# 対数とネイピア数の微積分

## 1　微分の復習：定義

- 微分係数の定義：

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

## 2　対数とネイピア数の微分と証明

### 2.1　$e^x$ の微分

$$\frac{d}{dx} e^x = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

### 2.2　$\ln x$ の微分

$$\frac{d}{dx} \ln x = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \ln\!\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x} \lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{1}{x}.$$

### 2.3　$\log_a x$ の微分

途中で底の変換公式を用いる。

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{d}{dx}\left(\tfrac{\ln x}{\ln a}\right) = \frac{1}{x \ln a}.$$

## 3　対数微分法

関数 $y = f(x)$ が $(x^x,\ x^2\sqrt{x}, \dots)$ のように複雑なときには,

$$\ln y = \ln f(x), \quad \frac{1}{y}y' = \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad y' = y\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

**■例：**　$y = x^x$ の場合

$$\ln y = x\ln x, \quad \frac{1}{y}y' = \ln x + 1 \implies y' = x^x(\ln x + 1).$$

## 4　対数とネイピア数の積分

### 4.1　指数関数の積分

$$\int e^x\,dx = e^x + C, \quad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

### 4.2　対数の積分

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + C,$$
$$\int \log_a x\,dx = \int \frac{\ln x}{\ln a}\,dx = \frac{1}{\ln a}\bigl(x\ln x - x\bigr) + C.$$