部分積分と置換積分 高校一年生向け講義資料

2025 年 8 月 1 日

はじめに

積分法は微分と並んで解析学の重要な柱であり、面積や体積、物理量の計算など身の回りのさまざまな場面で使われます。しかし、積分が複数の関数の積になっている場合、そのままでは計算が難しいことがあります。本資料では、高校一年生でも理解しやすいように、**部分積分**と**置換積分**という二つのテクニックを紹介します。これらの方法は数学で学ぶ内容の先取りですが、基本的な考え方は中学校や数学・で学んだ知識を土台に理解することができます。なお、式の導出や公式の証明では微分の積の公式や合成関数の微分公式を用います。

1 部分積分

1.1 部分積分の概要と公式

部分積分とは、二つの関数の積 $f(x)g(x)$ を積分するときに利用する手法です。一般に、関数の積はそのままでは積分が難しいため、微分と積分を組み合わせて式を変形し、計算が容易な形にします。[1] でも述べられているように、部分積分は「積の形で表される関数を積分する際に使用される」重要な方法です。

二つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ に対し、$f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とすると、**部分積分の基本公式**は

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx. \tag{1}$$

右辺第一項の $f(x)g(x)$ は元の積に含まれる片方の関数をそのまま残し、もう片方を積分したもの、第二項 $\int f'(x)g(x)\,dx$ は $f(x)$ の微分と $g(x)$ の積の積分です。

定積分の場合でも、区間 $[a,b]$ に対して同様の公式が成り立ちます：

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \big[f(x)\,g(x)\big]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx. \tag{2}$$

この形では第一項が $x=a$ から $x=b$ までの値の差になることに注意してください

1.2 公式の導出

部分積分の公式は、積の微分公式 $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ を両辺積分するとすぐに導かれます。積の微分公式を x で積分すると

$$\int (f(x)g(x))'\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx. \tag{3}$$

左辺は積分の定義により $f(x)g(x)$ となるため、移項して式 (1) が得られます。定積分の場合も同様にして式 (2) が証明できます。

1.3 部分積分の使い方と選び方

公式 (1) を使う際には、$f(x)$ を微分すると簡単になる関数、$g(x)$ を積分しても形が複雑にならない関数として選ぶことがコツです。[2] では、「微分して簡単になる方を f とする」ことを勧めています。具体的な選び方としては、[1] における三つのパターンが参考になります：

1. $f'(x)$ が定数になる関数（例：多項式）。例えば $\int xe^x\,dx$ では $f(x) = x$ を選び、$g(x) = e^x$ とします。
2. $f'(x)\,G(x)$ が約分できる関数（例：$\log x$）。$\int x\log x\,dx$ では $f(x) = \log x$ を選ぶと $f'(x) = 1/x$ なので計算が容易になります。
3. 計算の途中で元の関数が再び現れる場合（同形出現）。$\int e^x \sin x\,dx$ では部分積分を 2 回繰り返すことで元の積分が再び現れ、方程式として解くことができます。

このように、どの関数を微分しどの関数を積分するかを意識して選ぶと部分積分が成功しやすくなります。

1.4 例題 1：$\int x\cos x\,dx$

二つの関数 $f(x) = x$ と $g(x) = \cos x$ の積を積分します。$f(x)$ の微分は 1、$g(x)$ の原始関数は $\sin x$ なので公式 (1) より

$$\begin{aligned}\int x\cos x\,dx &= x\ \sin x - \int 1\cdot\sin x\,dx\\ &= x\sin x + \cos x + C.\end{aligned}$$

この結果は [2] の例題でも示されており、部分積分の基本的な使い方を理解するのに適した例です。

1.5 例題 2：$\int (x+2)\sin x\,dx$

ここでは $f(x) = x+2$、$g(x) = \sin x$ と置きます。$f'(x) = 1$、$G(x) = -\cos x$ なので

$$\begin{aligned}\int (x+2)\sin x\,dx &= (x+2)(-\cos x) - \int 1\cdot(-\cos x)\,dx\\ &= -(x+2)\cos x + \int \cos x\,dx\\ &= -(x+2)\cos x + \sin x + C.\end{aligned}$$

このように多項式と三角関数の積では多項式を微分し三角関数を積分する選び方が有効であることがわかります

1.6 例題 3：$\int e^x \sin x\,dx$（同形出現の例）

$I = \int e^x \sin x\,dx$ とおくと、$f(x) = \sin x,\, g(x) = e^x$ で

$$I = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx \quad = e^x \sin x - \left[e^x \cos x - \int e^x(-\sin x)\,dx\right] \ = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\,dx \quad = e^x \sin x -$$

両辺から I を引いて整理すると $I = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$ が得られます。これは [2] で紹介されている定型的な例題であり、同形出現のパターンを利用した計算です。

2　置換積分

2.1　置換積分の概要と公式

置換積分（変数変換による積分）は、被積分関数が複雑な形をしているときに、新しい変数に置き換えて積分を簡単にする方法です。[4] によれば、「そのままでは積分が難しい関数を、変数を置き換えることで積分するテクニック」であり、一般的な公式は次のように表されます。

不定積分の場合、$x = g(t)$ と置き換えられるとき、

$$\int f(x)\,dx = \int f\bigl(g(t)\bigr)\,\frac{dx}{dt}\,dt. \tag{4}$$

定積分の場合には積分区間の変換も必要で、$x = a \to b$ が $t = \alpha \to \beta$ に対応するとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\bigl(g(t)\bigr)\,\frac{dx}{dt}\,dt. \tag{5}$$

この式は $dx/dt = g'(t)$ であるため $f(g(t))\,g'(t)$ と書き換えることもできます。区間が単調に対応することを確認しなければならない点に注意してください。

2.2　置換積分の手順

公式 (4)・(5) を使うための手順を整理します。[3] では次の 2〜3 段階で説明されています。

1. **置換の設定：** 被積分関数の中の複雑な部分を新しい変数 t で置き換え、x を t の式に直します。例えば $(x+1)^2$ があれば $t = x+1$ などとおきます。
2. **微分の変換：** 置換の関係式を t で微分して dx/dt を求め、$dx = (dx/dt)\,dt$ を導きます。
3. **積分区間の変更（定積分のみ）：** 定積分の場合は、元の変数 x の上下限を新しい変数 t の値に変換します。例えば $x = 0$ のとき $t = g^{-1}(0)$ などと求めます。
4. **新しい変数で積分し、最後に元に戻す：** 新しい変数 t による積分を計算し、最後に置換した変数を元の x に戻します。

この手法により、代数的な展開や複雑な微分を避けて計算できることが多くなります。

2.3　例題 4：不定積分 $\int x(x+4)^3\,dx$

被積分関数 $x(x+4)^3$ は $(x+4)$ を展開すると計算が複雑ですが、置換積分を用いると容易に求められます。[4] に示された手順に従って計算してみましょう。

1. **置換：** $t = x+4$ とおき、$x = t-4$ と表します。
2. **被積分関数の変換：** $x(x+4)^3 = (t-4)t^3 = t^4 - 4t^3$。
3. **dx の変換：** $x = t-4$ を t で微分して $dx/dt = 1$、従って $dx = dt$ です。
4. **積分：** 新しい変数で

$$\begin{aligned}\int x(x+4)^3\,dx &= \int (t^4 - 4t^3)\,dt \\ &= \frac{1}{5}t^5 - t^4 + C.\end{aligned}$$

5. **戻し：** $t = x+4$ を代入して $\frac{1}{5}(x+4)^5 - (x+4)^4 + C$ となります。

このように置換することで面倒な展開を避けて解くことができました。

2.4 例題 5：定積分 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

この積分は直接でも計算できますが、三角関数による置換を体験してみましょう。[3] の解説にならって $x=\tan\theta$ と置きます。

置換： $x=\tan\theta$ とおくと、$dx/d\theta=\sec^2\theta$ です。また $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ であるから $\frac{1}{1+x^2}=\cos^2\theta$。

区間の変換： $x=0$ のとき $\theta=0$、$x=1$ のとき $\theta=\frac{\pi}{4}$ です。

積分： よって

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \int_0^{\pi/4} \cos^2\theta\cdot\frac{dx}{d\theta}\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4}\cos^2\theta\cdot\sec^2\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/4} d\theta = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

結果： 求める定積分の値は $\frac{\pi}{4}$ となります。

3 まとめとアドバイス

- 部分積分は二つの関数の積を積分するための公式で、「そのまま×積分－微分×積分」という形で覚えると良いです。
- どちらを微分しどちらを積分するかは、微分して簡単になる関数を選ぶこと、積分しても形が変わりにくい関数を選ぶことがコツです。
- 置換積分は変数変換によって複雑な積分を簡単にする方法であり、置換・微分変換・（定積分の場合は）区間の変換という手順をしっかり踏むことが重要です。
- 例題を通して、それぞれの公式の適用方法やパターンを身に付けておくと、計算ミスを減らし、積分の実力を高めることができます。[1] でも繰り返し演習の重要性が強調されています。

この資料が部分積分と置換積分の理解に役立ち、今後の学習の指針となれば幸いです。

参考文献

[1] 明光プラス, "部分積分は〇〇を理解すれば簡単！なぜ必要なのか、導出も解説します," 2024 年 6 月 11 日. https://www.meikogijuku.jp/meiko-plus/study/integration-by-parts.html.

[2] 高校数学の美しい物語, "部分積分の公式と覚え方，例題," 更新 2023 年 8 月 26 日. https://manabitimes.jp/math/1548.

[3] 高校数学の美しい物語, "置換積分の公式の証明と例題," 更新 2023 年 8 月 26 日. https://manabitimes.jp/math/1159.

[4] 受験辞典, "置換積分法の公式やパターンを見分けるコツをわかりやすく解説," 2022 年 1 月 29 日. https://univ-juken.com/chikan-sekibun.