1 Einführung

1.1 Gleichungssystem lösen

1.1.1 Gauss-Jordan Verfahren

Um mehrere Gleichungssysteme simultan zu lösen, müssen die Koeffizientenmatrizen *gleich* sein:

$$A x = r_1 \qquad A x = r_2$$

In Gausstableau lösen:

$$\left(\begin{array}{c|cc} A & r_1 & r_2 \end{array}\right) \xrightarrow{Gauss} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & & \end{array}\right)$$

1.1.2 Cramersche Regel

Mit der Cramersche-Regel können direkt einzelne Lösungen berechnet werden.
Dazu Lösungs-Vektor in entsprechende Spalte der Variable einsetzen und Verhältnis der Determinanten bilden.
Beispiel

$$\left|\begin{array}{ll} 1x_1 + 2x_2 & = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 & = 6 \end{array}\right| \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right)$$

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{3}{-3} = \underline{-1}$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{-3} = \underline{2}$$

1.2 Inverse Matrix

Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$.

$$\left(\begin{array}{c|c} A & E \end{array}\right) \xrightarrow{Gauss} \left(\begin{array}{c|c} E & A^{-1} \end{array}\right)$$

Spezial-Fall (2x2):

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Spezial-Fall (3x3):

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} +\underbrace{\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}}_{det(A_{11})} & -\underbrace{\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}}_{det(A_{21})} & +\underbrace{\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}}_{det(A_{31})} \\ -\underbrace{\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}}_{det(A_{12})} & +\underbrace{\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix}}_{det(A_{22})} & -\underbrace{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}_{det(A_{32})} \\ +\underbrace{\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}}_{det(A_{13})} & -\underbrace{\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}}_{det(A_{23})} & +\underbrace{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}_{det(A_{33})} \end{pmatrix}$$

1.3 Transponierte Matrix

Zeilen und Spalten vertauschen.
Beispiel:

$$A_{3,3} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 8 & 16 & 9 \\ 22 & 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad A_{3,3}^T = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 22 \\ 7 & 16 & 1 \\ 3 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

1.3.1 Orthogonale Matrix

Orthogonale Matrizen stehen Zeilen oder Spaltenweise Senkrechte zu einander. Eine Matrix M ist genau dann orthogonal, wenn gilt:

$$M^{-1} = M^T \qquad oder \qquad MM^T = E$$

Siehe auch "1.2 - Inverse Matrix", "1.3 - Transponierte Matrix"

1.4 Lösungsmenge

Die Gleichung $ax = b$ hat je nach a und b verschiedene Lösungs-Typen:
Bei $a \neq 0$ gibt es genau eine Lösung, dies ist der **Regulär-Fall**. Wenn $a = 0$ und $b \neq 0$, gibt der **Singuläre-Fall** keine Lösung, jedoch bei $b = 0$, dann gibt es ∞-Lösungen. Regulär und singulär kann mittels *"2 - Determinante"* ermittelt werden.

Inhomogen ist das Gleichungssystem wenn $b \neq 0$, **Homogen** bei $b = 0$.

Lösungsmenge eines inhomogenen Gleichungssystems:

$$\xrightarrow{Gauss} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Lös.Vek}} + z \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Frei.Vek}} | z \in \mathbb{R} \right\}$$

Hinweis: bei den frei wählbaren Variablen müssen die Vorzeichen getauscht und in entsprechendem Vektor eine 1 hinzugefügt werden.

1.5 Lineare Abhängigkeit

Bei lineare Abhängigkeiten entstehen beim Gauss-Algorithmus Null-Zeilen. Diese sind also Kombinationen aus vorherigen Zeilen/Spalten. Der **Rang** einer Matrix ist die Anzahl linear unabhängiger Zeilen. Mittels den Koeffizienten λ_i der Matrix A kann die Lösungsmenge durch $A^T = 0$ gesteuert werden:
Beispiel Koeffizienten Bestimmen:

$$A = \begin{array}{|ccc|} x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array} \xrightarrow{Gauss} \text{Null-Zeile}$$

$$A^T \Rightarrow \begin{array}{|ccc|c|} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \\ \hline 1 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{array} \xrightarrow{Gauss} \begin{array}{|ccc|c|} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Es gibt ∞-Lösungen, eine zB bei $\lambda_3 = 1; \lambda_2 = -2; \lambda_1 = 1$.

1.6 Algebra mit Matrizen

- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(k \cdot A)^{-1} = k^{-1} \cdot A^{-1}$ (Skalar $k \neq 0$)
- $(Ax)^T = x^T A^T$
- $AA^T = E$
- $A(\lambda x) = \lambda(Ax)$
- $A(x + y) = Ax + Ay$

2 Determinante

2.1 Definition & Eigenschaften

- Ist A regulär: $\det(A) \neq 0$
  Ist A singulär: $\det(A) = 0$
- Matrix A mit zwei gleichen Spalten/Zeilen, dann $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}) = 0$
- Matrix A mit Nullzeile/Nullspalte, dann $\det(A) = 0$
- $\det(E) = 1$
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

2.2 Gauss

Summe von allen Pivot-Elemente welche herausgenommen (dividiert) wurden. *Achtung*: Bei Zeilen tauschen Summe mit (-1) Multiplizieren!

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 5 \end{vmatrix} \rightarrow 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -9 \end{vmatrix} \rightarrow 2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -7 \end{vmatrix}$$

Determinante $2 \cdot 1 \cdot (-7) = -14$

2.3 Entwicklungssatz

Mit Hilfe des Entwicklungssatz können Determinanten grosser Matrizen auch von Hand berechnet werden. Dafür sollte eine Zeile oder Spalte mit möglichst vielen Nullen gewählt werden.

1. Zeile o. Spalte auswählen
2. Erstes Pivot-Element herausnehmen
3. Zeile und Spalte des gewählten Pivot abdecken
4. Elemente mit der Determinante der nicht abgedeckten Elemente multiplizieren
5. Schritt 2-5 Wiederholen und zum 1. Element addieren/subtrahieren ($\rightarrow$ Vorzeichen-Matrix)

+	−	+	−
−	+	−	+
+	−	+	−
−	+	−	+

Beispiel (Zeile):

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & 0 & 0 \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = -e \begin{vmatrix} b & c & d \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} + f \begin{vmatrix} a & c & d \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix}$$

2.4 Spezialfälle

2.4.1 2x2 Matrix

$$det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

2.4.2 3x3 Matrix (Sarrus'sche Formel)

$$det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

3 Vektorgeometrie

3.1 Gerade

Parameterdarstellung:

$$\vec{p} = \vec{p}_0 + t\vec{r} \begin{cases} \vec{p}_0 & \text{Stützvektor} \\ \vec{r} & \text{Richtungsvektor} \\ t & \text{Streckfaktor} \end{cases}$$

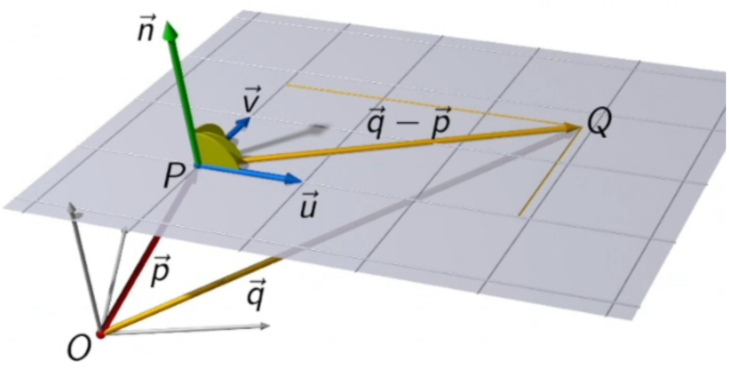
3.2 Ebene

Parameterdarstellung:

$$\vec{p} = \vec{p}_0 + t\vec{u} + s\vec{v} \begin{cases} \vec{p}_0 & \text{Stützvektor} \\ \vec{u}, \vec{v} & \text{Richtungsvektor} \\ t, s & \text{Streckfaktor} \end{cases}$$

Normalform:

$$\vec{n} \circ \vec{PQ} = \vec{n} \circ (\vec{q} - \vec{p}) = 0$$



$$n_1 x + n_2 y + n_3 z = n_4 \begin{cases} n_4 & \text{Länge der Normale: } \vec{n} \circ \vec{p} \\ n_{1-3} & \text{Normale } \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

3.3 Kreis und Kugel

Vektorgleichung:

$$(\vec{p}-\vec{m})^2 = r^2$$

Koordinatengleichung:

$$(x-m_x)^2+(y-m_y)^2 = r^2 \begin{cases} \text{m} & \text{ist Mittelpunkt des Kreises} \\ \text{r} & \text{ist Radius} \end{cases}$$

In dieser Form können Radius und Mittelpunkt abgelesen werden. Beispiel:

$$x^2-4x+y^2+6y-12=0$$

Quadratische Ergänzung um Mittelpunkt $m=(2,-3)$ und Radius $r=5$ zu erhalten:

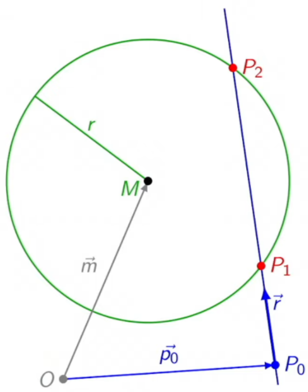
$$\begin{aligned} (x^2-4x+2^2)+(y^2+6y+3^2)-2^2-3^2-12 &= 0 \\ (x-2)^2+(y+3)^2 &= 5^2 \end{aligned}$$

3.3.1 Durchstosspunkt

Geradengleichung $\vec{p}=\vec{p}_0+s\cdot\vec{r}$ in Kugelgleichung einsetzen:

$$(\vec{p}_0+s\cdot\vec{r}-\vec{m})\circ(\vec{p}_0+s\cdot\vec{r}-\vec{m}) = r^2$$

$$\vec{r}\circ\vec{r}\cdot s^2+2(\vec{p}_0-\vec{m})\circ\vec{r}\cdot s+(\vec{p}_0-\vec{m})\circ(\vec{p}_0-\vec{m})-r^2=0$$

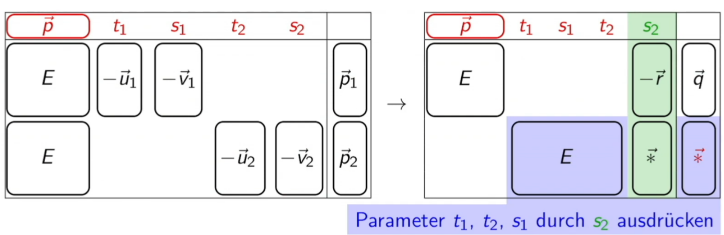


Anschliessend Quadratische Gleichung nach s auflösen um Durchstosspunkte zu erhalten.

3.4 Schnittmenge

Die Schnittmenge kann in $\mathbb{R}^n$ mit der Schnittmengenmatrix und Gauss bestimmt werden.
Beispiel:

$$\left.\begin{aligned} \text{Ebene } \sigma_1 : \vec{p} = \vec{p}_1 + t_1\vec{u}_1 + s_1\vec{v}_1 \\ \text{Ebene } \sigma_2 : \vec{p} = \vec{p}_2 + t_2\vec{u}_2 + s_2\vec{v}_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Gerade } g : \vec{p} = \vec{q} + s_2\vec{r}$$



3.5 Skalarprodukt

$$\vec{a}\circ\vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = x_a\cdot x_b + y_a\cdot y_b + z_a\cdot z_b$$

Eigenschaften:

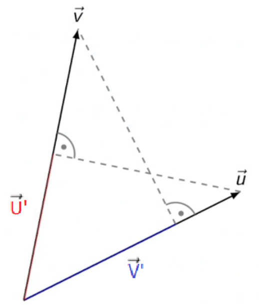
- Länge: $\vec{a}\circ\vec{a} = |\vec{a}|^2$
- Spezial-Fall Rechtwinklig: $\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\circ\vec{b}=0$
- Matrix Schreibweise: $\vec{a}\circ\vec{b} \stackrel{!}{=} \vec{a}^T\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{b}^T$

3.5.1 Zwischenwinkel

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

3.5.2 Orthogonale Projektion

Die orthogonale Projektion eines Vektors auf einen anderen entspricht der Streckung oder Stauchung eines Vektors und zwar in der Art, dass der *Schatten* des projizierten Vektors orthogonal auf ihm steht.



$$\vec{v}' = \frac{\vec{v}\circ\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\cdot\vec{u}$$

$$\vec{u}' = \frac{\vec{u}\circ\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\cdot\vec{v}$$

3.6 Vektorprodukt

Das **Vektorprodukt** steht senkrecht auf beiden Vektoren $(\vec{a},\vec{b})$ und hat die Länge der Grundfläche.

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} \cancel{-2} & \cancel{10} \\ 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ -2 & 10 \\ 3 & 2 \\ \cancel{1} & \cancel{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3\cdot(-1))-(1\cdot 2) \\ (1\cdot 10)-((-2)\cdot(-1)) \\ ((-2)\cdot 2)-(10\cdot 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -34 \end{pmatrix}$$

3.6.1 Zwischenwinkel

Auch beim Vektorprodukt ergibt sich ein Zwischenwinkel:

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{a}_0\times\vec{a}_1|}{|\vec{a}_0|\cdot|\vec{a}_1|}$$

3.7 Spur

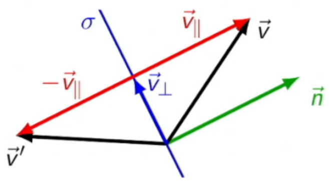
Die Spur ist die Summe der Diagonal-Elemente. Beispiel:

$$D_\alpha = \begin{Bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

$$Spur(D_\alpha) = 2\cdot\cos(\alpha)+1 \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{Spur(D_\alpha)-1}{2}$$

3.8 Spiegelung

Um eine Abbildung zu Spiegeln, muss ein Normalvektor $\vec{n}$ zur Spiegelachse existieren werden.



Vektor Spiegelung:

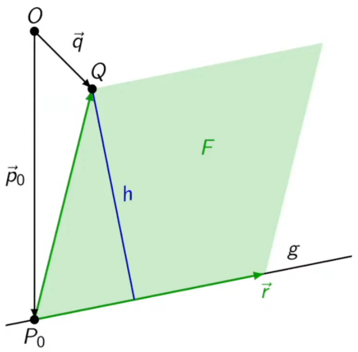
$$\vec{v}' = \vec{v} - 2\vec{n}\frac{\vec{n}\circ\vec{v}}{|\vec{n}|^2}$$

Matrix Spiegelung:

$$S = E - 2\frac{1}{|\vec{n}|^2}\vec{n}\vec{n}^T$$

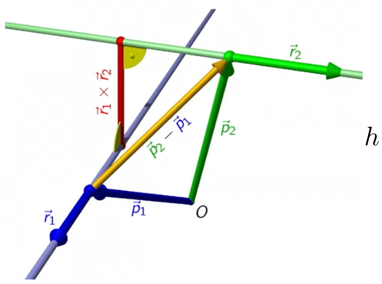
3.9 Abstand

Abstand zwischen Punkt Q und Gerade $\vec{p} = \vec{p}_0 + t\vec{r}$:



$$h = \frac{|\vec{r}\times(\vec{q}-\vec{p}_1)|}{|\vec{r}|}$$

Abstand zwischen zwei Geraden $\vec{p} = \vec{p}_1 + t\vec{r}_1$ und $\vec{p}' = \vec{p}_2 + s\vec{r}_2$:



$$h = (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)\circ\frac{\vec{r}_1\times\vec{r}_2}{|\vec{r}_1\times\vec{r}_2|}$$

Allgemein: $h = \frac{V_{n+1}}{v_n} = \sqrt{\frac{Gram(b,a_1,...,a_k)}{Gram(a_1,...,a_k)}}$

3.9.1 Hes'sche Normalform

Dient häufig zur Berechnung von Abständen von Punkten nach Geraden ($\mathbb{R}^2$) oder Ebenen ($\mathbb{R}^3$).

$$d = \frac{(\vec{q}-\vec{p})\circ\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{n_1}{|\vec{n}|}x + \frac{n_2}{|\vec{n}|}y + \frac{n_3}{|\vec{n}|}z - \frac{\vec{n}\circ\vec{p}}{|\vec{n}|}$$

Siehe auch "3.2 - Ebene" Normalform.

Beispiel:
Hes'sche Normalform finden, indem $\vec{n}$ mit Richtungsvektoren $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ von der Ebenengleichung orthogonal sind.

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}}_{\vec{p}} + t\underbrace{\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}}_{\vec{r}_1} + s\underbrace{\begin{pmatrix}3\\-3\\-1\end{pmatrix}}_{\vec{r}_2}$$

$$\begin{aligned}\vec{n}\circ\vec{r}_1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2n_1 + 2n_2 - 3n_3 = 0\\ \vec{n}\circ\vec{r}_2 = 0 \quad &\Rightarrow \quad 3n_1 - 3n_2 - n_3 = 0\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 2 & -2 & 0\\ 3 & -3 & -1 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{Gauss} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0\end{array}\right)$$

Die Normale ist $\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$. Diese muss nun noch auf die Länge 1 gestutzt werden und in die korrekte Form gebracht werden. Durch einsetzen eines beliebigen Punktes kann der Abstand d von der entsprechenden Ebene berechnet werden.

$$\underbrace{\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}}_{\text{Normiert } \vec{n}^0} \circ \left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}}_{\vec{p}}\right) = d$$

3.10 Schuhbändelformel

Mit der Schuhbändelformel kann ein Flächeninhalt eines Polygons $(P1\ldots Pn)$ in $\mathbb{R}^2$ berechnet werden. **Achtung:** Erster Punkt muss am Schluss nochmals gerechnet werden! ($P_1 = P_n$)

$$F = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}(P_nx \cdot P_{n+1}y - P_ny \cdot P_{n+1}x)$$

$$F = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}P_1x & P_1y\\ P_2x & P_2y\\ P_3x & P_3y\\ P_4x & P_4y\\ \vdots & \vdots\\ P_1x & P_1y\end{vmatrix}$$

Um eine Dreickes-Fläche ABC in $\mathbb{R}^3$ zu berechnen kann folgende Formel verwendet werden:

$$F = \frac{\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|}{2}$$

Mit der Gram-Determinante kann auch eine Fläche berechnet werden "4.4 - Volumen".

3.11 Orthogonalisieren

Sucht Vektoren im gegeben Raum ($\mathbb{R}^n$) und stellt diese Orthogonal (rechtwinklig) zu einander.

Beispiel Lineare unabhängige Vektoren $\{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n\}$ $\rightarrow$

orthonormierte Vektoren $\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n\}$

$$\begin{aligned}
\vec{b}_1 &= \vec{a}_1 \\
\vec{b}_2 &= \vec{a}_2 - \frac{\vec{a}_2 \circ \vec{b}_1}{|\vec{b}_1|^2}\vec{b}_1 \\
\vec{b}_3 &= \vec{a}_3 - \frac{\vec{a}_3 \circ \vec{b}_1}{|\vec{b}_1|^2}\vec{b}_1 - \frac{\vec{a}_3 \circ \vec{b}_2}{|\vec{b}_2|^2}\vec{b}_2 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

ACHTUNG: b_n Vektoren sind nicht normalisiert! Sie auch "1.3.1 - Orthogonale Matrix".

3.12 Least Square

Findet eine gerade die möglichst genau durch alle gegebenen Punkte verläuft. Kann zur Kalibrierung von Sensoren etc. verwendet werden.

Beispiel für 2 Unbekannte (x_n, y_n): $y_i = ax_i + b$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Findet eine gerade, die möglichst genau durch alle Punkte (x_n, y_n) verläuft. **Wichtig:** A und $\vec{b}$ können beliebige Dimensionen haben!

$$\vec{x} = (A^TA)^{-1}A^T\vec{b}$$

4 Vektorräume

4.1 Kern und Bild

Der **Kern**, Nullmenge oder Nullraum $\ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^n | A\vec{x} = 0\}$ sind alle Elemente, für die der Funktionswert gleich dem Nullvektor x ($A\vec{x} = 0$) ist. Der Kern ist daher nichts anders als die Lösungsmenge!
Beispiel:

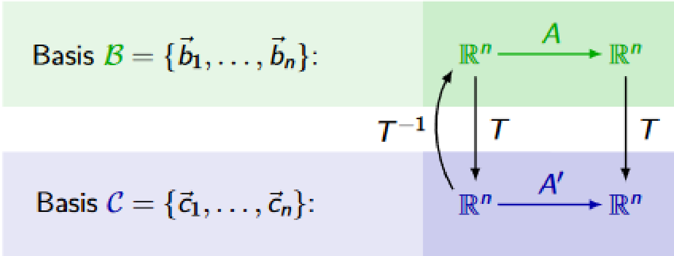
$$\ker(A) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Kern von Abbildung A ist $\ker(A) = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Das **Bild** oder auch Bildraum ist die Menge aller Linearkombinationen der Spaltenvektoren $\text{im}(A) = \{Bt | t \in \mathbb{R}^m\}$.

4.2 Basis

Um die Abbildung A in eine andere Basis A' (bzw. Koordinaten-System) umzurechnen kann folgendes verwendet werden:



$A' = TAT^{-1}$ Siehe auch "4.3 - Basistransformation" um T zu berechnen.

4.3 Basistransformation

Koordinaten I in der Basis B in die neue Koordinaten I' in der Basis B' berechnen. Die Transformationsmatrix T kann für beliebige Umwandlungen verwendet werden.

$I'_1 \; \dots \; I'_n$	$I_1 \; \dots \; I_n$
B'	B

$\xrightarrow{Gauss}$

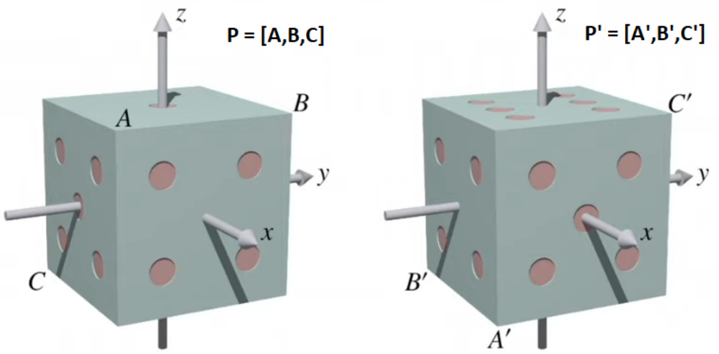
$I'_1 \; \dots \; I'_n$	$I_1 \; \dots \; I_n$
$\begin{matrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{matrix}$	T
$\begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{matrix}$	*

* = 0 ist gleichbedeutend damit, dass die Koordinaten umgerechnet werden können.

4.3.1 Drehmatrix

Eine Drehmatrix M ist immer orthogonal ("1.3.1 - Orthogonale Matrix") und hat die Determinante $\det(M) = 1$.

Sie wird gefunden, indem 3 *beliebige* Punkte auf einer Abbildung vor (P) und nach (P') der Drehung markiert werden und mithilfe von $D = P'P^{-1}$ berechnet. *P und P' muss regulär (Linearunabhängig) sein → sonst andere Koordinaten verwenden*!



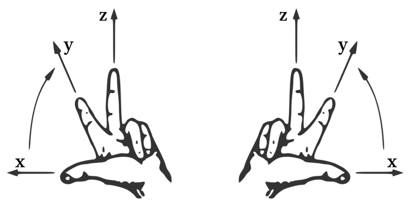
Um den Drehwinkel α zu berechnen, kann die *Spur* einer Matrix verwendet werden. (Siehe "3.7 - Spur")

4.4 Volumen

Mittels der **Gram-Determinante** kann ein Volumen V in $\mathbb{R}^n$ Dimension berechnet werden. In der $\mathbb{R}^2$ Dimension ergibt dies die Fläche!

$$
\begin{aligned}
V = \mathrm{Gram}(a_1, a_2) &= \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \circ \vec{a}_1 & \vec{a}_1 \circ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_2 \circ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \circ \vec{a}_2 \end{vmatrix} \\
\vec{b}_1 = \frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|} &\Rightarrow = |\vec{a}_1| \cdot \begin{vmatrix} \vec{b}_1 \circ \vec{a}_1 & \vec{b}_1 \circ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_2 \circ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \circ \vec{a}_2 \end{vmatrix} \\
\vec{b}_2 = \frac{\vec{a}_2 - (\vec{b}_1 \circ \vec{a}_2)\vec{b}_1}{l} &\Rightarrow = |\vec{a}_1| \cdot l \cdot \begin{vmatrix} \vec{b}_1 \circ \vec{a}_1 & \vec{b}_1 \circ \vec{a}_2 \\ \vec{b}_2 \circ \vec{a}_1 & \vec{b}_2 \circ \vec{a}_2 \end{vmatrix} \\
&= |\vec{a}_1|^2 \cdot l^2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} \vec{b}_1 \circ \vec{b}_1 & \vec{b}_1 \circ \vec{b}_2 \\ \vec{b}_2 \circ \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \circ \vec{b}_2 \end{vmatrix}}_{\det(E)=1} \\
&= |\vec{a}_1|^2 \cdot l^2 = \text{Fläche}(\vec{a}_1, \vec{a}_2)^2
\end{aligned}
$$

$$
\det(M) = \begin{cases} > 0, & \textit{Rechtssystem} \\ < 0, & \textit{Linkssystem} \end{cases}
$$



Linkshändiges Koordinatensystem Rechtshändiges Koordinatensystem

5 Eigenwert und Eigenvektor

Ein Vektor $\vec{v}$ heisst **Eigenvektor** der quadratischen Matrix A zum **Eigenwert** λ, wenn:

$$
A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Rightarrow (A - \lambda E)\vec{v} = 0 \qquad (\vec{v} \neq 0)
$$

Ein Eigenvektor $\vec{v}$ wird nur mit der Matrix A gestreckt Es gibt maximal n verschiedene Eigenwerte λ jedoch unendlich viele Eigenvektoren $a \cdot \vec{v}$.

5.1 Eigenwertproblem

Es werden n Lösungen für λ mit dem **charakteristischem Polynom** gesucht:

$$
\det(A - \lambda E) = 0 \tag{1}
$$

Anschliessend kann jedes λ_n in die Formel

$$
(A - \lambda_n E)\vec{v}_n = 0 \tag{2}
$$

eingesetzt werden um die Eigenvektoren zu bestimmen.
Die Rechnung kann mit $A\vec{v} \stackrel{?}{=} \lambda\vec{v}$ überprüft werden.

Beispiel $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

Eigenwert λ_n mit (1) berechnen:

$$
\det \begin{pmatrix} 0 - \lambda & 3 \\ -2 & 5 - \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0}_{\lambda_1 = 3; \lambda_2 = 2}
$$

Eigenvektor (für $\lambda = 2$) berechnen:

$$
\left[\begin{array}{cc|c} 0-2 & 3 & 0 \\ -2 & 5-2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{Gauss} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
$$

$$
\Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

5.2 Eigenbasis A'

Für die Eigenbasis wird T und T^{-1} benötigt. $A' = TAT^{-1}$. T ist die Zusammensetzung von allen Eigenvektoren v_i (Siehe "5.1 - Eigenwertproblem").

5.3 Diagonalisieren

Um Matrix A zu diagonalisieren, muss A nach Matrix D (mit Basen aus Eigenvektoren $\{\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n\}$) transformiert werden. Dies ist nur möglich, wenn es eine Basis aus Eigenvektoren gibt. Basis-Transformation T berechnen:

$$
T = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \dots & \vec{v}_n \end{pmatrix}^{-1}
$$

Zum Abschluss können die λ vom Charakteristischem Polynom eingesetzt und D kontrolliert werden:

$$
D = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}
$$

6 Matrixzerlegung

6.1 LU- und LR-Zerlegung

Die **LU**-Zerlegung von A wird durch den Gauss-Algorithmus gefunden. Die entsprechende Vorwärts-Reduktion wird in die L Matrix eingesetzt. Die rechte obere Ecke am ende ist die U Matrix. Kann überprüft werden durch das Multiplizieren von $A = LU$.

Die **LR**-Zerlegung ist identisch zu LU, jedoch wird hier zusätzlich die Diagonalmatrix D berechnet, um L' und R zu erhalten.

Beispiel

$$
A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ -6 & -4 & 2 \\ 3 & 13 & -18 \end{pmatrix}
$$

LU Die 1 sind in der U Matrix enthalten.

$$
\left[\begin{array}{ccc} 3 & 3 & -3 \\ -6 & -4 & 2 \\ 3 & 13 & -18 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 10 & -15 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{array}\right]
$$

$$
L = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -6 & -2 & 0 \\ 3 & 10 & 5 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

LR Die 1 sind in der L Matrix enthalten.

$$L \xrightarrow{Diag.Pivots} D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$L' = LD^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad R = DU = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

6.2 Cholesky-Zerlegung

Nur für symmetrische und positiv definierte Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ & a_{2,2} & a_{2,3} \\ \text{sym} & & a_{3,3} \end{pmatrix} = \underbrace{LL^T}_{Zerlegung}$$

$$L = \begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 \\ l_{1,2} & l_{2,2} & 0 \\ l_{1,3} & l_{2,3} & l_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$l_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}} \qquad l_{1,2} = \frac{a_{1,2}}{l_{1,1}}$$

$$l_{1,3} = \frac{a_{1,3}}{l_{1,1}} \qquad l_{2,2} = \sqrt{a_{2,2} - l_{1,2}^2}$$

$$l_{2,3} = \frac{a_{2,3} - l_{1,2} \cdot l_{1,3}}{l_{2,2}} \qquad l_{3,3} = \sqrt{a_{3,3} - l_{1,3}^2 - l_{2,3}^2}$$

6.3 QR-Zerlegung (Gram-Schmidt)

Die Matrix Q ist orthogonal und die R eine obere Rechtecks-Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} = Q \cdot R$$

A orthogonalisieren (Siehe "3.11 - Orthogonalisieren") und $R = Q^T A = Q^{-1} A$ berechnen. Achtung: Alle orthogonalisierten Vektoren müssen normalisiert sein $\vec{v}_n = \frac{\vec{v}_n}{|\vec{v}_n|}$ Matrix Q muss

6.4 Singulärwertzerlegung

Die Singulärwertzerlegung zerlegt die Matrix A in $A = U\Sigma V^T$. Wobei Σ die Streckungsfaktoren (die Singulärwerte), U die orthogonalisierten Basis-Vektoren und V die ursprünglichen Koordinaten sind.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Range der Matrix A}} \Sigma = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix Σ kann durch das charakteristische Polynom (Siehe "5.1 - Eigenwertproblem") mit $\lambda \to \det(AA^T - \lambda E) = 0$ berechnet werden.

$$\lambda = \{\lambda_1 = 0; \lambda_2 = 3; \lambda_3 = 1\}$$

Die entsprechenden λ können der *grösse nach* absteigend sortiert, die $\sqrt{\lambda_n}$ gezogen und als s_n in die Matrix Σ eingesetzt werden. Um U und V zu bestimmen müssen $U = \text{eigVc}(AA^T)$ und $V = \text{eigVc}(A^T A)$ gesucht werden (Siehe auch Eigenvektoren). Achtung: entsprechende Eigenvektoren müssen normiert sein!

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{1} = 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

6.5 Pseudoinverse

Die Pseudoinverse $A^\dagger$ kann verwendet werden, um unterbestimmte Gleichungssysteme zu lösen (Überbestimmte können mit "3.12 - Least Square" gelöst werden). Die Pseudoinverse hat den Vorteil, dass der gefundene Lösungsvektor immer Minimal ist.

$$\Sigma\dagger = \text{Inverse (soweit möglich)}\Sigma^{-1}$$

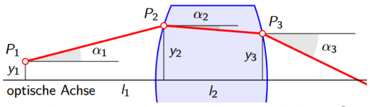
$$A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^T$$

7 Praxis Beispiele

7.1 Optik

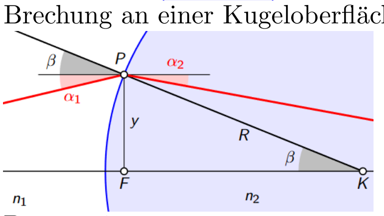
Gilt nur für sehr kleine Winkel (Annahme: $\sin\alpha \approx \alpha \approx \tan\alpha$). Die entgültige Optik-Matrix ist eine Multiplikationen von allen Brechungen.

Beschreibung eines Lichtstrahls:



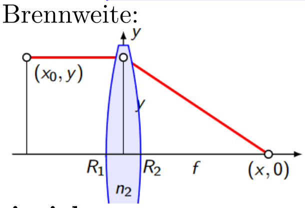
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T_{\text{Weg}}(l)} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix}}_{StartStrahl}$$

Brechung an einer Kugeloberfläche:



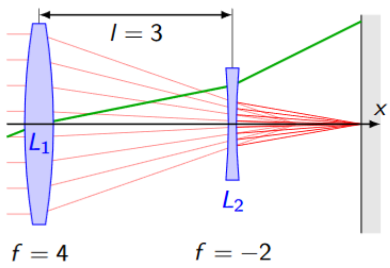
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R}\left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right) & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}}_{T_{\text{Brechung}}(n_1, n_2, R)}$$

Brennweite:



$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}}_{T_{\text{Linse}}(f)}$$

Beispiel:



$$T_{\text{Linse}_1}(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \quad T_{\text{Weg}}(3) \quad = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{\text{Linse}_2}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Das System wird von <u>rechts nach links</u> beschrieben. Daraus ergibt sich folgende Multiplikation:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T_{\text{Weg}}} \overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}}_{T_{\text{Linse}_2}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T_{\text{Weg}}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}}_{T_{\text{Linse}_1}}}^{T} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{StartStrahl}}$$

7.2 Potenzen

Um eine Potenz einer Matrix zu berechnen wird die Matrix A diagonalisiert zu A'. Anschliessend wird A'^k berechnet und wieder zurück in die Ursprüngliche Basis transformiert.

$$A^k = T^{-1} A'^k T$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^4$$

Berechnen der Eigenwerte ,Eigenvektoren und Eigenbasis (Siehe auch "5.1 - Eigenwertproblem"):

$$\det(A - \lambda E) = 0 \qquad {\scriptstyle \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 4}$$

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T = (e_1, e_2)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Diagonalisierte Matrix A' kann nun anhand der Eigenwerte bestimmt werden (Siehe "5.3 - Diagonalisieren"):

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Zum Schluss kann die diagonalisierte Matrix potenziert und in die Ursprungs Basis transformiert werden:

$$A^4 = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{T^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1^4 & 0 \\ 0 & 4^4 \end{pmatrix}}_{A'^4} \cdot \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{T} = \begin{pmatrix} 171 & 170 \\ 85 & 86 \end{pmatrix}$$

7.3 Kettenbrüche

Jeder Kettenbruch kann als Matrix-Schreibweise berechnet werden. Dazu werden die Brüche in Vektoren umgewandelt:

$$\frac{a}{b} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Ein Kettenbruch kann nun als Matrix berechnet werden:

$$\frac{b}{a + \frac{p}{q}} = \frac{bq}{aq + p} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 29 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \frac{12}{29} \approx 0.4138$$

(**Vereinfachung**: +1, daher ist der erste Bruch "$2 + \ldots$" und kann vollständig als Rekursion angeschaut werden):

$$[1; 2, 2, 2, \ldots, 2] = \mathbf{2} + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ldots}}} \Rightarrow y = 2 + \frac{1}{y}$$

$$y^2 - 2y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-1)}}{2}$$

$$\Rightarrow \mathbf{1} \pm \sqrt{2}$$

7.4 Rekursionsformel

Die Formel in Matrix-Schreibweise überführen und diagonalisieren. Entsprechende Operationen werden so vereinfacht und n-te Potenz kann direkt berechnet werden. Siehe auch "7.2 - Potenzen"

Beispiel: $x_{n+1} = 5x_n - 6x_{n-1}$ mit Anfangswert $x_0 = 0, x_1 = 1$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{P} \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix}}_{v_0}$$

Charakteristisches Polynom und Eigenvektoren finden:

$$\det(P - \lambda E) = 0 \qquad \lambda_1=2;\lambda_2=3$$

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T = (e_1, e_2)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Die diagonalisierte Matrix A' kann nun anhand der Eigenwerte bestimmt werden (Siehe "5.3 - Diagonalisieren"):

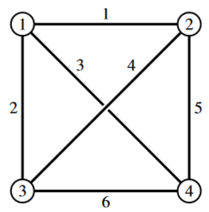
$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Der n-te Wert kann durch folgende Formel berechnet werden. Dabei enthält der v_0 Vektor die gegebenen Startpunkte $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{T^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}}_{A'^n} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}}_{T} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_0} = \begin{pmatrix} 3^{n+1} - 2^{n+1} \\ 3^n - 2^n \end{pmatrix}$$

Aus diesem Ergebnis kann $x_n = 3^n - 2^n$ abgelesen werden.

7.5 Netzwerk Zyklen



"von" = -1
"nach" = +1

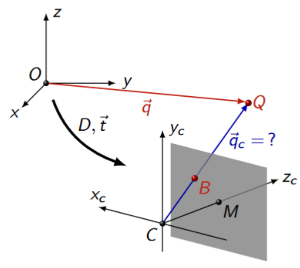
$$\delta = \begin{array}{c} \text{Kanten} \\ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \text{Knoten}$$

$$\xrightarrow{Gauss} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus liest man ab, dass drei Zyklen gebildet werden, die dadurch bestimmt sind, ob man die Kanten 4,5 oder 6 im Zyklus drin haben will oder nicht.

$$z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \mathbf{1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad z_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \mathbf{1} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad z_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

7.6 Kamerageometrie



Um 3D Punkte von einem Welt-Koordinatensystem O in ein Chip-Koordinatensystem zu übertragen (oder vica-versa), muss das Kamera-Koordinatensystem um C Verschoben und mit Matrix D gedreht werden. Nun liegen beide Koordinatensysteme übereinander. Die Kameramatrix K kann nun eine Gerade r_i finden, auf der der gesuchte 3D Punkt liegt. Meist sind mehrere Kameras in Verwendung, um die Position genauer mithilfe des "3.12 - Least Square" zu bestimmen

7.6.1 Kameramatrix

$$K = \begin{pmatrix} f & 0 & \frac{m_x}{2} \\ 0 & f & \frac{m_y}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

f: Brennweite in Pixel
m: Chip-Grösse

7.6.2 Chip-Koordinaten berechnen

Pixel-Position auf Chip berechnen von einem 3D Punkt.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z = 1 \end{pmatrix}}_{\tilde{b}\text{: Chip-Koordinaten}} = KD \cdot \left(\underbrace{\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix}}_{\vec{q}\text{: Objekt 3D-Position}} - \underbrace{\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}}_{\vec{c}\text{: Kamera-Position}} \right)$$

Achtung: Alle Komponenten von $\tilde{b}$ mit $\tilde{b}_z$ dividieren um homogener Bildpunkt zu erhalten. $b = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{b}_x}{\tilde{b}_z} \\ \frac{\tilde{b}_y}{\tilde{b}_z} \\ \frac{\tilde{b}_z}{\tilde{b}_z} = 1 \end{pmatrix}$

7.6.3 3D-Punkt triangulieren

Zuerst den entsprechenden Stützvektor pro Kamera berechnen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}}_{\vec{r}\text{: Richtungsvektor}} = (KD)^{-1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ 1 \end{pmatrix}}_{\tilde{b}\text{: Chip-Koordinaten}}$$

Die Gerade von jeder Kamera kann mit der Kamera-Position c und dem berechneten Stützvektor $\vec{r}$ definiert werden:

$$\vec{p}_n = \vec{c} + t \cdot \vec{r}_n$$

Die Matrix Gleichung aufstellen und mit "3.12 - Least Square" lösen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} E & -\vec{r}_1 & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ E & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & -\vec{r}_2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ s \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{c}_1 \\ \vec{c}_2 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Inhaltsverzeichnis