はじめての積分セミナー
インテグラルに怯えない

chatgpt + overleaf

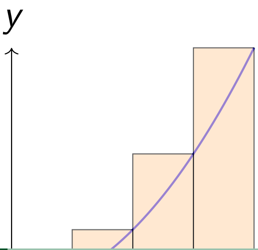
2025 年 7 月

今日の流れ

1. 積分の直感的理解
2. 数式としての理解
3. 積分定数ってなんだよ
4. 基本公式

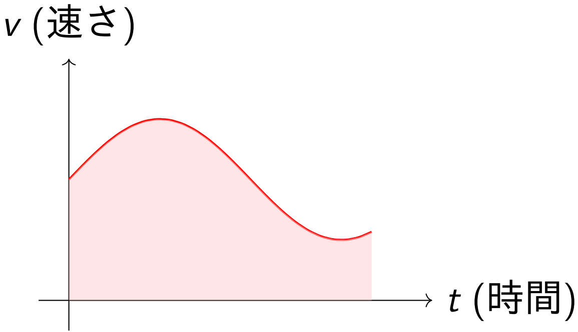
積分ってなに? まずは面積で考えよう

- 関数 $y = f(x)$ の下にある曲線の下の面積をはかりたい！
- この広さ（面積）を ぜんぶ足し合わせる 操作が “積分” のはじまりです。
- ここでは細長い長方形で近づける操作をとります。



速度グラフの下の面積 = 進んだ距離

- 時間 t と速さ $v(t)$ のグラフを描くと、面積が道路上の距離に！
- 一定の速さなら長方形。速さが変わると…細かい長方形で近似して全部足す。



積分記号の誕生

定積分 (きまった区間)

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad \text{区間}a\text{から}b\text{までの“面積”を全部足し}$$

- $\int$ は“S”を伸ばした形。Sum (足し合わせ) のイメージ！
- dx は「横に少しだけ動かす」というメモ。

もっと自由に: 不定積分

不定積分 (区間を決めない版)

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

- 面積を“スタート位置”から測った関数 $F(x)$ を作る感じ。
- C は 微分によって消え去る定数項。これが“積分定数”。

- 定数項を微分してしまうと 0 になる。その微分した関数を積分しても、定数は帰ってくることはない。二度と。
- 実際の物理演算ではこの定数項がないと、ただしくシュミレーションができないことがある。
- そのため、積分した関数とともに、失われたであろう定数の偶像 C を立て、むりやり元々の定数の値を代入することで、情報補完を行うのが C である。

多項式の積分公式

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

証明 (確認)

右辺を $G(x)$ と置く。微分すると…

$$G'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$$

つまり元の関数に戻るので OK！

三角関数の積分公式

覚えたい！

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

証明 (確認)

たとえば $\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$ を確認！

指数関数の積分公式

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

証明 (確認)

$\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$ を思い出そう！

今日のまとめ

- 積分は「ちっちゃいものを全部たす」操作
- 記号 $\int$ と dx はそのメモ書き
- 不定積分では上下シフト分 C が魔法のように現れる
- 基本公式は「微分で戻るか？」で確認して覚えよう！