正弦定理と余弦定理

学習マニュアル

作成者： [大崎陽介]

目次

1. はじめに
2. 正弦定理　2.1 正弦定理の定義　2.2 正弦定理の証明　2.3 正弦定理の応用例
3. 余弦定理　3.1 余弦定理の定義　3.2 余弦定理の証明　3.3 余弦定理の応用例

はじめに

三角形は中学校から学ぶ基本的な図形ですが、高校になるとさらに深い性質—**正弦定理**と**余弦定理**—を学びます。これらの定理は、三角形の辺の長さと角度の関係を明確にし、未知の辺や角を求める際に大変有効です。本マニュアルでは、正弦定理と余弦定理の定義、証明、具体的な応用例を解説します

正弦定理

正弦定理の定義

任意の三角形 $\triangle ABC$ において、各辺の長さ a, b, c と、それぞれの対角の角 A, B, C の正弦の比は常に等しくなります。 つまり、

$a/\sin A=b/\sin B=c/\sin C$

正弦定理の証明

以下、標準的な証明方法の一例を示します。

1. **三角形の描画と高度の作図** 図 1 のように、任意の三角形 $\triangle ABC$ を描きます。
    - 辺 a は角 A に対する辺、
    - 辺 b は角 B に対する辺、
    - 辺 c は角 C に対する辺です。

次に、頂点 A から辺 BC に垂直な線を引き、その足を D とします

2. **高さの表現** このとき、三角形の高さ h は二通りの方法で表されます。
    - 三角形 $\triangle ABD$ において：

$h=b\sin C$

（角 CC は $\triangle ABD$ の一角とみなす）

- 同様に、三角形 $\triangle ADC$ では：

$h=c\sin B$

3. **高さの等式から比を導出** 両式は同じ h なので、

$b\sin C=c\sin B$

と等しくなります。これを変形すると、

$b/\sin B=c/\sin C$

対称性による一般化 同様の方法で、他の辺と角についても同様の関係が成り立ちます。最

終的に示され、正弦定理の証明が完了します。

正弦定理の応用例

例題 1： 三角形 $\triangle ABC$ で、

- 辺 $a = 8$ cm
- 辺 $b = 10$ cm
- 角 $A=45^\circ$ のとき、角 B を求めなさい。

解答へのヒント： 正弦定理より

$8/\sin 45^\circ = 10/\sin B$

となるので、$\sin B$ を求め、角 B の大きさを計算します。（計算は実際に電卓などで行ってみましょう）

余弦定理

余弦定理の定義

任意の三角形 $\triangle ABC$ に対して、辺 a,b,ca,¥,b,¥,c およびその対角の角 CC との関係は次の式で表されます。

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

これは、直角三角形の場合にはピタゴラスの定理（$c^2 = a^2 + b^2$）の一般化とも言えます。

余弦定理の証明

証明は都合上カット

証明サイト:

[余弦定理とその証明 | 高校数学の美しい物語]

余弦定理の応用例

例題 2： 三角形 $\triangle ABC$ で、

- 辺 $a= 5$ cm
- 辺 $b = 7$ cm
- 角 $C=60^\circ$ のとき、辺 cc の長さを求めなさい。

解答へのヒント： 余弦定理より

$C^2=5^2+7^2-2\times 5\times 7\cos 60c^2$

となるので、計算を進めて c を求めます。（実際に数値を代入して計算しましょう）