ChatGPT

三角関数の加法定理セミナー資料

1. 加法定理の紹介

三角関数の**加法定理**とは、「角度の和（または差）の三角比」を、それぞれの角度の三角比で表すことができる公式のことです [1]。具体的には後述するように、$\sin(\alpha+\beta)$ や $\cos(\alpha+\beta)$ を $\sin\alpha, \cos\alpha, \sin\beta, \cos\beta$ で表すことができます。これは高校数学の様々な公式の**土台となる極めて重要な定理**で、三角関数だけでなく他の多くの公式の基礎にもなっています [2]。この定理により「知らない角度の三角比」を「知っている角度の三角比」から計算できるようになるため、応用範囲は非常に広いです [3]。

- **身近な例・応用:** 加法定理を使うと、身近な現象や技術にも三角関数が潜んでいることが理解できます。例えば、スマートフォンの通信や音響機器では**波（サイン波）の重ね合わせ**によって信号処理が行われますが、これはまさに加法定理で表される位相の異なる波の合成です。特にヘッドホンの**ノイズキャンセリング**では、騒音の波と逆位相の波を重ね合わせて打ち消し合っていますが、波（音波）は三角関数で表され、その重ね合わせ（＝波の加算）に加法定理の原理が利用されています [4]。また数学的には、後で学ぶ**二倍角の公式**（角度を2倍する公式）や**和積・積和公式**なども、この加法定理から導かれる重要な応用例です。加法定理を理解し活用することで、より複雑な角度の計算や問題解決が直感的にできるようになります。

以上のように、加法定理は**「なぜ大事か？」**という問いに対し、「未知の角度の三角比を求める鍵であり、数学と実生活双方で幅広く使われるから」と答えられます。これから、その内容と使い方を具体的に見ていきましょう。

2. 加法定理のポイント

このセクションでは、加法定理の具体的な公式とその使い方、そして覚え方の工夫について説明します。

● **加法定理の公式（基本形）:** 任意の実数角 α, β について、次のような関係が成り立ちます [5]:

- $\displaystyle \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta$
- $\displaystyle \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta$

これが加法定理の中心となる公式です（差に関する公式も符号の扱い以外は同様です [5]）。例えば $\sin(\alpha-\beta)$ では右辺の足し算が引き算に変わり、$\cos(\alpha-\beta)$ では右辺の符号が正に変わります。同様に、$\tan$（タンジェント）の加法定理も存在します（※授業では時間があれば紹介）。タンジェントの場合、$\displaystyle \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\,\tan\beta}$ となり、こちらは上記の$\sin,\cos$の公式から導出できます [6]。

● **覚え方の工夫:** 加法定理の公式はやや長いため、暗記しやすい語呂合わせがあります。よく使われるのは**「シン・コス・コス・シン」**と**「コス・コス・シン・シン」**というフレーズです [7]。これはそれぞれ、

- $\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$ （**シンコスコスシン**の順に並ぶ） [7]
- $\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$ （**コスコスシンシン**の順に並ぶ） [8]

という並び順を語呂で覚える方法です。「$\sin$はシンコスコスシンで符号そのまま、$\cos$はコスコスシンシンで符号は逆」と覚えておくと便利でしょう。実際の計算時にも、この並びを頭の中で唱えることでミスを防げます。

● 加法定理の使い方（例題）: 加法定理を使うと、基本角（よく知られている角度）の組み合わせで表せる角度の値を求めることができます。以下に簡単な例を示します。

- 例1: **75° の正弦を求める。** 75度はよく知られた角度である45度と30度の和に分解できます。実際、$\sin75^\circ = \sin(45^\circ+30^\circ)$ とし、加法定理を適用すると
  $\sin75^\circ = \sin45^\circ\cos30^\circ + \cos45^\circ\sin30^\circ$ [9]
  $=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
  と計算できます。つまり $\sin75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ となります。

- 例2: **15° の余弦を求める。** 15度は45度から30度を引いた角度とみなせます。$\cos15^\circ = \cos(45^\circ-30^\circ)$ に加法定理（差の公式）を適用すると、
  $\cos15^\circ = \cos45^\circ\cos30^\circ + \sin45^\circ\sin30^\circ$ [10]
  $=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
  となり、結果的に $\cos15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ です。

これらの例からも分かるように、**加法定理を使えば未知の角度の値を既知の角度から計算できる**ことが確認できます。45度や30度の三角比は既知なので、その組み合わせで75度や15度の値が求められるわけです。実際の問題でも、角度の和や差に分解して公式を適用することで三角比を簡単に計算したり、三角関数の恒等変形（式変形）を行ったりします [11] [12]。特に、加法定理は三角関数の証明問題や附随する公式（合成公式など）で頻出なので、**公式の形を暗記するとともに使いこなせるよう練習することが大切**です [13]。

3. 加法定理の証明

それでは、加法定理（$\sin$と$\cos$の加法公式）がなぜ成り立つのか、**図を使って直感的に証明してみましょう**。ここでは幾何学的なアプローチで、角度の和の三角比を求めます。「角度の和」を持つ大きな三角形を、小さい直角三角形に分解し、それぞれの辺の長さを比較することで証明ができます [14]。証明の流れは次の通りです。

図：加法定理の幾何学的証明の構成。大きな角 $\angle AOE$ が $\alpha+\beta$ になっており、補助的な点や線を引いて辺の長さ関係を調べることで公式を導きます（各点の配置や記号は図を参照）。 [14]

1. **角度αの三角形を作る:** まず、角度$\angle AOB = \alpha$の直角三角形 AOB を用意します（図の中ほどの三角形） [15]。斜辺ABの長さを1と定めると、直角三角形の定義より**$AO = \sin\alpha$、$OB = \cos\alpha$**となります [16]。このとき$\angle AOB=\alpha$です。

2. **角度βを付け加える:** 次に、角βを加えるために、点Bからさらに線分BDを伸ばし、$\angle OBD = \beta$となるような直角三角形 OBD を追加します（図の右側の三角形）。これにより、元の基準から見て**全体の角$\angle AOD$が$(\alpha+\beta)$**になります。三角形OBDでは、BDを斜辺（長さ1）とみなすと、同様に**$OD = \cos\beta$、$BC = \sin\beta$**（図中の対応箇所）と表せます。

3. **辺の長さ関係を比較する:** 図全体で注目すると、大きな三角形 AOD が角度 $(\alpha+\beta)$ を持っています。この大きな三角形のある辺を、先ほどの小さい三角形の辺に分割して考えます。例えば、AD（点Aから点Dまでの一直線の長さ）に注目すると、これは**二つの部分**に分かれています。図よ

り $AD = AO + OD$ と分解でき、値を代入すると $AD = \sin\alpha + \cos\alpha\sin\beta$ となります。同様に、AE（点Aから真下の点Eまでの垂直の長さ）についても、$AE = OB + BE$ と二つに分けられます。これらはそれぞれ直角三角形で求めた値に置き換えられ、$AE = \cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta$ となります。

4. **公式の導出:** 上記の分割によって得られた式は、実は加法定理そのものを表しています。具体的には、ADは角$(\alpha+\beta)$に対する**正弦**（対辺）の長さに相当し、AEは角$(\alpha+\beta)$に対する**余弦**（隣辺）の長さに相当します [17]。したがって、これらの結果から次の関係が得られます。

5. $AD = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

6. $AE = \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

これはまさに加法定理の式そのものです [5]。以上により、図形的な観点から $\sin(\alpha+\beta)$ と $\cos(\alpha+\beta)$ の公式が証明できました。

✍ **補足:** 上記証明では鋭角の範囲で図を用いて説明しましたが、加法定理は角の大小や正負に関わらず**一般の角度**について成り立ちます [18]。一般の場合の証明には三角形の配置を場合分けするか、ベクトルや座標を使った代数的な方法（例えば余弦定理や複素数平面の回転など）を用います [19]。しかし本質的な原理は同じで、「角度の和の効果」がそれぞれの角度の効果に分解できることを示しています。実際、今回の証明手順をベースに、**余弦定理**や**単位円上の座標**を利用すれば一般角度の場合も証明可能です [20] [21]。試験などでは証明を一から行うのは大変なので、通常は公式を覚えて使いますが [13]、どのように導かれるか直感をつかんでおくと理解が深まるでしょう。

以上、加法定理の紹介から公式、そして証明までを見てきました。加法定理は一見すると複雑に感じるかもしれませんが、「角度を足す」という幾何学的イメージから導かれる自然な結果です。ぜひ公式を覚えるだけでなく、その背景にある意味や図形イメージも大切にしてください。授業や問題演習を通じて慣れていけば、きっと三角関数がさらに使いこなせるようになるでしょう。お疲れさまでした！ [22]

---

[1] [14] [15] [16] 加法定理の覚え方。図形でわかる公式の考え方｜アタリマエ！
https://atarimae.biz/archives/18266

[2] [5] [6] [7] [8] [9] [10] [11] [12] [13] [18] [21] [22] 三角関数の加法定理 | おいしい数学
https://hiraocafe.com/note/additiontheorem.html

[3] 三角関数の加法定理って実生活では何に活用されてますか？ - sinやcos... - Yahoo!知恵袋
https://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q12116355897

[4] 星の明るさには対数が、工事現場のノイズキャンセリングには三角関数... - Yahoo!知恵袋
https://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q12253400382

[17] Trigonometry/Addition Formula for Sines - Wikibooks, open books for an open world
https://en.wikibooks.org/wiki/Trigonometry/Addition_Formula_for_Sines

[19] [20] 〖三角関数の加法定理の証明〗絶対わかるように丁寧に導出！
https://math-master-orochi.com/proof_of_addition_theorem_of_trigo_func/