ChatGPT

微分入門セミナー 講義ノート

1. 微分の導入と極限の復習

微分とは何か？ – 「瞬間の傾き」を求める操作

皆さんは中学で直線の式 $y = ax + b$ における**傾き** a を学びましたね。傾きとは「x の値が1増えたらy の値がどれだけ増えるか」を表す数でした。実は**微分とは一言で言えば関数のグラフの傾きを求める操作**です [1]。ただし、一次関数（直線）の場合は傾きがどこでも一定でしたが、一般の曲線では場所によって傾き（変化の割合）は違います。ある**一点での瞬間的な傾き**を求めるのが「微分」というわけです。

例えば、車で40kmの距離を1時間で移動したとしましょう。このとき平均の速度は40 km/hになります。しかし実際には、車は途中で加減速するので常に一定の速度で走っているわけではありません。同じように、距離を縦軸、時間を横軸にとった移動距離のグラフを考えると、ある瞬間における速度（いわゆるスピードメーターの値）は、その時点のグラフの傾きとして表せます [2]。**微分を使えば、このようにグラフの各点における瞬間の傾き（＝瞬間の変化率）を求めることができるのです** [2]。これを数学的に定義したものが次の「微分係数」です。

微分係数の定義（導入）: 関数 $y = f(x)$ の $x = a$ における微分係数（つまりグラフの接線の傾き）とは、増分 h を用いて次の極限値で定義されます。

$$f'(a) \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \qquad \text{(※微分の定義)}$$

この式の意味を確認しましょう。分子は、$x = a$ から$x = a + h$ まで入力を増やしたときの関数の増加量（変化量） $\Delta y = f(a+h) - f(a)$ です [3]。そしてそれを増加量 h で割った $\frac{\Delta y}{h}$ は、$x = a$ と$x = a + h$ の2点間での平均的な傾き（平均変化率）を表しています。最後にh **を限りなく0に近づけたときの極限**（$\lim_{h\to 0}$ ）をとることで、区間の長さが0に近づき2点が重なった瞬間での傾き、つまり**一点における瞬間の傾き**を求めるのです [4]。この操作が「微分する」ということの本質です。

> **★ポイント:** 「微分＝瞬間の傾きを求めること」。平均の変化率（2点間の傾き）から極限操作で一点の傾きを定義する [4]。これにより関数の増減の速さを瞬時値で捉えることができます。

上記の微分係数 $f'(a)$ は「$y = f(x)$ を$x = a$ で微分した値」を表し、記号的には $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ と書かれることもあります。また、変数x の関数として一般に $f'(x)$ を定義したものを**導関数**と呼びます。たとえば関数 $y = f(x)$ の導関数を $y' = f'(x)$ と書けば、それは入力 x に対し出力がその点での傾き $f'(x)$ を与える新たな関数ということになります [5]。

極限（Limit）の復習

微分の定義に登場した「極限」という概念について補足します。極限記号 $\lim_{h\to 0}$ は、「h を限りなく0に近づける」という意味でした [6]。一般に「$\lim_{x\to a} f(x) = L$ 」と書いたとき、「x が a に近づくとき $f(x)$ が L に近づく」ことを表します。極限を用いると、関数の挙動を厳密に記述することができます。

極限値の例: よく出てくる極限の結果として、

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1, \qquad \lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta - 1}{\theta} = 0$$

があります。これらは三角関数の微分公式を証明する際に利用する重要な極限値です（※これらの結果は高校数学IIIで証明されますが、ここでは事実として使います）。

> **★ポイント:** 極限記号 $\lim$ は「値を限りなく近づける」操作。微分では増分 h を0に近づけて平均変化率を極限で求める [6]。また $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ など基本的な極限結果も押さえておきましょう。

図1: 曲線 $y = x^2$ 上の点 $P(1,1)$ における接線（緑の破線）と、別の点 $Q(2,4)$ を通る割線PQ （赤の点線）。割線の傾きは区間

$$1, 2$$

での平均変化率を表す。一方、接線の傾きが $x = 1$ での微分係数（瞬間の変化率）である。接線の傾きは割線の位置 Q をP に近づける（$h \to 0$ ）極限で得られるイメージになる。

2. 微分の基本公式とその証明

それでは、微分の具体的な計算ルールについて学んでいきましょう [7]。ここでは高校範囲で重要な**基本公式**を取り上げ、その証明のアイデアを紹介します（実際の計算では公式を暗記して使えるようになることも大切です [7] ）。証明は微分の定義に基づいて行いますので、極限や初等的な公式を適宜活用します。

2.1 x^n （べき関数）の微分公式

まずはべき乗の関数 $f(x) = x^n$ について、微分公式を導出します（n は整数とします）。結論から言えば、

$$\frac{d}{dx}x^n = n\,x^{\,n-1}$$

です [8]。これを微分の**べき乗則**（べき関数の微分公式）と呼びます。

証明（定義から導く）: 微分の定義に従い、

$$(x^n)' \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

を計算します。 [9] まずは分子を展開しましょう。二項定理より

$$(x+h)^n \;=\; x^n + \binom{n}{1}x^{\,n-1}h + \binom{n}{2}x^{\,n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x\,h^{\,n-1} + h^n\,.$$

この式から x^n を引くと、差分は

$$(x+h)^n - x^n \;=\; \binom{n}{1}x^{\,n-1}h + \binom{n}{2}x^{\,n-2}h^2 + \cdots + h^n$$

と**必ず h を因子に含む項**の和になります [10]。したがって分母の h と約分でき、

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \;=\; \binom{n}{1}x^{\,n-1} + \binom{n}{2}x^{\,n-2}h + \cdots + h^{\,n-1}\,.$$

あとは $h \to 0$ と極限を取ると、h を含む第2項以降はすべて 0 に消えます。結局、

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \;=\; \binom{n}{1}x^{\,n-1} = n\,x^{\,n-1}$$

となり、求める結果が得られます [11]。

> **★ポイント:** x^n の微分では**二項定理による展開**が有効 [9]。展開後は必ず h でくくれるので、極限により h が消えて先頭項だけが残る [11]。結果として $(x^n)' = nx^{n-1}$ となる。

2.2 $\sin x$, $\cos x$ の微分公式

続いて三角関数 $y = \sin x$ および $y = \cos x$ の導関数を求めましょう。結論だけを書けば、

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

となります [12]。これらは三角関数の微分の基本公式です。ここではこの結果が妥当であることを**グラフの形**と**極限計算**の両面から確認します。

図2: $y = \sin x$ （青の実線）と $y = \cos x$ （赤の破線）のグラフ比較。例えば $x = 0$ では $\sin x$ のグラフの接線傾きは 1 だが、この値は $\cos 0 = 1$ に等しい。また $x = \pi/2$ では $\sin x$ の接線傾きは 0 で、それは $\cos(\pi/2) = 0$ に対応する。全ての点で $\sin x$ の変化の速さを表すグラフは $\cos x$ と一致していることが読み取れる。

グラフを見ると、$\sin x$ の導関数は $\cos x$ になりそうだ、という直感が得られます。では実際に微分の定義で確かめてみましょう。

証明: 微分の定義に従い、

$$(\sin x)' \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

を計算します [13]。三角関数の加法公式を用いると、

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$$

なので、差分は

$$\sin(x+h) - \sin x = \sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h$$

となります。これを h で割ると:

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \sin x\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x\frac{\sin h}{h}\,.$$

ここで $h \to 0$ の極限を考えます。既に述べた基本極限より $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ かつ $\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ ですから、上式の極限は

$$\sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x$$

となります [14]。ゆえに $(\sin x)' = \cos x$ が示されました。

次に $\cos x$ の微分を同様に求めます。定義より:

$$(\cos x)' \; = \; \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \, .$$

加法公式 $\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$ を使うと、

$$\cos(x+h) - \cos x = \cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h$$

となります。従って:

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h} \, .$$

極限 $h \to 0$ をとると、$\frac{\cos h - 1}{h} \to 0$ および $\frac{\sin h}{h} \to 1$ より

$$\cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 = -\sin x$$

が得られます。つまり $(\cos x)' = -\sin x$ となることが示されました [15] [16]。

> **★ポイント:** 三角関数の微分では**加法定理（あるいは和差→積の公式）**を利用して差分を変形し、基本極限 $\sin h/h$ ・$(\cos h - 1)/h$ を適用する [14] [15]。結果として $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ および $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$ が得られる。

2.3 積の微分法則（積の公式）

次は**積の微分法則**です。2つの関数の積 $y = f(x)\,g(x)$ の微分は、次のように与えられます:

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\,g(x)\} = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x) \, .$$

言葉で言えば、「一方を微分してもう一方はそのまま足し合わせる」という形になります [17]。（この公式は**積の公式**とも呼ばれ、高校では頻出の基本ルールです。）

証明: 導関数の定義から出発します [18]:

$$\{f(x)g(x)\}' \; = \; \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h} \, .$$

このままでは分子が一体となっていて扱いにくいので、**都合のよい形に足し引き**します [19]。具体的には $f(x+h)g(x)$ を足して引きして、分子を2項に分解します:

$$\begin{aligned} f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) &= f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x) \\ &= f(x+h)\{\,g(x+h) - g(x)\} + g(x)\{\,f(x+h) - f(x)\} \, . \end{aligned}$$

したがって、

$$\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}=f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,.$$

ここで $h\to 0$ とすると、$f(x+h)$ は $f(x)$ に近づき（※微分可能な関数は連続でもあります）、各差商はそれぞれ $g'(x)$ 、$f'(x)$ に近づきます [20] 。より厳密には、

$$\lim_{h\to 0}f(x+h)=f(x),\qquad \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x),\qquad \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)\,.$$

以上より極限を分配して計算すると:

$$\{f(x)g(x)\}' \;=\; f(x)\cdot g'(x)+g(x)\cdot f'(x)$$

が得られました [21] [22] 。証明完了です。

> **★ポイント:** 積の微分の証明では**分子への巧みな加減**が鍵 [19] 。$f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)$ に $f(x+h)g(x)$ を足して引き、積の差を和の差に分離します。あとは極限計算により期待通りの結果が得られます [22] 。なお公式自体は「
>
> $$f'g+fg'$$
>
> 」とシンプルなので必ず覚えておきましょう。

2.4 合成関数の微分（連鎖律）

最後に**合成関数の微分法則**を紹介します。これはいわゆる**連鎖律（chain rule）**と呼ばれるもので、関数の入れ子（合成）を微分するための公式です [23] 。具体的には、もし $y=f(u)$ という関数と $u=g(x)$ という関数があったとき、合成関数 $y=f(g(x))$ の導関数は

$$\frac{d}{dx}f(g(x))=f'\big(g(x)\big)\;\cdot\;g'(x)$$

となります [23] 。日本語では「**中身を微分して外側で微分する**」などと表現されることが多いです。

証明の考え方: やはり微分の定義に従います [24] 。h の極限をとる前に、合成関数の差分 $f(g(x+h))-f(g(x))$ に着目しましょう。これを単純に h で割って極限をとるのは厄介ですが、**うまく1つの差商の形にする**ために以下のような操作をします [25] :

$$\begin{aligned}\{f(g(x))\}' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\;\cdot\;\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\,.\end{aligned}$$

このように**差分** $f(g(x+h))-f(g(x))$ **と対応する増分** $g(x+h)-g(x)$ **で割り算と掛け算をして挟む**ことで、積の形に分離することができます [25] 。後半の $\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ の部分は $h\to 0$ で $g'(x)$ に収束します。一方、前半の分数を見ると、これは変数 $u=g(x)$ に着目した**内側の差商** $\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}$ の形そのものです [26] 。ただし $\Delta u=g(x+h)-g(x)$ ですが、$h\to 0$ のとき $\Delta u\to 0$ となるので [26] 、この部分はまさに u に関する導関数 $f'(u)$ （ただし $u=g(x)$ ）に近づきます。以上をまとめて極限を評価すれば:

$$\{f(g(x))\}' \;=\; f'\big(g(x)\big)\;\cdot\;g'(x)$$

が確かに成り立つと分かります [27]。連鎖律の証明は直観的には少し難しく感じるかもしれませんが、増分を用いたこの誘導法により理解できます。

> **★ポイント:** 連鎖律では**差分比を掛けて割るテクニック**で一旦積の形に持ち込み、極限操作で内側の導関数と外側の導関数を分離する [25] [26]。結果として「合成関数の微分 = 内側の微分 × 外側の微分」というシンプルな形が得られる。

3. まとめ：基本的な微分公式一覧

最後に、本セミナーで扱った主な微分公式をまとめます。導関数を求める際は以下の公式を組み合わせることで、初等的な関数であればほとんど対応可能です。

- **微分係数の定義:** $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ （微分＝瞬間の変化率 [4]）
- **べき関数:** $\frac{d}{dx} x^n = n\, x^{n-1}$ [11]
- **三角関数:** $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x, \qquad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$ [14] [15]
- **積の法則:** $\frac{d}{dx} \{f(x)\, g(x)\} = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$ [22]
- **合成関数（連鎖律）:** $\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$ [27]

以上の公式は微分計算の基本ルールとなります。しっかりと理解し、自分で証明も再現できるようにしておきましょう。微分を用いることで関数の増減や極値、さらには物理現象の瞬間変化（速度や加速度など）を分析できるようになります [28]。ぜひ今後の学習や問題演習で繰り返し活用して、微分法を自分のものにしてください。お疲れさまでした！

---

[1] [2] [3] [4] [6] [28] 微分とは一体何なのか？微分はただの〇〇です！ | 明光プラス
https://www.meikogijuku.jp/meiko-plus/study/differentiate.html

[5] [7] [8] [9] [10] [11] [12] [13] [14] [15] [16] [18] [19] [20] [21] [22] [24] [25] [26] [27] 高校数学の微分公式一覧（例題と証明付き） | 理系ラボ
https://rikeilabo.com/differential-formula-in-high-school

[17] [23] 微分公式一覧（基礎から発展まで） | 高校数学の美しい物語
https://manabitimes.jp/math/1109