Fatouの補題をまとめてみる

部長記事No.1

親愛なる数学研究同好会部員とこの記事を閲覧してくださったすべての方々に捧ぐ

部長記事では部長が適当に学んできたことや**解きたい**(~~身の程知らずとは言わないでほしい~~)
と思った問題(IMO,JMO,OMC,AtCoder,大学・大学院入試問題etc..?)を巧拙を考慮しない
スタイルでまとめていきます。

寮の虫問題をどうにかしてほしい今日この頃、
(午前4時、洗面台にコバエ死骸が20余あるのはやめてほしい)
ふと数学研究同好会の部長(部長よりも優秀そうな1年生がわらわらいる。)らしいこと？
を全くしてなかった気がしたので、チョクチョク記事をこのサイト限定で公開したいと思います。
(外部サイトとかには上げたくない、そういう偉そうなことを言える立場でもなく、実力もない。
何より　ハズカシイ)

今回のテーマ(Fatouの補題)
(X,F,μ)*を測度空間とする*
{f_n}を
非負可測関数列とする。

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

が成立する。

日本語で説明してみると
測度空間(大きさを定義できて物差しのある空間)で
可測関数列(ものさしで大きさを測れる数列の関数バージョン)
の下極限をとってから積分するよりも
積分してから下極限を取ったほうが大きいという主張。

証明

単調収束定理を用いる。

$g_n = inf :_{k \geq n} f_k$とおくと，$g_n$は非負可測関数の増大列で，$g_n \uparrow lim\,inf : f_n$である($liminf$の定義そのまま

.

$$liminf :_{n \to \infty} \int g_n d\mu = \int liminf :_{n \dashrightarrow \infty} f_n d\mu.$$

を得る。(1)

一方で，$g_n \leq f_n$より$\int g_n d\mu \leq \int f_n d\mu$であるから，両辺$lim\,inf$を取ることで，

$$liminf :_{n \to \infty} \int g_n d\mu \leq liminf :_{n \to \infty} \int f_n d\mu.$$

を得る。(2)

(1)と(2)より、示したい補題である

$$\int liminf :_{n \to \infty} f_n d\mu \leq liminf :_{n \to \infty} \int f_n d\mu$$

が成立する。