

# Программная реализация метода решения систем линейных уравнений с использованием сингулярного разложения матрицы системы

Выполнил: Батурин И., гр. 7303

Руководитель: Середа В.-А. И., д.т.н., профессор

# Актуальность работы

Решение систем с помощью сингулярного разложения особо актуально для переопределенных систем, в которых кол-во уравнений больше кол-ва неизвестных. Применение переопределенных систем находят в хранении больших таблиц для рекомендательного поиска предпочитаемых фильмов или аудиозаписей пользователей. Также переопределенные СЛАУ (система линейных алгебраических уравнений) часто возникают при решении задач обработки изображений. В таких системах отсутствует точное решение, поэтому ищется вектор решений, минимизирующий сумму квадратов невязок.

Сингулярное разложение используется не только для получения вектора решения, но и для сингулярного анализа, который полезно проводить для матриц с плохой обусловленностью.

# Цель и задачи

**Цель:** реализовать метод решения систем линейных уравнений с использованием сингулярного разложения матрицы.

## **Задачи:**

1. Изучить свойства сингулярного разложения матриц и его применение к решению систем линейных уравнений;
2. Разработать ПО (программное обеспечение), позволяющее осуществлять сингулярное разложение матриц и использовать это разложение при решении СЛАУ, осуществлять сингулярный анализ для построения устойчивого решения СЛАУ.
3. Содержательно проанализировать результаты вычислительных экспериментов с целью оценки:
  - влияния погрешности исходных данных на результаты решения задачи;
  - влияния свойств матрицы системы на результаты решения задачи;
  - времени решения и используемой памяти ЭВМ (электронно-вычислительная машина) в зависимости от размерности задачи.
4. Сформулировать выводы о проделанной работе и об эффективности реализованного метода решения СЛАУ.

# Свойства сингулярного разложения матриц и его применение к решению СЛАУ

Исходная матрица может обладать рядом свойств, влияющих на результат получаемого решения:

1. Ранг матрицы – ранг матрицы равен кол-ву сингулярных чисел и кол-ву «пробных» решений;
2. Обусловленность – показывает различие в сингулярных числах и позволяет определить, начиная с какого числа, сингулярные числа можно считать нулями;
3. От вырожденности матрицы зависит чему будет равен ранг;
4. Симметричная матрица позволяет получить несколько «пробных» ответов с высокой точностью.

# Окно «Входные данные» разработанного ПО

Сингулярное разложение

Входные данные    Полученные результаты    Пробные решения    Сингулярный анализ

Размерность: 6x6    Задать размерность

Точность: 8

Матрица коэффициентов:

	1	2	3	4	5	6
1	0.004124	-0.135514	0.412567	0.223561	-1.000102	0.894434
2	-0.104524	-0.195114	0.412841	0.901561	1.230144	0.782196
3	0.987301	-0.953021	-1.963174	0.963015	-1.963017	-0.196726
4	0.963015	-0.958714	0.652301	0.013954	-1.023648	0.651233
5	0.001002	-0.543664	0.882342	0.123456	-1.239465	0.987124
6	0.044123	-0.523464	0.934832	0.943456	-1.202253	0.345234

Вектор правых членов:

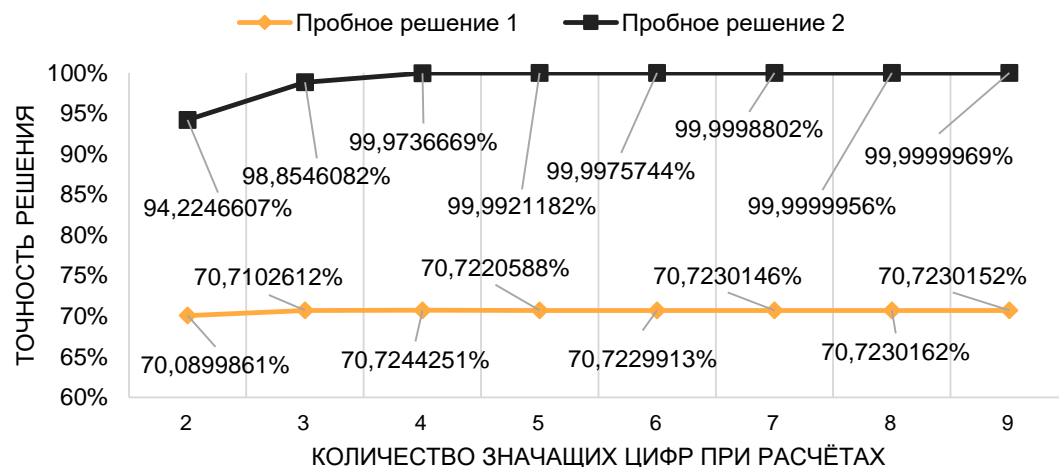
	1
1	0.55445
2	0.44852
3	0.32874
4	0.01329
5	0.95874
6	0.15632

Решить

Рисунок 1 – Входные данные

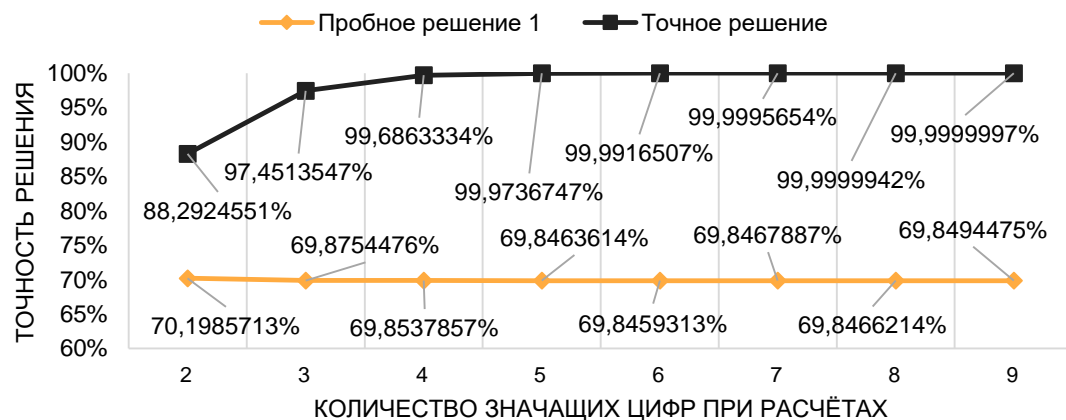
# Оценка полученных результатов

## ВЛИЯНИЕ ТОЧНОСТИ РАСЧЁТОВ НА РЕЗУЛЬТАТ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ



Варьируя заданную точность расчётов для исходной матрицы, приведённой на рис. 1, была исследована зависимость точности решения от кол-ва значащих цифр при расчётах.

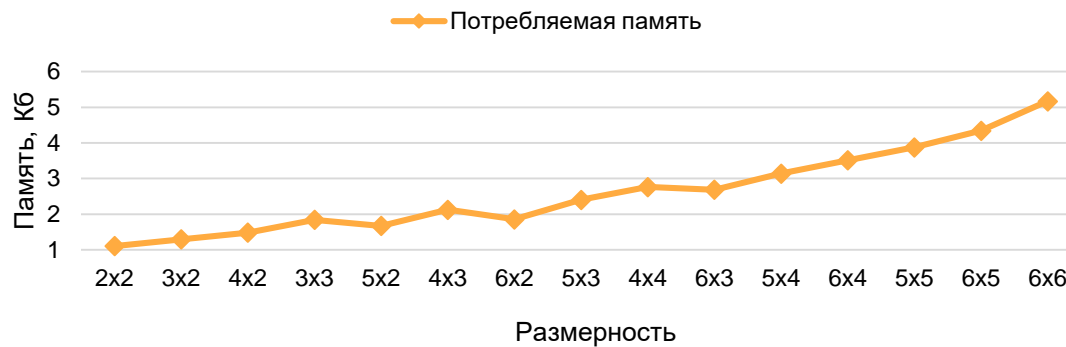
## ВЛИЯНИЕ ПОГРЕШНОСТИ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ НА РЕЗУЛЬТАТ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ



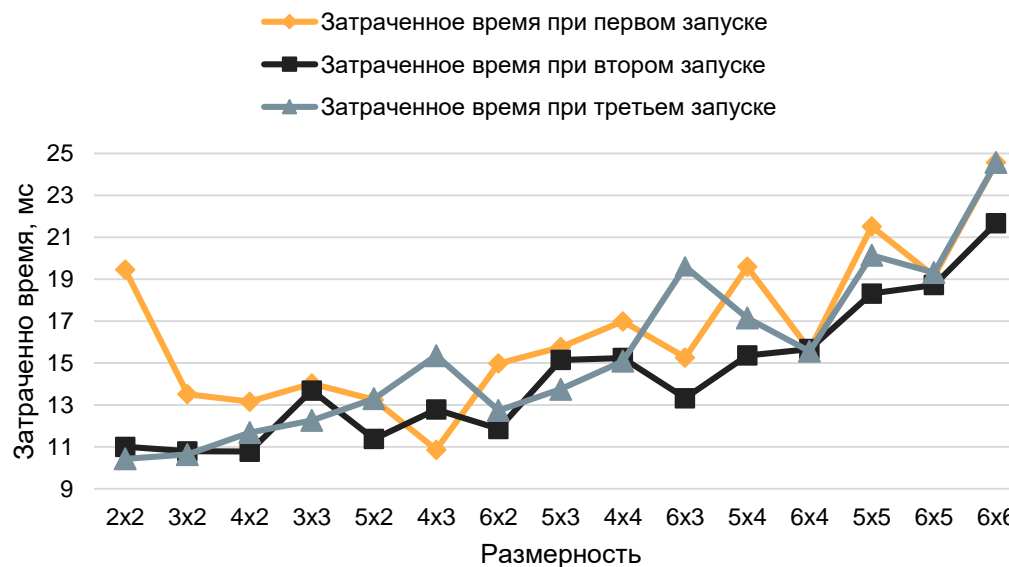
При изменении кол-ва значащих цифр входных данных (коэффициенты матрицы и вектора правых членов), приведенных на рис. 1 при точности в расчётах равной 5, также меняется точность получаемого решение.

# Оценка затраченного времени и памяти

## ЗАВИСИМОСТЬ ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ПАМЯТИ ЭВМ ОТ РАЗМЕРНОСТИ ЗАДАЧИ



## ЗАВИСИМОСТЬ ЗАТРАЧЕННОГО ВРЕМЕНИ ОТ РАЗМЕРНОСТИ ВХОДНОЙ ЗАДАЧИ



# Выводы о проделанной работе и об эффективности реализованного метода

1. В результате исследования сингулярного разложения, было разработано ПО, позволяющее решать поставленные задачи;
2. Были изучены свойства матрицы, влияющие на полученные результаты;
3. Проведён анализ затрачиваемой памяти и времени;
4. Пользователь имеет возможность регулировать точность расчётов и повышать этим точность решения, что говорит о высокой эффективности реализованного метода;
5. Реализованный метод позволяет обеспечивать минимум квадратов нормы невязки и анализировать полученные результаты.



# Заключение

В результате выполнения работы была исследована и проанализирована предметная область и разработано ПО, решающее все поставленные задачи.

Полученное ПО позволяет:

- получить решение с определенной точностью расчётов;
- рассчитать необходимые значения для сингулярного анализа;
- отобразить все данные на экране в удобочитаемом виде;
- записать полученные результаты в файл;

В качестве продолжения исследование данной темы, можно разработать и расширить функционал готового продукта с целью нахождения ядра матрицы и псевдообратной матрицы в случае, когда исходная матрица вырожденная.

# Апробация работы

- Репозиторий проекта:  
<https://github.com/BaturinIgor/FQW>.



Запасные слайды

# Окно «Полученные результаты» разработанного ПО

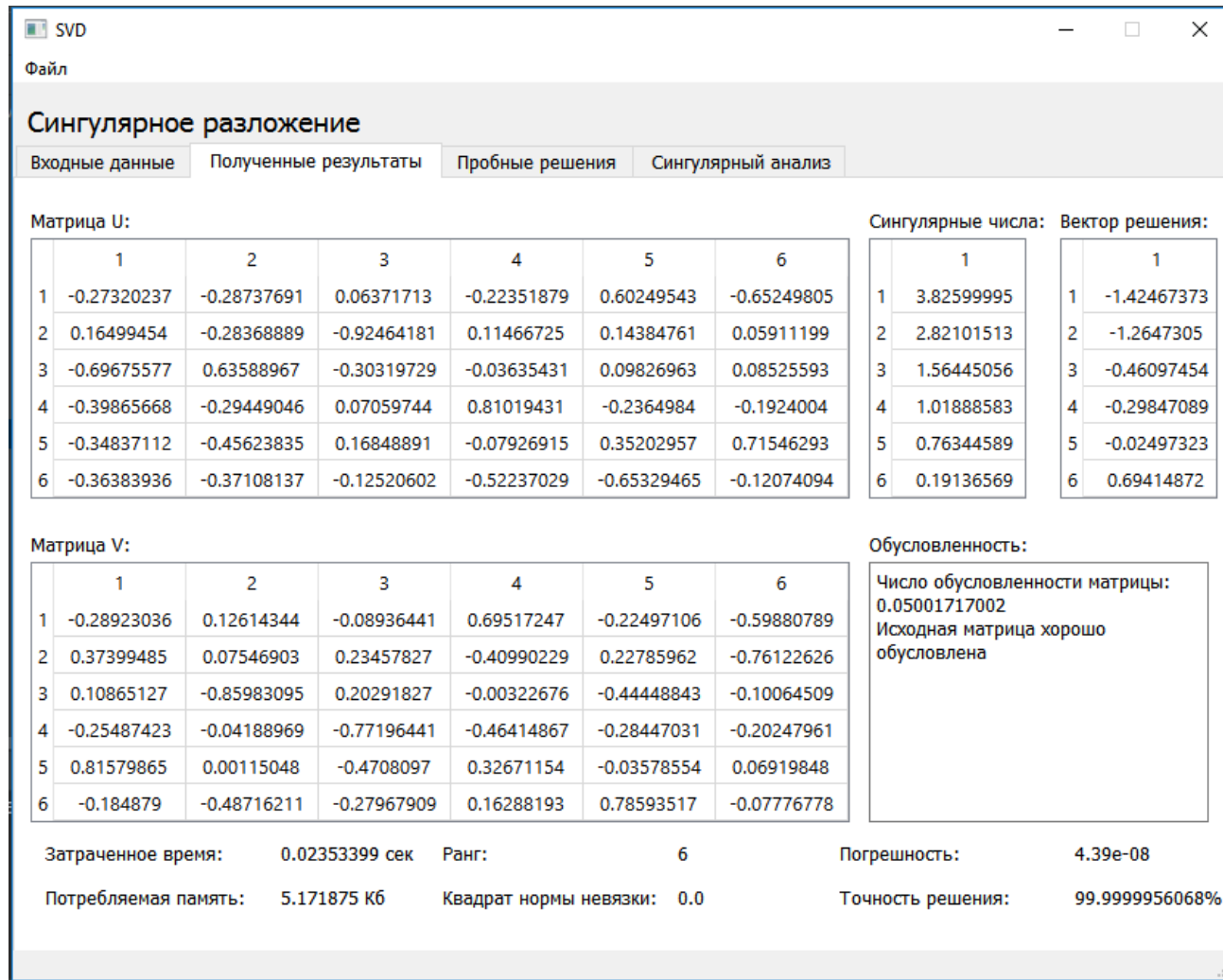


Рисунок 2 – Полученные результаты

# Окно «Пробные решения» разработанного ПО

Сингулярное разложение

Входные данные    Полученные результаты    **Пробные решения**    Сингулярный анализ

Пробное решение 1:    Пробное решение 2:    Пробное решение 3:    Пробное решение 4:    Пробное решение 5:    Пробное решение 6:

	1		1		1		1		1		1
1	0.05312102	1	0.02732596	1	0.0465282	1	-0.11131103	1	-0.30671704	1	-1.42467373
2	-0.06868915	2	-0.08412181	2	-0.13452697	2	-0.04145847	2	0.1564565	2	-1.2647305
3	-0.01995526	3	0.15587148	3	0.11226928	3	0.11300192	3	-0.27307312	3	-0.46097454
4	0.04681106	4	0.05537708	4	0.22125345	4	0.32663862	4	0.07955258	4	-0.29847089
5	-0.14983233	5	-0.15006759	5	-0.04890204	5	-0.12308205	5	-0.15416475	5	-0.02497323
6	0.0339555	6	0.13357523	6	0.19367146	6	0.15668904	6	0.83933887	6	0.69414872

Квадрат нормы невязки:

1.0666682153	0.7338902748	0.6208851436	0.5673676425	0.1276447806	0.0
--------------	--------------	--------------	--------------	--------------	-----

Точность решения:

36.506247676%	33.6213419401%	48.2817421353%	49.0309862979%	70.7230161867%	99.9999956068%
---------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------

Рисунок 3 – Пробные решения

# Окно «Сингулярный анализ» разработанного ПО

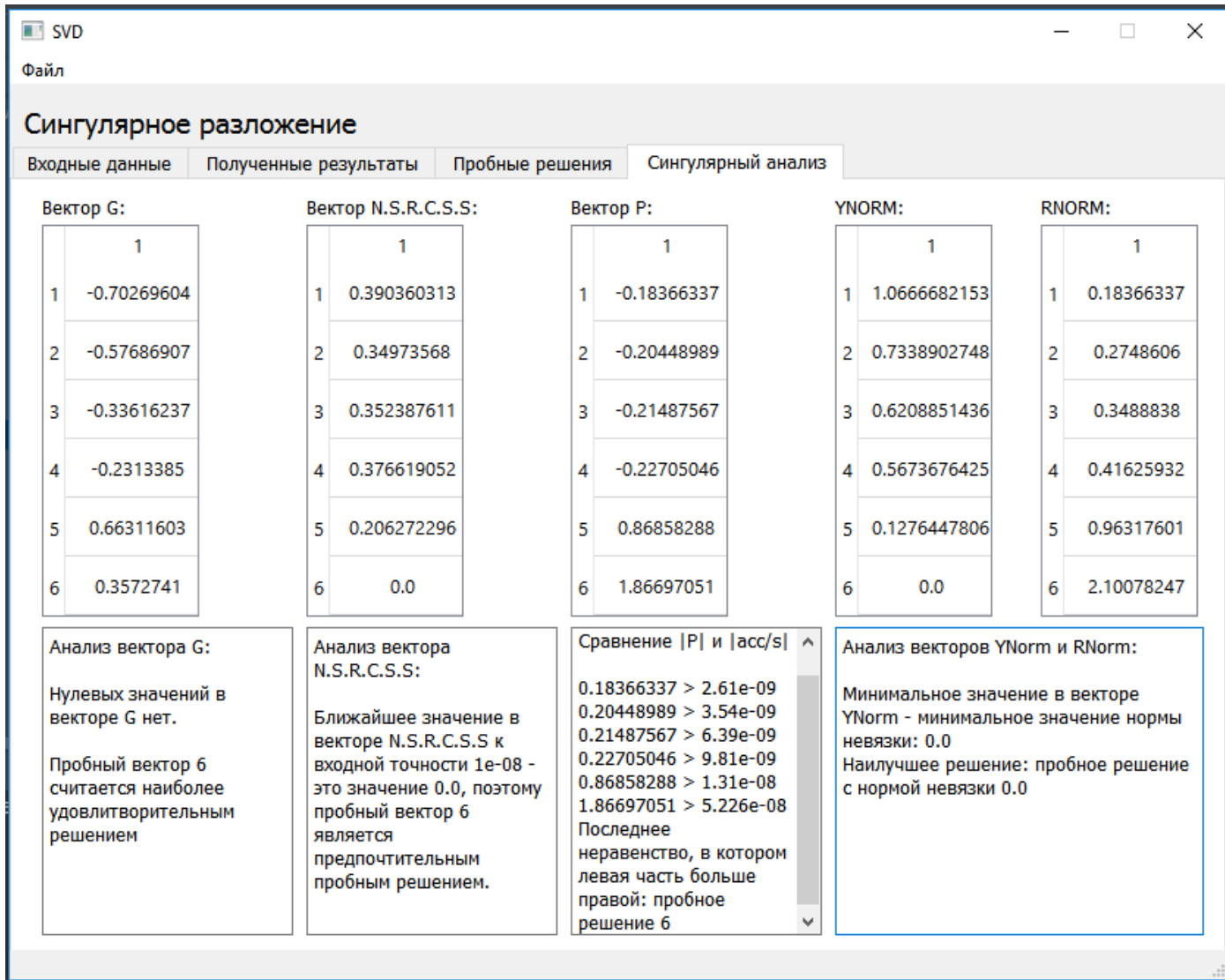


Рисунок 4 – Сингулярный анализ