline{\lambda}} = (\mathcal{L}_{\underline{\lambda}}, \alpha_{\underline{\lambda}})$$

le point de F défini par

$$\mathcal{L}_{\underline{\lambda}} = \mathcal{O}_X(\lambda_1.0) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_X(\lambda_1.0)$$

et

$$\alpha_{\underline{\lambda}} = \mathrm{can}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{can}_n$$

où

$$\mathrm{can}_i : \mathcal{O}_{X-\{0\}} \tilde{\to} \mathcal{O}_X(\lambda_i.0)_{|X-\{0\}} \quad (i = 1, \dots, n)$$

est la trivialisation canonique. Les k-ind-schémas en groupes $G^+ etG^-$ opèrent par translation à droite sur $F = G^+\backslash G$ et $S_{\underline{\lambda}}$ et $S^{\underline{\lambda}}$ sont les orbites de $f_{\underline{\lambda}}$ pour G^+ et G^- respectivement. Si l'on note $t^{\underline{\lambda}}$ la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} t^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & t^{\lambda_n} \end{pmatrix} \in G(k),$$

$f_{\underline{\lambda}}$ est la classe $G^+t^{\underline{\lambda}}$ et $S_{\underline{\lambda}}$ et $S^{\underline{\lambda}}$ sont canoniquement isomorphes aux k-schémas

$$G^+/t^{-\underline{\lambda}}G^+t^{\underline{\lambda}} \cap G^+$$

et

$$G^-/t^{-\underline{\lambda}}G^+t^{\underline{\lambda}} \cap G^-$$

respectivement. On a

$$\bar{S}_{\underline{\lambda}} = \bigcup_{\underline{\mu} \leq \underline{\lambda}} S_{\underline{\mu}}, \quad \bar{S}^{\underline{\lambda}} = \bigcup_{\underline{\mu} \leq \underline{\lambda}} S^{\underline{\mu}}$$

et

$$S_{\underline{\mu}} \cap S^{\underline{\lambda}} = \emptyset \Leftrightarrow \underline{\lambda} \leq \underline{\mu};$$

de plus, $S_{\underline{\lambda}}$ rencontre transversalement $S^{\underline{\lambda}}$ et l'intersection est isomorphe à

$$GL_{n,k}/P(\underline{\lambda})$$

où $P(\underline{\lambda}) = t^{-\underline{\lambda}}G^+t^{\underline{\lambda}} \cap GL_{n,k}$ n'est autre que la parabolique standard défini en (5.1). Pour tout $\underline{\lambda}$, on a

$$\dim S_{\underline{\lambda}} = \sum_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j),$$

$$\mathrm{codim}_F(S^{\underline{\lambda}}) = \sum_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j) - \#\{(i,j) | i > j \text{ et } \lambda_i \neq \lambda_j\}$$

et

$$S^{\underline{\lambda}} = P^{-1}(\mathcal{S}^{\underline{\lambda}}).$$

Soit

$$I^+ \subset G^+ (\text{resp. } I^- \subset G^-)$$

l'image réciproque par le k-morphisme

$$G^+ \to GL_{n,k}, g^+(t) \mapsto g^+(0)$$

(resp.

$$G^- \to GL_{n,k}, g^-(t) \mapsto g^-(0))$$

de $B_{n,k}$ (resp. $B^-_{n,k}$, le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires inférieures). On a un morphisme naturel de k-ind-schémas

$$R : \tilde{F} = I^+ \backslash G \to G^+ \backslash G$$

qui est un fibré de fibre type la variété de drapeaux

$$I^+ \backslash G^+ = B_{n,k} \backslash GL_{n,k}.$$

Plus précisément, $\tilde{F}$ est le k-ind-schémas des triples

$$(\mathcal{L}, \alpha, V.)$$

où $(\mathcal{L}, \alpha) \in F$ et $V. = (0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = \mathcal{L}_{(0)})$ est un drapeau complet de sous-k-espaces vectoriels de la fibre en 0 de $\mathcal{L}$; le morphisme R est l'oubli de $V.$.

Suivant [Ka-Lu] §5, on a deux stratifications de $\tilde{F}$ indexées par le groupe de Weyl affine

$$W = \mathfrak{S}_n \ltimes \mathbb{Z}^n$$

où le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit par permutation sur les coordonnées des éléments de $\mathbb{Z}^n$. Si l'on note $T_n \subset GL_n$ le tore des matrices diagonales et $N_n \subset GL_n$ le normalisateur de T_n dans GL_n, on a les identifications suivantes

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{S} \simeq & T_n(k)\backslash N_n(k) \\
\downarrow & \downarrow \\
W \simeq & T_n(k)\backslash N_n(k[t,t^{-1}]); \\
\uparrow & \uparrow \\
\mathbb{Z}^n \simeq & T_n(k)\backslash T_n(k[t,t^{-1}])
\end{array}$$

en particulier, on a une injection évidente

$$W \hookrightarrow I^+\backslash G = \tilde{F}$$

puisque $T_n(k) = I^+ \cap N_n(k[t,t^{-1}])$. Les k-ind-schémas en groupes I^+ et I^- opère par translation à droite sur $\tilde{F} = I^+\backslash G$ et les strates $\tilde{S}_w$ et $\tilde{S}^w$ sont les orbites de l'image $\tilde{f}_w$ de $w \in W$ par l'injection ci-dessus. On a toujours

$$\overline{\tilde{S}}_w = \bigcup_{y \leq w} \tilde{S}_y$$

$$\overline{\tilde{S}}^w = \bigcup_{y \leq w} \tilde{S}^y$$

et

$$\tilde{S}_y \cup \tilde{S}^w \neq \emptyset \Leftrightarrow w \leq y$$

où $\leq$ est la relation d'ordre de Bruhat sur W. Pour tout $w \in W$, on a

$$dim \tilde{S}_w = \ell(w)$$

et

$$\mathrm{codim}_{\tilde{F}}(\tilde{S}^w) = \ell(w)$$

où $\ell : W \to \mathbb{N}$ est la fonction longueur définie par

$$\ell(\sigma.\underline{\lambda}) = \sum_{\substack{i<j \\ \sigma(i)<\sigma(j)}} |\lambda_i - \lambda_j| + \sum_{\substack{i<j \\ \sigma(i)>\sigma(j)}} |1 + \lambda_i - \lambda_j|.$$

L'ensemble des doubles classes

$$\mathfrak{S}_n\backslash W/\mathfrak{S}_n$$

s'identifie canoniquement à

$$\{\underline{\lambda} \in \mathbb{Z}^n | \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n\}$$

par

$$\underline{\lambda} \mapsto W_{\underline{\lambda}} = \{\sigma_1.\sigma_2(\underline{\lambda}) | \sigma_1.\sigma_2 \in \mathfrak{S}_n\}$$

et chaque double classe $W_{\underline{\lambda}}$ contient un élément et un seul de longueur maximale, à savoir

$$w_{\underline{\lambda}} = \sigma_0.\underline{\lambda}$$

où σ_0 est l'élément le plus long de $\mathfrak{S}_n(\sigma_0(1,\ldots,n) = (n,\ldots,1))$, et un élément et un seul de longueur minimale $w^{\underline{\lambda}}$ plus compliqué à décrire (si $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$, on a $w^{\underline{\lambda}} = \underline{\lambda}.\sigma_0 = \sigma_0.\sigma_0^{-1}(\underline{\lambda})$ et, si $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$, on a $w^{\underline{\lambda}} = 1$).

LEMME 5.3.3. *Pour tout $\underline{\lambda} \in \mathbb{Z}^n$ avec $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$,* on a

$$R^{-1}(S_{\underline{\lambda}}) = \bigcup_{w \in W_{\underline{\lambda}}} \tilde{S}_w (\text{resp. } R^{-1}(S^{\underline{\lambda}}) = \bigcup_{w \in W_{\underline{\lambda}}} \tilde{S}^w)$$

et en particulier $\tilde{S}_{w_{\underline{\lambda}}}$ (resp. $\tilde{S}^{w^{\underline{\lambda}}}$) est un ouvert dense de $R^{-1}(S_{\underline{\lambda}})$ (resp. $R^{-1}(S^{\underline{\lambda}})$).

Toujours suivant [Ka-Lu] §5, on introduit les complexes d'intersections

$$\tilde{A}_w = \underline{IC}(\overline{\tilde{S}}_w, \bar{\mathbb{Q}}_\ell) = \tilde{j}_{w,!\star}\bar{\mathbb{Q}}_\ell$$

et

$$\tilde{A}^y = \underline{IC}(\overline{\tilde{S}}^y, \bar{\mathbb{Q}}_\ell) = \tilde{j}^y_{!\star}\bar{\mathbb{Q}}_\ell$$

où

$$\tilde{S}_w \overset{\tilde{j}_w}{\hookrightarrow} \tilde{F} \overset{\tilde{j}^y}{\hookleftarrow} \tilde{S}^y$$

sont les inclusions ($w, y \in W$).

Les résultats suivants sont annoncés sans démonstrations dans [Ka-Lu] (Théorème 5.5, Proposition 5.7):

"THÉORÈME 5.3.4". *Soient $y \leq w$ dans W. Alors:*

(1) *pour tout entier i, on a*

$$\mathcal{H}^{2i+1}(\tilde{A}_w | \tilde{S}_y) = 0;$$

(2) *pour tout entier i, le $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau $\mathcal{H}^{2i}(\tilde{A}_w | \tilde{S}_y)$ est constant et canoniquement isomorphe à*

$$(\bar{\mathbb{Q}}_{\ell,\tilde{S}_y}(-i))^{\alpha_{y,w}(i)}$$

où

$$P_{y,w}(q) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \alpha_{y,w}(i) q^i$$

est le polynôme de Kazhdan-Lusztig de W pour $y \leq w$.

En particulier, pour $k = \bar{\mathbb{F}}_q$, les $\tilde{A}_w$ sont naturellement définis sur $\mathbb{F}_q$ et la trace de Frobenius sur $\tilde{A}_w$ en tout point de $\tilde{S}_y(\mathbb{F}_q)$ est égale à $P_{y,w}(q)$.

"THÉORÈME 5.3.5". *Soient $y \leq w$ dans W. Alors:*

(1) *pour tout entier i, on a*

$$\mathcal{H}^{2i+1}(\tilde{A}^y|\tilde{S}^w) = 0;$$

(2) *pour tout entier i, le $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau $\mathcal{H}^{2i}(\tilde{A}^y|\tilde{S}^w)$ est constant et canoniquement isomorphe à*

$$(\bar{\mathbb{Q}}_{\ell,\tilde{S}^w}(-i))^{\beta_{y,w}(i)}$$

où

$$Q_{y,w}(q) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \beta_{y,w}(i)q^i$$

est le polynôme de Kazhdan-Lusztig inverse de W pour $y \leq w$.

En particulier, pour $k = \bar{\mathbb{F}}_q$, les $\tilde{A}^y$ sont naturellement définis sur $\mathbb{F}_q$ et la trace de Frobenius sur $\tilde{A}^y$ en tout point de $\tilde{S}^w(\mathbb{F}_q)$ est égale à $Q_{y,w}(q)$.

Remarque 5.3.6.1. On a $\alpha_{y,w}(i) = \beta_{y,w}(i) = 0$ si $i \notin [0, \frac{1}{2}(\ell(w) - \ell(y) - 1)]$ pour $y < w$ et

$$P_{w,w}(q) = Q_{y,y}(q) = 1 \quad (\forall w, y \in W),$$

ce qui est bien compatible à la caractérisation de Goresky-MacPherson de $\tilde{A}_w$ et $\tilde{A}^y$ (on a les égalités de dimensions

$$\dim S_w - \dim S_y = \operatorname{codim} \overline{\tilde{S}}^y(\overline{\tilde{S}}^w) = \ell(w) - \ell(y)).$$

(5.3.6.2). Je n'ai pas su écrire de démonstration complète de (5.3.4) et (5.3.5); même la définition de $\tilde{A}^y$ pose problème. La difficulté vient de ce que $\tilde{F}$ est un ind-schéma, limite inductive de schémas **non lisses** sur k.

Compte-tenu de (5.3.3), le "théorème (5.3.5)" admet le corollaire.

"COROLLAIRE 5.3.6". *Soient $\underline{\lambda} \leq \underline{\mu}$ dans $\mathbb{Z}^n$ avec $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ et $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n$ (en particulier $\lambda_1+\cdots+\lambda_n = \mu_1+\cdots+\mu_n = \ell$). Alors*

(1) *pour tout entier i, on a*

$$\mathcal{H}^{2i+1}(A^{\underline{\lambda}}|S^{\underline{\mu}}) = 0$$

(2) *pour tout entier i, le $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau $\mathcal{H}^{2i}(A^{\underline{\lambda}}|S^{\underline{\mu}})$ est constant et canoniquement isomorphe à*

$$(\bar{\mathbb{Q}}_{\ell,S^{\underline{\mu}}}(-i))^{\beta_{\underline{\lambda},\underline{\mu}}(i)}$$

où

$$Q_{\underline{\lambda},\underline{\mu}}(q)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\beta_{\underline{\lambda},\underline{\mu}}(i)q^i$$

est le polynôme de Kazhdan-Lusztig inverse de W pour $w^{\underline{\lambda}}\leq w^{\underline{\mu}}$.

Preuve: On a $R^*P^*A^{\underline{\lambda}}=\tilde{A}^{w^{\underline{\lambda}}}$ d'après (5.3.3).

Remarque 5.3.7.1. Dans toute la discussion précédente, on peut remplacer GL_n par un groupe réductif sur k,G, arbitraire (on remplace $\mathrm{Fib}_{X/k,n}$ par le champ des G-torseurs sur $X,\ldots$, cf. [Ra]).

(5.3.7.2) Pour $k=\bar{\mathbb{F}}_q$, l'ensemble des classes d'isomorphie d'objet de $Fib_{X/k,n}(\mathbb{F}_q)$ s'identifie à $\{\underline{\mu}\in\mathbb{Z}^n|\mu_1\geq\mu_2\geq\cdots\geq\mu_n\}$ et est muni d'une mesure naturelle:

$$m(\underline{\mu})=1/\#G(\underline{\mu})(\mathbb{F}_q)$$

(à $\underline{\mu}$ on associe la classe d'isomorphie de

$$\mathcal{O}(\underline{\mu})=\mathcal{O}_X(\mu_1)\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}_X(\mu_n)$$

et $G(\underline{\mu})=\mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}(\underline{\mu}))$). Pour chaque $\underline{\lambda}$ dans cet ensemble on a une fonction

$$a^{\underline{\lambda}}:\{\underline{\mu}\in\mathbb{Z}^n|\mu_1\geq\mu_2\geq\cdots\geq\mu_n\}\to\bar{\mathbb{Q}}_\ell$$

définie par

$$a^{\underline{\lambda}}(\underline{\mu})=tr(\mathrm{Frob}^*_{\mathcal{O}(\underline{\mu})},A^{\underline{\lambda}})$$

et donc, d'après (5.3.6), par

$$a^{\underline{\lambda}}(\underline{\mu})=\begin{cases}Q_{\underline{\lambda},\underline{\mu}}(q), & \text{si } \underline{\lambda}\leq\underline{\mu}\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

On peut se poser la question de savoir si $a^{\underline{\lambda}}$ est de carré intégrable pour la mesure m, i.e. si

$$\sum_{\underline{\lambda}\leq\underline{\mu}}(Q_{\underline{\lambda},\underline{\mu}}(q))^2/\#G(\underline{\mu})(\mathbb{F}_q)<+\infty$$

pour $\underline{\lambda}$ fixé. Pour GL_2 la réponse est positive car $Q_{\underline{\lambda},\underline{\mu}}(q) = 1$ si $\underline{\lambda} \leq \underline{\mu}$ et

$$\# G(\underline{\mu})(\mathbb{F}_q) = \begin{cases} (q-1)^2 q(q+1), & \text{si } \mu_1 = \mu_2 \\ q^{\mu_1-\mu_2+1}(q-1)^2, & \text{si } \mu_1 = \mu_2. \end{cases}$$

Une question étroitement reliée à la précédente est de savoir si, pour tout $y \in W$,

$$(\ell(w) - \ell(y)) - 2 \deg Q_{y,w}(q)$$

tend vers $+\infty$ quand $\ell(w)$ tend vers $+\infty$ avec $y \leq w$ (cf.[Lu 3] 6.2): on a

$$\ell(w^{\underline{\mu}}) - \ell(w^{\underline{\lambda}}) = \dim G(\underline{\mu}) - \dim G(\underline{\lambda})$$

et donc $G(\underline{\mu})(\mathbb{F}_q)$ est un polynôme en q de degré $\ell(w^{\underline{\mu}})$ à une constante près.

6. Exemples de Faisceaux Automorphes sur une Courbe Arbitraire.

(6.0) Dans ce numéro X est de nouveau une courbe projective, lisse et connexe sur un corps algébriquement clos k et on note g le genre de X.

(6.1) On peut généraliser comme suit la discussion du numéro précédent.

D'après [Ha-Na] et [Sh], le champ lisse $\mathrm{Fib}_{X/n,k}$ admet une stratification indexée par les paires

$$(\underline{\nu}, \underline{\lambda})$$

où $\underline{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_s)$ et $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ sont deux suites d'entiers de même longueur s, où $\nu_1, \ldots, \nu_s \geq 0$ et $\nu_1 + \cdots + \nu_s = n$ et où

$$\frac{\lambda_1}{\nu_1} > \frac{\lambda_1}{\nu_2} > \cdots > \frac{\lambda_s}{\nu_s}.$$

Si l'on note $\mathcal{S}_{\underline{\nu}}^{\underline{\lambda}}$ la strate correspondant à $(\underline{\nu}, \underline{\lambda})$, $\mathcal{S}_{\underline{\nu}}^{\underline{\lambda}}$ est un sous-champ localement fermé de $\mathrm{Fib}_{X/k,n}$ et en fait de la composante connexe $\mathrm{Fib}_{X/k,n}^{\ell}$ de $\mathrm{Fib}_{X/k,n}$ avec $\ell = \lambda_1 + \cdots + \lambda_s$, $\mathcal{S}_{\underline{\nu}}^{\underline{\lambda}}$ est lisse sur k, connexe et de dimension

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq s} (\nu_i \nu_j (g-1) + \nu_i \lambda_j - \nu_j \lambda_i).$$

En fait, les morphismes $\pi_{\underline{\nu}}^{\underline{\lambda}}$ et $\bar{\pi}_{\underline{\nu}}^{\underline{\lambda}}$,

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fib}_{X/k,\underline{\nu}}^{\underline{\lambda}} & \hookrightarrow & \overline{\mathrm{Fib}}_{X/k,\underline{\nu}}^{\underline{\lambda}} \\ \pi_{\underline{\nu}}^{\underline{\lambda}} \searrow & & \swarrow \bar{\pi}_{\underline{\nu}}^{\underline{\lambda}} \\ & \mathrm{Fib}_{X/k,n}^{\ell} & \end{array}$$

(cf. (4.1.2) et (4.2.1) ont leurs images contenues dans l'adhérence de $\mathcal{S}_{\underline{\nu}}^{\underline{\lambda}}$ et sont des isomorphismes au-dessus de $\mathcal{S}_{\underline{\nu}}^{\underline{\lambda}}$ (unicitédu drapeau de Harder-Narasimhan). A chaque $(\underline{\nu},\underline{\lambda})$ on associe le polygone concave dans $\mathbb{R}^2$ d'origine (0,0), d'extrémité (n,ℓ) et ayant pour sommets successifs $(\nu_1,\lambda_1),(\nu_1+\nu_2,\lambda_1+\lambda_2),\ldots,(\nu_1+\cdots+\nu_s,\lambda_1+\cdots+\lambda_s)=(n,\ell)$. On munit l'ensemble des paires $(\underline{\nu},\underline{\lambda})$ comme ci-dessus de la relation d'ordre suivante: $(\underline{\nu},\underline{\lambda})\leq(\underline{\nu}',\underline{\lambda}')$ si et seulement si le polygone associé à $(\underline{\nu},\underline{\lambda})$ est au-dessous du polygone associé à $(\underline{\nu}',\underline{\lambda}')$ mais a même extrémité que celui-ci. On a

$$\bar{\mathcal{S}}_{\underline{\nu}}^{\underline{\lambda}} \subset \bigcup_{(\underline{\nu},\underline{\lambda})\leq(\underline{\nu}',\underline{\lambda}')} \mathcal{S}_{\underline{\nu}'}^{\underline{\lambda}'}$$

pour toute paire $(\underline{\nu},\underline{\lambda})$.

Les faisceaux automorphes qui généralisent le plus directement ceux considérés au numéro 5 sont définis comme suit. Pour chaque paire $(\underline{\nu},\underline{\lambda})$, on a un morphisme de champs algébriques sur k

$$\mathcal{S}_{\underline{\lambda}}^{\underline{\nu}} \xrightarrow{\rho_{\underline{\nu}}^{\underline{\lambda}}\phi(\pi_{\underline{\nu}}^{\underline{\lambda}})^{-1}} \prod_{i=1}^{s}\mathrm{Fib}_{X/k,\nu_i}^{\lambda_i} \xrightarrow{\prod_{i=1}^{s}\det_i} \prod_{i=1}^{s}\mathrm{Pic}_{X/k}^{\lambda_i}$$

où $\rho_{\underline{\nu}}^{\underline{\lambda}}$ est défini en (4.1.2) et où $\det_i : \mathrm{Fib}_{X/k,\nu_i}^{\lambda_i}\to\mathrm{Pic}_{X/k}^{\lambda_i}$ est le morphisme "déterminant" $(i=1,\ldots,s)$. Si $\mathcal{G}_1,\ldots,\mathcal{G}_s$ sont des $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux lisses de rang 1 sur $\mathrm{Pic}_{X/k}^{\lambda_1},\ldots,\mathrm{Pic}_{X/k}^{\lambda_s}$ respectivement, par image réciproque on obtient un $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse de rang 1

$$(\boxtimes_{i=1}^{s}\mathcal{G}_i)|\mathcal{S}_{\underline{\nu}}^{\underline{\lambda}}$$

sur $\mathcal{S}_{\underline{\nu}}^{\underline{\lambda}}$ et donc par prolongement intermédiaire via l'inclusion $j_{\underline{\nu}}^{\underline{\lambda}}$: $\mathcal{S}_{\underline{\nu}}^{\underline{\lambda}}\hookrightarrow\mathrm{Fib}_{X/k,n}$ d'un $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau pervers irréductible (à un décalage près) sur $Fib_{X/k,n}$ supporté par $\bar{\mathcal{S}}_{\underline{\nu}}^{\underline{\lambda}}\subset\mathrm{Fib}_{X/k,n}^{\ell}(\ell=\lambda_1+\cdots+\lambda_s)$

(6.1.1) $$A_{\underline{\nu}}^{\underline{\lambda}}(\underline{\mathcal{G}})=j_{\underline{\nu},!*}^{\underline{\lambda}}((\boxtimes_{i=1}^{s}\mathcal{G}_i)|\mathcal{S}_{\underline{\nu}}^{\underline{\lambda}}).$$

LEMME 6.1.2. *Supposons que les $\mathcal{G}_i$ sont d'ordre fini (il existe un entier $N \geq 1$ tel que $\mathcal{G}_i^{\otimes N} \simeq \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ pour $i = 1, \ldots, s$). Alors $A_{\underline{\nu}}^{\underline{\lambda}}(\underline{\mathcal{G}})$ est facteur direct dans $D_c^b(\mathrm{Fib}_{X/k,n}^{\ell}, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ de*

$$K_{\underline{\nu}}^{\underline{\lambda}}(\underline{\det}^* \underline{\mathcal{G}}) | \mathrm{Fib}_{X/k,n}^{\ell} = R(\pi_{\underline{\nu}}^{\underline{\lambda}})_* (\rho_{\underline{\nu}}^{\underline{\lambda}})^* \boxtimes_{i=1}^{s} \det_i^* \mathcal{G}_i$$

avec les notations de (4.2.1) et (4.2.5). En particulier, $A_{\underline{\nu}}^{\underline{\lambda}}(\underline{\mathcal{G}})$ s'obtient par induction parabolique à partir du $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse de rang 1, $\boxtimes_{i=1}^{s} \det_i^* \mathcal{G}_i$, sur $\prod_{i=1} \mathrm{Coh}_{X/k,\nu_i}^{\lambda_i}$ (on a noté encore, pour $i = 1, \ldots, s$,

$$\det_i : \mathrm{Coh}_{X/k,\nu_i}^{\lambda_i} \to \mathrm{Pic}_{X/k}^{\lambda_i}$$

le morphisme déterminant, cf. [Kn-Mu]).

PREUVE: C'est une conséquence immédiate du théorème de décomposition ([B-B-D] (6.2.5)).

(6.2) Un autre type de faisceaux automorphes a été découvert par Drinfeld ([Dr 1], [Dr 2], [Dr 3] et [Lau 2]): il s'agit des faisceaux automorphes cuspidaux.

Conjecturalement les classes d'isomorphie de faisceaux automorphes cuspidaux sur $\mathrm{Fib}_{X/k,n}^{\ell}$ pour k algébriquement clos devraient être en bijection avec les classes d'isomorphie de $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$−faisceaux lisses irréductibles de rang n sur X (cf. [Lau 2] (2.1.1)) et c'est un théorème pour $n = 2$ ([Dr 1], [Dr 2], [Dr 3]). Les faisceaux automorphes cuspidaux sur $\mathrm{Fib}_{X/k,n}^{\ell}$ devraient être supportés par $\mathrm{Fib}_{X/k,n}^{\ell}$ tout entier ; en particulier, ils devraient être de la forme

$$j_{!*}\mathcal{F}[n^2(g-1)]$$

où

$$j : \mathrm{Fib}_{X/k,n,ts}^{\ell} \hookrightarrow \mathrm{Fib}_{X/k,n}^{\ell}$$

est l'ouvert dense des fibrés vectoriels très stables de rang n et de degré ℓ sur X (cf. [Dr 3] et [Lau 1] (3.5)) et où $\mathcal{F}$ est un $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$−faisceau lisse irréductible sur $\mathrm{Fib}_{X/k,n,ts}^{\ell}$.

Pour $n = 2$, Deligne a montré que pour tous les faisceaux automorphes cuspidaux (construits par Drinfeld) le rang du $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$−faisceau lisse irréductible ci-dessus est égal à 2^{3g-3}.

CONJECTURE 6.2.1. *Pour tout faisceau automorphe cuspidal A sur $\mathrm{Fib}^{\ell}_{X/k,n}$ la restriction de A à l'ouvert dense $\mathrm{Fib}^{\ell}_{X/k,n,ts}$ des fibrés vectoriels très stables de rang n et de degré ℓ est (àun décalage près) un $\bar{\mathbf{Q}}_{\ell}$-faisceau lisse irréductible de rang*

$$1^{g-1}2^{3g-3}3^{5g-5}\dots n^{(2n-1)(g-1)}$$

Si $k = \mathbf{C}$, on peut espérer qu'il existe une bijection naturelle entre les systèmes locaux de $\mathbf{C}$ -espaces vectoriels irréductibles de rang n sur X et les systèmes locaux de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels irréductibles de rang $1^g 2^{3g-3}\dots n^{(2n-1)(g-1)}\mathcal{F}$ sur $\mathrm{Fib}^{\ell}_{X/k,n,ts}$ tels que la variété caractéristique de $j_{!*}\mathcal{F}$ soit contenue dans le cône nilpotent $\Lambda^{\ell}_{X,n} \subset T^* \mathrm{Fib}^{\ell}_{X/k,n,ts}$, où $j : \mathrm{Fib}^{\ell}_{X/k,n,ts} \hookrightarrow \mathrm{Fib}^{\ell}_{X/k,n}$ est l'inclusion (cf. [Lau 1] (1.14) et [Lau 2]) et ceci, $\forall \ell \in \mathbf{Z}$.

La conjecture ci-dessus est motivée par les cas particuliers $n = 1$ et 2 déjà connus et par le résultat suivant.

Soit $\mathcal{L}$ un fibré vectoriel de rang n et de degré ℓ sur X. Hitchin ([Hi]) a défini une application polynomiale

$$c_{\mathcal{L}} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X) \to \bigoplus_{i=1}^{n} H^0(X, (\Omega^1_X)^{\otimes i})$$

en associant à $u : \mathcal{L} \to \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X$ son "polynôme caractéristique"

$$c_{\mathcal{L}}(u) = (tr(u), tr(\Lambda^2 u), \dots, tr(\Lambda^n u))$$

(on a $\Lambda^i u : \Lambda^i \mathcal{L} \to (\Lambda^i \mathcal{L}) \otimes_{\mathcal{O}_X} (\Omega^1_X)^{\otimes i}$); de plus il a remarqué que, pour $\mathcal{L}$ simple, i.e. pour

$$\mathrm{End}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}) = k$$

la source et le but de $c_{\mathcal{L}}$ ont même dimension

$$n^2(g-1) + 1.$$

Cette application est multi-homogène au sens suivant

$$c_{\mathcal{L}}(\lambda u) = (\lambda tr(u), \lambda^2 tr(\Lambda^2 u), \dots, \lambda^n tr(\Lambda^n u))$$

et donc $c_{\mathcal{L}}$ est un morphisme fini (ramifié) dès que $c_{\mathcal{L}}^{-1}(0) = \{0\}$. Or dire que $c_{\mathcal{L}}^{-1}(0) = \{0\}$ c'est dire que $\mathcal{L}$ est très stable (si $tr(\Lambda^i u) = 0$ pour $i = 1, \dots, n, u$ est nilpotent). Par suite si $\mathcal{L}$ est très stable, on peut parler du degré du morphisme fini $c_{\mathcal{L}}$. Comme l'a remarqué Beauville [B-N-R] (5.4), il résulte aussitôt du théorème de Bezout que

LEMME 6.2.2. *Si $\mathcal{L}$ est un fibré vectoriel de rang n et de degré ℓ sur X très stable, le degré de $c_{\mathcal{L}}$ est égal à*

$$1^{g-1}2^{3g-3}\dots n^{(2n-1)(g-1)}.$$

Remarque 6.2.3. L'entier ci-dessus est un analogue global de $n!$. En fait pour chaque groupe réductif sur k on a de même un analogue global de l'ordre du groupe de Weyl W. Pour les groupes classiques (presque simples), on a le tableau suivant

Type	$\|W\|$	Analogue global de $\|W\|$
A_n	$n!$	$1^{g-1}2^{3g-3}\dots n^{(2n-1)(g-1)}$
B_m ou C_m	$2^m m!$	$2^{3g-3}4^{7g-7}\dots(2m)^{(4m-1)(g-1)}$
D_m	$2^{m-1}m!$	$2^{3g-3}4^{7g-7}\dots(2m)^{(4m-5)(g-1)}m^{(2m-1)(g-1)}$

ces analogues globaux de $|W|$ s'interprétant encore comme les degrés génériques des applications de Hitchin et devant être liés aux faisceaux automorphes cuspidaux pour les groupes considérés. En général, si les p_i $(i = 1,\dots,\ell)$ sont les degrés des invariants (générateurs de $(\mathrm{Sym}\mathcal{G}^*)^G$ où $\mathcal{G}$ est l'algèbre de Lie de G), l'analogue global de $|W|$ est

$$\prod_{i=1}^{\ell} p_i^{(2p_i-1)(g-1)}$$

comme me l'a fait remarquer le referee.

REFERENCES

[B-R-N] A. Beauville, M.S. Narasimhan and S. Ramanan., *Spectral curves and the generalized theta divisor*, Preprint from Tata Institute, Bombay (1988).

[B-B-D] A.A. Beilinson, I.N. Bernstein et P. Deligne., *Faisceaux pervers, dans Analyse et topologie sur les espaces singuliers (I)*, Conférence de Luminy, juillet 1981,, Astérisque **100** (1982).

[De 1] P. Deligne. Lettre à J.-P. Serre, février 1974..

[De 2] P. Deligne., *La conjecture de Weil II*, Publications Mathématiques de l'IHES **52** (1981), 313–428.

[De 3] P. Deligne, *Théorie de Hodge, III*, Publications Mathématiques de l'IHES 44 (1974), 5–77.

[De-Lu] P. Deligne. and G. Lusztig, *Representations of reductive groups over finite fields*, Annals of Mathematics **103** (1976), 103–161.

[De-Mu] P. Deligne et D. Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Publications Mathématiques de l'IHES **36** (1969), 75–110.

[Dr 1] V.G. Drinfeld, *Two-dimensional ℓ-adic representations of the fundamental group of a curve over a finite field and automorphic forms on $GL(2)$*, American Journal of Mathematics **105** (1983), 85–114.

[Dr 2] V.G. Drinfeld, *Two-dimensional ℓ-adic representations of the Galois group of a global field of characteristic p and automorphic forms on $GL(2)$*, Journal of Soviet Mathematics **36** (1987), 93–105.

[Dr 3] V.G. Drinfeld. Lettre à P. Deligne, 22 juin 1981.

[Gi] V. Ginsburg., *Admissible modules on symmetric space*, Preprint, Moscow (1987).

[Go-Ma] M. Goresky and R. MacPherson, *Intersection homology II*, Inventiones Mathematicae **71** (1983), 77–129.

[Gr] A. Grothendieck, *Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann*, American Journal of Mathematics **79** (1957), 121–138.

[Ha-Na] G. Harder and M.S. Narasimhan, *On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves*, Mathematische Annalen **212** (1975), 215–248.

[Hi] N. Hitchin, *Stable bundles and integrable systems*, Duke Mathematical Journal **54** (1987), 91–114.

[Il] L. Illusie, "Complexe cotangent et déformations I," Lecture Notes in Mathematics 239, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[Ka-Lu] D. Kazhdan and G. Lusztig, *Schubert varieties and Poincaré duality*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **36** (1980), 185–203.

[Kn-Mu] F. Knudsen and D. Mumford, *The projectivity of the moduli space of stable curves I: Preliminaries on "*det*" and "Div"*, Mathematica Scandinivica **39** (1976), 19–35.

[Lan] S. Lang, *Unramified class field theory over functions fields in several variables*, Annals of Mathematics **64** (1956), 285–325.

[Lau 1] G. Laumon, *Un analogue global du cône nilpotent*, Duke Mathematical Journal **57** (1988), 647–671.

[Lau 2] G. Laumon, *Correspondance de Langlands géométrique pour les corps de fonctions*, Duke Mathematical Journal **54** (1987), 309–359.

[Lau 3] G. Laumon, *Champs algébriques*, Prépublication de l'Université Paris-Sud (1988).

[Lu 1] G. Lusztig, *Introduction to character sheaves*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **47** (1987), 165–179.

[Lu 2] G. Lusztig, *Green functions and characters sheaves*, Preprint (1988).

[Lu 3] G. Lusztig, *Cells in affine Weyl groups.*, Advanced Studies in Pure Mathematics **6** (1985), 255–287.

[Mi-Vi] I. Mirkovič and K. Vilonen, *Characteristic varieties of character sheaves*, Inventiones Mathematicae **93** (1988), 405–418.

[Mu] D. Mumford, "Lectures on curves on an algebraic surface," Annals of Mathematics Studies 59, Princeton university Press, 1966.

[Pr-Se] A. Pressley and G. Segal, "Loop groups," Oxford University Press, 1986.

[Ra] A. Ramanathan, *Deformations of principal bundles on the projective line*, Inventiones Mathematicae **71** (1983), 165–191.

[Ro] M. Rosenlicht, *Generalized Jacobian varieties.*, Annals of Mathematics **59** (1954), 505–530.

[Se] J.-P. Serre, "Groupes algébriques et corps de classes," Hermann, Paris, 1959.

[Sh] S. Shatz, *Algebraic families of vector bundles.*, Compositio Mathematica **35** (1977), 163–187.

[EGA] A. Grothendieck et J. Dieudonné, "Eléments de géométrie algébrique III, seconde partie, et IV," Publications mathématiques de l'IHES, 17, 1963 et 24 (1965).

[SGA] Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie .

[SGA 4] "Théorie des topos et cohomologie étale des schémas," dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J.L. Verdier. Lecture Notes in Mathematics 269, 270 et 305, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1972 et 1973).

[SGA $4\frac{1}{2}$] "Cohomologie étale," par P. Deligne, avec la collaboration de J.-F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie et J.L. Verdier. Lecture Notes in Mathematics 569, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1977).

[SGA 5] "Cohomologie ℓ-adique et fonctions L," dirigé par A. Grothendieck, avec la collaboration de I. Bucur, C. Houzel, L. Illusie, J.-P. Jouanolou et J.-P. Serre. Lecture Notes in Mathematics 589, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1977).

Université de Paris-Sud, Département de Mathématique, Bâtiment 425, 91405 ORSAY CEDEX, FRANCE.