Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
им. В.И. Ульянова (Ленина)

РАЗРАБОТКА И ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АППРОКСИМАЦИИ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ С ПОМОЩЬЮ B-СПЛАЙНОВ

Выполнила: Нгуен Тхи Тху Зуен, гр. 7304

Руководитель: Середа Альгирдас-Владимир Игнатьевич, д.т.н., профессор

Санкт-Петербург, 2021

Актуальность

- Обеспечение возможности аппроксимации данных с заданной степенью сглаживания
- Обеспечение возможности аппроксимации данных функцией с непрерывными первой и второй производными

Объектом исследования являются методы аппроксимации временных рядов.

Предметом исследования является аппроксимация временных рядов с использованием B-сплайнов.

Цель и задачи

Цель: разработать и реализовать программный модуль, позволяющий осуществлять аппроксимацию временных рядов с помощью В-сплайнов

Задачи:

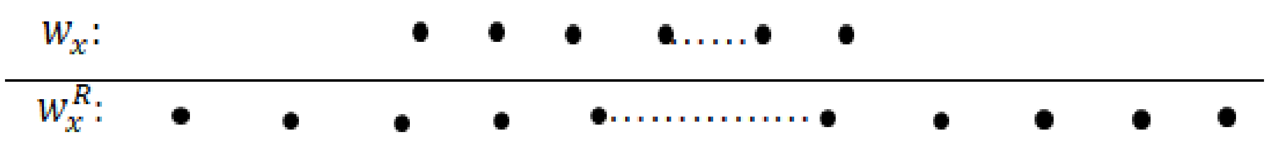
1. Обзор существующих подходов к аппроксимации данных
2. Изучение метода аппроксимации данных с помощью В-сплайнов
3. Разработка программного модуля
4. Проведение экспериментов и анализ результатов

Обзор существующих подходов к аппроксимации данных

<table>
<tr><th></th><th>Интерполяция полиномами</th><th>Аппроксимация полиномами</th><th>Интерполяция кубическими сплайнами</th></tr>
<tr><td>Вид</td><td colspan="2">Глобальная</td><td>Локальная</td></tr>
<tr><td>Кривая</td><td colspan="2">Линейная комбинация крива</td><td>Сплайны 3-й степени</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Недостатки</td><td colspan="2">Должна быть полностью пересчитана весь сетку при изменении значений узлов</td><td rowspan="2">Не обеспечивает высокую точность с выбором слишком меньшего набора данных</td></tr>
<tr><td>Возникает феномен Рунге с ростом выбора большего набора данных</td><td>-</td></tr>
</table>

Аппроксимация данных с помощью B-сплайнов

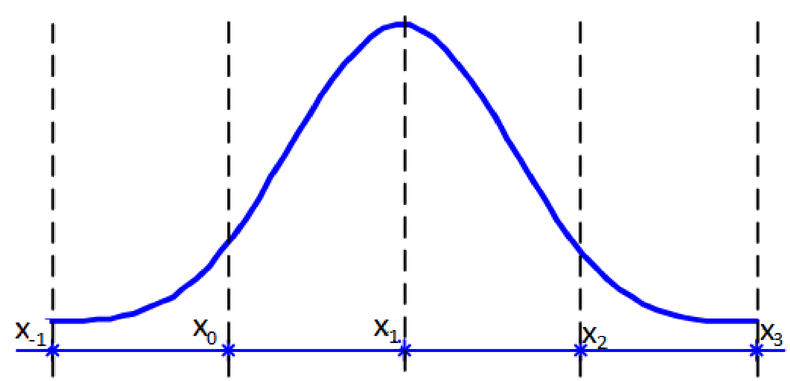
Пусть значения функции *f(x)* на промежутке [*a*, *b*] заданы ***n*** узлов одномерной сетки w_x с шагом h > 0, w_x^R - разреженная сетка с коэффициентом R



B-сплайн нулевого порядка $B_i^0(x) = \begin{cases} 1, x_i \le x \le x_{i+1} \\ 0, \quad otherwise \end{cases}$

k-го порядка $B_i^k(x) = \frac{(x - x_i)B_i^{k-1}(x)}{x_{i+k} - x_i} + \frac{(x_{i+k+1} - x)B_{i+1}^{k}(x)}{x_{i+k+1} - x_{i+1}}$, где i = 0, 1, …, n

$$B_i^3(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \le x_i \\ \dfrac{(x - x_i)^3}{6h^3} & , x \in [x_i, x_{i+1}] \\ \dfrac{h^3 + 3h^2(x - x_{i+1}) + 3h(x - x_{i+1})^2 - 3(x - x_{i+1})^3}{6h^3} & , \quad x \in [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ \dfrac{h^3 + 3h^2(x_{i+3} - x) + 3h(x_{i+3} - x)^2 - 3(x_{i+3} - x)^3}{6h^3} & , \quad x \in [x_{i+2}, x_{i+3}] \\ \dfrac{(x_{i+4} - x)^3}{6h^3} & , \quad x \in [x_{i+3}, x_{i+4}] \\ 0 & , \quad x \ge x_{i+4} \end{cases}$$



Аппроксимация данных с помощью B-сплайнов

Линейная комбинация функции:

$$S(x,\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i B_i^3(x)$$

где m- числа узлов разреженной сетки

Линейная система алгебраических уравнений: $\mathrm{S}(x_i,\lambda) = y_i, i = \overline{0, n-1}$

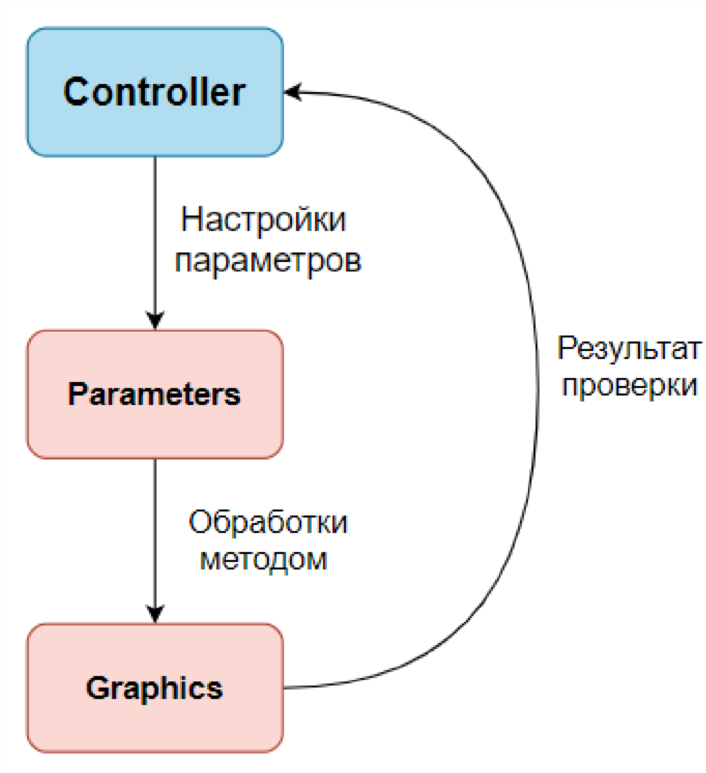
Для достижения цели аппроксимирование значения y_i удовлетворяющей условию:

$$\sum_{i=0}^{n-1}[S(x_i,\lambda^*) - y_i]^2 = \min_{\lambda\in E_m} \sum_{i=0}^{n-1}[S(x_i,\lambda) - y_i]^2$$

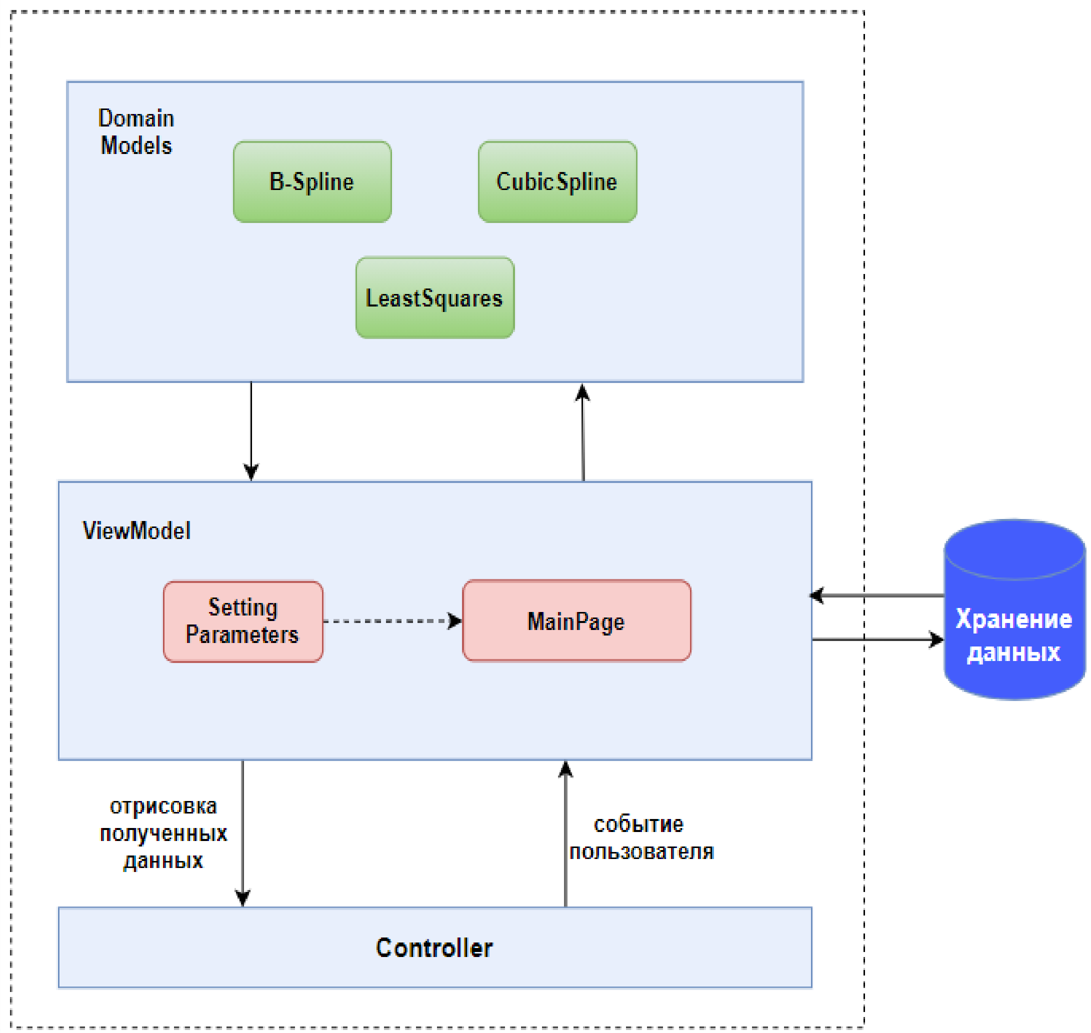
где $\lambda^* \in E_m$

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО МОДУЛЯ

Алгоритм работы



Общая архитектура решения

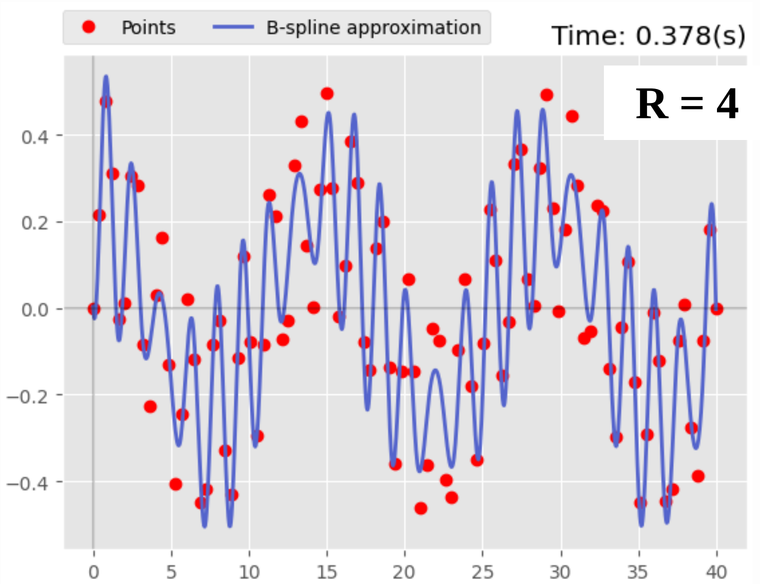


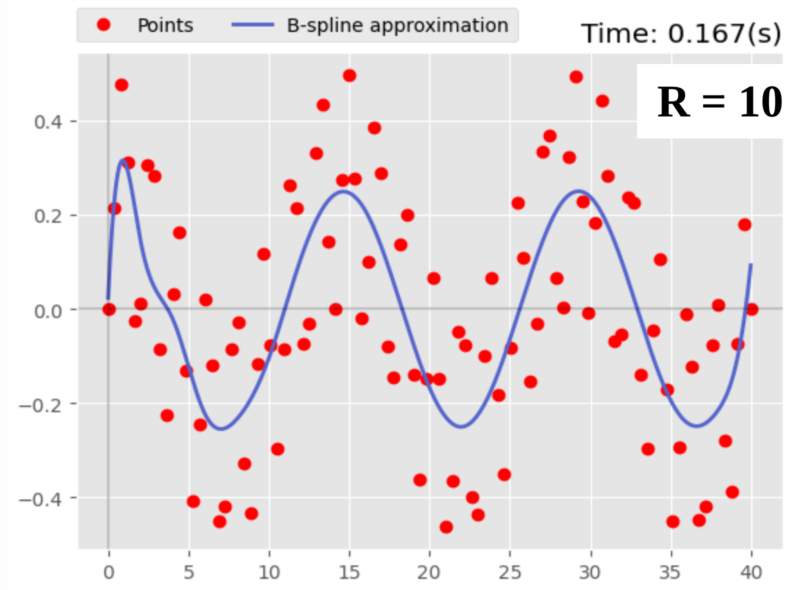
Интерфейский пользователь

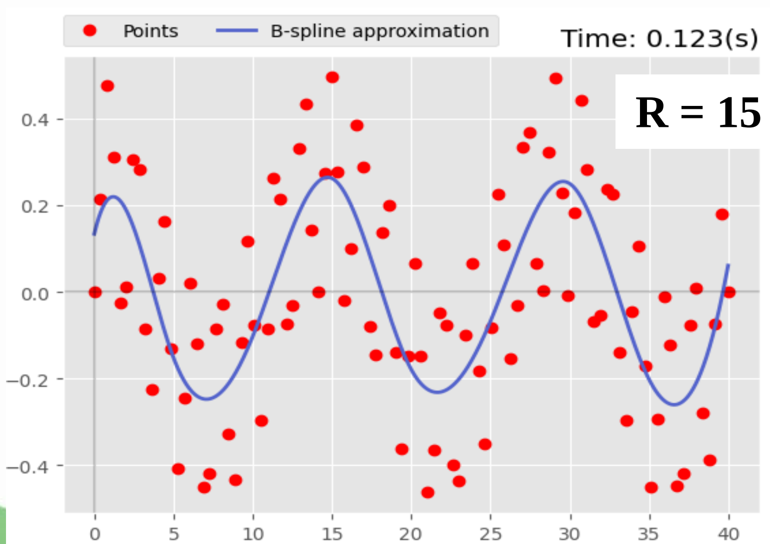
Главное окно

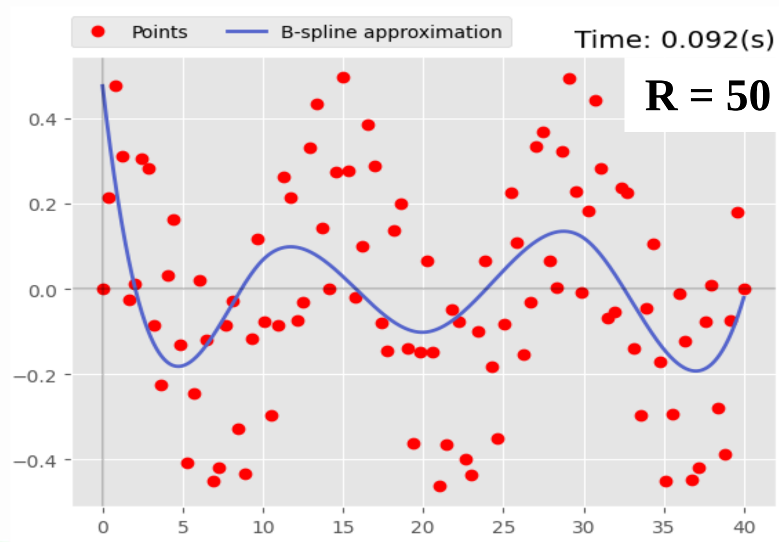
B-spline Cubic spline Polynomial

ПРОВЕДЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНОВ И АНАЛАИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ









График

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- ✓ Проведен обзор методов интерполяции и аппроксимации данных: полиномиальной интерполяции, сплайн-интерполяции и аппроксимации с помощью B-сплайнов;
- ✓ Был спроектирован и разработан программный модуль, позволяющий реализовать методы обработки данных;
- ✓ Вычислительные эксперименты проведен и содержательно проанализированы его результаты.

Апробация работы

- Репозиторий проекта

https://github.com/Duyen38/BSPApproximation

Спасибо за внимание!

Выполнила Нгуен Тхи Тху Зуен

Контакт: duyenpam@gmail.com

Запасные слайды

- Запишем систему в более подробном виде системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$
\begin{cases}
\lambda_{-3}B^3_{-3}(x_0) + \lambda_{-2}B^3_{-2}(x_0) + \lambda_{-1}B^3_{-1}(x_0) + \lambda_0 B^3_0(x_0) + \dots + \lambda_{q-1}B^3_{q-1}(x_0) = y_0 \\
\lambda_{-3}B^3_{-3}(x_1) + \lambda_{-2}B^3_{-2}(x_1) + \lambda_{-1}B^3_{-1}(x_1) + \lambda_0 B^3_0(x_1) + \dots + \lambda_{q-1}B^3_{q-1}(x_1) = y_1 \\
\lambda_{-3}B^3_{-3}(x_2) + \lambda_{-2}B^3_{-2}(x_2) + \lambda_{-1}B^3_{-1}(x_2) + \lambda_0 B^3_0(x_2) + \dots + \lambda_{q-1}B^3_{q-1}(x_2) = y_2 \\
\vdots \\
\lambda_{-3}B^3_{-3}(x_{n-2}) + \lambda_{-2}B^3_{-2}(x_{n-2}) + \lambda_{-1}B^3_{-1}(x_{n-2}) + \lambda_0 B^3_0(x_{n-2}) + \dots + \lambda_{q-1}B^3_{q-1}(x_{n-2}) = y_{n-2} \\
\lambda_{-3}B^3_{-3}(x_{n-1}) + \lambda_{-2}B^3_{-2}(x_{n-1}) + \lambda_{-1}B^3_{-1}(x_{n-1}) + \lambda_0 B^3_0(x_{n-1}) + \dots + \lambda_{q-1}B^3_{q-1}(x_{n-1}) = y_{n-1}
\end{cases}
$$

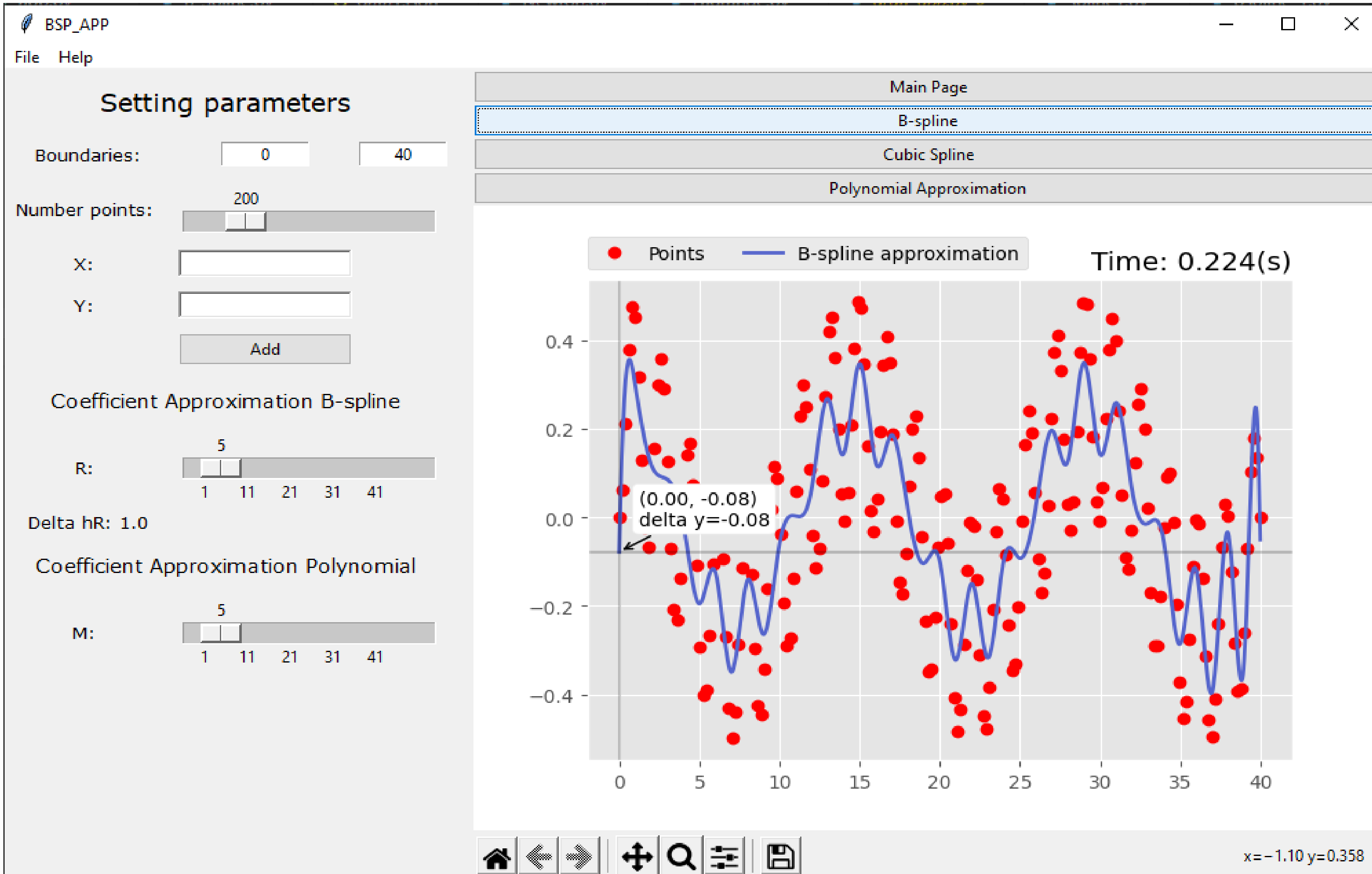
$$\leftrightarrow A \cdot \lambda = y$$

где $A_{n,m}$ - матрица коэффициентов B-сплайнов на каждом значении узла расширенной сетки, т.е. примет вид:

$$
\begin{pmatrix}
B^3_{-3}(x_0) & B^3_{-2}(x_0) & B^3_{-1}(x_0) & & & & & & \\
B^3_{-3}(x_1) & B^3_{-2}(x_1) & B^3_{-1}(x_1) & B^3_0(x_1) & & & & & \\
 & B^3_{-2}(x_2) & B^3_{-1}(x_2) & B^3_0(x_1) & B^3_1(x_2) & & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & & B^3_{q-4}(x_{n-2}) & B^3_{q-4}(x_{n-2}) & B^3_{q-3}(x_{n-2}) & B^3_{q-2}(x_{n-2}) & \\
 & & & & & B^3_{q-4}(x_{n-1}) & B^3_{q-3}(x_{n-1}) & B^3_{q-2}(x_{n-1}) & B^3_{q-1}(x_{n-1})
\end{pmatrix}
$$

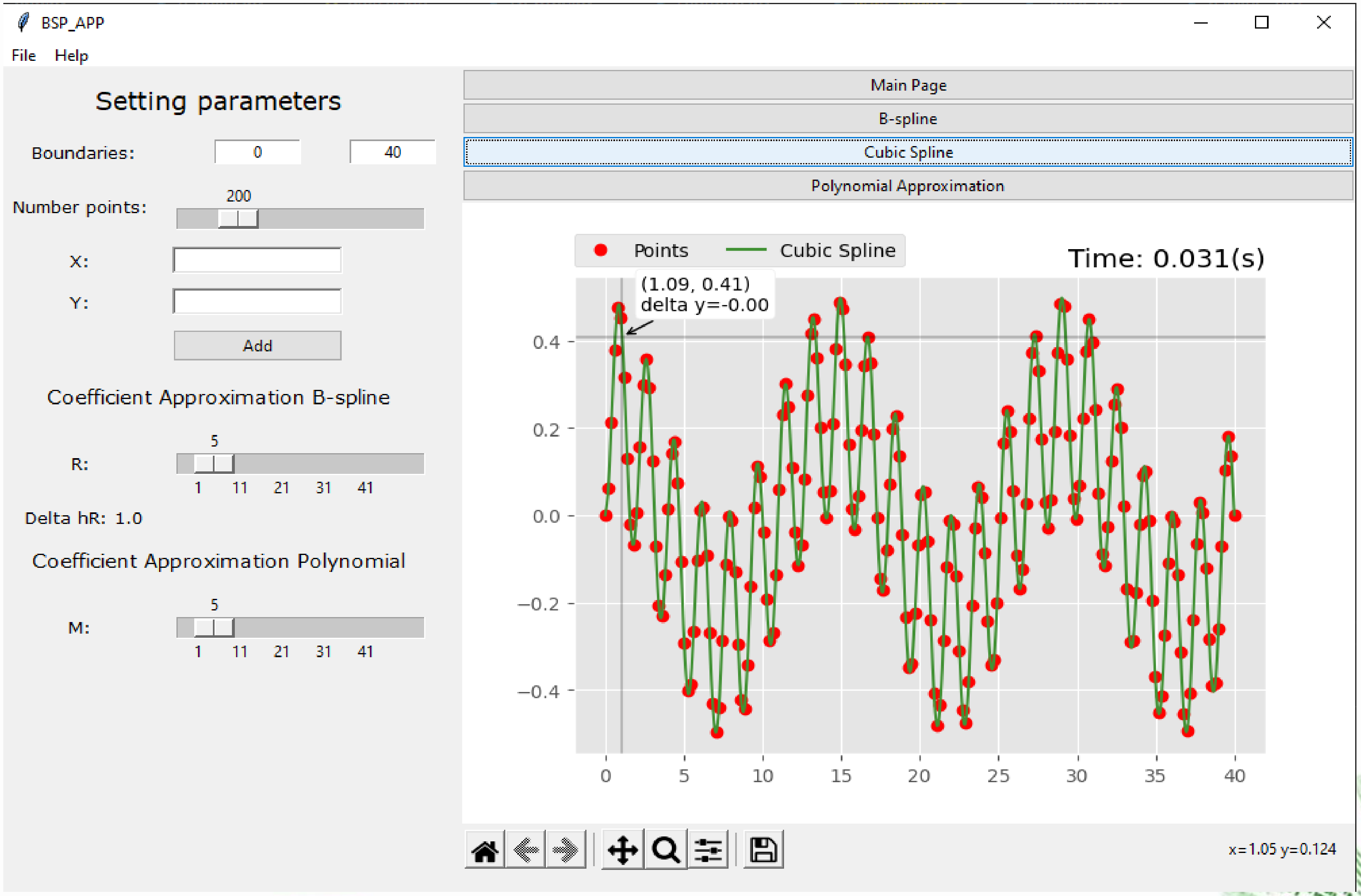
«Назад

Окно «Аппрроксимация с помощью B-сплайнов»



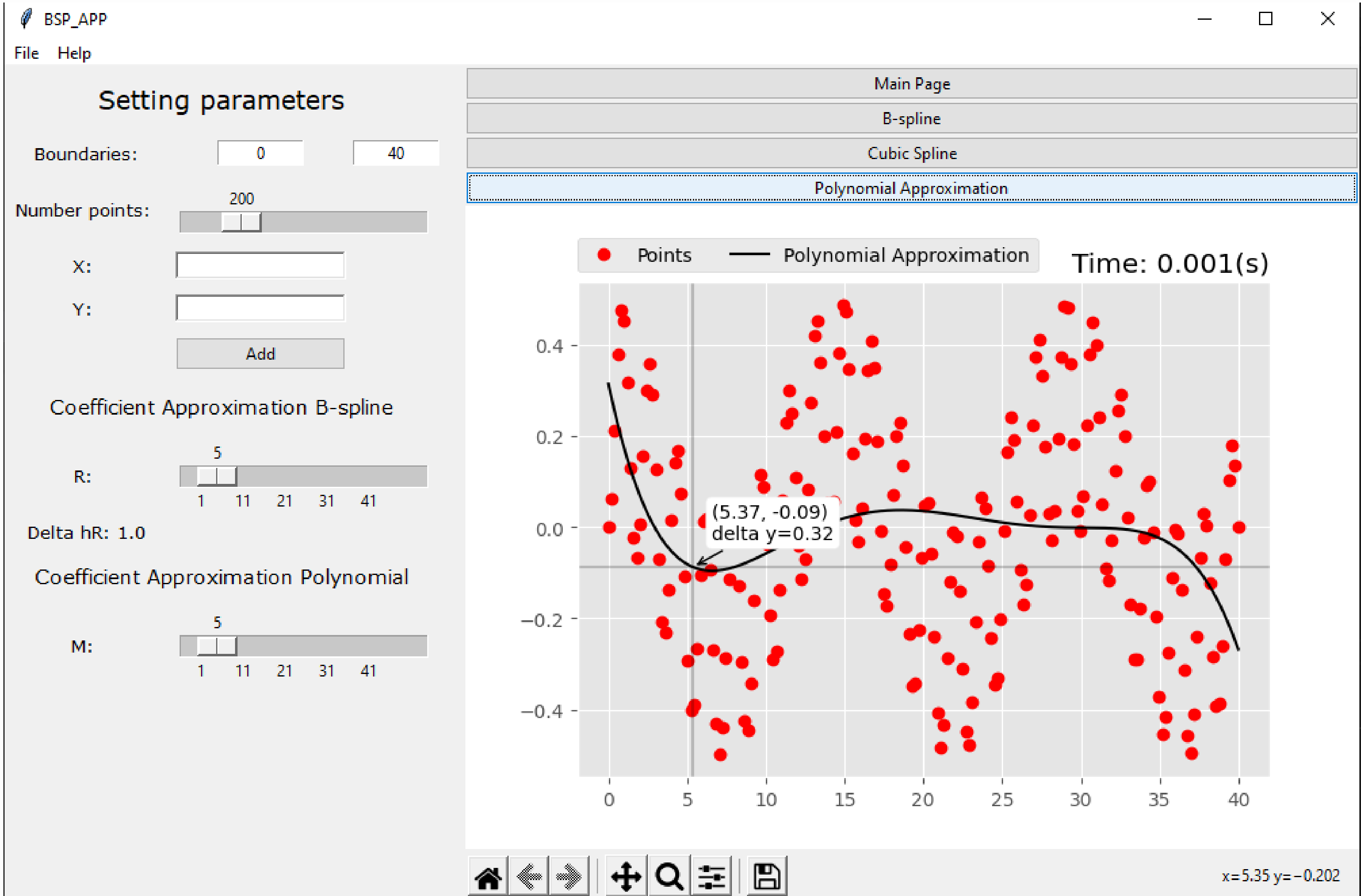
Main page

Окно «Кубический сплайн-интерполяциия»



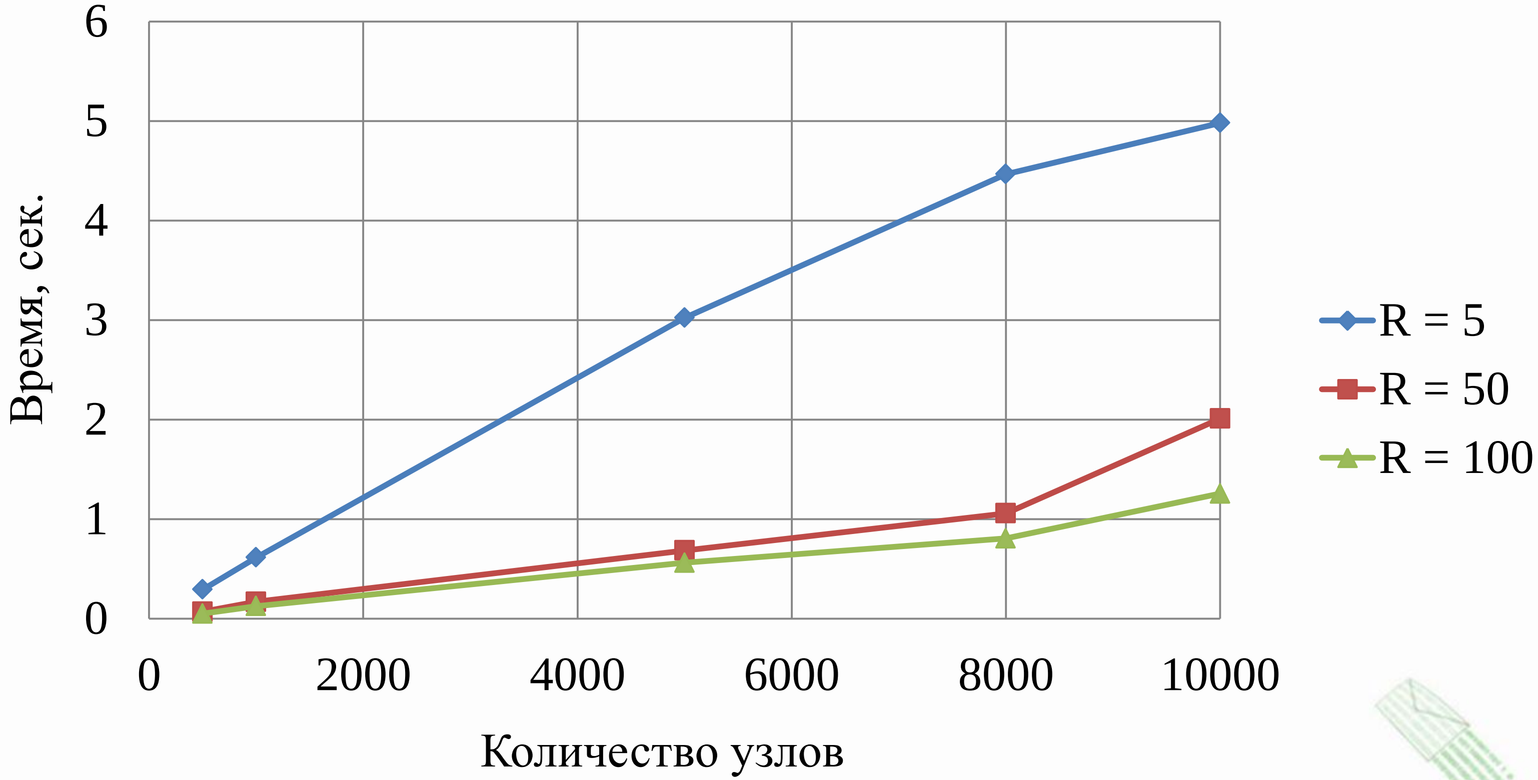
Main page

Окно «Аппроксимация с помощью полиномов»



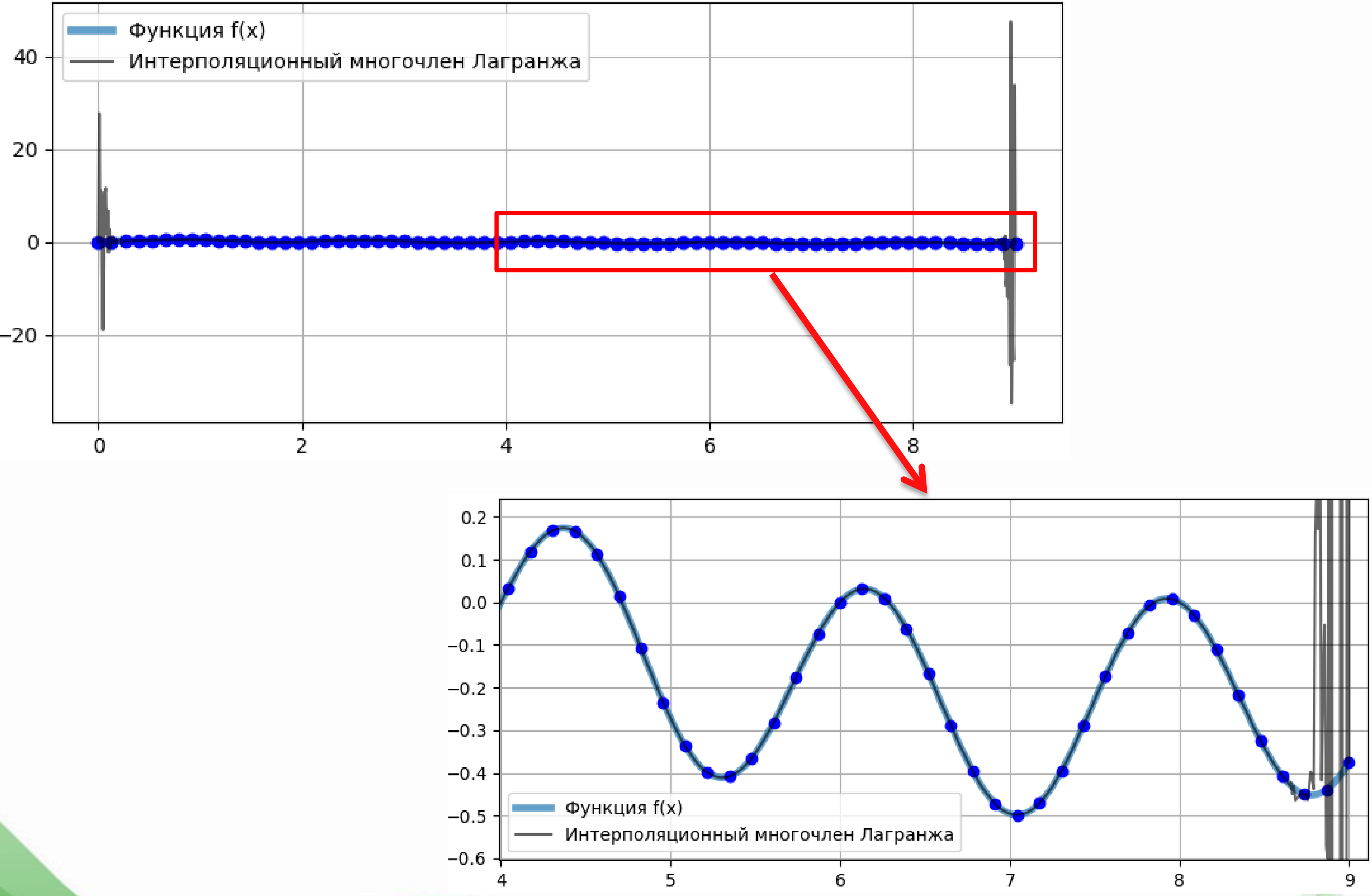
Main page

График зависимости среднее время от количества узлов сетки



«Назад

Феномен (явление) Рунге



Недостатки интерполяции кубическими сплайнами