IMO 2021/1,

部長記事２ 2025/08/04

問題

100以上の整数 n を考える。n + 1枚のカードに n + 1, n+ 2, ... 2nがそれぞれ書かれている。

これをすべてシャッフルし、二つのグループにする。

このとき、どちらかのグループに含まれるある二つの数の和が平方数となることを示せ。

A.

具体的構成を与えてから証明に向かう。

$$a, b, c, k\text{は整数で、}k > 0\text{、}a < b < c$$

そして

$$b + c = (2k + 1)^2$$

$$c + a = 4k^2$$

$$a + b = (2k - 1)^2,\text{とする。}$$

$$\text{これより、}a = 2k^2 - 4k, b = 2k^2 + 1, c = 2k^2 + 4k$$

$$\text{そして、}n < a < b < c < 2n$$

$$\text{ゆえに}k^2 + 2k < n < 2k^2 - 4k.(1)$$

つぎに100以上の整数nに対して(1)を満たすような整数kが存在することを示す。

「示した」とは何かを考える。

「示したいこと」は「100以上の整数nに対して(1)を満たすような整数kが存在すること」である。

これは「各kによる(1)で100以上のnを覆う」ことでもある。

なぜなら、あるkによってnが覆われているなら(そのような(1)に収まる)

そのnに対してあるkが存在することがわかる。

今回は「そのn」を集めて100以上のnに対して言えればいい。

これを踏まえると、

$$2k^2 - 4k > (k+1)^2 + 2(k+1) - 1, (\text{ただし} k > 8)$$

より、k番目の上端よりk+1番目の下端のほうが小さい(または等しいので)

(k番目,k+1番目,k+2番目番目の箱が重なるorくっつくように目盛りが100以上のの数直線の上に

置かれていく)

k = 9からはじめることで、すべてのnを覆える。(k = 9ときの下端、つまりk^2 + 2kは 99。)