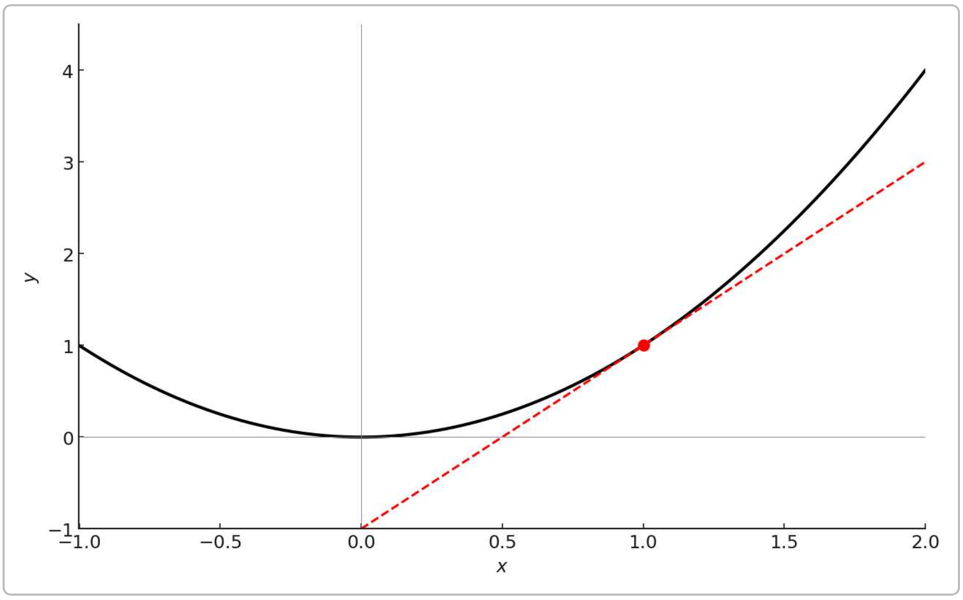
ChatGPT

微分を用いた関数の極値と変曲点

微分とは何か (導入)

微分とは関数の変化の度合いを調べるための方法で、「関数のグラフの傾き」を求めることに他なりません [1]。関数 y=f(x) のある点における微分係数 f'(x)は、その点での**接線の傾き**、言い換えればその点における関数の増加の速さを表します。微分係数が正であればその点で関数は**増加**（右上がり）し、負であれば**減少**（右下がり）しています。つまり、微分を使うことで「どの区間で関数の値が増えているか減っている か」が分かるのです。さらに微分を進めていくと、関数のグラフの山や谷、そして曲がり方までも分析できるようになります。



微分係数はグラフの接線の傾きを表します。上の図は放物線 y=x^2 の x=1 における接線を示したものです。この接線の傾きは f'(1)=2 であり、グラフ中の赤い破線がその接線です。接線の傾きが正であることから、この付近ではグラフが右上がりであるとわかります。また、接線はある一点でグラフとただ一度接し、その瞬間の変化の様子を表現しています。微分とは、このように関数の瞬間的な変化率（傾き）を求めるこ となのです。

以上のように、導関数（微分係数）f'(x) の符号を調べることで関数の増減を知ることができます。では、微分を用いて関数の**極大点・極小点**（局所的な最大・最小）や**変曲点**（グラフの曲がり方の変わり目）をどのように理解し求めればよいか、詳しく見ていきましょう。

極大点と極小点とは?

極大点とは関数のグラフが「局所的に見て」いちばん高くなっている点、**極小点**とは局所的にいちばん低くなっている点を指します [2] [3]。言い換えれば、極大点ではその近くで関数値が最大となり、極小点ではその近くで関数値が最小となる点です。注意しておきたいのは**最大値・最小値**との違いで、最大値・最小値は定義域全体での一番大きい（小さい）値ですが、極大値・極小値（総称して**極値**と言います）はあくまでその点のごく近傍での話に限ります [2]。したがって、関数によっては極大値や極小値が存在してもそれが定義域全体の最大・最小になるとは限らず、また極値が複数個所に現れることもあります。

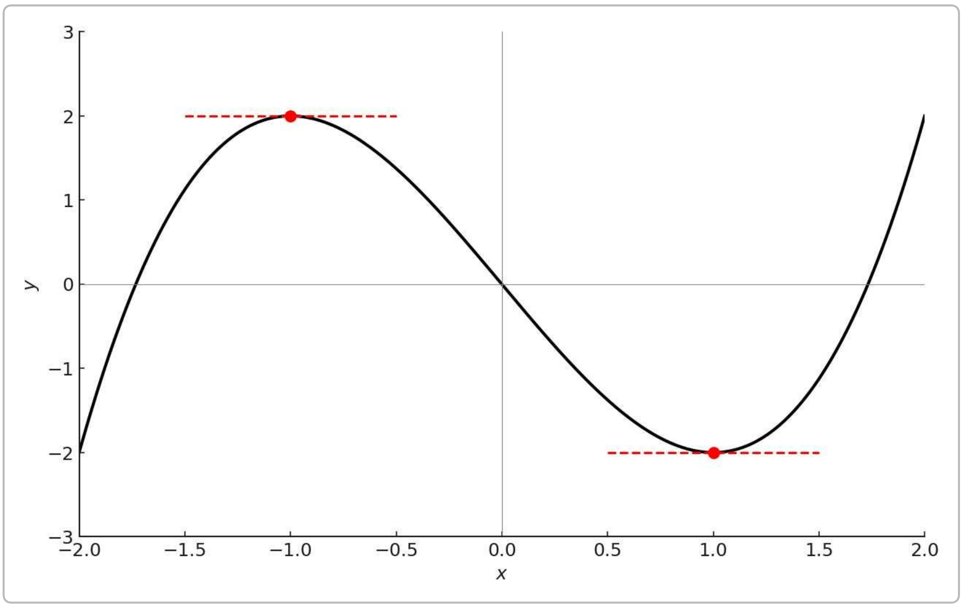
極値の判定と求め方

滑らかな関数（微分可能な関数）では、極大点・極小点では導関数が 0 になります。直感的には、極大・極小の頂点では接線が水平（傾き0）になるためです [4]。しかし**導関数が0になる点（停留点）**が必ず極値とは限らないことに注意が必要です（グラフが一旦水平になっても山や谷にならない場合があります）。極値となるためには、**導関数の符号がその点を境に正負で変化すること**が重要です [4]。具体的には:

- ある点 $x=a$ で $f'(a)=0$ かつ、$x=a$の前後で $f'(x)$の符号が**正から負に変化**するとき、$x=a$ で極大となり、$f(a)$ を**極大値**と言います [5] [4]。
- ある点 $x=b$ で $f'(b)=0$ かつ、$x=b$の前後で $f'(x)$ の符号が**負から正に変化**するとき、$x=b$ で極小となり、$f(b)$ を**極小値**と言います [5] [4]。

以上をまとめると、極値を求める手順は次のようになります [6]:

1. **導関数が0になる点を探す。** 方程式 $f'(x)=0$ を解き、その解を極値の**候補**とします。
2. **候補の前後で導関数の符号変化を確認する。** $f'(x)$ が「正→負」に変わればその点は極大、**「負→正」に変われば極小**です。符号変化がない場合、その点は極値ではありません。



上のグラフは関数 $f(x)=x^3 - 3x$ の極値の様子を示しています。この関数の導関数は $f'(x)=3x^2-3$ であり、解くと $f'(x)=0$ となる候補は $x=-1$ と $x=1$ です。グラフの赤い点がその候補に対応する点 $(-1,2)$と $(1,-2)$で、赤い破線はそれぞれの点での接線（水平な線）です。$x=-1$ の前後では接線の傾き（導関数）が正から負に変わっており（グラフは左側で上昇↗し右側で下降↘に転じています）、この点で極大値をとっています 。一方、$x=1$ の前後では導関数の符号が負から正へ変化し（グラフは下降↘から上昇↗に転じています）、この点で極小値をとっています [4]。実際、$f(-1)=2$ はこの関数の局所的な最大値、$f(1)=-2$ は局所的な最小値になっています。

補足: 導関数の符号変化を確認する方法として、増減表を作るのが有効です。増減表とは x 軸上に重要な値（導関数が0や定義域の端点など）を並べ、その各区間での $f'(x)$ の符号と $f(x)$ の増減（増加↗・減少↘）を表にまとめたものです。増減表を読むことで極大・極小の判定が一目で分かります。極値の問題ではまず導関数を計算して候補点を求め、次に符号変化（増減）を調べる、という一連の流れを押さえておきましょう。

変曲点とは?

変曲点とは、関数のグラフの**「曲がり方」が変わる点**を指します [7]。具体的には、グラフが**下に凸**（くだり坂がだんだん緩やかになる形: ∪の形）から**上に凸**（くだり坂がだんだん急になる形: ∩の形）またはその逆に切り替わる点のことです [8] [9]。別の言い方をすれば、**二次導関数の符号が変化する点**が変曲点です [8]。二次導関数 $f''(x)$ は導関数 $f'(x)$ の変化（増加傾向か減少傾向か）を示すものなので、$f''(x)$ の符号によりグラフの**凹凸**（**下に凸/上に凸**）が判定できます [9]。一般に:

- $f''(x) > 0$ の区間ではグラフは**下に凸**(cup形、上向きの曲がり) [9]。
- $f''(x) < 0$ の区間ではグラフは**上に凸**(cap形、下向きの曲がり) [9]。
- **下に凸**から**上に凸**へ、または**上に凸**から**下に凸**へとグラフの凹凸が入れ替わる点が**変曲点**です [9]。

変曲点では一階導関数の増減傾向（増加傾向か減少傾向か）が変わるため、グラフ上では**曲線の曲がり具合が反転**します [10]。例えば下に凸の区間では接線の傾き（導関数）は右に行くほど大きくなり（単調増加し）ますが、上に凸の区間では接線の傾きは右に行くほど小さくなります（単調減少します）。変曲点はちょうどその境目にあたり、車で言えばハンドルを切る方向を逆に切り始めるポイントに相当します [10]。

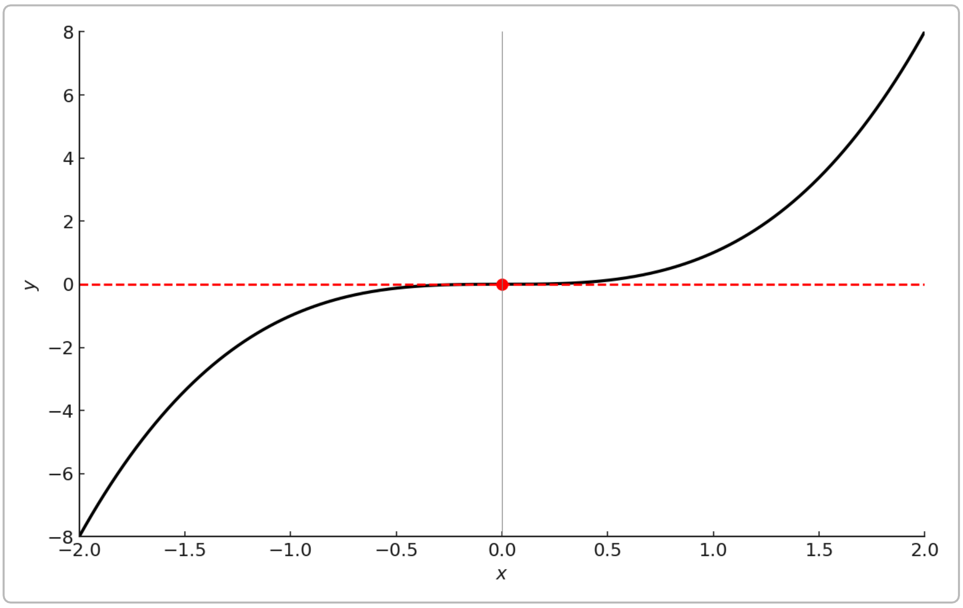
変曲点の求め方と注意点

変曲点を解析的に求めるには、**二次導関数 $f''(x)$ が0になる点をまず候補**とします [11]。方程式 $f''(x)=0$を解いて得られる解は変曲点のx座標の候補ですが、実際に変曲点であるためにはその点の前後で $f''(x)$の符号が変化することを確認する必要があります [12] [13]。これは極値の場合と同様、必要条件と十分条件の関係に注意が必要です。例えば:

- 関数 $g(x)=x^4$ の場合、$g''(x)=12x^2$ で $g''(0)=0$ となりますが、この前後で $g''(x)$ の符号は変わりません（x が負でも正でも $g''(x) > 0$） [14]。したがって x=0 は変曲点の候補ではあるものの**実際には変曲点ではありません** [15]。このように、$f''(a)=0$ は変曲点であるための**必要条件にすぎず**、十分条件ではないことに留意しましょう [13] [15]。

以上を踏まえ、変曲点を求める手順をまとめると次のとおりです:

1. **二次導関数が0になる点を求める。** 方程式 $f''(x)=0$ を解いて候補となるx座標を見つけます。
2. **候補の前後で $f''(x)$ の符号変化を確認する。** プラスからマイナス、またはマイナスからプラスへ符号が変わればその点が変曲点です。



上の図は三次関数 $y=x^3$ のグラフと変曲点を示しています。この関数の二次導関数は $f''(x)=6x$ で、$f''(0)=0$ となる $x=0$ が変曲点の候補です。実際、$x=0$ の前後で $f''(x)$ は負から正に変化しており（グラフは左側で上に凸∩、右側で下に凸∪に変化しています）、原点（0,0）が**変曲点**になっています [9]。赤い点で示した原点で接線（赤い破線）がグラフを横切っている様子にも注目してください。極大・極小点では接線はグラフに接するだけでしたが、変曲点では接線がグラフと交差する形になることが多いです（この例では接線が水平で、原点を境にグラフが接線の上下を行き交う形です）。このようにして変曲点ではグラフの屈曲の向きが反転するのです。

まとめと例題

今回のポイント: 微分係数（導関数）を調べることで関数の増減がわかり、導関数の符号変化から極大値・極小値（極値）を判定できます。また二次導関数を調べればグラフの凹凸（下に凸・上に凸）がわかり、その符号変化により変曲点を判定できます。それぞれ以下の手順で求めることができます:

- **極値の手順:** $f'(x)=0$の解を候補 → 候補の前後で $f'(x)$の符号変化を確認 [6]。
- **変曲点の手順:** $f''(x)=0$ の解を候補 → 候補の前後で $f''(x)$ の符号変化を確認。

最後に、理解度を確認するため例題を解いてみましょう。

例題: 次の関数 $f(x)$ について、極大値・極小値および変曲点を求めなさい（存在しない場合はその旨を述べなさい）。

- $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

解答: まず導関数を求めて極値を調べます。$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$となるので、$f'(x)=0$ の解は $x=0$と $x=2$ です（極値の候補）。次にこれらの前後で導関数の符号を確認します。因数分解された形 $3x(x-2)$から、$x<0$ では $f'(x)>0$、$0<x<2$ では $f'(x)<0$、$x>2$ では $f'(x)>0$と符号が変化します。したがって $x=0$ で $f'(x)$ が「＋から－」に変わり極大、$x=2$ で「－から＋」に変わり極小となります [4]。極大値は $f(0)=1$、極小値は $f(2)=-3$ です。

次に二次導関数を求めて変曲点を調べます。$f''(x) = 6x - 6$ となり、$f''(x)=0$ を解くと $x=1$ が得られます。候補 $x=1$の前後で $f''(x)$ の符号を見てみると、$x<1$では $f''(x)<0$、$x>1$ では $f''(x)>0$ となり符号が負から正に変化します。

よって、$x=1$のところで変曲点を持ちます。変曲点の座標は

(1,f(1))=(1,-1) です。以上より、極大値 1 （x=0で達成）、極小値 -3 （x=2で達成）、変曲点 (1,-1) と求まりました。

確認: 求めた結果をグラフで確認してみましょう。この関数は x=0 付近で山のように盛り上がり（極大点）、x=2 付近で谷のように凹んでおり（極小点）、x=1 でグラフの凹凸が切り替わっています。微分を用いることで、このように関数グラフの特徴（増減や極値、変曲点）を的確に把握できることが確認できました。微分法を活用してグラフの形状を読み解く力を養いましょう。

---

1 微分とは一体何なのか？微分はただの〇〇です！｜明光プラス
https://www.meikogijuku.jp/meiko-plus/study/differentiate.html

2 5 極大と極小の意味｜数学｜苦手解決Q&A｜進研ゼミ高校講座
https://kou.benesse.co.jp/nigate/math/a13m1302.html

3 4 6 極大値・極小値の意味と求め方 | 高校数学の美しい物語
https://manabitimes.jp/math/1185

7 8 10 11 変曲点の意味といろいろな例 | 高校数学の美しい物語
https://manabitimes.jp/math/1214

9 〘高校数学Ⅲ〙「曲線の凹凸と変曲点（１）」｜映像授業のTry IT (トライイット)
https://www.try-it.jp/chapters-7472/sections-7473/lessons-7514/

12 13 14 15 変曲点に関する知識まとめ（意味・求め方・法則）｜理系ラボ
https://rikeilabo.com/inflection-point