高校 1 年生向け 60 分セミナー

ログとネイピア数

著者： chatgpt + overleaf

2025 年 7 月 10 日

目次

1　はじめに（5 分）

- 指数・対数は「**掛け算を足し算に変える道具**」。
- e（ネイピア数）は「連続的な成長」の自然なスケール。

本セミナーでは

1) **log とは？表し方**
2) **基本性質**
3) **底の変換公式**
4) **ネイピア数とは**

を 60 分で理解できるようにする。

2　log とは？ 表し方（15 分）

$a = -2$

$x = \sqrt{-2} = (-2)^{\frac{1}{2}}$

定義 2.1 (対数)**.** $a > 0,\ a \neq 1$ とする。$x > 0$ に対し

$$\boxed{\log_a x = y \iff \boxed{a^y = x}}.$$

a を **底**（てい）、x を **真数** という。

例 2.2. $\log_{10} 1000 = 3$（$10^3 = 1000$）。$\log_2 \frac{1}{8} = -3$（$2^{-3} = 1/8$）。

■記号の使い分け

$$\log x := \log_{10} x, \qquad \ln x := \log_e x.$$

理科系分野では log を ln 意味で使うこともあるので注意。

~~対数の図示（任意）~~

指数関数 $y = a^x$ と対数関数 $y = \log_a x$ は $y = x$ に関して点対称（逆関数の関係）である。

3　基本性質（15 分）

命題 3.1 (対数の基本公式)**.** $a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0,\ y > 0$ とすると

$$\boxed{\begin{aligned}&\textit{(1)}\ \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y,\\ &\textit{(2)}\ \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y,\\ &\textit{(3)}\ \log_a(x^r) = r\ \log_a x \quad (r \in \mathbb{R}),\\ &\textit{(4)}\ \log_a 1 = 0, \qquad \log_a a = 1.\end{aligned}}$$

Proof. (1) を示す。$\log_a x = p,\ \log_a y = q$ と置くと $a^p = x,\ a^q = y$。掛け合わせて $a^{p+q} = xy$。対数の定義へ戻すと $\log_a(xy) = p + q = \log_a x + \log_a y$。

(2) は $\dfrac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$ に (1) を適用し、$\log_a y^{-1} = -\log_a y$ を使う。

(3) は $x^r = (a^{\log_a x})^r = a^{r \log_a x}$ から従う。

(4) は定義 $a^0 = 1,\ a^1 = a$ を逆向きに読むだけ。 □

~~系~~ 3.2. $\log_a x$ は真数の積を足し算に、累乗を掛け算に変換する演算である。

4　底の変換公式（10 分）

定理 4.1 (底の変換公式)**.** $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1,\ x > 0$ とすると

$$\boxed{\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}}.$$

Proof. $\log_b x = y \iff b^y = x$。両辺に $\log_a$ を取ると $\log_a(b^y) = \log_a x$。基本性質 (3) により $y \log_a b = \log_a x$。$y = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$ で公式成立。 □

5　ネイピア数とは（10 分）

定義 5.1 (ネイピア数 e)**.**

$$\boxed{e := \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \approx 2.718281828\ldots$$

5.1　連続複利の極限としての e

年利 100% を n 回に分け複利運用すると

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n \text{ 回})$$

になり、分割回数 $n\to\infty$ で e に近づく。「最も効率的な成長係数」が e と言える。

定理 5.2 (指数関数 e^x の微分)**.**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x = e^x.$$

系 5.3 (自然対数)**.**

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

と定義すると $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x = \dfrac{1}{x}$ かつ $e^{\ln x} = x$ である。よって $\ln x = \log_e x$。

6　まとめ（概算 5 分）

- $\log_a x$ は「a を何乗したら x？」を答える演算。
- 掛け算→足し算、累乗→掛け算へ写す基本性質が計算の要。
- 底の変換公式により、任意の底の対数は一つの底で計算可能。
- e は連続的成長の極限で現れる普遍定数。
- 自然対数 $\ln x$ は e を底とする対数。

演習（時間が余ったら）

1. $\log_2 32$ を求めよ。
2. $\log_{10} 2$ を使って $\ln 2$ を近似せよ。
3. 底の変換公式を用い $\log_3 5$ を $\log_{10}$ だけで表せ。
4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$ を e を用いて表せ。