R2 kapittel 1 Følger og rekker

LØSNINGER AV OPPGAVENE I BOKA

1.1

a Neste tall i følgen er 21, fordi vi legger 4 til det foregående tallet. $17 + 4 = 21$.

```
tall = 5

for i in range(20):
  print(tall)
  tall = tall + 4
```

b Neste tall i følgen er 2, fordi vi trekker 2 fra det foregående tallet. $4 - 2 = 2$.

```
tall = 10

for i in range(20):
  print(tall)
  tall = tall - 2
```

c Neste tall i følgen er 16, fordi vi får tall nummer $i + 1$ ved å legge i til forrige tall. Vi skal nå finne tall nummer 6 og må derfor legge 5 til tall nummer 5. $11 + 5 = 16$.

```
tall = 1

for i in range(1,21):
  print(tall)
  tall = tall + i
```

d Neste tall i følgen er 256, fordi vi multipliserer det foregående tallet med 4. $64 \cdot 4 = 256$.

```
tall = 1

for i in range(20):
  print(tall)
  tall = 4*tall
```

e Neste tall i følgen er 81, fordi vi multipliserer det foregående tallet med –3. $-27 \cdot (-3) = 81$.

```
tall = 1

for i in range(20):
  print(tall)
  tall = -3*tall
```

f Neste tall i følgen er 25, fordi tall nummer i er i^2. Disse tallene kaller vi kvadrattallene. Vi skal finne kvadrattall nummer 5. $5^2 = 25$.

```
for i in range(1,21):
  print(i**2)
```

1.2

a Det manglende tallet er 6, fordi vi legger 2 til det foregående tallet.

b Det manglende tallet er 3, fordi vi multipliserer det foregående tallet med 3.

c Det manglende tallet er 5, fordi vi trekker 3 fra det foregående tallet.

d Differansen mellom tallene øker med 4 hver gang. Det manglende tallet er 2, fordi vi adderer 6, 10, 14, 18, osv.

1.3

a Vi får heltallene fra og med 5. Altså 5, 6, 7, 8, …

b Vi får heltallene fra og med –2. Altså –2, –1, 0, 1, …

c
```
tall = int(input("Hvilket tall skal jeg begynne på? "))
n = int(input("Hvor mange ledd skal jeg ta med? "))

for i in range(n):
  print(tall)
  tall = tall + 1
```

d Det forteller oss at differansen mellom to påfølgende ledd er 1.

e Følgen vi får, er alle heltallene i stigende rekkefølge fra og med et gitt heltall.

1.4

a
$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 2a_1 = 2 \cdot 2 = 4$$
$$a_3 = 2a_2 = 2 \cdot 4 = 8$$
$$a_4 = 2a_3 = 2 \cdot 8 = 16$$
$$a_5 = 2a_4 = 2 \cdot 16 = 32$$

b
$$b_1 = 5$$
$$b_2 = b_1 + 3 = 5 + 3 = 8$$
$$b_3 = b_2 + 3 = 8 + 3 = 11$$
$$b_4 = b_3 + 3 = 11 + 3 = 14$$
$$b_5 = b_4 + 3 = 14 + 3 = 17$$

c
$$c_1 = 1$$
$$c_2 = 2c_1 - 3 = 2 \cdot 1 - 3 = -1$$
$$c_3 = 2c_2 - 3 = 2 \cdot (-1) - 3 = -5$$
$$c_4 = 2c_3 - 3 = 2 \cdot (-5) - 3 = -13$$
$$c_5 = 2c_4 - 3 = 2 \cdot (-13) - 3 = -29$$

d
$$d_1 = 1$$
$$d_2 = d_1 + 1 = 1 + 1 = 2$$
$$d_3 = d_2 + 2 = 2 + 2 = 4$$
$$d_4 = d_3 + 3 = 4 + 3 = 7$$
$$d_5 = d_4 + 4 = 7 + 4 = 11$$

1.5

a
```
tall = 2

for i in range(10):
  print(tall)
  tall = 2*tall
```

b
```
tall = 5

for i in range(10):
  print(tall)
  tall = tall + 3
```

c
```
tall = 1

for i in range(10):
  print(tall)
  tall = 2*tall - 3
```

d
```
tall = 1

for i in range(1,11):
  print(tall)
  tall = tall + i
```

1.6

a Følgen starter med tallet 14. Vi får det neste leddet i følgen ved å trekke 3 fra det foregående leddet. Det gir

$a_1 = 14$ og $a_{n+1} = a_n - 3$

b Følgen starter med tallet 20. Vi får det neste leddet i følgen ved å multiplisere det foregående leddet med $\frac{1}{2}$. Det gir

$b_1 = 20$ og $b_{n+1} = \frac{1}{2} b_n$

c Følgen starter med tallet 2.

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2 &= 5 = a_1 + 3 \\ a_3 &= 14 = a_2 + 9 \\ a_4 &= 41 = a_3 + 27 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Vi får ledd nummer n + 1 ved å legge 3^n til det foregående leddet. Det gir

$c_1 = 2$ og $c_{n+1} = c_n + 3^n$

d Følgen starter med tallet $\frac{1}{4}$. Vi får det neste leddet i følgen ved å multiplisere det foregående leddet med –2. Det gir

$d_1 = \frac{1}{4}$ og $d_{n+1} = -2d_n$

e Følgen starter med tallet 1.

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 5 = a_1 + 4$$
$$a_3 = 11 = a_2 + 6$$
$$a_4 = 19 = a_3 + 8$$
$$a_5 = 25 = a_4 + 10$$
$$\vdots$$

Vi får ledd nummer $n + 1$ ved å legge $2(n + 1)$ til det foregående leddet. Det gir

$e_1 = 1$ og $e_{n+1} = e_n + 2(n+1)$

f Følgen starter med tallet 1. Vi får ledd nummer $n + 1$ ved å legge n til det foregående leddet. Det gir

$f_1 = 1$ og $f_{n+1} = f_n + n$

1.7

Følgen starter med tallet r. Neste ledd er det samme som det foregående leddet. Det gir

$a_1 = r$ og $a_{n+1} = a_n$

1.8

a Fra ledd 1 til ledd 50 må vi beregne neste ledd 49 ganger. Hver gang vi beregner neste ledd, gjør vi 3 regneoperasjoner: 2 addisjoner og 1 multiplikasjon. Det gir $49 \cdot 3 = 147$ regneoperasjoner.

b

```
tall = 5

for i in range(1,51):
  print(tall)
  tall = tall + 3*(i + 1)
```

c Fra $a_{n+1} = a_n + 3(n+1)$ får vi $a_{n+1} - a_n = 3(n+1)$.

```
for i in range(1,51):
   print(3*(i + 1))
```

1.9

Vi gjør de to første deloppgavene algebraisk på ark. De to siste gjør vi i CAS i GeoGebra.

a

$$a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1$$
$$a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3$$
$$a_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5$$
$$a_4 = 2 \cdot 4 - 1 = 8 - 1 = 7$$
$$a_5 = 2 \cdot 5 - 1 = 10 - 1 = 9$$

$$a_{10} = 2 \cdot 10 - 1 = 20 - 1 = 19$$

b $b_1 = 3 \cdot 1 + 2 = 3 + 2 = 5$
$b_2 = 3 \cdot 2 + 2 = 6 + 2 = 8$
$b_3 = 3 \cdot 3 + 2 = 9 + 2 = 11$
$b_4 = 3 \cdot 4 + 2 = 12 + 2 = 14$
$b_5 = 3 \cdot 5 + 2 = 15 + 2 = 17$

$b_{10} = 3 \cdot 10 + 2 = 30 + 2 = 32$

c Vi løser oppgaven i CAS i GeoGebra.

1	$c(n) := -3 \cdot n + 5$ $\rightarrow$ $\mathbf{c(n) := -3\,n + 5}$
2	Følge(c(n), n, 1, 5) $\rightarrow$ $\mathbf{\{2, -1, -4, -7, -10\}}$
3	c(10) $\rightarrow$ $\mathbf{-25}$

$c_1 = 2,\ c_2 = -1,\ c_3 = -4,\ c_4 = -7,\ c_5 = -10,\ c_{10} = -25$

d Vi løser oppgaven i CAS i GeoGebra.

1	$d(n) := \frac{1}{2}\,n^2 - \frac{1}{2}\,n + 1$ $\rightarrow$ $\mathbf{d(n) := \frac{1}{2}\,n^2 - \frac{1}{2}\,n + 1}$
2	Følge(d(n), n, 1, 5) $\rightarrow$ $\mathbf{\{1, 2, 4, 7, 11\}}$
3	d(10) $\rightarrow$ $\mathbf{46}$

$d_1 = 1,\ d_2 = 2,\ d_3 = 4,\ d_4 = 7,\ d_5 = 11,\ d_{10} = 46$

1.10

a Vi ser at ledd nummer *n* er *n*. Det gir $a_n = n$.

b Vi ser at ledd nummer *n* er 3*n*. Det gir $b_n = 3n$.

c Vi ser at ledd nummer *n* er 2. Det gir $c_n = 2$.

d Vi ser at ledd nummer *n* er $(-1)^n$. Det gir $d_n = (-1)^n$.

1.11

a Vi får leddene i følgen ved å starte med 1 og legge til $\frac{1}{2}$ for hvert nye ledd. Vi har

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = a_1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$
$$a_3 = a_2 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}$$
$$a_4 = a_3 + \frac{1}{2} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}$$
$$\vdots$$
$$a_n = 1 + (n-1) \cdot \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$$

```
for i in range(1,11):
  tall = (i + 1)/2
  print(tall)
```

b Vi får leddene i følgen ved å starte med 2 og legge til 2 for hvert nye ledd. Vi har

$$b_1 = 2 = 2 \cdot 1$$
$$b_2 = b_1 + 2 = 2 + 2 = 4 = 2 \cdot 2$$
$$b_3 = b_2 + 2 = 4 + 2 = 6 = 2 \cdot 3$$
$$b_4 = b_3 + 2 = 6 + 2 = 8 = 2 \cdot 4$$
$$\vdots$$
$$b_n = 2n$$

```
for i in range(1,11):
  tall = 2*i
  print(tall)
```

c Vi får leddene i følgen ved å starte med 1 og doble for hvert nye ledd. Vi har

$$c_1 = 1 = 2^0$$
$$c_2 = 2c_1 = 2 \cdot 1 = 2 = 2^1$$
$$c_3 = 2c_2 = 2 \cdot 2 = 4 = 2^2$$
$$c_4 = 2c_3 = 2 \cdot 4 = 8 = 2^3$$
$$\vdots$$
$$c_n = 2^{n-1}$$

```
for i in range(1,11):
  tall = 2**(i-1)
  print(tall)
```

d Vi har

$$d_1 = 0$$
$$d_2 = 2d_1 + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$
$$d_3 = 2d_2 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$
$$d_4 = 2d_3 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

Her er det verdt å merke seg at ledd n er én mindre enn ledd n i følgen $\{c_n\}$ i oppgave c. Vi får derfor

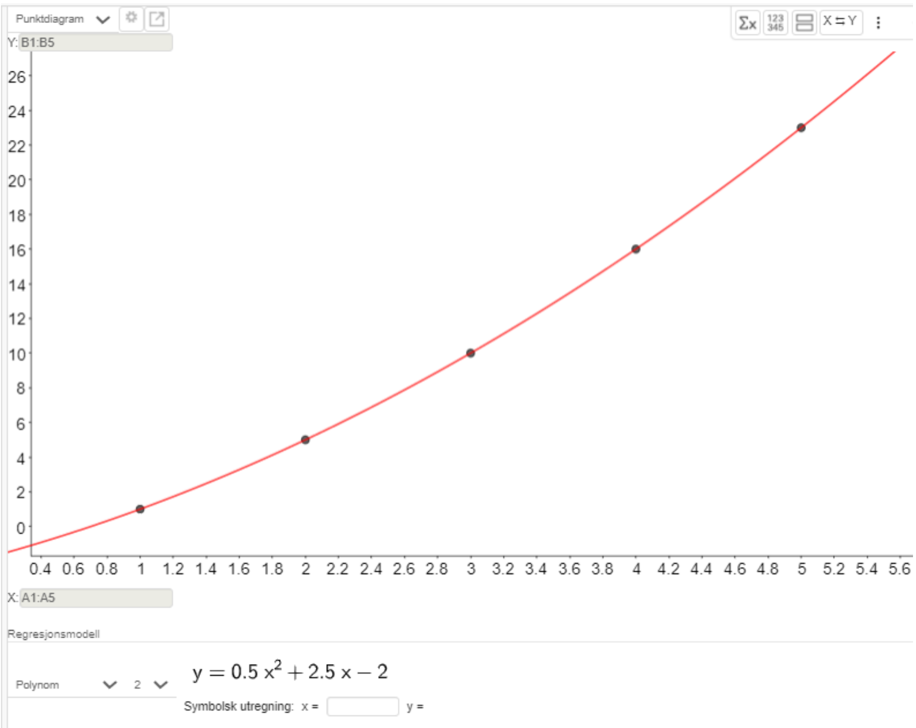
$$d_n = c_n - 1 = 2^{n-1} - 1$$

```
for i in range(1,11):
  tall = 2**(i-1) - 1
  print(tall)
```

1.12

a Vi legger leddene inn i regnearket i GeoGebra og velger Regresjonsanalyse. Vi prøver oss fram og får eksakt treff ved å velge polynom av grad 2 som regresjonsmodell.

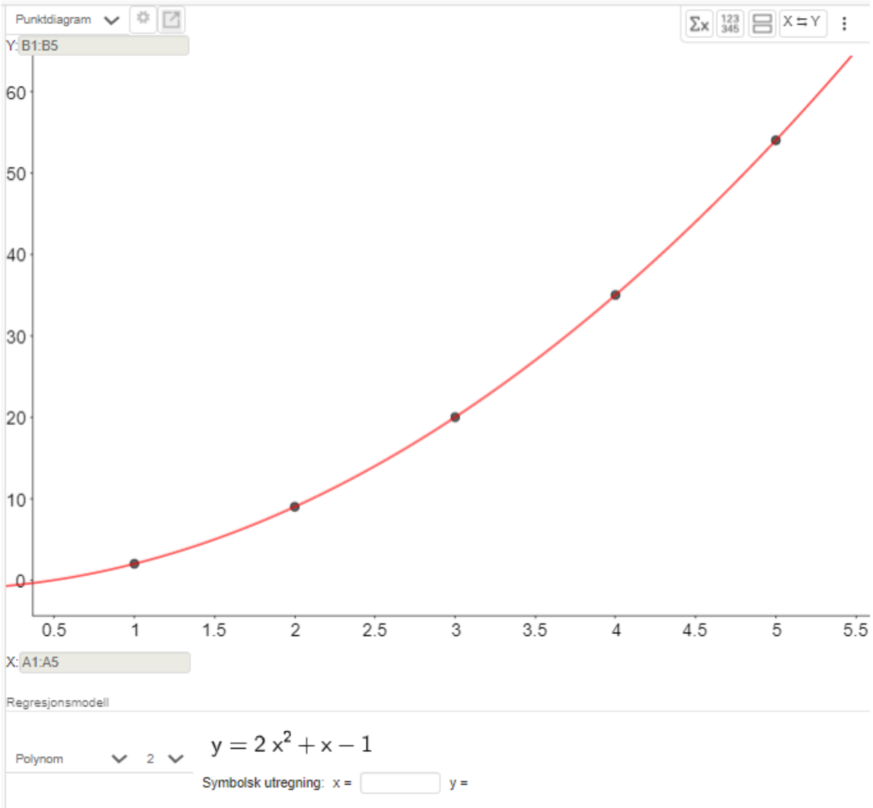
	A	B
1	1	1
2	2	5
3	3	10
4	4	16
5	5	23



Av funksjonsuttrykket ser vi at en eksplisitt formel for følgen er $a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{5}{2}n - 2$.

b Vi legger leddene inn i regnearket i GeoGebra og velger Regresjonsanalyse. Vi prøver oss fram og får eksakt treff ved å velge polynom av grad 2 som regresjonsmodell.

	A	B
1	1	2
2	2	9
3	3	20
4	4	35
5	5	54



Av funksjonsuttrykket ser vi at en eksplisitt formel for følgen er $b_n = 2n^2 + n - 1$.

1.13

a $a_1 = 3 \cdot 1 - 1 = 3 - 1 = 2$

$a_2 = 3 \cdot 2 - 1 = 6 - 1 = 5$

$a_3 = 3 \cdot 3 - 1 = 9 - 1 = 8$

$a_4 = 3 \cdot 4 - 1 = 12 - 1 = 11$

$a_5 = 3 \cdot 5 - 1 = 15 - 1 = 14$

$a_6 = 3 \cdot 6 - 1 = 18 - 1 = 17$

b $s_2 = a_1 + a_2 = 2 + 5 = 7$

$s_6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 = 57$

1.14

a $s_1 = 1$

$s_2 = 1 + 7 = 8$

$s_3 = 1 + 7 + 19 = 27$

$s_4 = 1 + 7 + 19 + 37 = 64$

$s_5 = 1 + 7 + 19 + 37 + 61 = 125$

b Følgen av delsummene ser ut til å bestå av kubetallene, 1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, … Det gir formelen $s_n = n^3$.

1.15

a $\sum_{i=1}^{5}(i+3)=(1+3)+(2+3)+(3+3)+(4+3)+(5+3)=4+5+6+7+8=30$

1 $\sum_{i=1}^{5} i+3$

$\rightarrow$ **30**

b $\sum_{i=1}^{4}\frac{i}{4}=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\frac{4}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$

1 $\sum_{i=1}^{4}\frac{i}{4}$

$\rightarrow$ $\mathbf{\frac{5}{2}}$

c $\sum_{i=1}^{4}\frac{4}{i}=\frac{4}{1}+\frac{4}{2}+\frac{4}{3}+\frac{4}{4}=\frac{12}{3}+\frac{6}{3}+\frac{4}{3}+\frac{3}{3}=\frac{25}{3}$

1 $\sum_{i=1}^{4}\frac{4}{i}$

$\rightarrow$ $\mathbf{\frac{25}{3}}$

1.16

Vi løser oppgaven i CAS i GeoGebra.

Med programmering løses oppgaven tilsvarende som i eksempel 11 på side 21 i boka.

a

1 $a(n) := 2n - 1$

$\rightarrow$ $\mathbf{a(n) := 2n - 1}$

2 Sum(a(n), n, 1, 50)

$\rightarrow$ **2500**

b

1 $f(n) := n^2 - 2$

$\rightarrow$ $\mathbf{f(n) := n^2 - 2}$

2 Sum(f(n), n, 1, 50)

$\rightarrow$ **42825**

c

1 $b(n) := 3 \cdot 2^n$

$\rightarrow$ $\mathbf{b(n) := 3 \cdot 2^n}$

2 Sum(b(n), n, 1, 50)

$\rightarrow$ **6755399441055738**

d

1 $g(n) := 50\left(\frac{89}{100}\right)^{n-1}$

$\rightarrow$ $\mathbf{g(n) := 50\left(\frac{89}{100}\right)^{n-1}}$

2 $\sum_{n=1}^{50} g(n)$

$\approx$ **453.21**

1.17

a Summen av kvadrattallene er en rekke der $a_i = i^2$.

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} i^2$$

b

1 $\text{Sum}(i^2, i, 1, n)$

$\rightarrow$ $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$

$$s_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

1.18

Vi løser oppgaven uten hjelpemiddel og kontrollerer med CAS.
Med programmering løses oppgaven tilsvarende som i eksempel 11 på side 21 i boka.

a $\sum_{n=1}^{8} n = 1+2+3+4+5+6+7+8 = 36$

1 Sum(n, n, 1, 8)

$\rightarrow$ **36**

b $\sum_{i=2}^{3} 3^i = 3^2 + 3^3 = 9 + 27 = 36$

2 $\text{Sum}(3^i, i, 2, 3)$

$\rightarrow$ **36**

c $\sum_{i=3}^{6}\left(i^2-i\right)=\left(3^2-3\right)+\left(4^2-4\right)+\left(5^2-5\right)+\left(6^2-6\right)$

$=(9-3)+(16-4)+(25-5)+(36-6)=6+12+20+30=68$

3 $\text{Sum}\left(i^2-i,i,3,6\right)$

$\rightarrow$ **68**

d $\sum_{k=0}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{16}{16}+\frac{8}{16}+\frac{4}{16}+\frac{2}{16}+\frac{1}{16}=\frac{31}{16}$

4 $\text{Sum}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k,k,0,4\right)$

$\rightarrow$ $\mathbf{\frac{31}{16}}$

1.19

```
sum = 0

for k in range(3,7):
  sum = sum + k**2 - 1

print(sum)
```

1.20

a Vi trekker 3 fra foregående ledd hver gang. 38, 35, 32.

b Differansen øker med 2 for hver gang. På de fire første leddene er det lagt til 2, 4 og 6. På de tre neste leddene vil det legges til 8, 10 og 12. Da blir de neste tre leddene 25, 35, 47.

c Differansen øker med 20 for hver gang. På de fire første leddene er det trukket fra til 10, 30 og 50. På de tre neste leddene vil det trekkes fra 70, 90 og 110. Da blir de neste tre leddene 340, 250, 140.

1.21

a $a_1=5+2\cdot1=5+2=7$

$a_2=5+2\cdot2=5+4=9$

$a_3=5+2\cdot3=5+6=11$

$a_4=5+2\cdot4=5+8=13$

$a_5=5+2\cdot5=5+10=15$

$a_6=5+2\cdot6=5+12=17$

Følgen starter med tallet 7. Vi får det neste leddet i følgen ved å legge 2 til det foregående leddet. Det gir

$a_1=7$ og $a_{n+1}=a_n+2$

b $b_1 = 5 \cdot 1 - 3 = 5 - 3 = 2$
$b_2 = 5 \cdot 2 - 3 = 10 - 3 = 7$
$b_3 = 5 \cdot 3 - 3 = 15 - 3 = 12$
$b_4 = 5 \cdot 4 - 3 = 20 - 3 = 17$
$b_5 = 5 \cdot 5 - 3 = 25 - 3 = 22$
$b_6 = 5 \cdot 6 - 3 = 30 - 3 = 27$

Følgen starter med tallet 2. Vi får det neste leddet i følgen ved å legge 5 til det foregående leddet. Det gir

$b_1 = 2$ og $b_{n+1} = b_n + 5$

c $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 7$

Alle leddene i følgen er lik 7. Det gir

$c_1 = 7$ og $c_{n+1} = c_n$

1.22

a

```
tall = 0
sum = 0

for i in range(1,11):
  tall = 4 - 3*i
  sum = sum + tall
  print(tall)

print(sum)
```

Summen s_{10} som skrives ut, er –125.

b

```
tall = 0
sum = 0

for i in range(1,11):
  tall = 2**i
  sum = sum + tall
  print(tall)

print(sum)
```

Summen s_{10} som skrives ut, er 2046.

c

```
tall = 0
sum = 0

for i in range(1,11):
  tall = i**2 + 2*i + 1
  sum = sum + tall
  print(tall)
```

```
print(sum)
```

Summen s_{10} som skrives ut, er 505.

1.23

a Vi får neste ledd i rekka ved å halvere det foregående leddet. Vi får

$a_4 = 250,\ a_5 = 125$

b $a_1 = 2000$ og $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$

c Vi kan legge merke til nevneren i siste ledd, $32 = 2^5$. Ledd nummer 5 er 125, så skal vi halvere ytterligere 5 ganger. Det er altså 5 + 5 = 10 ledd i rekka.

d De 10 leddene kan skrives som $\frac{2000}{2^0} + \frac{2000}{2^1} + \frac{2000}{2^2} + \cdots + \frac{2000}{2^9}$.

Vi finner summen i CAS.

2 $\text{Sum}\left(\frac{2000}{2^i}, i, 0, 9\right)$

$\rightarrow \frac{127875}{32}$

3 $2

≈ 3996.09

$s_{10} = \frac{127\,875}{32} \approx 3996{,}09$

1.24

a Vi begynner med å finne en rekursiv formel. Vi ser at differansen mellom leddene er 4, 8 og 16. Dette er det samme som 2^2, 2^3 og 2^4.

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + 2^2 \\
a_3 &= a_2 + 2^3 \\
&\vdots \\
a_{n+1} &= a_n + 2^{n+1}
\end{aligned}
$$

En rekursiv formel er derfor $a_1 = 2$ og $a_{n+1} = a_n + 2^{n+1}$.

Så finner vi en eksplisitt formel. Vi ser at hvert ledd er 2 lavere enn toerpotensene 2^2, 2^3, 2^4, …

Altså har vi følgen $2^2 - 2, 2^3 - 2, 2^4 - 2, \ldots$

En eksplisitt formel blir da $a_n = 2^{n+1} - 2$.

b Vi begynner med å finne en rekursiv formel. Vi ser at differansen mellom leddene er 6, 12 og 24. Dette er det samme som $3\cdot 2^1, 3\cdot 2^2$ og $3\cdot 2^3$.

$$b_2 = b_1 + 3\cdot 2^1$$
$$b_3 = b_2 + 3\cdot 2^2$$
$$\vdots$$
$$b_{n+1} = b_n + 3\cdot 2^n$$

En rekursiv formel er derfor $b_1 = 4$ og $b_{n+1} = b_n + 3\cdot 2^n$.

Så finner vi en eksplisitt formel. Vi ser at hvert ledd er 2 lavere enn $3\cdot 2^1, 3\cdot 2^2, 3\cdot 2^3, \ldots$

Altså har vi følgen $3\cdot 2 - 2, 3\cdot 2^2 - 2, 3\cdot 2^3 - 2, \ldots$

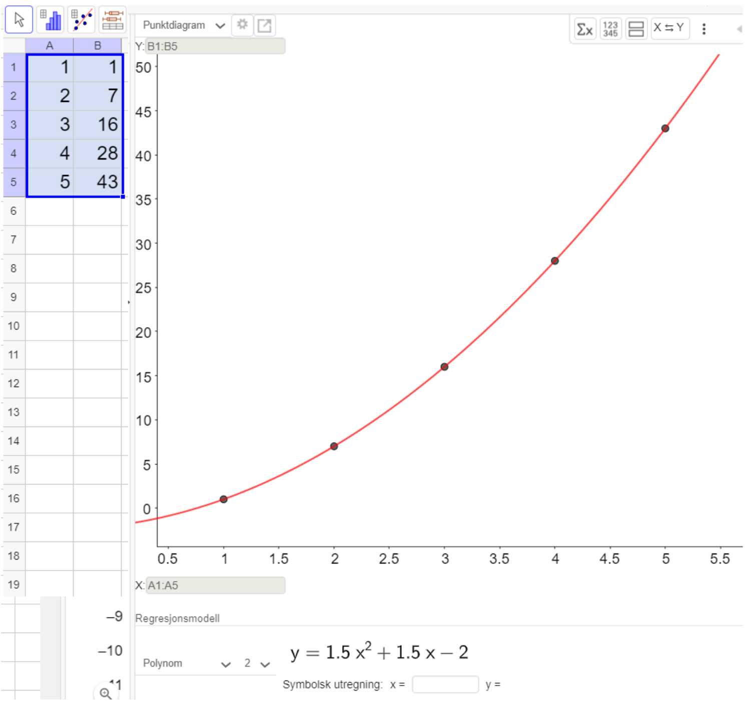
En eksplisitt formel blir da $b_n = 3\cdot 2^n - 2$.

c Vi begynner med å finne en rekursiv formel. Vi ser at differansen mellom leddene er 6, 9, 12 og 15. Dette er det samme som $3\cdot 2, 3\cdot 3, 3\cdot 4$ og $3\cdot 5$.

$$c_2 = c_1 + 3\cdot 2$$
$$c_3 = c_2 + 3\cdot 3$$
$$c_4 = c_3 + 3\cdot 4$$
$$\vdots$$
$$c_{n+1} = c_n + 3\cdot(n+1)$$

En rekursiv formel er derfor $c_1 = 1$ og $c_{n+1} = c_n + 3(n+1)$.

Så finner vi en eksplisitt formel. Vi prøver med regresjon i GeoGebra.



En eksplisitt formel er $c_n = \dfrac{3}{2}n^2 + \dfrac{3}{2}n - 2$.

1.25

a $\sum_{n=1}^{6}(2^n-1)=(2^1-1)+(2^2-1)+(2^3-1)+(2^4-1)+(2^5-1)+(2^6-1)$

$$\begin{aligned}&=(2-1)+(4-1)+(8-1)+(16-1)+(32-1)+(64-1)\\&=1+3+7+15+31+63\\&=120\end{aligned}$$

b $\sum_{i=0}^{8}(2^i-i^2)=(2^0-0^2)+(2^1-1^2)+(2^2-2^2)+(2^3-3^2)+(2^4-4^2)+(2^5-5^2)+(2^6-6^2)+(2^7-7^2)+(2^8-8^2)$

$$\begin{aligned}&=(1-0)+(2-1)+(4-4)+(8-9)+(16-16)+(32-25)+(64-36)+(128-49)+(256-64)\\&=1+1+0+(-1)+0+7+28+79+192\\&=307\end{aligned}$$

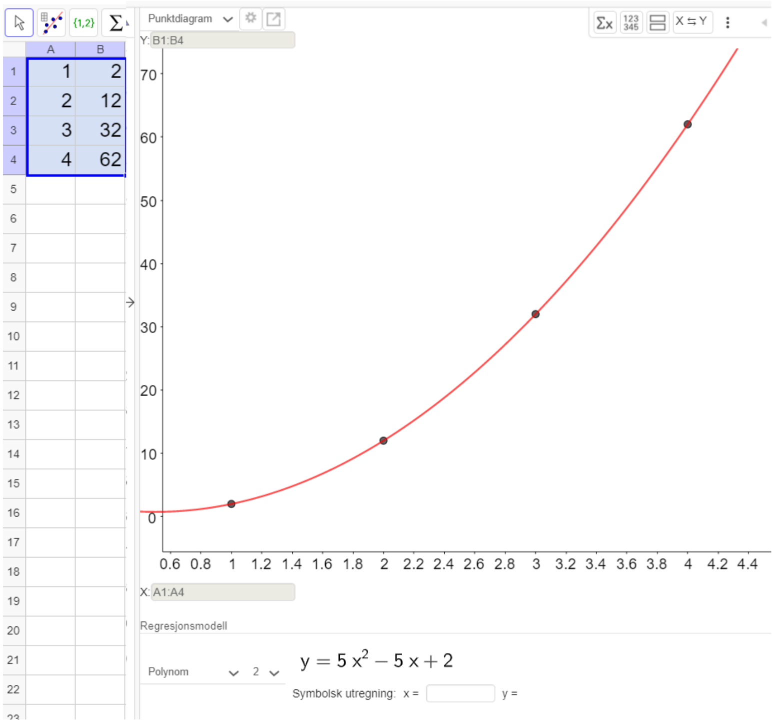
c $\sum_{b=1}^{4}(a^3b)=a^3\cdot 1+a^3\cdot 2+a^3\cdot 3+a^3\cdot 4=10a^3$

d $\sum_{n=1}^{8}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\left(\sqrt{1+1}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{2+1}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{3+1}-\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{4+1}-\sqrt{4}\right)$

$$\begin{aligned}&\cdots+\left(\sqrt{5+1}-\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{6+1}-\sqrt{6}\right)+\left(\sqrt{7+1}-\sqrt{7}\right)+\left(\sqrt{8+1}-\sqrt{8}\right)\\&=\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{5}-\sqrt{4}\right)\\&\cdots+\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)+\left(\sqrt{8}-\sqrt{7}\right)+\left(\sqrt{9}-\sqrt{8}\right)\\&=\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{4}+\sqrt{6}-\sqrt{5}+\sqrt{7}-\sqrt{6}+\sqrt{8}-\sqrt{7}+\sqrt{9}-\sqrt{8}\\&=\sqrt{9}-\sqrt{1}\\&=3-1\\&=2\end{aligned}$$

1.26

a Vi finner først en eksplisitt formel for a_n. Vi prøver med regresjon i GeoGebra.



En eksplisitt formel er $a_n = 5n^2 - 5n + 2$.

Så må vi finne ut hvilket leddnummer 362 er. Vi løser dermed likningen $a_n = 362$.

$$a_n = 362$$
$$5n^2 - 5n + 2 = 362$$

Vi løser likningen i CAS.

1	$5n^2 - 5n + 2 = 362$
	Løs: $\{n = -8, n = 9\}$

Det er til sammen 9 ledd. Da blir summen

$$\sum_{n=1}^{9} \left(5n^2 - 5n + 2\right)$$

Vi lager så et program i Python som finner summen.

```
n = 9
sum = 0

for i in range(1,n + 1):
  sum = sum + 5*i**2 - 5*i + 2

print(sum)
```

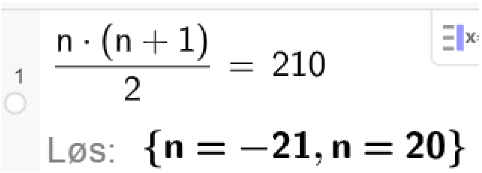
Kjøring av programmet gir at $\sum_{n=1}^{9} \left(5n^2 - 5n + 2\right) = 1218$.

b Vi kan gjenkjenne leddene som trekanttall. $T_4 = 10$, $T_5 = 15$, $T_5 = 21$ og $T_6 = 28$.

Vi vet at $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Vi må finne ut hvilket trekanttall 210 er. Vi løser likningen $T_n = 210$.

$$T_n = 210$$
$$\frac{n(n+1)}{2} = 210$$

Vi løser likningen i CAS.



210 er trekanttall nummer 20.

$$\sum_{n=4}^{20} \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Vi lager så et program i Python som finner summen.

```
sum = 0

for i in range(4,21):
  sum = sum + i*(i+1)/2

print(sum)
```

Kjøring av programmet gir at $\sum_{n=4}^{20} \dfrac{n \cdot (n+1)}{2} = 1530$.

1.27

a

```
n = 10
sumkvadrat = 0
sumoddetall = 0

for i in range(n):
  sumkvadrat = sumkvadrat + (i + 1)**2
  sumoddetall = sumoddetall + 1 + 2*i

differanse = sumkvadrat - sumoddetall
print(sumkvadrat)
print(sumoddetall)
print(differanse)
```

Ved kjøring av programmet for noen forskjellige verdier av n får vi følgende verdier:

n	**sumkvadrat**	**sumoddetall**	**differanse**
10	385	100	285
11	506	121	385
12	650	144	506
13	819	169	650

Det ser ut til at differansen hele tiden er det samme som kvadrattallet i linja ovenfor.

b

n	**kvadrattall**	**oddetall**	**differanse**
1	$1^2 = 1$	$2\cdot 1-1=1$	$1-1=0$
2	$2^2 = 4$	$2\cdot 2-1=3$	$4-3=1$ som er kvadrattall 1
3	$3^2 = 9$	$2\cdot 3-1=5$	$9-5=4$ som er kvadrattall 2
n	n^2	$2n-1$	$n^2-(2n-1)=n^2-2n+1=(n-1)^2$ som er kvadrattall n – 1.

Summerer vi differansen n ganger, får vi summen av de n – 1 første kvadrattallene.

c $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = \sum_{i=1}^{n}\left(i^2-2i+1\right) = \sum_{i=1}^{n}(i-1)^2$

Vi bruker at summasjonstegnet er additivt (første likhet) og andre kvadratsetning (andre likhet).

1.28

Anta at n er et oddetall.

Vi vil vise at n^2 er et oddetall, det vil si at det fins $m \in \mathbb{Z}$ slik at $n^2 = 2m + 1$.

Siden n er et oddetall, fins $k \in \mathbb{Z}$ slik at $n = 2k + 1$.

Da er $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$.

Siden $k \in \mathbb{Z}$, er $(2k^2 + 2k) \in \mathbb{Z}$.

Dermed fins $m \in \mathbb{Z}$ slik at $n^2 = 2m + 1$.

Så n^2 er et oddetall, som var det vi ville bevise.

Den bærende ideen er å bruke definisjonen av et oddetall, dvs. at det fins $k \in \mathbb{Z}$ slik at $n = 2k + 1$.

1.29

Utsagnet for $n = 1$ gir $2 = 1\cdot(1+1)$, som er sant.

Vi antar at utsagnet er sant for et naturlig tall $n = k$, altså at

$2+4+6+\cdots+2k = k(k+1)$

Vi må vise at da er utsagnet også sant for $n = k + 1$, altså at

$2+4+6+\cdots+2k+2(k+1) = (k+1)(k+2)$

Vi summerer de k +1 første leddene. Det gir

$$\begin{aligned} 2+4+6+\cdots+2k+2(k+1) &= k(k+1)+2(k+1) && \text{Vi bruker antakelsen} \\ &= k^2+k+2k+2 \\ &= k^2+3k+2 \\ &= (k+1)(k+2) && \text{Vi faktoriserer} \end{aligned}$$

Vi har nå vist at utsagnet er sant for $n = k + 1$ under antakelsen at utsagnet er sant for $n = k$.
Vi har dermed bevist ved induksjon at utsagnet er sant for alle naturlige tall n.

1.30
Vi sjekker formelen for $n = 1$:

$a_1 = \frac{3}{2}\cdot 2^1 - 1 = 3 - 1 = 2$, som stemmer.

Vi antar at formelen gjelder for et naturlig tall k, det vil si

$a_k = \frac{3}{2}\cdot 2^k - 1$. Vi må vise at vi da har $a_{k+1} = \frac{3}{2}\cdot 2^{k+1} - 1$.

Vi bruker den rekursive formelen og får

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2a_k + 1 \\ &= 2\left(\frac{3}{2}\cdot 2^k - 1\right) + 1 && \text{Vi bruker antakelsen} \\ &= \left(\frac{3}{2}\cdot 2^k \cdot 2 - 1\cdot 2\right) + 1 \\ &= \frac{3}{2}2^{k+1} - 1 \end{aligned}$$

Vi har dermed bevist ved induksjon at formelen gjelder for alle naturlige tall.

I beviset til Srinivasa er trinnene som følger:

- I linje 1 og 2 presenterer han det som skal bevises.
- I linje 3 viser han at $P(1)$ er sann.
- I linje 4 presenterer han induksjonsantakelsen.
- I linje 5 presenterer han hva utregningen skal komme fram til for at påstanden skal være sann, dvs. hva han må vise.
- I linje 6 til 9 utføres utregningen. Legg spesielt merke til at induksjonsantakelsen brukes i linje 7, og at uttrykket i linje 9 stemmer overens med uttrykket i linje 5.
- I linje 10 og 11 avslutter han beviset med en konklusjon.

1.31
For $n = 1$ blir venstresiden x', som er 1 fordi den momentane vekstfarten til funksjonen $f(x) = x$ er 1 for alle x.
Høyresiden blir $1\cdot x^{1-1} = 1\cdot x^0 = 1\cdot 1 = 1$. Derivasjonsregelen stemmer for $n = 1$.
Vi antar at derivasjonsregelen er sann for et naturlig tall $n = k$, altså at

$(x^k)' = kx^{k-1}$

Vi må vise at da er derivasjonsregelen også sann for $n = k + 1$, altså at

$(x^{k+1})' = (k+1)x^{(k+1)-1} = (k+1)x^k$

Vi skriver om x^{k+1} til $x\cdot x^k$ og bruker produktregelen. Det gir

$$\left(x \cdot x^k\right)' = x' \cdot x^k + x \cdot \left(x^k\right)'$$ Vi bruker produktregelen for derivasjon.

$$= 1 \cdot x^k + x \cdot \left(kx^{k-1}\right)$$ Vi bruker antakelsen.

$$= x^k + k \cdot x^{k-1} \cdot x$$

$$= x^k + k \cdot x^k$$

$$= (k+1)x^k$$ Vi faktoriserer.

Vi har nå vist at derivasjonsregelen er sann for $n = k + 1$ under antakelsen at den er sann for $n = k$.
Vi har dermed bevist ved induksjon at derivasjonsregelen er sann for alle naturlige tall n.

1.32

Rad 0						1					
Rad 1					1		1				
Rad 2				1		2		1			
Rad 3			1		3		3		1		
Rad 4		1		4		6		4		1	
Rad 5	1		5		10		10		5		1

a Fra Pascals trekant rad 5 får vi at
$(n+1)^5 = 1n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1$

b Utsagnet for $n = 1$ gir $1^5 - 1 = 0$, som er delelig med 5.
Vi antar at utsagnet er sant for et naturlig tall $n = k$, altså at
$k^5 - k$ er delelig med 5.
Vi må vise at da er utsagnet også sant for $n = k + 1$, altså at
$(k+1)^5 - (k+1)$ er delelig med 5.

Vi bruker Pascals trekant og omformer $(k+1)^5 - (k+1)$. Det gir

$$(k+1)^5 - (k+1) = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 - k - 1$$ Vi bruker Pascals trekant.

$$= k^5 + 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k) + 1 - k - 1$$

$$= k^5 + 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k) - k$$

$$= (k^5 - k) + 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k)$$

Fra induksjonsantakelsen er det første uttrykket $(k^5 - k)$ delelig med 5. Videre ser vi at det andre uttrykket også må være delelig med 5 fordi det er en heltallsfaktorisering med faktoren 5. Vi har nå vist at utsagnet er sant for $n = k + 1$ under antakelsen at det er sant for $n = k$.

Vi har dermed bevist ved induksjon at utsagnet er sant for alle naturlige tall n.

1.33

a Vi lager en tabell.

n	2^n	$2n$	$2^n > 2n$
1	2	2	usant
2	4	4	usant
3	8	6	sant
4	16	8	sant
5	32	10	sant
6	64	12	sant

Det ser ut til at 2^n vokser mye raskere enn $2n$, og at utsagnet er sant for $n \geq 3$.

b Vi ønsker å bevise at $2^n > 2n$ for $n \geq 3$.

Utsagnet er sant for $n = 3$. Vi antar at utsagnet er sant for et naturlig tall $n = k$, altså at

$2^k > 2k$

Vi må vise at utsagnet da også er sant for $n = k + 1$, altså at

$2^{k+1} > 2(k+1)$

Vi har

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2 \cdot 2^k \\ &> 2 \cdot 2k && \text{Vi bruker antakelsen} \\ &= 2(k+k) \\ &> 2(k+1) && \text{Sant for } k \geq 3 \end{aligned}$$

Vi har dermed bevist ved induksjon at $2^n > 2n$ er sant for alle naturlige tall $n \geq 3$.

1.34

a Utsagnet for $n = 1$ gir $3 = 1 \cdot (2 \cdot 1 + 1)$, som er sant.

Vi antar at utsagnet er sant for et naturlig tall $n = k$, altså at

$3 + 7 + 11 + \cdots + (4k - 1) = k(2k + 1)$

Vi må vise at utsagnet da også er sant for $n = k + 1$, altså at

$3 + 7 + 11 + \cdots + (4k - 1) + \big(4(k+1) - 1\big) = (k+1)\big(2(k+1) + 1\big)$

Vi summerer de $k + 1$ første leddene. Det gir

$$\begin{aligned} 3 + 7 + 11 + \cdots + (4k-1) + \big(4(k+1) - 1\big) &= k(2k+1) + \big(4(k+1) - 1\big) && \text{Vi bruker antakelsen.} \\ &= 2k^2 + k + 4k + 4 - 1 \\ &= 2k^2 + 5k + 3 \\ &= (k+1)(2k+3) && \text{Vi faktoriserer.} \\ &= (k+1)\big(2(k+1) + 1\big) \end{aligned}$$

Vi har nå vist at utsagnet er sant for $n = k + 1$ under antakelsen at det er sant for $n = k$.

Vi har dermed bevist ved induksjon at utsagnet er sant for alle naturlige tall n.

b Utsagnet for $n = 1$ gir $1^2 - 1 = 0$, som er delelig med 2.

Vi antar at utsagnet er sant for et naturlig tall $n = k$, altså at

$k^2 - k$ er delelig med 2.

Vi må vise at utsagnet da også er sant for $n = k + 1$, altså at

$(k+1)^2 - (k+1)$ er delelig med 2.

Vi omformer. Det gir

$$\begin{aligned} (k+1)^2 - (k+1) &= k^2 + 2k + 1 - k - 1 \\ &= (k^2 - k) + 2k \end{aligned}$$

Fra induksjonsantakelsen er det første uttrykket $k^2 - k$ delelig med 2. Videre ser vi at det andre uttrykket $2k$ også må være delelig med 2 fordi det er en heltallsfaktorisering med faktoren 2. Vi har nå vist at utsagnet er sant for $n = k + 1$ under antakelsen at det er sant for $n = k$.

Vi har dermed bevist ved induksjon at utsagnet er sant for alle naturlige tall n.

1.35
Vi beviser utsagnet ved induksjon.

Utsagnet for n = 1 gir $1=\dfrac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot1+1)}{6}$, som er sant fordi $\dfrac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot1+1)}{6}=\dfrac{1\cdot2\cdot3}{6}=\dfrac{6}{6}=1$.

Vi antar at utsagnet er sant for et naturlig tall n = k, altså at

$$1+4+9+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Vi må vise at utsagnet da også er sant for n = k + 1, altså at

$$1+4+9+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)\big((k+1)+1\big)\big(2(k+1)+1\big)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Vi summerer de k +1 første leddene. Det gir

$$\begin{aligned}
1+4+9+\cdots+k^2+(k+1)^2&=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2 && \text{Vi bruker antakelsen.}\\
&=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\frac{6(k+1)^2}{6}\\
&=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}\\
&=\frac{(k+1)\big(k(2k+1)+6(k+1)\big)}{6} && \text{Vi faktoriserer ut } k+1.\\
&=\frac{(k+1)\left(2k^2+k+6k+6\right)}{6}\\
&=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} && \text{Vi faktoriserer ut } k+2.
\end{aligned}$$

Vi har nå vist at utsagnet er sant for n = k + 1 under antakelsen at det er sant for n = k.
Vi har dermed bevist ved induksjon at utsagnet er sant for alle naturlige tall n.

1.36
Vi beviser utsagnet ved induksjon.

Utsagnet for n = 1 gir $\dfrac{1}{2}=2-\dfrac{1+2}{2^1}$, som er sant fordi $2-\dfrac{1+2}{2^1}=2-\dfrac{3}{2}=\dfrac{4}{2}-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$.

Vi antar at utsagnet er sant for et naturlig tall n = k, altså at

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{k}{2^k}=2-\frac{k+2}{2^k}$$

Vi må vise at utsagnet da også er sant for n = k + 1, altså at

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{k}{2^k}+\frac{k+1}{2^{k+1}}=2-\frac{(k+1)+2}{2^{k+1}}=2-\frac{k+3}{2^{k+1}}$$

Vi summerer de k +1 første leddene. Det gir

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{k}{2^k}+\frac{k+1}{2^{k+1}}=\left(2-\frac{k+2}{2^k}\right)+\frac{k+1}{2^{k+1}}$$ Vi bruker antakelsen.

$$\begin{aligned}
&=2-\frac{k+2}{2^k}+\frac{k+1}{2^{k+1}}\\
&=2-\frac{2(k+2)}{2\cdot 2^k}+\frac{k+1}{2^{k+1}}\\
&=2-\frac{2(k+2)}{2^{k+1}}+\frac{k+1}{2^{k+1}}\\
&=2-\frac{2(k+2)-(k+1)}{2^{k+1}}\\
&=2-\frac{k+3}{2^{k+1}}
\end{aligned}$$

Vi har nå vist at utsagnet er sant for $n = k + 1$ under antakelsen at det er sant for $n = k$.

Vi har dermed bevist ved induksjon at utsagnet er sant for alle naturlige tall n.

1.37

Vi sjekker formelen for $n = 1$:

$a_1 = 2^1 - 1 = 1$, som stemmer.

Vi antar at formelen gjelder for et naturlig tall k, det vil si

$a_k = 2^k - 1$. Vi må vise at vi da har $a_{k+1} = 2^{k+1} - 1$.

Vi bruker den rekursive formelen og får

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= 2a_k + 1\\
&= 2\left(2^k - 1\right) + 1 \qquad \text{Vi bruker antakelsen.}\\
&= \left(2^k\cdot 2 - 1\cdot 2\right) + 1\\
&= 2^{k+1} - 1
\end{aligned}$$

Vi har dermed bevist ved induksjon at formelen gjelder for alle naturlige tall.

1.38

Vi beviser utsagnet ved induksjon.

Utsagnet for $n = 1$ gir $\frac{1}{3}=\frac{1}{2\cdot 1+1}$, som er sant.

Vi antar at utsagnet er sant for et naturlig tall $n = k$, altså at

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$$

Vi må vise at da er utsagnet også sant for $n = k + 1$, altså at

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$$

Vi summerer de $k+1$ første leddene. Det gir

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$ Vi bruker antakelsen.

$$=\frac{k(2k+3)}{(2k+1)(2k+3)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}$$ Vi faktoriserer.

$$=\frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$$ Vi forkorter, $k\neq\frac{1}{2}$.

$$=\frac{k+1}{2k+3}$$

Vi har nå vist at utsagnet er sant for $n = k + 1$ under antakelsen at det er sant for $n = k$.
Vi har dermed bevist ved induksjon at utsagnet er sant for alle naturlige tall n.

1.39

a $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$

$\sum_{i=0}^{1} 2^i = 2^0 + 2^1 = 1+2 = 3$

$\sum_{i=0}^{2} 2^i = 2^0 + 2^1 + 2^2 = 1+2+4 = 7$

$\sum_{i=0}^{3} 2^i = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 1+2+4+8 = 15$

Vi ser at alle leddene er én mindre enn toerpotenser. Vi får $s_n = 2^{n+1} - 1, n \geq 0$.

b Utsagnet for $n = 0$ gir $1 = 2^{0+1} - 1$, som er sant.
Vi antar at utsagnet er sant for et naturlig tall $n = k$, altså at

$1+2+2^2+\cdots+2^k = 2^{k+1}-1$

Vi må vise at utsagnet også er sant for $n = k + 1$, altså at

$1+2+2^2+\cdots+2^k+2^{k+1} = 2^{k+2}-1$

Vi summerer de $k + 1$ første leddene. Det gir

$$1+2+2^2+\cdots+2^k+2^{k+1}=(2^{k+1}-1)+2^{k+1}$$ Vi bruker antakelsen.

$$=2\cdot 2^{k+1}-1$$

$$=2^{k+2}-1$$

Vi har nå vist at utsagnet er sant for $n = k + 1$ under antakelsen at det er sant for $n = k$.
Vi har dermed bevist ved induksjon at utsagnet er sant for alle heltall $n \geq 0$.

1.40
Vi gjør antakelsen som står i oppgaven.
Vi har

$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots+k+(k+1)&=\left(\frac{k(k+1)}{2}+1\right)+(k+1) && \text{Vi bruker antakelsen.}\\&=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2}+1\\&=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}+1\\&=\frac{k^2+k+2k+2}{2}+1\\&=\frac{k^2+3k+2}{2}+1\\&=\frac{(k+1)(k+2)}{2}+1 && \text{Vi faktoriserer.}\end{aligned}$$

Ved å bruke antakelsen og vise at $1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}+1$, har vi gjort det ene av de to stegene i et induksjonsbevis. Men for at et induksjonsbevis skal være fullstendig, må vi også vise at utsagnet stemmer for n = 1 (det første naturlige tallet). Prøver vi med n = 1 her, får vi $1=\frac{1\cdot(1+1)}{2}+1=\frac{2}{2}+1=2$, som ikke stemmer.
Vi kan dermed ikke konkludere med at utsagnet stemmer for alle naturlige tall n.

1.41

a $f_1, f_2, \dots, f_{12} = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144$

b Det kan se ut til at hvert tredje fibonaccitall er et partall, mens de andre fibonaccitallene er oddetall. Vi vil vise at f_{3n-2} og f_{3n-1} er oddetall og f_{3n} er partall for alle naturlige tall n.

Vi ser først at f_1 og f_2 er oddetall, mens f_3 er et partall, så utsagnet er sant for n = 1. Vi antar at fibonaccitall f_{3k} er et partall, mens f_{3k-1} og f_{3k-2} er oddetall for et naturlig tall k. Vi må vise at da er f_{3k+1} og f_{3k+2} oddetall, mens f_{3k+3} er et partall.

$f_{3k+1}=f_{3k-1}+f_{3k}=\text{oddetall}+\text{partall}=\text{oddetall}$

$f_{3k+2}=f_{3k}+f_{3k+1}=\text{partall}+\text{oddetall}=\text{oddetall}$

$f_{3k+3}=f_{3k+1}+f_{3k+2}=\text{oddetall}+\text{oddetall}=\text{partall}$

Vi har nå ved induksjon bevist at hvert tredje fibonaccitall er et partall.

1.42

a Rekka er aritmetisk med en differanse på –0,5, fordi vi finner neste ledd ved å trekke fra 0,5 (ev. legge til –0,5) til det foregående leddet.

b Rekka er aritmetisk med en differanse på 0, fordi vi finner neste ledd ved å legge til 0.

c Rekka er ikke aritmetisk, fordi differansen mellom leddene endrer seg.

$a_2-a_1=\pi-(-2\pi)=3\pi$

$a_3-a_2=2\pi-\pi=\pi$

d Vi sjekker differansen mellom to etterfølgende ledd:

$$a_2 - a_1 = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{3}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$a_3 - a_2 = -\frac{7}{3} - (-1) = -\frac{7}{3} + \frac{3}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$a_4 - a_3 = -\frac{11}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right) = -\frac{11}{3} + \frac{7}{3} = -\frac{4}{3}$$

Rekka er aritmetisk med en differanse på $-\frac{4}{3}$.

1.43

a 10 + 14 + 18 + 22 + 26

b a_1 må være 10 – 4 = 6.

6 + 10 + 14 + 18 + 22

c 10 + 6 + 2 – 2 – 6

d a_1 må være 8 – 3 – 3 = 2.

2 + 5 + 8 + 11 + 14

1.44

a $a_1 = 7$ og $d = 3$

Formel: $a_n = 7 + (n-1) \cdot 3 = 7 + 3n - 3 = 3n + 4$

b Vi ser at $a_1 = 33$ og $d = 26 - 33 = -7$.

Formel: $a_n = 33 + (n-1) \cdot (-7) = 33 - 7n + 7 = -7n + 40$

c Vi ser at $a_1 = 1$ og $d = 3 - 1 = 2$.

Formel: $a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$

d Vi finner a_1 ved å bruke formelen $a_n = a_1 + (n-1)d$.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_5 = a_1 + (5-1)d$$

$$7 = a_1 + 4 \cdot (-1)$$

$$7 = a_1 - 4$$

$$11 = a_1$$

Formel: $a_n = 11 + (n-1) \cdot (-1) = 11 - n + 1 = -n + 12$

1.45

a $a_1 = 3 + 1 = 4$

Fra formelen ser vi at vi legger til 1 for hvert ledd, så differansen er 1.

Dette er den aritmetiske rekka med $a_1 = 4$ og $d = 1$.

b $b_1 = 5 - 1 = 4$

Fra formelen ser vi at vi trekker fra 1 for hvert ledd, så differansen er –1.

Dette er den aritmetiske rekka med $b_1 = 4$ og $d = -1$.

c $c_1 = 12 - 4(1+1) = 12 - 4 \cdot 2 = 12 - 8 = 4$

Fra formelen ser vi at vi trekker fra 4 for hvert ledd, så differansen er –4.

Dette er den aritmetiske rekka med $c_1 = 4$ og $d = -4$.

d $d_1 = 4 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 4 + \frac{1}{2} = \frac{8}{2} + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$

Fra formelen ser vi at vi legger til en halv for hvert ledd, så differansen er $\frac{1}{2}$.

Dette er den aritmetiske rekka med $d_1 = \frac{9}{2}$ og $d = \frac{1}{2}$.

1.46

a Vi finner først differansen.

$d = a_6 - a_5 = 32 - 27 = 5$

For å finne a_1 bruker vi at $a_5 = a_1 + 4d$ og får

$$\begin{aligned} a_5 &= a_1 + 4d \\ 27 &= a_1 + 4 \cdot 5 \\ a_1 &= 27 - 20 \\ a_1 &= 7 \end{aligned}$$

Det gir

$a_n = 7 + (n-1) \cdot 5 = 7 + 5n - 5 = 2 + 5n$

De fem første leddene blir 7 + 12 + 17 + 22 + 27.

b Vi finner først differansen.

$$\begin{aligned} a_{59} &= a_{51} + 8d \\ 1003 &= 843 + 8d \\ 1003 - 843 &= 8d \\ 8d &= 160 \\ d &= 20 \end{aligned}$$

For å finne a_1 bruker vi at $a_{51} = a_1 + 50d$ og får

$$\begin{aligned} a_{51} &= a_1 + 50d \\ 843 &= a_1 + 50 \cdot 20 \\ a_1 &= 843 - 1000 \\ a_1 &= -157 \end{aligned}$$

Det gir

$a_n = -157 + (n-1) \cdot 20 = -157 + 20n - 20 = 20n - 177$

De fem første leddene blir –157 – 137 – 117 – 97 – 77.

1.47

a Så lenge uttrykket for a_n er lineært, så er rekka aritmetisk. Fra formelen ser vi at vi trekker fra 3 for hvert ledd. Rekka er derfor aritmetisk med en differanse på -3.

b Vi finner det neste leddet ved å legge til $\frac{1}{2}$ hver gang. Rekka er derfor aritmetisk med en differanse på $\frac{1}{2}$.

c Rekka er ikke aritmetisk fordi det vi legger til neste ledd varierer.

1.48

a Det første leddet i rekka er $a_1 = 2$, det siste leddet er $a_8 = 16$, og antall ledd er 8. Det gir

$$s_8 = \frac{2+16}{2} \cdot 8 = 9 \cdot 8 = 72$$

b Det første leddet i rekka er $a_1 = 1$, det siste leddet er $a_8 = 15$, og antall ledd er 8. Det gir

$$s_8 = \frac{1+15}{2} \cdot 8 = 8 \cdot 8 = 64$$

c Det første leddet i rekka er $a_1 = 4$. Hadde rekka startet med 1 + 2 + 3 + 4 + …, ville 66 vært ledd nummer 66. Men siden vi «mangler» 1 + 2 + 3, er 66 ledd nummer 66 – 3 = 63, så det er 63 ledd. Det gir

$$s_{63} = \frac{4+66}{2} \cdot 63 = 35 \cdot 63 = 2205$$

d Det første leddet i rekka er $a_1 = \frac{1}{2}$, og differansen er $d = \frac{1}{2}$. Vi vet ikke hva n er.

Vi finner et uttrykk for a_n og bruker det til å finne ut hvilket ledd $\frac{25}{2}$ er.

$$a_n = \frac{1}{2} + (n-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{25}{2} \\ \frac{1}{2}n &= \frac{25}{2} \\ n &= 25 \end{aligned}$$

Vi kan også skrive alle leddene som brøker og se på tellerne. De er 1, 2, 3, 4, …, 25, og dermed er det 25 ledd.

Det gir

$$s_{25} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{25}{2}}{2} \cdot 25 = \frac{13}{2} \cdot 25 = \frac{325}{2}$$

1.49

a $s_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{1+100}{2} \cdot 10 = 101 \cdot 5 = 505$

b $a_{10} = a_1 + 9d = 3 + 9 \cdot 4 = 39$.

$$s_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{3+39}{2} \cdot 10 = 21 \cdot 10 = 210$$

c $d = a_3 - a_2 = 0 - (-2) = 2$. Det gir $a_1 = a_2 - d = -2 - 2 = -4$ og $a_{10} = a_2 + 8d = -2 + 8 \cdot 2 = -2 + 16 = 14$.

$$s_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{-4 + 14}{2} \cdot 10 = 5 \cdot 10 = 50$$

d Vi ser at alle ledd er 5.

$$s_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{5 + 5}{2} \cdot 10 = 5 \cdot 10 = 50$$

1.50

a

```
a = 3
d = 6
sum_rekke = 0

while a <= 69:
    sum_rekke = sum_rekke + a
    a = a + d

print(sum_rekke)
```

Kjøring av programmet gir at summen er 432.

b

```
a = 7
d = -3
sum_rekke = 0

while a >= -20:
    sum_rekke = sum_rekke + a
    a = a + d

print(sum_rekke)
```

Kjøring av programmet gir at summen er –65.

1.51

a Rekka er geometrisk med kvotient $k = \frac{1}{2}$, fordi vi finner neste ledd ved å multiplisere det foregående leddet med $\frac{1}{2}$.

b Rekka er geometrisk med kvotient $k = 1$, fordi vi finner neste ledd ved å multiplisere det foregående leddet med 1.

c Rekka er ikke geometrisk, fordi den ikke har en fast kvotient. $\frac{\pi}{-2\pi} \neq \frac{2\pi}{\pi}$.

d Rekka er geometrisk med kvotient $k = -\frac{2}{3}$, fordi $k = \frac{-54}{81} = \frac{36}{-54} = \frac{-24}{36} = -\frac{2}{3}$.

1.52

a 10 + 20 + 40 + 80 + 160

b a_1 må være $\frac{a_2}{k} = \frac{10}{2} = 5$.

5 + 10 + 20 + 40 + 80

c $1000 - 500 + 250 - 125 + \frac{125}{2}$

d Vi regner først ut k.

$$k = \frac{a_3}{a_2} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

Vi finner a_1 , a_4 og a_5.

$$a_1 = \frac{a_2}{k} = \frac{6}{\frac{3}{2}} = 6 \cdot \frac{2}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

$$a_4 = a_3 \cdot k = 9 \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{2}$$

$$a_5 = a_4 \cdot k = \frac{27}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{81}{4}$$

De fem første leddene er $4 + 6 + 9 + \frac{27}{2} + \frac{81}{4}$.

1.53

a $a_n = a_1 \cdot k^{n-1} = 7 \cdot 2^{n-1}$

b $a_1 = 625, k = \frac{-125}{625} = -\frac{1}{5}$

$$a_n = a_1 \cdot k^{n-1} = 625 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

c Vi kan se fra a_2 og a_3 at $k = \frac{4}{3}$.

$$a_n = a_1 \cdot k^{n-1} = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

d $a_1 = \frac{a_4}{k^3} = \frac{-80}{(-2)^3} = \frac{-80}{-8} = 10$

$$a_n = a_1 \cdot k^{n-1} = 10 \cdot (-2)^{n-1}$$

1.54

a Vi finner først k**.**

$$a_4 \cdot k = a_5$$

$$k = \frac{a_5}{a_4}$$

$$k = \frac{405}{270}$$

$$k = \frac{3}{2}$$

Vi finner a_1.

$$a_1 = \frac{a_4}{k^3} = \frac{270}{\left(\frac{3}{2}\right)^3} = \frac{270}{\frac{27}{8}} = 270 \cdot \frac{8}{27} = 80$$

$$a_n = a_1 \cdot k^{n-1} = 80 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_2 = 80 \cdot \frac{3}{2} = 120, \quad a_3 = 120 \cdot \frac{3}{2} = 180$$

De fem første leddene blir derfor 80 + 120 + 180 + 270 + 405.

b Vi finner først k.

$$a_3 \cdot k^2 = a_5$$
$$k^2 = \frac{a_5}{a_3}$$
$$k = \sqrt{\frac{a_5}{a_3}}$$
$$k = \sqrt{\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}}}$$
$$k = \sqrt{\frac{4}{16}}$$
$$k = \sqrt{\frac{1}{4}}$$
$$k = \pm\frac{1}{2}$$

Vi finner a_1.

$$a_1 = \frac{a_3}{k^2} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 1$$

$$a_n = a_1 \cdot k^{n-1} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \vee \quad a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Det er altså to mulige løsninger når vi skal liste opp de fem første leddene:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \text{ og } 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

c Differansen mellom indeksen er 6 – 2 = 4. Dette er et partall, så k kan ha positivt eller negativt fortegn.

$$a_n = a_1 \cdot k^{n-1} = 3 \cdot (-1)^{n-1} \quad \vee \quad a_n = 3$$

De fem første leddene blir derfor enten 3 – 3 + 3 – 3 + 3 eller 3 + 3 + 3 + 3 + 3.

1.55

a Vi finner først a_1 og k ved hjelp av CAS i GeoGebra.

1	$a(n) := a1 \cdot k^{n-1}$ $\rightarrow$ $\mathbf{a(n) := a1\ k^{n-1}}$
2	$a(2) = 91$ $\rightarrow$ $\mathbf{a1\ k = 91}$
3	$a(7) = 1529437$ $\rightarrow$ $\mathbf{a1\ k^6 = 1529437}$
4	$\{\$2, \$3\}$ Løs: $\mathbf{\{\{a1 = 13, k = 7\}\}}$

$a_n = 13 \cdot 7^{n-1}$

b Vi finner først a_1 og k ved hjelp av CAS i GeoGebra.

5	$a(6) = 2673$ $\rightarrow$ $\mathbf{a1\ k^5 = 2673}$
6	$a(16) = 157837977$ $\rightarrow$ $\mathbf{a1\ k^{15} = 157837977}$
7	$\{\$5, \$6\}$ Løs: $\mathbf{\{\{a1 = -11, k = -3\}, \{a1 = 11, k = 3\}\}}$

Vi ser det er to mulige løsninger: $a_n = (-11) \cdot (-3)^{n-1} \quad \vee \quad a_n = 11 \cdot 3^{n-1}$

1.56

a Vi ser at $a_1 = 2$, $k = 2$ og $n = 8$.

$$s_8 = a_1 \frac{k^8 - 1}{k - 1} = 2 \cdot \frac{2^8 - 1}{2 - 1} = 2 \cdot \frac{256 - 1}{1} = 2 \cdot 255 = 510$$

b Vi ser at $a_1 = 2$, $k = -4$ og $n = 6$.

$$s_6 = a_1 \frac{k^6 - 1}{k - 1} = 2 \cdot \frac{(-4)^6 - 1}{(-4) - 1} = 2 \cdot \frac{4096 - 1}{-5} = 2 \cdot \frac{4095}{-5} = 2 \cdot (-819) = -1638$$

1.57

a $$s_{10} = a_1 \frac{k^{10} - 1}{k - 1} = 1 \cdot \frac{5^{10} - 1}{5 - 1} = \frac{9\,765\,625 - 1}{4} = \frac{9\,765\,624}{4} = 2\,441\,406$$

b $$s_{10} = a_1 \frac{k^{10} - 1}{k - 1} = 3 \cdot \frac{(-7)^{10} - 1}{(-7) - 1} = 3 \cdot \frac{282\,475\,249 - 1}{-8} = 3 \cdot \frac{282\,475\,248}{-8}$$
$$= 3 \cdot (-35\,309\,406) = -105\,928\,218$$

c Vi finner først a_1 og k.

$$a_2 \cdot k^3 = a_5$$
$$k^3 = \frac{a_5}{a_2}$$
$$k = \sqrt[3]{\frac{a_5}{a_2}}$$
$$k = \sqrt[3]{\frac{-96}{12}}$$
$$k = \sqrt[3]{-8}$$
$$k = -2$$
$$a_1 = \frac{a_2}{k} = \frac{12}{-2} = -6$$
$$s_{10} = a_1 \frac{k^{10} - 1}{k - 1} = -6 \cdot \frac{(-2)^{10} - 1}{(-2) - 1} = -6 \cdot \frac{1024 - 1}{-3} = -6 \cdot \frac{1023}{-3} = 2 \cdot 1023 = 2046$$

d Vi ser at dette er den geometriske rekka der alle leddene er 5. Summen av de to første leddene blir da $s_{10} = 5 \cdot 10 = 50$.

1.58

a
```
antall_ledd = 10
a1 = 3.2
k = 0.7
sum_rekke = 0

for n in range(antall_ledd):
    sum_rekke = sum_rekke + a1*k**n

print(sum_rekke)
```

Kjøring av programmet gir at $s_{10} = 10{,}37$.

b
```
antall_ledd = 10
a1 = -5
k = 7
sum_rekke = 0

for n in range(antall_ledd):
    sum_rekke = sum_rekke + a1*k**n

print(sum_rekke)
```

Kjøring av programmet gir at $s_{10} = -235\,396\,040$.

c Vi finner først a_1 og k.

$$a_2 \cdot k^{11} = a_{13}$$
$$k^{11} = \frac{a_{13}}{a_2}$$
$$k = \sqrt[11]{\frac{a_{13}}{a_2}}$$
$$k = \sqrt[11]{\frac{69\,632}{34}}$$
$$k = \sqrt[11]{2048}$$
$$k = 2$$
$$a_1 = \frac{a_2}{k} = \frac{34}{2} = 17$$

```
antall_ledd = 10
a1 = 17
k = 2
sum_rekke = 0

for n in range(antall_ledd):
    sum_rekke = sum_rekke + a1*k**n

print(sum_rekke)
```

Kjøring av programmet gir at $s_{10} = 17\,391$.

1.59

a Vi må først finne ut hvor mange ledd det er i rekka. Vi har $a_n = 3^{n-1}$.

Så løser vi likningen $a_n = 243$.

$$a_n = 243$$
$$3^{n-1} = 243$$
$$3^{n-1} = 3^5$$
$$n - 1 = 5$$
$$n = 6$$

Det er 6 ledd i rekka.

$$s_6 = a_1 \frac{k^6 - 1}{k - 1} = 1 \cdot \frac{3^6 - 1}{3 - 1} = \frac{729 - 1}{2} = \frac{728}{2} = 364$$

Summen av rekka er 364.

b Dette er de samme leddene som i forrige deloppgave, bare i motsatt rekkefølge og med leddet 729 i tillegg. Summen av rekka er derfor 364 + 729 = 1093.

c Vi må først finne ut hvor mange ledd det er i rekka.

Vi løser likningen $a_n = \frac{1}{16}$, der $a_n = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{16} \\
64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} &= \frac{1}{16} \\
2^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} &= \frac{1}{2^4} \\
\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} &= \frac{1}{2^4 \cdot 2^6} \\
\frac{1}{2^{n-1}} &= \frac{1}{2^{10}} \\
n-1 &= 10 \\
n &= 11
\end{aligned}$$

Det er 11 ledd i rekka.

$$s_{10} = a_1 \frac{k^{11}-1}{k-1} = 64 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{11}-1}{\frac{1}{2}-1} = \frac{2047}{16}$$

Summen av rekka er $\frac{2047}{16}$.

d Fra eksponentene på π kan vi se at det er 17 ledd i rekka.

$$s_{17} = a_1 \frac{k^{17}-1}{k-1} = 10 \cdot \frac{\pi^{17}-1}{\pi-1} \approx 1{,}32 \cdot 10^9$$

Summen av rekka er omtrent 1,32 milliarder.

1.60

Vi må først finne ut hvor mange ledd det er i rekka. Vi ser at $a_1 = 19$ og at $k = 3$. Det gir $a_n = 19 \cdot 3^{n-1}$.

Så løser vi likningen $a_n = 2\,453\,663\,097$.

$$\begin{aligned}
a_n &= 2\,453\,663\,097 \\
19 \cdot 3^{n-1} &= 2\,453\,663\,097 \\
3^{n-1} &= \frac{2\,453\,663\,097}{19} \\
3^{n-1} &= 129\,140\,163 \\
n-1 &= \frac{\ln(129\,140\,163)}{\ln 3} \\
n-1 &= 17 \\
n &= 18
\end{aligned}$$

Det er 18 ledd i rekka.

$$s_{18} = a_1 \frac{k^{18}-1}{k-1} = 19 \cdot \frac{3^{18}-1}{3-1} = 3\,680\,494\,636$$

Summen av rekka er 3 680 494 636.

1.61

a

```
n = 0
a1 = 1
k = 3
sum_rekke = 0

while sum_rekke < 1000:
    sum_rekke = sum_rekke + a1*k**n
    n = n + 1

print("Vi må ha minst", n, "ledd.")
```

Utskriften blir

```
Vi må ha minst 7 ledd.
```

b

```
n = 0
a1 = 300
k = 240/300
sum_rekke = 0

while sum_rekke < 1000:
    sum_rekke = sum_rekke + a1*k**n
    n = n + 1

print("Vi må ha minst", n, "ledd.")
```

Utskriften blir

```
Vi må ha minst 5 ledd.
```

1.62

a Rekka er geometrisk med kvotient $k = 2$, fordi vi finner neste ledd ved å multiplisere det foregående leddet med 2.

b Rekka er aritmetisk med en differanse på –3, fordi vi finner neste ledd ved å trekke 3 fra det foregående leddet.

c Rekka er verken aritmetisk eller geometrisk. Det er ingen fast differanse fordi $4\pi^2 - 2\pi \neq 6\pi^3 - 4\pi^2$. Det er ingen fast kvotient fordi $\frac{4\pi^2}{2\pi} \neq \frac{6\pi^3}{4\pi^2}$.

d Rekka er både aritmetisk og geometrisk. Den er aritmetisk med differanse $d = 0$, og geometrisk med kvotient $k = 1$.

1.63

a Vi må finne ut hvilket nummer i rekka 34 er. Da trenger vi et uttrykk for a_n. Rekka er aritmetisk med $a_1 = 4$ og $d = 3$. Da får vi $a_n = 4 + (n-1) \cdot 3 = 4 + 3n - 3 = 3n + 1$.

Vi løser likningen $a_n = 34$.

$$\begin{aligned} a_n &= 34 \\ 3n+1 &= 34 \\ 3n &= 34 \\ n &= \frac{33}{3} \\ n &= 11 \end{aligned}$$

34 er ledd nummer 11 i rekka.

$$s_{11} = \frac{a_1 + a_{11}}{2} \cdot 11 = \frac{4+34}{2} \cdot 11 = \frac{38}{2} \cdot 11 = 19 \cdot 11 = 209$$

b Vi må finne ut hvilket nummer i rekka –99 er. Da trenger vi et uttrykk for a_n. Rekka er aritmetisk med $a_1 = 1$ og $d = -2$. Da får vi $a_n = 1 + (n-1) \cdot (-2) = 1 - 2n + 2 = -2n + 3$.

Så løser vi likningen $a_n = -99$.

$$\begin{aligned} a_n &= -99 \\ -2n+3 &= -99 \\ -2n &= -102 \\ n &= 51 \end{aligned}$$

–99 er ledd nummer 51 i rekka.

$$s_{51} = \frac{a_1 + a_{51}}{2} \cdot 51 = \frac{1-99}{2} \cdot 51 = \frac{-98}{2} \cdot 51 = (-49) \cdot 51 = -2499$$

Summen av rekka er –2499.

c Vi må finne ut hvilket nummer i rekka –32 er. Da trenger vi et uttrykk for a_n. Rekka er aritmetisk med $a_1 = 4$ og $d = -3$. Da får vi $a_n = 4 + (n-1) \cdot (-3) = 4 - 3n + 3 = -3n + 7$.

Så løser vi likningen $a_n = -32$.

$$\begin{aligned} a_n &= -32 \\ -3n+7 &= -32 \\ -3n &= -39 \\ n &= 13 \end{aligned}$$

–32 er ledd nummer 13 i rekka.

$$s_{13} = \frac{a_1 + a_{13}}{2} \cdot 13 = \frac{4-32}{2} \cdot 13 = \frac{-28}{2} \cdot 13 = (-14) \cdot 13 = -182$$

Summen av rekka er –182.

d Vi må finne ut hvilket nummer i rekka $30a$ er. Da trenger vi et uttrykk for a_n. Rekka er aritmetisk med $a_1 = 3a$ og $d = 3a$. Vi kan se at en formel for a_n er $a_n = 3a \cdot n$.

Så løser vi likningen $a_n = 30a$.

$$\begin{aligned} a_n &= 30a \\ 3a \cdot n &= 30a \\ n &= \frac{30a}{3a} \\ n &= 10 \end{aligned}$$

$30a$ er ledd nummer 10 i rekka.

$$s_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{3a + 30a}{2} \cdot 10 = \frac{33a}{2} \cdot 10 = 33a \cdot 5 = 165a$$

Summen av rekka er $165a$.

1.64

a $a_n = a_1 \cdot k^{n-1} = 8 \cdot 3^{n-1}$

$a_{25} = 8 \cdot 3^{25-1} = 8 \cdot 3^{24} = 2\,259\,436\,291\,848$

b Vi må først finne a_1.

$a_1 = \frac{a_4}{k^3} = \frac{100}{(-2)^3} = \frac{100}{-8} = -\frac{25}{2}$

$a_n = a_1 \cdot k^{n-1} = -\frac{25}{2} \cdot (-2)^{n-1}$

$a_{25} = -\frac{25}{2} \cdot (-2)^{25-1} = -\frac{25}{2} \cdot (-2)^{24} = -209\,715\,200$

c Vi må først finne k.

$k^4 = \frac{a_5}{a_1}$

$k^4 = \frac{25}{125}$

$k^4 = \frac{1}{5}$

$k^4 = 5^{-1}$

$k = \pm\sqrt[4]{5^{-1}}$

$k = \pm 5^{-\frac{1}{4}}$

Det er to mulige k. Vi får da to mulige uttrykk for a_n.

$a_n = a_1 \cdot k^{n-1} = 125 \cdot \left(5^{-\frac{1}{4}}\right)^{n-1} = 125 \cdot 5^{\frac{1-n}{4}}$ og $a_n = 125 \cdot \left(-5^{-\frac{1}{4}}\right)^{n-1}$

$a_{25} = 125 \cdot 5^{\frac{1-25}{4}} = 125 \cdot 5^{\frac{-24}{4}} = 5^3 \cdot 5^{-6} = 5^{-3} = \frac{1}{125}$

og

$a_{25} = 125 \cdot \left(-5^{-\frac{1}{4}}\right)^{24} = 125 \cdot \left(5^{-\frac{1}{4}}\right)^{24} = 5^3 \cdot 5^{-6} = \frac{1}{125}$

Vi fikk to mulige uttrykk for a_n, men i begge tilfeller ble $a_{25} = \frac{1}{125}$.

1.65

Vi finner differansen først.

$a_4 = a_1 + 3d$

$3d = a_4 - a_1$

$3d = 22 - 4$

$3d = 18$

$d = 6$

Så trenger vi å finne a_{10}.

$a_{10} = a_4 + 6d$

$a_{10} = 22 + 6 \cdot 6$

$a_{10} = 22 + 36$

$a_{10} = 58$

Så finner vi til slutt summen.

$s_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{4+58}{2} \cdot 10 = 31 \cdot 10 = 310$

Summen av de ti første leddene er 310.

1.66

a Vi sjekker formelen for $n = 1$:

$a_1 = a_1 + (1-1)d$, som stemmer fordi $(1 - 1)d = 0$.

Vi antar at formelen gjelder for et naturlig tall k, det vil si

$a_k = a_1 + (k-1)d$. Vi må vise at vi da har $a_{k+1} = a_1 + \left((k+1)-1\right)d = a_1 + kd$.

Vi bruker den rekursive formelen og får

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + d \\ &= \left(a_1 + (k-1)d\right) + d \qquad \text{Vi bruker antakelsen} \\ &= a_1 + (k-1)d + d \\ &= a_1 + kd - d + d \\ &= a_1 + kd \end{aligned}$$

Vi har dermed bevist ved induksjon at formelen gjelder for alle naturlige tall.

b Vi sjekker formelen for $n = 1$:

$a_1 = a_1 k^{1-1}$, som stemmer fordi $k^{1-1} = k^0 = 1$.

Vi antar at formelen gjelder for et naturlig tall m, det vil si

$a_m = a_1 k^{m-1}$. Vi må vise at vi da har $a_{m+1} = a_1 k^{(m+1)-1} = a_1 k^m$.

Vi bruker den rekursive formelen og får

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= a_m k \\ &= a_1 k^{m-1} \cdot k \qquad \text{Vi bruker antakelsen} \\ &= a_1 k^m \end{aligned}$$

Vi har dermed bevist ved induksjon at formelen gjelder for alle naturlige tall.

1.67

Vi lager et likningssystem for å finne k.

På grunn av egenskapene til en geometrisk rekke er $a_5 = a_4 \cdot k$.

Fra oppgaven vet vi at $a_4 + a_5 = 3$.

Fra likningen $a_9 + a_{10} = 9375$ vet vi at $a_4 \cdot k^5 + a_5 \cdot k^5 = 9375$.

Vi putter disse tre likningene med ukjente inn i CAS og får

1	a5 = a4 k → **a5 = a4 k**
2	a4 + a5 = 3 → **a4 + a5 = 3**
3	a4 k^5 + a5 k^5 = 9375 ≈ **a4 k^5 + a5 k^5 = 9375**
4	{\$1, \$2, \$3} Løs: $\left\{\left\{\mathbf{a4 = \frac{1}{2}, a5 = \frac{5}{2}, k = 5}\right\}\right\}$

Da har vi også alt vi trenger for å finne a_1.

$$a_1 = \frac{a_4}{k^3} = \frac{\frac{1}{2}}{5^3} = \frac{\frac{1}{2}}{125} = \frac{1}{250}$$

Da har vi alt vi trenger for å finne et uttrykk for s_n.

$$s_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} = \frac{1}{250} \cdot \frac{5^n - 1}{5 - 1} = \frac{1}{250} \cdot \frac{5^n - 1}{4} = \frac{5^n - 1}{1000}$$

For å skrive summen med summasjonstegnet trenger vi et uttrykk for a_n.

$$a_n = a_1 \cdot k^{n-1} = \frac{1}{250} \cdot 5^{n-1} = \frac{5^{n-1}}{250}$$

Det gir

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{5^{i-1}}{250}$$

1.68

Vi sjekker formelen for $n = 1$:

Venstre side $s_1 = \sum_{i=1}^{1} a_1 k^{i-1} = a_1 k^{1-1} = a_1 k^0 = a_1$, som stemmer fordi høyre side $a_1 \frac{k^1 - 1}{k - 1} = a_1$.

Vi antar at formelen gjelder for et naturlig tall m, det vil si

$s_m = \sum_{i=1}^{m} a_1 k^{i-1} = a_1 \frac{k^m - 1}{k - 1}$. Vi må vise at vi da har $s_{m+1} = \sum_{i=1}^{m+1} a_1 k^{i-1} = a_1 \frac{k^{m+1} - 1}{k - 1}$.

Vi begynner med å skrive summasjonsformelen slik:

$$s_{m+1} = \sum_{i=1}^{m+1} a_1 k^{i-1} = \sum_{i=1}^{m} a_1 k^{i-1} + a_1 k^{(m+1)-1} = \sum_{i=1}^{m} a_1 k^{i-1} + a_1 k^m = s_m + a_1 k^m$$

Vi får

$$\begin{aligned}
s_{m+1} &= s_m + a_1 k^m \\
&= a_1 \frac{k^m - 1}{k-1} + a_1 k^m \qquad \text{Vi bruker antakelsen.} \\
&= a_1 \left(\frac{k^m - 1}{k-1} + k^m \right) \\
&= a_1 \left(\frac{k^m - 1}{k-1} + \frac{k^m (k-1)}{k-1} \right) \\
&= a_1 \left(\frac{k^m - 1}{k-1} + \frac{k^{m+1} - k^m}{k-1} \right) \\
&= a_1 \frac{k^m - 1 + k^{m+1} - k^m}{k-1} \\
&= a_1 \frac{k^{m+1} - 1}{k-1}
\end{aligned}$$

Vi har dermed bevist ved induksjon at formelen gjelder for alle naturlige tall.

1.69

Vi sjekker formelen for $n = 1$:

$s_1 = \frac{a_1 + a_1}{2} \cdot 1$, som stemmer fordi $\frac{a_1 + a_1}{2} \cdot 1 = a_1$.

Vi antar at formelen gjelder for et naturlig tall k, det vil si

$s_k = \frac{a_1 + a_k}{2} k$. Vi må vise at vi da har $s_{k+1} = \frac{a_1 + a_{k+1}}{2}(k+1)$.

Vi bruker den rekursive formelen og får

$$
\begin{aligned}
s_{k+1} &= s_k + a_{k+1} \\
&= \frac{a_1 + a_k}{2}k + (a_1 + kd) && \text{Vi bruker antakelsen og hint.} \\
&= \frac{k(a_1 + a_k) + 2(a_1 + kd)}{2} \\
&= \frac{ka_1 + ka_k + 2a_1 + 2kd}{2} \\
&= \frac{ka_1 + k(a_{k+1} - d) + 2a_1 + 2kd}{2} && \text{Vi bruker hint.} \\
&= \frac{ka_1 + ka_{k+1} - kd + 2a_1 + 2kd}{2} \\
&= \frac{ka_1 + ka_{k+1} + 2a_1 + kd}{2} \\
&= \frac{(k+1)a_1 + ka_{k+1} + a_1 + kd}{2} \\
&= \frac{(k+1)a_1 + ka_{k+1} + a_{k+1}}{2} \\
&= \frac{(k+1)a_1 + (k+1)a_{k+1}}{2} \\
&= \frac{a_1 + a_{k+1}}{2}(k+1)
\end{aligned}
$$

Vi har dermed bevist ved induksjon at formelen gjelder for alle naturlige tall.

1.70

I alle deloppgavene her bruker vi at $s_n = a_1\frac{k^n - 1}{k - 1} = 50 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}$. Vi legger dette inn som en funksjon av to variabler i CAS.

1 $s(k, n) := 50 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}$

$\rightarrow$ $s(k, n) := 50 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}$

a

2 $s(1.25, 10)$

$\approx$ **1662.65**

3 $s(1.25, 50)$

$\approx$ **14012784.64**

4 $s(1.25, 100)$

$\approx$ **981818692859.5**

Det ser ut til at rekka divergerer.

b

5	$s(0.75, 10)$
	$\approx$ **188.7373**
6	$s(0.75, 50)$
	$\approx$ **199.9999**
7	$s(0.75, 100)$
	$\approx$ **200**

Det ser ut som om rekka konvergerer mot 200.

c

8	$s(-0.75, 10)$
	$\approx$ **26.9625**
9	$s(-0.75, 50)$
	$\approx$ **28.5714**
10	$s(-0.75, 100)$
	$\approx$ **28.5714**

Det ser ut til at rekka konvergerer.

d

11	$s(-1.25, 10)$
	$\approx$ **−184.74**
12	$s(-1.25, 50)$
	$\approx$ **−1556976.07**
13	$s(-1.25, 100)$
	$\approx$ **−109090965873.3**

Rekka divergerer.

1.71

a Vi gjør oppgaven i CAS.

1

1 0.85^{10}

$\approx$ **0.19687**

2 0.85^{100}

$\approx$ $\mathbf{8.74767 \cdot 10^{-8}}$

2

3 0.21^{10}

$\approx$ $\mathbf{1.66799 \cdot 10^{-7}}$

4 0.21^{100}

$\approx$ $\mathbf{1.66698 \cdot 10^{-68}}$

3

5 $(-0.7)^{10}$

$\approx$ **0.02825**

6 $(-0.7)^{100}$

$\approx$ $\mathbf{3.23448 \cdot 10^{-16}}$

4

7 1.1^{10}

$\approx$ **2.59374**

8 1.1^{100}

$\approx$ **13780.61234**

b Når k er et tall mellom -1 og 1, vil $\lim\limits_{n \to \infty} k^n = 0$, men hvis k ikke er et tall mellom -1 og 1, vil $\lim\limits_{n \to \infty} k^n = \infty$.

1.72

a Den geometriske rekka konvergerer fordi $k = \frac{1}{2}$, som er mellom -1 og 1.

$$s = \frac{a_1}{1-k} = \frac{512}{1-\frac{1}{2}} = \frac{512}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 512 = 1024$$

Vi kontrollerer med CAS.

1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 512 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\approx$ **1024**

b Den geometriske rekka konvergerer ikke, fordi $k = \frac{3}{2}$, som er større enn 1.

Vi kontrollerer med CAS.

2 $\text{Sum}\left(1000 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{i}, i, 0, \text{inf}\right)$

$\approx \infty$

c Den geometriske rekka konvergerer ikke, fordi $k = -1$, ikke er *mellom* -1 og 1.

Vi kontrollerer med CAS.

3 $\text{Sum}\left(10 \cdot (-1)^{n-1}, n, 1, \text{inf}\right)$

$\approx$ **?**

d Den geometriske rekka konvergerer, fordi $k = \frac{-18}{27} = \frac{12}{-18} = -\frac{2}{3}$, som er mellom -1 og 1.

$$s = \frac{a_1}{1-k} = \frac{27}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{27}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5} \cdot 27 = \frac{81}{5}$$

Vi kontrollerer med CAS.

1 $\text{Sum}\left(27 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}, n, 1, \text{inf}\right)$

$\rightarrow \mathbf{\frac{81}{5}}$

e Den geometriske rekka konvergerer, fordi $k = \frac{\frac{1}{11}}{\frac{1}{10}} = \frac{\frac{10}{121}}{\frac{1}{11}} = \frac{10}{11}$, som er mellom –1 og 1.

$$s = \frac{a_1}{1-k} = \frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{10}{11}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{11}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{11}{1} = \frac{11}{10}$$

Vi kontrollerer med CAS.

5 $\text{Sum}\left(\frac{1}{10} \cdot \left(\frac{10}{11}\right)^{n-1}, n, 1, \text{inf}\right)$

$\approx$ **1.1**

1.73

Kvotienten $k(x) = -\frac{x}{2}$, så vi løser dobbeltulikheten $-1 < -\frac{x}{2} < 1$.

$$\begin{aligned}
-1 &< -\frac{x}{2} < 1 \\
-2 &< -x < 2 \\
2 &> \;x\; > -2 \\
-2 &< \;x\; < 2
\end{aligned}$$

Konvergensområdet er $\langle -2\,,\,2 \rangle$.

1.74

a $s(x) = \frac{a_1}{1-k} = \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x}$

b Vi løser $s(x) = 2$:

$$\begin{aligned}
s(x) &= 2 \\
\frac{1}{x} &= 2 \\
1 &= 2x \\
x &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$x = \frac{1}{2}$ er innenfor konvergensområdet og er derfor en gyldig løsning.

Vi løser $s(x) = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
s(x) &= \frac{1}{2} \\
\frac{1}{x} &= \frac{1}{2} \\
x &= 2
\end{aligned}$$

$x = 2$ er utenfor konvergensområdet og er ikke en gyldig løsning, så ingen løsning.

1.75

a Kvotienten er $k(x) = 3x - 5$.

b $\sum_{i=0}^{\infty} (3x-5)^i$

c Vi løser $-1 < 3x - 5 < 1$

$$-1 < 3x - 5 < 1$$
$$4 < 3x < 6$$
$$\frac{4}{3} < x < 2$$

Konvergensområdet er $\left\langle \frac{4}{3}, 2 \right\rangle$.

d $s(x) = \frac{a_1}{1-k} = \frac{1}{1-(3x-5)} = \frac{1}{6-3x}$

e Vi løser $s(x) = \frac{2}{3}$:

$$s(x) = \frac{2}{3}$$
$$\frac{1}{6-3x} = \frac{2}{3}$$
$$1 = \frac{2\cdot(6-3x)}{3}$$
$$1 = 2\cdot(2-x)$$
$$1 = 4-2x$$
$$2x = 3$$
$$x = \frac{3}{2}$$

$x = \frac{3}{2}$ er innenfor konvergensområdet og er derfor en gyldig løsning.

f Vi løser $s(x) = -2$:

$$s(x) = -2$$
$$\frac{1}{6-3x} = -2$$
$$1 = -2\cdot(6-3x)$$
$$1 = -12+6x$$
$$6x = 13$$
$$x = \frac{13}{6}$$

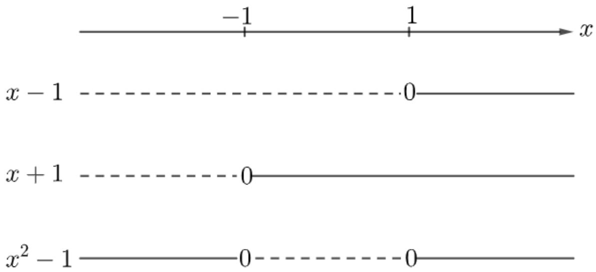
$x = \frac{13}{6}$ er utenfor konvergensområdet og er ikke en gyldig løsning, så summen av rekka kan ikke bli –2.

1.76

a Vi har at $k(x)=\frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned}(k(x))^2 &< 1\\ \left(\frac{1}{x}\right)^2 &< 1\\ \frac{1}{x^2} &< 1 \quad \text{Multipliserer begge sider med } x^2\text{. Det kan vi gjøre fordi } x^2 \text{ alltid er positiv og } x \neq 0.\\ 1 &< x^2\\ x^2-1 &> 0\\ (x-1)(x+1) &> 0\end{aligned}$$

Vi putter faktorene inn i et fortegnsskjema.



Konvergensområdet til rekka er $\langle \leftarrow, -1\rangle \cup \langle 1, \rightarrow\rangle$.

b $s(x)=\frac{a_1}{1-k(x)}=\frac{3}{1-\frac{1}{x}}$

Vi løser likningen $s(x)=9$.

$$\begin{aligned}s(x)&=9\\ \frac{3}{1-\frac{1}{x}}&=9\\ 3&=9\left(1-\frac{1}{x}\right)\\ 3&=9-\frac{9}{x}\\ \frac{9}{x}&=9-3\\ 9&=6x\\ x&=\frac{9}{6}\\ x&=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

$x=\frac{3}{2}$ er innenfor konvergensområdet og er derfor en gyldig løsning.

1.77

Den harmoniske rekka er $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$.

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{1}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{a_3}{a_2}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{a_4}{a_3}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{1}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n}{1}=\frac{n}{n+1}$$

Dette gir

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}$$

$$a_{n+1}=a_n\cdot\frac{n}{n+1}$$

En rekursiv formel er $a_1=1$ og $a_{n+1}=a_n\cdot\frac{n}{n+1}$.

1.78

a Den geometriske rekka konvergerer, fordi $k=\frac{1}{10}$, som er mellom –1 og 1.

$$s=\frac{a_1}{1-k}=\frac{100}{1-\frac{1}{10}}=\frac{100}{\frac{9}{10}}=\frac{10}{9}\cdot 100=\frac{1000}{9}$$

b Den geometriske rekka konvergerer ikke, fordi $k=\sqrt{2}$, som er større enn 1.

c Den geometriske rekka konvergerer, fordi $k=\frac{-27}{81}=\frac{9}{-27}=-\frac{1}{3}$, som er mellom –1 og 1.

$$s=\frac{a_1}{1-k}=\frac{81}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{81}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}\cdot 81=\frac{243}{4}$$

d Den geometriske rekka konvergerer, fordi $k=\mathrm{e}^{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}}$, som er mellom –1 og 1.

$$s=\frac{a_1}{1-k}=\frac{1}{1-\frac{1}{\mathrm{e}}}=\frac{1\cdot\mathrm{e}}{\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\cdot\mathrm{e}}=\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$$

1.79

a Kvotienten er $k(t)=-2t$, så vi løser $-1<-2t<1$ for å finne konvergensområdet.

$$-1 < -2t < 1$$
$$-\frac{1}{2} < -t < \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2} > t > -\frac{1}{2}$$
$$-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$$

Konvergensområdet er $\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$.

Så finner vi $s(t)$ og ser om det fins verdier av $t \in \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$, som gjør at $s(t) = 5$.

$$s(t) = \frac{a_1}{1-k} = \frac{1}{1-(-2t)} = \frac{1}{1+2t}$$

Vi løser likningen $s(t) = 5$.

$$s(t) = 5$$
$$\frac{1}{1+2t} = 5$$
$$1 = 5 \cdot (1+2t)$$
$$1 = 5 + 10t$$
$$10t = -4$$
$$t = -\frac{2}{5}$$

$t = -\frac{2}{5}$ er innenfor konvergensområdet og er derfor en gyldig løsning.

b Kvotienten er $k(t) = \mathrm{e}^t$, så vi løser $-1 < \mathrm{e}^t < 1$ for å finne konvergensområdet.

Vi vet at e^t alltid er større enn 0, og da må den også alltid være større enn –1 uansett hvor stor negativ verdi vi lar t være.

Så vet vi at e^t er mindre enn 1 når $t < 0$.

Konvergensområdet blir derfor $\langle \leftarrow, 0 \rangle$. Altså alle negative tall.

Så finner vi $s(t)$ og ser om det fins verdier av $t \in \langle \leftarrow, 0 \rangle$, som gjør at $s(t) = 5$.

$$s(t) = \frac{a_1}{1-k} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^t}$$

Vi løser likningen $s(t) = 5$.

$$s(t) = 5$$
$$\frac{1}{1-\mathrm{e}^t} = 5$$
$$1 = 5 \cdot (1-\mathrm{e}^t)$$
$$1 = 5 - 5\mathrm{e}^t$$
$$5\mathrm{e}^t = 4$$
$$\mathrm{e}^t = \frac{4}{5}$$
$$t = \ln\frac{4}{5}$$

$t = \ln\frac{4}{5}$ er innenfor konvergensområdet og er derfor en gyldig løsning.

1.80

a Vi har $k(x) = 2x - 3$.

Vi løser $-1 < 2x - 3 < 1$ for å finne konvergensområdet.

$$-1 < 2x - 3 < 1$$
$$2 < 2x < 4$$
$$1 < x < 2$$

Konvergensområdet er $\langle 1, 2 \rangle$.

b $s(x) = \frac{a_1}{1-k} = \frac{2}{1-(2x-3)} = \frac{2}{4-2x} = \frac{1}{2-x}$

c Vi løser $s(x) = 2$:

$$s(x) = 2$$
$$\frac{1}{2-x} = 2$$
$$1 = 2(2-x)$$
$$1 = 4 - 2x$$
$$2x = 3$$
$$x = \frac{3}{2}$$

$x = \frac{3}{2}$ er innenfor konvergensområdet og er derfor en gyldig løsning.

Vi løser $s(x) = -2$:

$$s(x) = -2$$
$$\frac{1}{2-x} = -2$$
$$1 = -2 \cdot (2-x)$$
$$1 = 2x - 4$$
$$2x = 5$$
$$x = \frac{5}{2}$$

$x = \frac{5}{2}$ er utenfor konvergensområdet og er ikke en gyldig løsning, så ingen løsning.

d $s(x) < 0$

$\frac{1}{2-x} < 0$ En brøk med positiv teller er negativ når nevneren er negativ.

$$2 - x < 0$$
$$2 < x$$
$$x > 2$$

Uttrykket for $s(x)$ er negativt når x er større enn 2, men konvergensområdet er $\langle 1, 2\rangle$. Altså fins det ingen x slik at summen av rekka blir negativ.

1.81

a Vi har $k(x) = x$.

Vi ser at $-1 < k(x) < 1$ gir $-1 < x < 1$.

Konvergensområdet er $\langle -1, 1\rangle$.

$$s(x) = \frac{a_1}{1-k} = \frac{1}{1-x}$$

b Vi har $k(x) = 2x$.

Vi løser $-1 < 2x < 1$ for å finne konvergensområdet.

$$-1 < 2x < 1$$
$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

Konvergensområdet er $\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$.

$$s(x) = \frac{a_1}{1-k} = \frac{2}{1-2x}$$

c Kvotienten er $k(x) = \mathrm{e}^x$, så vi løser $-1 < \mathrm{e}^x < 1$ for å finne konvergensområdet.

Vi vet at e^x alltid er større enn 0, da må den også alltid være større enn -1 uansett hvor stor negativ verdi vi lar x være.

Så vet vi at e^x er mindre enn 1 når $x < 0$.

Konvergensområdet blir derfor $\langle \leftarrow, 0\rangle$. Altså alle negative tall.

Så finner vi $s(x)$.

$$s(x) = \frac{a_1}{1-k} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^x}$$

d Vi har $k(x) = \frac{1}{1-x}$.

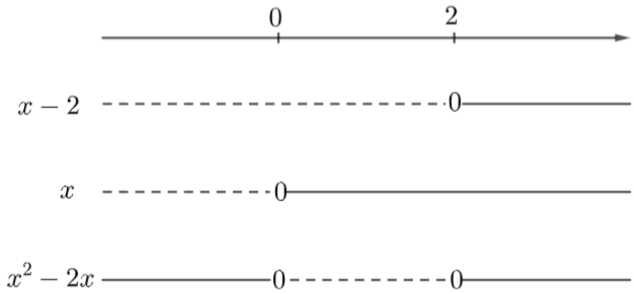
Vi løser $-1 < \frac{1}{1-x} < 1$ for å finne konvergensområdet, men først ser vi at ulikheten kan omformes til $\frac{1}{(1-x)^2} < 1$.

$$\frac{1}{(1-x)^2} < 1$$

Vi kan multiplisere med $(1-x)^2$ på begge sider av ulikhetstegnet fordi $(1-x)^2$ alltid er positiv og x ikke er lik 1.

$$1 < (1-x)^2$$
$$(1-x)^2 - 1 > 0$$
$$\big((1-x)-1\big)\big((1-x)+1\big) > 0$$
$$(-x)(2-x) > 0$$
$$x(x-2) > 0$$

Vi putter faktorene inn i et fortegnsskjema.



Konvergensområdet er $\langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 2, \rightarrow\rangle$.

$$s(x)=\frac{a_1}{1-k}=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=\frac{1-x}{(1-x)-1}=\frac{1-x}{-x}=\frac{x-1}{x}$$

1.82

a $k(x)=\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{\frac{1}{x-1}}{x-1}=\dfrac{1}{(x-1)^2}$

b Vi løser $-1<\dfrac{1}{(1-x)^2}<1$ for å finne konvergensområdet, men først ser vi at ulikheten kan omformes til $\dfrac{1}{(1-x)^4}<1$.

$\dfrac{1}{(1-x)^4}<1$ Vi kan multiplisere med $(1-x)^4$ på begge sider av ulikhetstegnet fordi $(1-x)^4$ alltid er positiv og x ikke er lik 1.

$1<(1-x)^4$

$(1-x)^4>1$

Dette er feil bare hvis $-1\le 1-x\le 1$.

$-2\le -x\le 0$

$2\ge x\ge 0$

$0\le x\le 2$

Rekka divergerer når $x\in[0, 2]$. Altså er konvergensområdet $\langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 2, \rightarrow\rangle$.

c $$s(x)=\frac{a_1}{1-k}=\frac{x-1}{1-\frac{1}{(x-1)^2}}=\frac{(x-1)^3}{(x-1)^2-1}=\frac{(x-1)^3}{(x^2-2x+1)-1}=\frac{(x-1)^3}{x^2-2x}=\frac{(x-1)^3}{x(x-2)}$$

d

$$\begin{aligned}
s(x) &= x \\
\frac{(x-1)^3}{x(x-2)} &= x \\
(x-1)^3 &= x^2(x-2) \\
x^3-3x^2+3x-1 &= x^3-2x^2 \\
-x^2+3x-1 &= 0 \\
x^2-3x+1 &= 0
\end{aligned}$$

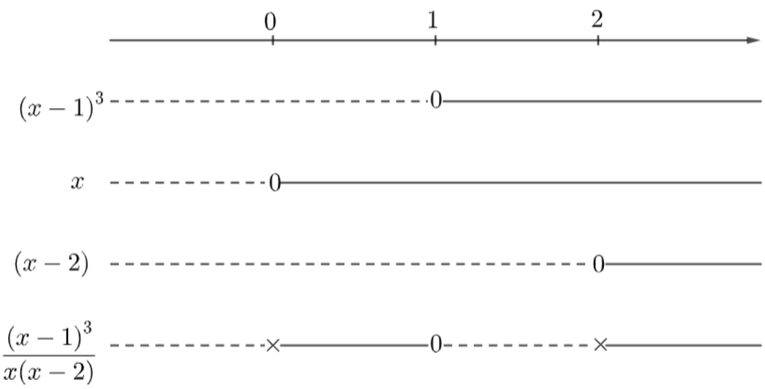
$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1} = \frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

Så legger vi merke til at $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ er mellom 0 og 2, og dermed utenfor konvergensområdet. Altså er eneste løsning $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

e

$$\begin{aligned}
s(x) &> 0 \\
\frac{(x-1)^3}{x(x-2)} &> 0
\end{aligned}$$

Vi putter faktorene inn i et fortegnsskjema.



Fordi konvergensområdet er $\langle\leftarrow, 0\rangle \cup \langle 2, \rightarrow\rangle$, er det bare $x > 2$ som gjør at summen av rekka konvergerer mot en positiv verdi.

1.83
Denne rekka kalles for Grandis rekke.

Vi kan vi legge merke til at Grandis rekke er en geometrisk rekke med $k = -1$. Siden k ikke er mellom -1 og 1, divergerer rekka. Altså må det være noe feil i beviset.

Beviset tar ikke hensyn til at rekka er uendelig. s_n veksler mellom 0 og 1 utfra hvor mange ledd vi tar med. Det vi egentlig finner her, er et slags gjennomsnitt av de forskjellige delsummene.

Feilen i beviset finner vi i første linje: Siden summen ikke eksisterer, kan vi ikke la $s = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$.

1.84

a La a_n være omsetningen $(n - 1)$ år fra nå målt i millioner kroner. Det gir en aritmetisk rekke med $a_1 = 10$ og $d = 0{,}75$.

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d = 10 + (n-1)\cdot 0{,}75 = 10 + 0{,}75n - 0{,}75 = 0{,}75n + 9{,}25$$

b Vi trenger først a_5.

$$a_5 = 0{,}75 \cdot 5 + 9{,}25 = 3{,}75 + 9{,}25 = 13$$

Så kan vi regne ut den samlede omsetningen.

$$s_5 = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5 = \frac{10+13}{2} \cdot 5 = \frac{23}{2} \cdot 5 = 57{,}5$$

Den samlede omsetningen de fem første årene fra og med i år er 57,5 millioner kroner.

1.85

Bedriften skal hvert år redusere utslippet med den samme prosenten i forhold til året før. Vi lar vekstfaktoren som tilsvarer den prosentvise reduksjonen være x.

Utslippet i 2016 vil da være $50 \cdot x$ tonn CO_2. Utslippet i 2017 vil være $50 \cdot x^2$ tonn CO_2. Slik fortsetter det fram til 2025 da utslippet vil være $50 \cdot x^{10}$ tonn CO_2.

Vi får den geometriske rekka $50x + 50x^2 + \cdots + 50x^{10}$ med $s(x) = a_1 \dfrac{k^{10}-1}{k-1} = 50x \dfrac{x^{10}-1}{x-1}$.

Vi løser likningen $s(x) = 400$ i CAS.

1 $$50\,x\,\frac{x^{10}-1}{x-1} = 400$$

Løs:
$$\{x = -1.31187, x = 0.95898\}$$

Vi forkaster den negative løsningen.
En vekstfaktor på 0,959 tilsier at de må redusere utslippene med minst 4,1 % hvert år.

1.86

a Den første dagen får sauen i seg 0,20 ng, men i løpet av natta mellom de to dagene kvitter sauen seg med 2,3 %. Altså er $0{,}20 \cdot 0{,}977$ ng igjen fra den første dagen

Den andre dagen får sauen også i seg 0,20 ng, men sauen har ikke hatt noen natt til å kvitte seg med noe av Cs-137, så det er fremdeles 0,20 ng igjen.

Til sammen blir det $(0{,}20 + 0{,}20 \cdot 0{,}977)$ ng Cs-137.

b Vi får den geometriske rekka $0{,}20 + 0{,}20 \cdot 0{,}977 + 0{,}20 \cdot 0{,}977^2 + \cdots + 0{,}20 \cdot 0{,}977^{19}$.

$a_1 = 0{,}20$, $k = 0{,}977$ og $n = 20$

$$s_{20} = a_1 \cdot \frac{k^{20}-1}{k-1} = 0{,}20 \cdot \frac{0{,}977^{20}-1}{0{,}977-1} = 0{,}20 \cdot \frac{0{,}977^{20}-1}{-0{,}023} = 3{,}24$$

Etter 20 dager på beite har sauen 3,24 ng av Cs-137 i kroppen.

c Vi får den geometriske rekka $0{,}20 + 0{,}20 \cdot 0{,}977 + 0{,}20 \cdot 0{,}977^2 + \cdots + 0{,}20 \cdot 0{,}977^n$.

Vi må finne ut hva n må være for at summen av rekka blir 5 ng.

$$s_n = 5$$

$$0{,}20 \cdot \frac{0{,}977^n - 1}{-0{,}023} = 5$$

Vi løser likningen i CAS.

$$0.20 \cdot \frac{0.977^n - 1}{-0.023} = 5$$

NLøs: $\{n = 36.77\}$

Etter 37 dager på beite har sauen over 5 ng av Cs-137 i kroppen.

d Vi lar vekstfaktoren vi får på grunn av sauens utskillelse av Cs-137, være x. Vi får den geometriske rekka $0{,}20 + 0{,}20 \cdot x + 0{,}20 \cdot x^2 + \cdots + 0{,}20 \cdot x^{20}$.

Vi må finne ut hva x må være for at summen av rekka blir 3,3 ng.

$$s_{20} = 3{,}3$$

$$0{,}20 \cdot \frac{x^{20} - 1}{x - 1} = 3{,}3$$

Vi løser likningen i CAS.

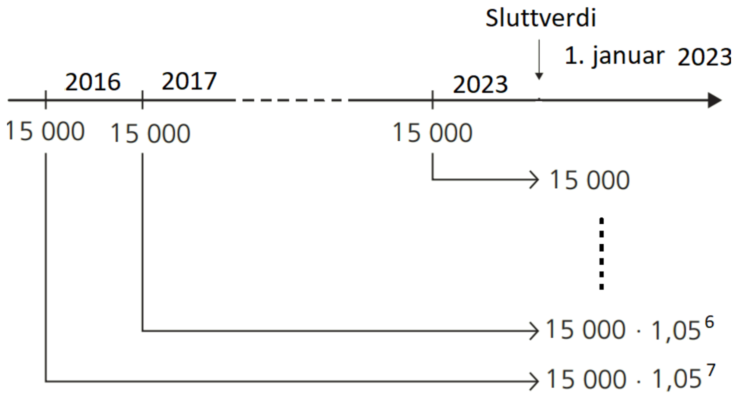
$$0.2 \cdot \frac{x^{20} - 1}{x - 1} = 3.3$$

NLøs: $\{x = 0.9792\}$

Den andre sauen skiller ut 2,1 % av Cs-137 hver natt.

1.87

a Vi lager et tidsskjema med sluttverdi for å få oversikt over informasjonen.



Vi ser at beløpene danner den geometriske rekka $15\,000 + 15\,000 \cdot 1{,}05 + \cdots + 15\,000 \cdot 1{,}05^7$.

$a_1 = 15\,000$, $k = 1{,}05$ og $n = 8$.

$$s_8 = a_1 \frac{k^8 - 1}{k - 1} = 15\,000 \cdot \frac{1{,}05^8 - 1}{1{,}05 - 1} = 15\,000 \cdot \frac{1{,}05^8 - 1}{0{,}05} = 143\,237$$

Marie har 143 237 kr på konto like etter innskuddet i januar 2023.

b Nå er fremdeles $a_1 = 15\,000$ og $k = 1{,}05$, men n er ukjent. Da blir

$$s_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} = 15\,000 \cdot \frac{1{,}05^n - 1}{1{,}05 - 1} = 15\,000 \cdot \frac{1{,}05^n - 1}{0{,}05}$$

Vi ønsker å finne ut for hvilken verdi av n denne summen blir 1 000 000.

$$s_n = 1\,000\,000$$

$$15\,000 \cdot \frac{1{,}05^n - 1}{0{,}05} = 1\,000\,000$$

Vi løser likningen i CAS.

$$15000 \cdot \frac{1.05^n - 1}{0.05} = 1000000$$

NLøs: $\{\mathbf{n = 30.05}\}$

Vi ser det må være etter det 30. innskuddet. Det vil ikke overstige en million når det 30. innskuddet settes inn 1. januar 2045, men kanskje før det 31. innskuddet settes inn 1. januar 2046. Vi må sjekke om det skjer når rentene legges til i løpet av 2045. Hvis ikke, vil det være etter innskuddet 1. januar 2046. Vi regner ut hvor mye som er på konto 1. januar 2045, så legger vi til renter for ett år. Vi får den geometriske rekka med $a_1 = 15\,000$, $k = 1{,}05$ og $n = 30$.

$$s_{30} = 15\,000 \cdot \frac{1{,}05^{30} - 1}{0{,}05} = 996\,583$$

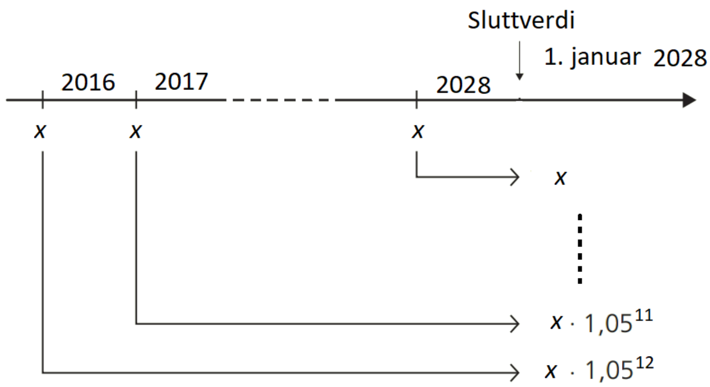
1. januar 2045 er det 996 583 kr på kontoen.

$$996\,583 \cdot 1{,}05 = 1\,046\,412$$

Når renten legges til i slutten av 2045, vil beløpet på konto overstige 1 million kroner.

Rentene for 2045 vises på kontoen i begynnelsen av januar 2046. Da vil kontoen vise over en million kroner.

c Vi lager et tidsskjema med sluttverdi for å få oversikt over informasjonen.



Vi ser at beløpene danner den geometriske rekka $x + x \cdot 1{,}05 + \cdots + x \cdot 1{,}05^{12}$.

$a_1 = x$, $k = 1{,}05$ og $n = 13$.

Vi må løse likningen $s_{13} = 1\,000\,000$

$$s_{13} = 1\,000\,000$$

$$x \cdot \frac{1{,}05^{13} - 1}{0{,}05} = 1\,000\,000$$

Vi løser likningen i CAS.

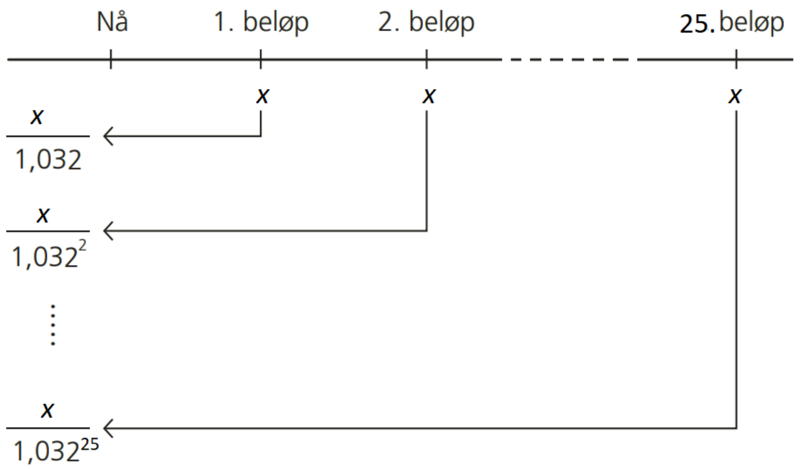
$$x \cdot \frac{1.05^{13} - 1}{0.05} = 1000000$$

NLøs: $\{\mathbf{x = 56455.77}\}$

For at Marie skal ha en million kroner på konto rett etter innskuddet 1. januar 2028, må hun sette inn 56 456 kr hvert år.

1.88

Vi lager et tidsskjema med nåverdi for å få oversikt over informasjonen.



Vi ser at beløpene danner den geometriske rekka $\frac{x}{1{,}032}+\frac{x}{1{,}032^2}+\cdots+\frac{x}{1{,}032^{25}}$.

$a_1=\frac{x}{1{,}032}$, $k=\frac{1}{1{,}032}$ og $n=25$.

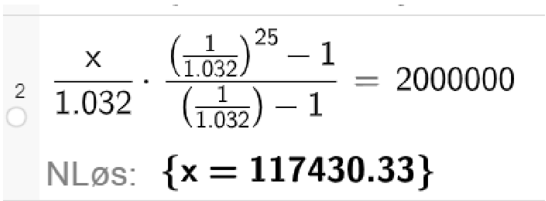
Vi må løse likningen $s_{25}=2\,000\,000$

$$s_{25}=2\,000\,000$$

$$a_1\cdot\frac{k^{25}-1}{k-1}=2\,000\,000$$

$$\frac{x}{1{,}032}\cdot\frac{\left(\frac{1}{1{,}032}\right)^{25}-1}{\left(\frac{1}{1{,}032}\right)-1}=2\,000\,000$$

Vi løser likningen i CAS.



Terminbeløpet er 117 430 kr.

1.89

Rett etter at pasienten har tatt en tablett, bidrar den tabletten med 2,5 mg virkestoff.

Tabletten dagen før bidrar med $2{,}5\cdot 0{,}7$ mg.

Tabletten for to dager siden bidrar med $2{,}5\cdot 0{,}7^2$ mg.

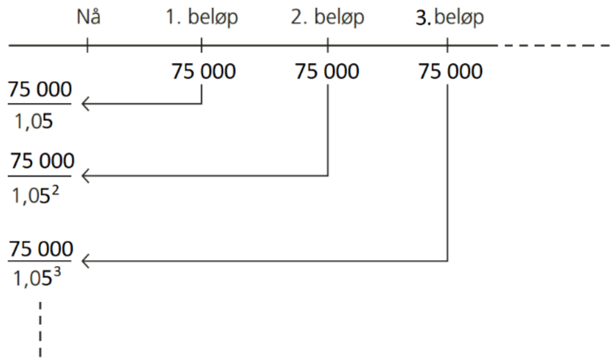
Fortsetter hun med tablettene i det «uendelige», får vi den konvergente uendelige geometriske rekka
$2{,}5+2{,}5\cdot 0{,}7+2{,}5\cdot 0{,}7^2+2{,}5\cdot 0{,}7^3+\cdots$.
Regner vi ut summen av rekka, og det overstiger 10, er det farlig å fortsette med medisinen over en lang periode.

$$s=\frac{a_1}{1-k}=\frac{2{,}5}{1-0{,}7}=\frac{2{,}5}{0{,}3}=8{,}33$$

Doseringen er forsvarlig fordi konsentrasjonen i kroppen konvergerer mot 8,33 mg.

1.90

Vi lager et tidsskjema med nåverdi for å få oversikt over informasjonen.



Beløpene danner den uendelige og konvergente geometriske rekka $\frac{75\,000}{1,05}+\frac{75\,000}{1,05^2}+\frac{75\,000}{1,05^3}+\cdots$.

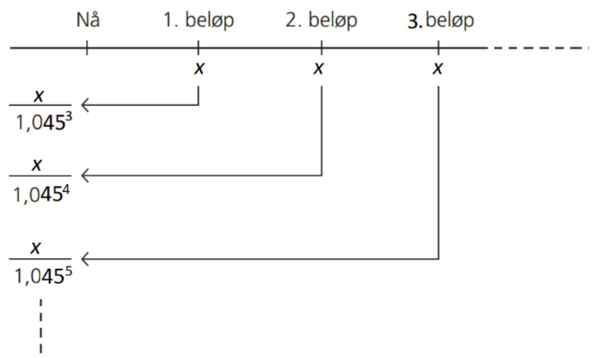
$a_1=\frac{75\,000}{1,05}$, $k=\frac{1}{1,05}$.

$$s=\frac{a_1}{1-k}=\frac{\frac{75\,000}{1,05}}{1-\frac{1}{1,05}}=1\,500\,000$$

Elverket bør tilby grunneieren 1 500 000 kr nå.

1.91

a Vi lager et tidsskjema med nåverdi, der vi lar utbetalingene være x.



Beløpene danner den uendelige og konvergente geometriske rekka $\frac{x}{1,045^3}+\frac{x}{1,045^4}+\frac{x}{1,045^5}+\cdots$.

$a_1=\frac{x}{1,045^3}$, $k=\frac{1}{1,045}$. Vi finner summen $s(x)$ og løser likningen $s(x)$ = 3 000 000.

$$s(x)=\frac{a_1}{1-k}=\frac{\frac{x}{1,045^3}}{1-\frac{1}{1,045}}$$

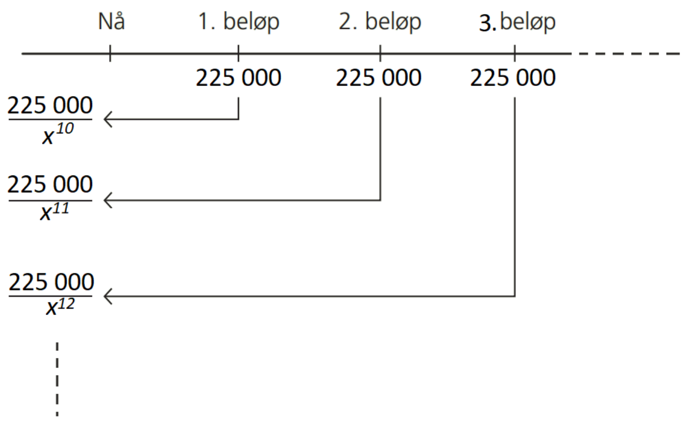
Vi løser likningen i CAS.

$$1 \quad \frac{\frac{x}{1.045^3}}{1-\left(\frac{1}{1.045}\right)} = 3000000$$

NLøs: $\{x = 147423.38\}$

De årlige utbetalingene kan være på 147 423 kr.

b Vi lager et tidsskjema med nåverdi, der vi lar vekstfaktoren være *x*.



Beløpene danner den uendelige geometriske rekka $\frac{225\,000}{x^{10}} + \frac{225\,000}{x^{11}} + \frac{225\,000}{x^{12}} + \cdots$.

$a_1 = \frac{225\,000}{x^{10}}$, $k = \frac{1}{x}$. Så lenge x > 1 vil rekka konvergere. Vi finner summen $s(x)$ og løser likningen $s(x) = 4\,500\,000$.

$$s(x) = \frac{a_1}{1-k} = \frac{\frac{225\,000}{x^{10}}}{1-\frac{1}{x}}$$

Vi løser likningen i CAS.

$$1 \quad \frac{\frac{225000}{x^{10}}}{1-\frac{1}{x}} = 4500000$$

Løs: $\{x = -0.6769, x = 1.0363\}$

Den årlige avkastningen må være på minst 3,6 %.

1.92

a Dette blir en aritmetisk rekke med $a_1 = 100$ og $d = 50$.

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d = 100 + (n-1)\cdot 50 = 100 + 50n - 50 = 50 + 50n$$

b $a_{10} = 50 \cdot 10 + 50 = 500 + 50 = 550$

Lance Helge må spare 550 kr i uke 10.

c Vi må løse likningen $a_n = 800$.

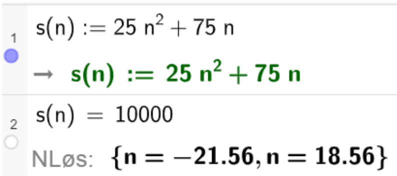
$$
\begin{aligned}
a_n &= 800 \\
50n + 50 &= 800 \\
50n &= 750 \\
n &= \frac{750}{50} \\
n &= 15
\end{aligned}
$$

Han sparer 800 kr i uke 15.

d Vi må finne et uttrykk for s_n og løse likningen $s_n = 10\,000$.

$$a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{100 + (50n + 50)}{2} \cdot n = \frac{50n + 150}{2} \cdot n = (25n + 75) \cdot n = 25n^2 + 75n$$

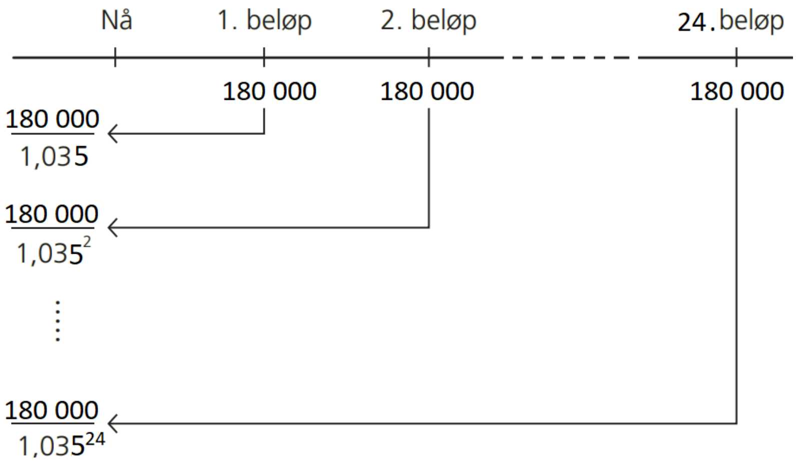
Vi løser likningen i CAS.



Lance Helge må spare i 19 uker før han har spart 10 000 kr.

1.93

Vi lager et tidsskjema med nåverdi for å få oversikt over informasjonen.



Vi ser at beløpene danner den geometriske rekka $\frac{180\,000}{1{,}035} + \frac{180\,000}{1{,}035^2} + \cdots + \frac{180\,000}{1{,}035^{24}}$.

$a_1 = \frac{180\,000}{1{,}035}$, $k = \frac{1}{1{,}035}$ og $n = 24$.

$$s_{24} = \frac{180\,000}{1{,}035} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1{,}035}\right)^{24} - 1}{\left(\frac{1}{1{,}035}\right) - 1} = 2\,890\,506$$

Lånet er på 2 890 506 kr.

1.94

a Rett etter at pasienten har tatt en tablett bidrar den tabletten med 24 mg virkestoff.
Tabletten dagen før bidrar med $24 \cdot 0{,}4$ mg.
Tabletten for to dager siden bidrar med $24 \cdot 0{,}4^2$ mg.

Fortsetter hen med tablettene i det «uendelige», får vi den konvergente uendelige geometriske rekka
$24 + 24 \cdot 0{,}4 + 24 \cdot 0{,}4^2 + 24 \cdot 0{,}4^3 + \cdots$.
Vi regner ut summen av rekka, om det overstiger 35 mg, er det farlig å fortsette med medisinen over en lang periode.

$$s = \frac{a_1}{1-k} = \frac{24}{1-0{,}4} = \frac{24}{0{,}6} = 40$$

Det er ikke trygt for pasienten å fortsette med tablettene over en lang periode, fordi konsentrasjonen i kroppen vil overstige 35 mg.

b For denne pasienten får vi den konvergente uendelige geometriske rekka
$24 + 24 \cdot 0{,}4^2 + 24 \cdot 0{,}4^4 + 24 \cdot 0{,}4^6 + \cdots$.

Vi regner ut summen av rekka.

$$s = \frac{a_1}{1-k} = \frac{24}{1-0{,}4^2} = \frac{24}{1-0{,}16} = \frac{24}{0{,}84} = 28{,}6$$

Denne pasienten får ikke en skadelig mengde virkestoff i kroppen, fordi den ikke overstiger 35 mg.

1.95

a Dette blir en geometrisk rekke med $a_1 = 1$, $k = 2$ og $n = 64$.
$a_{64} = a_1 \cdot k^{63} = 1 \cdot 2^{63} = 9{,}22 \cdot 10^{18}$
Mannen får $9{,}22 \cdot 10^{18}$ riskorn for den siste ruta.

b $a_n = a_1 \cdot k^{n-1} = 2^{n-1}$.
Vi finner summen i CAS.

1 $\sum_{n=1}^{64} 2^{n-1}$

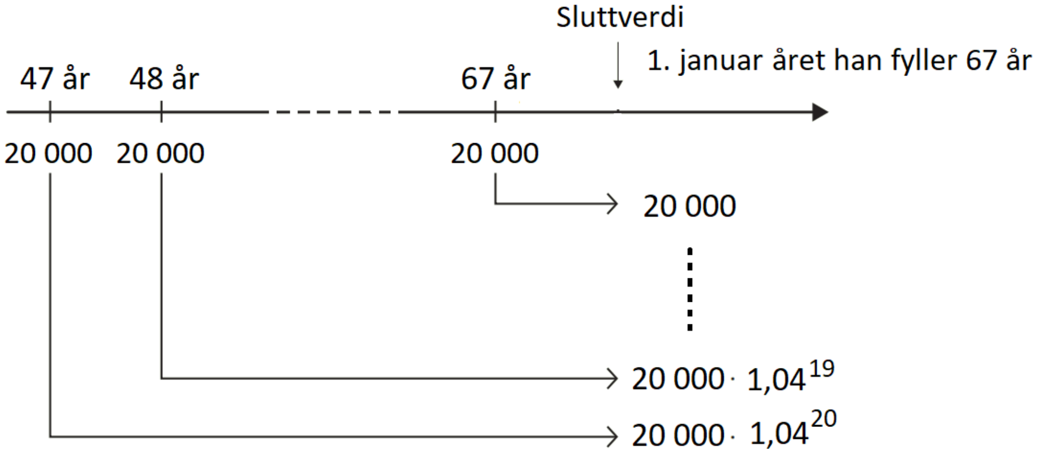
$\approx \mathbf{1.84 \cdot 10^{19}}$

Mannen får $1{,}84 \cdot 10^{19}$ riskorn til sammen.

c 100 mg er det samme som 10^{-7} tonn. Da blir det $1{,}84 \cdot 10^{19} \cdot 10^{-7} = 1{,}84 \cdot 10^{12}$ tonn ris.
Dette tilsvarer ca. 1,84 billioner tonn ris.

1.96

a Vi lager et tidsskjema med sluttverdi for å få oversikt over informasjonen.



Vi ser at beløpene danner den geometriske rekka $20\,000 + 20\,000 \cdot 1{,}04 + \cdots + 20\,000 \cdot 1{,}04^{20}$.

$a_1 = 20\,000$, $k = 1{,}04$ og $n = 21$.

$$s_{21} = a_1 \frac{k^{21}-1}{k-1} = 20\,000 \cdot \frac{1{,}04^{21}-1}{1{,}04-1} = 20\,000 \cdot \frac{1{,}04^{21}-1}{0{,}04} = 639\,384$$

Håkon har 639 384 kr på konto like etter det siste innskuddet.

b Vi lar beløpet han kan ta ut hvert år, være x, og sammenlikner det med pengene på kontoen i begynnelsen av det året han fylte 67 år.

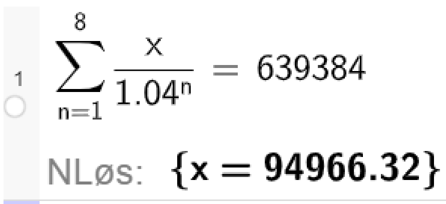
Pengene han tar ut det året han fyller 68, vil være $\frac{x}{1.04}$ kr av de 639 384 kr i banken.

Pengene han tar ut det året han fyller 69, vil være $\frac{x}{1.04^2}$ kr av de 639 384 kr i banken.

Pengene han tar ut det året han fyller 75, vil være $\frac{x}{1.04^8}$ kr av de 639 384 kr i banken.

Vi får likningen $\frac{x}{1.04} + \frac{x}{1.04^2} + \cdots + \frac{x}{1.04^8} = 639\,384$.

Vi løser likningen i CAS.



Håkon kan ta ut et årlig beløp på 94 966 kr.

1.97

a På det første sprettet så spretter ballen opp $1{,}70 \cdot 0{,}70 = 1{,}19$ m.

På det andre sprettet så spretter ballen opp $1{,}70 \cdot 0{,}70^2 = 0{,}83$ m.

På sprett nummer 10 så spretter ballen opp $1{,}70 \cdot 0{,}70^{10} = 0{,}048$ m. Eller altså 4,8 cm.

b Først faller ballen 1,70 m.

Så spretter den opp og faller ned igjen $1{,}70 \cdot 0{,}70 = 1{,}19\,\text{m}$. Altså til sammen 2,38 m.

Så spretter den opp og faller ned igjen $1{,}19 \cdot 0{,}70 = 0{,}83\,\text{m}$. Altså til sammen 1,66 m.

Slik fortsetter det. Alle sprett etter fallet på 1,70 m danner en konvergent geometrisk rekke med

$a_1 = 2{,}38$ og $k = 0{,}7$

$$s = \frac{2{,}38}{1-0{,}7} = \frac{2{,}38}{0{,}3} = 7{,}93$$

Så adderer vi de første 1,70 m. Vi får 1,70 m + 7,93 m = 9,63 m = 963 cm, eller 9,63 m.

1.98

a

$$b_1 = 4 \cdot 1 - 1 = 3$$
$$b_2 = 4 \cdot 2 - 1 = 7$$
$$b_3 = 4 \cdot 3 - 1 = 11$$
$$b_4 = 4 \cdot 4 - 1 = 15$$
$$b_5 = 4 \cdot 5 - 1 = 19$$

Vi sjekker om 47 er med i følgen:

$$\begin{aligned} b_n &= 47 \\ 4n - 1 &= 47 \\ 4n &= 48 \\ n &= 12 \end{aligned}$$

47 er med i tallfølgen, som ledd nummer 12.

Rekka blir $3 + 7 + 11 + 15 + 19 + \cdots$. Dette er en aritmetisk rekke med første ledd lik 3 og differansen lik 4.

Ingen aritmetiske rekker konvergerer bortsett fra 0 + 0 + 0 + 0 +…, som er konvergent.

b

$$d_1 = 2 \cdot 3^{1-3} = 2 \cdot 3^{-2} = \frac{2}{9}$$
$$d_2 = 2 \cdot 3^{2-3} = 2 \cdot 3^{-1} = \frac{2}{3}$$
$$d_3 = 2 \cdot 3^{3-3} = 2 \cdot 3^{0} = 2$$
$$d_4 = 2 \cdot 3^{4-3} = 2 \cdot 3^{1} = 6$$
$$d_5 = 2 \cdot 3^{5-3} = 2 \cdot 3^{2} = 18$$

Vi sjekker om 47 er med i følgen:

$$\begin{aligned} d_n &= 47 \\ 2 \cdot 3^{n-3} &= 47 \\ 3^{n-3} &= \frac{47}{2} \end{aligned}$$

3^{n-3} er et heltall når n er et heltall. Da fins det ingen heltallige løsninger på likningen. Altså er ikke 47 med i tallfølgen.

Rekka blir $\frac{2}{9} + \frac{2}{3} + 2 + 6 + 18 + \cdots$. Dette er en geometrisk rekke med første ledd lik $\frac{2}{9}$ og kvotienten lik 3.

Kvotienten er ikke mellom –1 og 1. Altså konvergerer ikke rekka.

1.99

a

A	B	C	D	E
	1	2	3	4
8	7	6	5	
	9	10	11	12
16	15	14	13	
	17	18	19	20
24	23	22	21	
	25	26	27	28

b Første ledd er 1. Så adderes 6. Så adderes 2. Så adderes 6, så 2, osv.

I rad nummer 2 står 7. I rad nummer 4 står 15. I rad nummer 6 står 23. Vi adderer 8 hver gang vi hopper to ruter ned. Vi kan se på partallsradene i kolonne B som en aritmetisk rekke med $a_1 = 7$ og $d = 8$.

Da er tallet i rad 1000 ledd nummer 500.

$$a_{500} = a_1 + 499 \cdot d = 7 + 499 \cdot 8 = 7 + 3992 = 3999$$

Tallet i rad nummer 1000 i kolonne B er 3999.

c Det er 4 tall i hver rad. Da må tallet 1000 stå i rad 250 og være det høyeste tallet i den raden.
I partallsradene er det høyeste tallet i kolonne A. Altså står tallet 1000 i rad 250, kolonne A.

1.100

```
c = 20
for n in range(7):
    print(c)
    c = 2*c - 5
```

Ved kjøring blir utskriften 20, 35, 65, 125, 245, 485 og 965.

1.101

Kubikktall n er kvadrattall n stablet n ganger oppover.

Vi får $u_n = n \cdot k_n$, der u_n n-te kubikktallet og k_n er det n-te kvadrattallet.

1.102

a Dette er en aritmetisk rekke der første ledd er 3 og differansen er 7. Det neste leddet er derfor 24 + 7 = 31.

b

$$s_4 = 3 + 10 + 17 + 24 = 54$$

$$s_5 = s_4 + 31 = 85$$

c For å finne s_{100} trenger vi å finne a_{100}.

$$a_{100} = a_1 + 99 \cdot d = 3 + 99 \cdot 7 = 3 + 693 = 696$$

$$s_{100} = \frac{a_1 + a_{100}}{2} \cdot 100 = \frac{3 + 696}{2} \cdot 100 = 34\,950$$

1.103

a

```
sum = 0
for n in range(1,51):
    sum = sum + n*(n + 1)/2
print(sum)
```

Ved kjøring blir utskriften 22 100.

b

```
sum = 0
for n in range(1,51):
    sum = sum + n*(n + 1)
print(sum)
```

Ved kjøring blir utskriften 44 200.

1.104

$a_1 = 2$ og $a_n = 2n$. Dette er en aritmetisk rekke, så

$$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2 + 2n}{2} \cdot n = (1+n) \cdot n = n + n^2 = n^2 + n \,.$$

1.105

a Ytterst i trekanten er tallene 1. Alle tallene inne i trekanten er summen av tallene skrått til venstre og skrått til høyre i raden over. For eksempel er 10 = 4 + 6.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

b

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1
\end{array}$$

c Vi ser at tallene som er nummer 3 fra høyre, er trekanttallene.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1
\end{array}
$$

Her er tallet som er nummer 3 fra høyre i rad 2, trekanttall 1. Generelt vil tall nummer 3 fra høyre i rad n være trekanttall $n - 1$.

Tall nummer 3 fra høyre i rad 99 vil være trekanttall 98.

$$t_{98} = \frac{98 \cdot 99}{2} = 4851$$

Tall nummer 3 fra høyre i rad 99 er 4851.

d Vi kan finne summen av de n første tallene i en diagonal ved å se på tallet på skrått til venstre under det siste tallet i summen. For eksempel vil summen av de 7 tallene på diagonalen markert over være 56 + 28 = 84.

Dette er fordi tallet 4 er summen av de 2 første tallene i diagonalen.

Tallet 10 er summen av de tre første tallene i diagonalen, siden det er summen av 4 og 6.

Osv. Vi følger altså mønstret vi fant i oppgave a.

1.106

a Tall nummer tre og utover er summen av de to foregående Vi får da

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144

b Hvert tredje fibonaccitall er et partall.

c Vi la f_n og f_{n+1} være oddetall.

f_n: oddetall

f_{n+1}: oddetall

f_{n+2}: oddetall + oddetall = partall

f_{n+3}: oddetall + partall = oddetall

f_{n+4}: partall + oddetall = oddetall

f_{n+5}: oddetall + oddetall = partall

osv. …

Se også oppgave 1.41.

1.107

a $f(1)=3\cdot 2^{1-1}=3\cdot 2^0=3\cdot 1=3$

$f(2)=3\cdot 2^{2-1}=3\cdot 2^1=3\cdot 2=6$

$f(3)=3\cdot 2^{3-1}=3\cdot 2^2=3\cdot 4=12$

$f(4)=3\cdot 2^{4-1}=3\cdot 2^3=3\cdot 8=24$

$f(5)=3\cdot 2^{5-1}=3\cdot 2^4=3\cdot 16=48$

$f(6)=3\cdot 2^{6-1}=3\cdot 2^5=3\cdot 32=96$

b En eksplisitt formel følger fra funksjonsuttrykket.

$f(n)=3\cdot 2^{n-1}$

For å finne en rekursiv formel kan vi legge merke til at neste ledd er dobbelt så stort som det forrige, som gir

$f(1)=3 \quad \text{og} \quad f(n+1)=2f(n)$.

1.108

a $a_{n+1}=(n+1)^2-2(n+1)+6=n^2+2n+1-2n-2+6=n^2+5$

b $a_{n+1}-a_n=\left(n^2+5\right)-\left(n^2-2n+6\right)=n^2+5-n^2+2n-6=2n-1$

c $a_{n+1}=a_n+2n-1$

$a_1=1^2-2\cdot 1+6=5$

Rekursiv formel: $a_1=5 \quad \text{og} \quad a_{n+1}=a_n+2n-1$

d Vi begynner med å bruke den rekursive formelen.

$a_1=5$

$a_2=5+2\cdot 1-1=6$

$a_3=6+2\cdot 2-1=9$

$a_4=9+2\cdot 3-1=14$

$a_5=14+2\cdot 4-1=21$

$a_6=21+2\cdot 5-1=30$

Så bruker vi den eksplisitte formelen.

$a_1=1^2-2\cdot 1+6=5$

$a_2=2^2-2\cdot 2+6=6$

$a_3=3^2-2\cdot 3+6=9$

$a_4=4^2-2\cdot 4+6=14$

$a_5=5^2-2\cdot 5+6=21$

$a_6=6^2-2\cdot 6+6=30$

Den rekursive og den eksplisitte formelen sammenfaller.

e1 Vi bruker samme oppskrift som over. Vi finner først et eksplisitt uttrykk for a_{n+1}.

$a_{n+1}=2(n+1)^2=2\left(n^2+2n+1\right)=2n^2+4n+2$

$a_{n+1}-a_n=\left(2n^2+4n+2\right)-\left(2n^2\right)=4n+2$

$a_{n+1}=a_n+4n+2$

$a_1 = 2 \cdot 1^2 = 2$

Rekursiv formel: $a_1 = 2$ og $a_{n+1} = a_n + 4n + 2$

e2 Vi finner først et eksplisitt uttrykk for b_{n+1}.

$b_{n+1} = 3(n+1)^2 - 4(n+1) = 3\left(n^2 + 2n + 1\right) - 4n - 4 = 3n^2 + 2n - 1$

$b_{n+1} - b_n = \left(3n^2 + 2n - 1\right) - \left(3n^2 - 4n\right) = 6n - 1$

$b_{n+1} = b_n + 6n - 1$

$b_1 = 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = -1$

Rekursiv formel: $b_1 = -1$ og $b_{n+1} = b_n + 6n - 1$

e3 Vi finner først et eksplisitt uttrykk for c_{n+1}.

$c_{n+1} = -(n+1)^2 + 3(n+1) - 5 = -\left(n^2 + 2n + 1\right) + 3n + 3 - 5 = -n^2 + n - 3$

$c_{n+1} - c_n = \left(-n^2 + n - 3\right) - \left(-n^2 + 3n - 5\right) = -2n + 2$

$c_{n+1} = c_n - 2n + 2$

$c_1 = -1^2 + 3 \cdot 1 - 5 = -3$

Rekursiv formel: $c_1 = -3$ og $c_{n+1} = c_n - 2n + 2$

e4 Vi finner først et eksplisitt uttrykk for d_{n+1}.

$d_{n+1} = 10 \cdot 2^{n+1} = 10 \cdot 2 \cdot 2^n = 20 \cdot 2^n$

$d_{n+1} - d_n = 20 \cdot 2^n - 10 \cdot 2^n = 2^n(20 - 10) = 10 \cdot 2^n = d_n$

$d_{n+1} = d_n + d_n = 2d_n$

$d_1 = 10 \cdot 2^1 = 20$

Rekursiv formel: $d_1 = 20$ og $d_{n+1} = 2d_n$

1.109

$a_n = a_1 + (n-1)d = -2 + (n-1) \cdot (-3) = -2 - 3n + 3 = -3n + 1$. Det gir $a_{10} = -29$

$$s_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{-2 - 29}{2} \cdot 10 = \frac{-31}{2} \cdot 10 = -155$$

1.110

a En halvsirkel har lengde $\frac{2\pi r}{2} = \pi r$.

I figuren vil den første halvsirkelen ha lengde πr.

Den andre halvsirkelen vil ha lengde $\pi \cdot \left(\frac{2}{3}r\right) = \frac{2}{3}\pi r$.

Den tredje halvsirkelen vil ha lengde $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \pi r$.

Osv.

Det gir den uendelige geometriske rekka gitt ved $a_1 = \pi r$ og $k = \dfrac{2}{3}$, dvs. $\pi r + \dfrac{2}{3}\pi r + \dfrac{4}{9}\pi r + \cdots$.

b $s = \dfrac{a_1}{1-k} = \dfrac{\pi r}{1-\frac{2}{3}} = \dfrac{\pi r}{\frac{1}{3}} = \pi r \cdot 3 = 3\pi r$

Den totale lengden blir $3\pi r$.

1.111

a Rekka er geometrisk med kvotient $k = 3$, fordi vi finner neste ledd ved å multiplisere med 3.

b Vi finner først et uttrykk for a_n.

$a_n = a_1 \cdot k^{n-1} = 10 \cdot 3^{n-1}$

Vi finner så a_{10} og a_{20} i GeoGebra.

1	$a(n) := 10 \cdot 3^{n-1}$
	$\rightarrow$ **$a(n) := 10 \cdot 3^{n-1}$**
2	$a(10)$
	$\rightarrow$ **196830**
3	$a(20)$
	$\rightarrow$ **11622614670**

a_{10} = 196 830, a_{20} = 11 622 614 670.

c Eksplisitt formel: $a_n = 10 \cdot 3^{n-1}$

Rekursiv formel: $a_1 = 10$ og $a_{n+1} = 3 \cdot a_n$

1.112

a Utsagnet for $n = 1$ gir $1^5 - 3 \cdot 1 + 4 = 2$, som er et partall.

Vi antar at utsagnet er sant for et naturlig tall $n = k$, altså at

$k^2 - 3k + 4$ er et partall.

Vi må vise at utsagnet da også er sant for $n = k + 1$, altså at

$(k+1)^2 - 3(k+1) + 4$ er et partall.

$(k+1)^2 - 3(k+1) + 4 = k^2 + 2k + 1 - 3k - 3 + 4 = \left(k^2 - 3k + 4\right) + (2k - 2) = \left(k^2 - 3k + 4\right) + 2(k-1)$

Fra induksjonsantakelsen er uttrykket $k^2 - 3k + 4$ et partall. Videre ser vi at $2(k - 1)$ også må være et partall fordi det er en heltallsfaktorisering med faktoren 2. Vi har nå vist at utsagnet er sant for $n = k + 1$ under antakelsen at det er sant for $n = k$.

Vi har dermed bevist ved induksjon at utsagnet er sant for alle naturlige tall n.

b Vi vil vise at $n^2 - 3n + 4$ er et partall for alle naturlige tall n.

La $n \in \mathbb{N}$. Vi har $n^2 - 3n + 4 = n(n-3) + 4$.

Vi vet at 4 er et partall. Uttrykket $n(n-3)$ er også et partall siden uansett hvilket heltall n er, så er en av faktorene et partall. Dette er fordi differansen mellom n og $n - 3$ er et oddetall.

Vi har altså at $n^2 - 3n + 4$ kan skrives som en sum av $n(n - 3)$ og 4, der begge uttrykk er et partall. Da må også summen være et partall, og vi har vist det vi ønsket.

1.113

a Først legger vi et 6-tall til i linja nederst. Neste tall i linje to blir da 25 + 6 = 31. Neste tall i øverste rad blir da 66 + 31 = 97.

b Tallene i rad 2 er en aritmetisk rekke der første ledd er 1 og differansen er 6.

Ledd n i rad 2 er derfor $1 + 6(n - 1)$.

I øverste rad får vi da $a_1 = 1$ og $a_{n+1} = a_n + 1 + 6(n - 1)$.

1.114

a

1 3 6 10 15 21

2 3 4 5 6

1 1 1 1

Vi får en konstant differanse og kan bruke metoden.

Tallene i rad 2 er en aritmetisk rekke der første ledd er 2 og differansen er 1.

Ledd n i rad 2 er derfor $n + 1$.

I øverste rad får vi da $a_1 = 1$ og $a_{n+1} = a_n + n + 1$.

De to neste leddene er

$$a_7 = a_6 + 6 + 1 = 21 + 7 = 28$$
$$a_8 = a_7 + 7 + 1 = 28 + 8 = 36$$

b

1 2 4 8 16 32

1 2 4 8 16

1 2 4 8

Radene bare repeterer seg selv. Vi kommer aldri ned til en rad der alle tall er like, og kan ikke bruke metoden.

c

1 2 11 28 53

1 9 17 25

8 8 8

Vi får en konstant differanse og kan bruke metoden.

Tallene i rad 2 er en aritmetisk rekke der første ledd er 1 og differansen er 8.

Ledd n i rad 2 er derfor $8n - 7$.

I øverste rad får vi da $a_1 = 1$ og $a_{n+1} = a_n + 8n - 7$.

De to neste leddene er

$$a_6 = a_5 + 8 \cdot 5 - 7 = 53 + 33 = 86$$
$$a_7 = a_6 + 8 \cdot 6 - 7 = 86 + 41 = 127$$

d

1 5 14 30 55 91 140 204

4 9 16 25 36 49 64

5 7 9 11 13 15

2 2 2 2 2

Vi kan bruke metoden. De to neste leddene er 140 og 204 ved å følge metoden tilsvarende som f.eks. i løsningen av oppgave a og c.

e

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & & 1 & & 2 & & 3 & & 5 & & 8 & & 13 & & 21 \\
& 0 & & 1 & & 1 & & 2 & & 3 & & 5 & & 8 & \\
& & 1 & & 0 & & 1 & & 1 & & 2 & & 3 & & \\
& & & 1 & & 1 & & 0 & & 1 & & 1 & & &
\end{array}$$

Fibonaccitallene blir bare forskjøvet litt for hver rad. Vi kommer aldri ned til en rad der alle tall er like, og kan ikke bruke metoden.

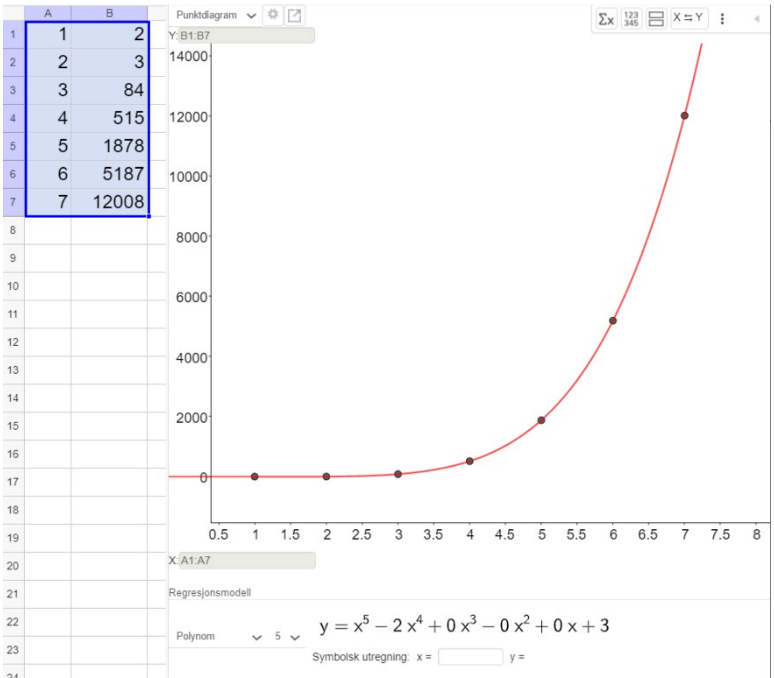
f

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
2 & & 3 & & 84 & & 515 & & 1878 & & 5187 & & 12\,008 & & 24\,579 & & 45\,930 \\
& 1 & & 81 & & 431 & & 1363 & & 3309 & & 6821 & & 12\,571 & & 21\,351 & \\
& & 80 & & 350 & & 932 & & 1946 & & 3512 & & 5750 & & 8780 & & \\
& & & 270 & & 582 & & 1014 & & 1566 & & 2238 & & 3030 & & & \\
& & & & 312 & & 432 & & 552 & & 672 & & 792 & & & & \\
& & & & & 120 & & 120 & & 120 & & 120 & & & & &
\end{array}$$

Vi kan bruke metoden. De to neste leddene er 24 579 og 45 930 ved å følge metoden tilsvarende som f.eks. i løsningen av oppgave a og c.

1.115

a Vi gjør regresjonen i GeoGebra.



En eksplisitt formel er $a_n = n^5 - 2n^4 + 3$.

b I oppgave 1.114f måtte vi 5 rader ned før vi fikk den konstante differansen 120. Derfor måtte den eksplisitte formelen for a_n være et femtegradsuttrykk, slik at hvis vi deriverer det (vi ser på differansen) 5 ganger, får vi en konstant. Denne konstanten er den samme som differansen 120 i siste linje.

1.116

a $$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{\left(n^2+n\right)(2n+1)}{6}=\frac{2n^3+n^2+2n^2+n}{6}=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$$

b
$$s_1=1$$
$$s_2=1+4=5$$
$$s_3=1+4+9=14$$
$$s_4=1+4+9+16=30$$
$$s_5=1+4+9+16+25=55$$

c

1		4		9		16		25
	3		5		7		9	
		2		2		2		

d Vi må to rader ned før vi får den konstante differansen 2. Derfor måtte den eksplisitte formelen for a_n være et andregradsuttrykk, slik at hvis vi deriverer det to ganger får vi en konstant. Denne konstanten er den samme som differansen 2 i siste linje.

e Lar vi n være 0, så finner vi summen av 0 ledd. Dette må være 0, men da må konstantleddet være 0.

f
$$s_n=an^3+bn^2+cn$$
$s_1=1$ gir $a+b+c=1$

$s_2=5$ gir $8a+4b+2c=5$

$s_3=14$ gir $27a+9b+3c=14$

g
$$a+b+c=1$$
$$8a+4b+2c=5$$
$$27a+9b+3c=14$$

Fra likning (1) får vi $c=1-a-b$. Vi putter dette inn i (2) og (3).

$$8a+4b+2(1-a-b)=5$$
$$6a+2b=3 \qquad (4)$$

$$27a+9b+3(1-a-b)=14$$
$$24a+6b=11 \qquad (5)$$

Så tar vi likning (5) minus 3 av likning (4).

$$-18a-6b=-9$$
$$24a+6b=11$$

Legger vi disse sammen, får vi

$$6a=2$$
$$a=\frac{1}{3}$$

Vi putter $a = \frac{1}{3}$ inn i (4).

$$\begin{aligned} 6 \cdot \frac{1}{3} + 2b &= 3 \\ 2 + 2b &= 3 \\ 2b &= 1 \\ b &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Til slutt putter vi $a = \frac{1}{3}$ og $b = \frac{1}{3}$ inn i $c = 1 - a - b$.

$$c = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{6}{6} - \frac{2}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$$

Vi får som løsning $a = \frac{1}{3} \quad \wedge \quad b = \frac{1}{2} \quad \wedge \quad c = \frac{1}{6}$ som gir $s_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$.

1.117

a Ved første klikk roterer vi sirkelskiva 90 grader. Ved andre klikk $90 \cdot 2$ osv. Et uttrykk blir derfor $a_n = 90n$.

b Vi finner først s_{10} for å se hvor mange grader sirkelskiva har rotert etter 10 klikk.
Rekka er aritmetisk og $a_{10} = 900$.

$$s_{10} = \frac{90 + 900}{2} \cdot 10 = 495 \cdot 10 = 4950$$

Så må vi finne ut hvor mange omløp 4950 grader tilsvarer.

$$\frac{4950}{360} = 13{,}75$$

Sirkelskiva er rotert 13,75 omløp.

c 10 omløp er det samme som 3600 grader.
Vi må løse ulikheten $s_n > 3600$.

$$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{90 + 90n}{2} \cdot n = (45n + 45) \cdot n = 45n^2 + 45n$$

$$\begin{aligned} s_n &> 3600 \\ 45n^2 + 45n &> 3600 \\ n^2 + n &> 80 \\ n(n+1) &> 80 \end{aligned}$$

Vi må ha to positive påfølgende heltall slik at produktet er større enn 80.
$8 \cdot 9 = 72$ som er for lite. Det må derfor klikkes mer enn 8 ganger. $9 \cdot 10 = 90$, som er mer enn 80.
Etter 9 klikk har sirkelskiva rotert mer enn 10 omløp.

1.118

Vi finner først et uttrykk for a_n. $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = -2 + (n-1) \cdot 5 = -2 + 5n - 5 = 5n - 7$

Så finner vi et utrykk for s_n.

$$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{-2 + (5n - 7)}{2} \cdot n = \frac{5n - 9}{2} \cdot n = \frac{5n^2 - 9n}{2}$$

Vi løser likningen $s_n = 495$:

$$
\begin{aligned}
s_n &= 495 \\
\frac{5n^2 - 9n}{2} &= 495 \\
5n^2 - 9n &= 990
\end{aligned}
$$

Vi løser likningen i CAS.

$5n^2 - 9n = 990$

1 Løs:

$\left\{ \mathbf{n = \frac{-66}{5}, n = 15} \right\}$

$n = 15$.

1.119

La $s_a = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Det gir $s_b = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = (a_1 + 2) + (a_2 + 2) + \cdots + (a_n + 2) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + 2n = s_a + 2n$.

1.120

a Her kunne vi forklart ved hjelp av derivasjon, på samme måte som i oppgave 1.115b, men velger heller en algebraisk framgangsmåte.

Leddene i en aritmetisk rekke vil alltid være på formen $a_n = dn + (a_1 - d)$. Da blir summen

$s_n = \frac{a_1 + (dn + a_1 - d)}{2} \cdot n = \frac{d}{2}n^2 + \left(\frac{2a_1 - d}{2}\right)n$, som er et annengradsuttrykk uten konstantledd.

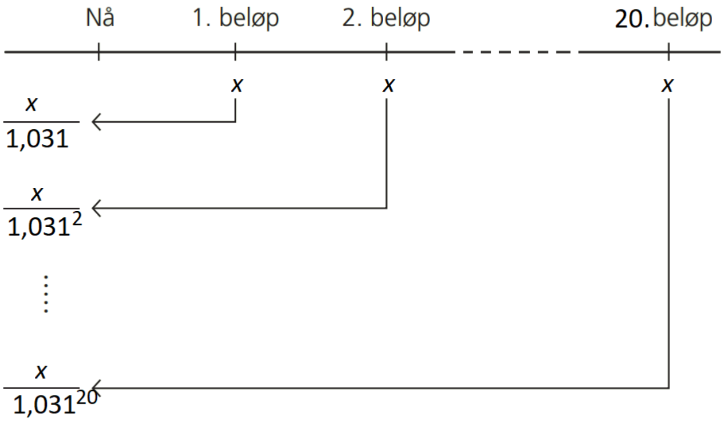
b Annengradskoeffisienten over er $\frac{d}{2}$. Da er $p = \frac{d}{2} \Rightarrow d = 2p$.

Førstegradskoeffisienten over er $\frac{2a_1 - d}{2}$. Da er

$$
\begin{aligned}
q &= \frac{2a_1 - d}{2} \\
2q &= 2a_1 - d \\
2a_1 &= 2q + d \\
2a_1 &= 2q + 2p \\
a_1 &= q + p
\end{aligned}
$$

1.121

Vi lager et tidsskjema med nåverdi for å få oversikt over informasjonen.

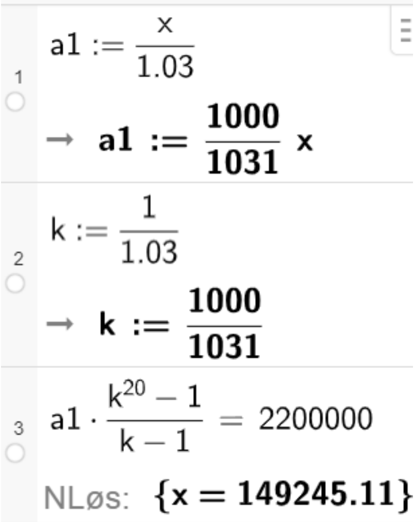


Vi ser at beløpene danner den geometriske rekka $\frac{x}{1{,}031}+\frac{x}{1{,}031^2}+\cdots+\frac{x}{1{,}031^{20}}$.

$a_1=\frac{x}{1{,}031}$, $k=\frac{1}{1{,}031}$ og $n=20$.

Vi må løse likningen $s_{20}=2\,200\,000$

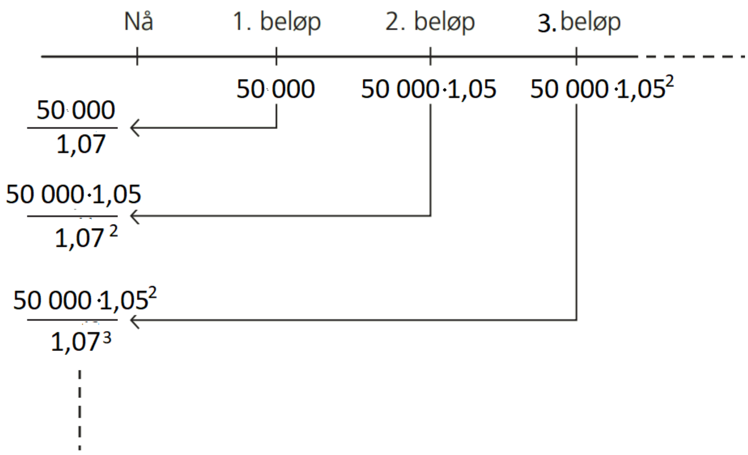
Vi løser likningen i CAS.



Terminbeløpet blir 149 245 kr.

1.122

a Vi lager et tidsskjema med nåverdi for å få oversikt.



Beløpene danner den uendelige og konvergente geometriske rekka

$$\frac{50\,000}{1{,}07}+\frac{50\,000\cdot 1{,}05}{1{,}07^2}+\frac{50\,000\cdot 1.05}{1{,}07^3}+\cdots.$$

$a_1=\frac{50\,000}{1{,}07}$, $k=\frac{1.05}{1{,}07}$. Vi finner summen s.

$$s=\frac{a_1}{1-k}=\frac{\frac{50\,000}{1{,}07}}{1-\frac{1.05}{1{,}07}}=2\,500\,000$$

Fondet må være på 2 500 000 kr.

b Hvis avkastningen bare er på 4 %, vil kvotienten $k = \frac{1{,}05}{1{,}04}$ som er større enn 1. Altså er ikke lenger rekka konvergent, slik at s går mot uendelig. Fondet må altså være uendelig stort for ikke å gå tomt til slutt.

1.123

a $0{,}111 = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{10^i}$

b $0{,}33\,333 = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10\,000} + \frac{3}{100\,000} = \sum_{i=1}^{5} \frac{3}{10^i}$

c $0{,}121212 = \frac{12}{100} + \frac{12}{10\,000} + \frac{12}{1\,000\,000} = \sum_{i=1}^{3} \frac{12}{100^i}$

d $0{,}123\,123 = \frac{123}{1000} + \frac{123}{1\,000\,000} = \sum_{i=1}^{2} \frac{123}{1000^i}$

e $5555 = 5 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^3 = \sum_{i=0}^{3} 5 \cdot 10^i$

f $77{,}777 = 7 \cdot 10^{-3} + 7 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^1 = \sum_{i=-3}^{1} 7 \cdot 10^i$

1.124

a $a_1 = s_1 = 1^3 + 1^2 = 1 + 1 = 2$

$a_2 = s_2 - s_1 = (2^3 + 2^2) - 2 = (8 + 4) - 2 = 12 - 2 = 10$

$a_3 = s_3 - s_2 = (3^3 + 3^2) - 12 = (27 + 9) - 12 = 36 - 12 = 24$

b Først kan vi observere at tar vi summen av de $n - 1$ første leddene og legger til ledd nummer n, får vi summen av de n første leddene: $s_{n-1} + a_n = s_n$.

Omformer vi denne, får vi

$$s_{n-1} + a_n = s_n$$
$$a_n = s_n - s_{n-1}$$
$$s_n - s_{n-1} = a_n$$

c $a_n = s_n - s_{n-1} = \left(n^3 + n^2\right) - \left((n-1)^3 + (n-1)^2\right) = n^3 + n^2 - \left((n^3 - 3n^2 + 3n - 1) + (n^2 - 2n + 1)\right)$

$= n^3 + n^2 - n^3 + 3n^2 - 3n + 1 - n^2 + 2n - 1 = 3n^2 - n$

$a_n = 3n^2 - n$

1.125

a Dette er en geometrisk rekke med $s_n = 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = \frac{2^n - 1}{1} = 2^n - 1$.

$$s_n > 10\,000\,000$$
$$2^n - 1 > 10^7$$
$$2^n > 10^7 + 1$$

b $\lg\left(10^7+1\right) \approx \lg 10^7 = 7$

c $2^n > 10^7 + 1$

$n \cdot \lg 2 > \lg\left(10^7+1\right)$

$n > \dfrac{\lg\left(10^7+1\right)}{\lg 2} \approx \dfrac{7}{0{,}3} \approx 23{,}3$

Analytisk ser vi at vi må ha med minst 24 ledd. Vi prøver med et program også.

```
a = 1          # verdi av a₁
k = 2          # verdi av kvotient
sum = 0
antall = 0     # antall ledd i rekka

while sum <= 10**7:
    sum = sum + a
    a = a*k
    antall = antall + 1

print(antall)
```

Kjøring av programmet gir at antall ledd er 24.

1.126

a $p_1 = 1^2 = 1$

$p_2 = 2^2 + p_1 = 4 + 1 = 5$

$p_3 = 3^2 + p_2 = 9 + 5 = 14$

$p_4 = 4^2 + p_3 = 16 + 14 = 30$

$p_5 = 5^2 + p_4 = 25 + 30 = 55$

b Pyramidene er satt sammen av kvadrater oppå hverandre der kvadrat n består av n^2 kuber. Pyramide n er satt sammen av kvadrat 1, kvadrat 2 osv. til og med kvadrat n.

Altså blir $p_n = k_1 + k_2 + \cdots + k_n = 1 + 4 + 9 + \cdots + n^2$

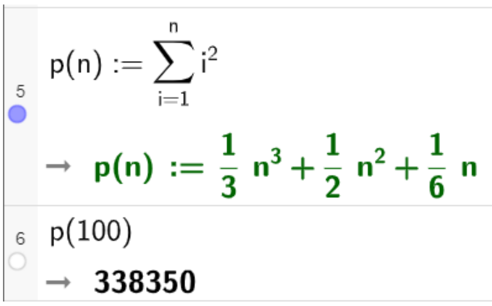
c $p_{100} = \sum_{i=1}^{100} i^2$

4 $\sum_{i=1}^{100} i^2$

$\rightarrow$ **338350**

Pyramidetall 100 er 338 350.

d Vi bruker CAS i GeoGebra.



Formelen er $p_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$, som igjen gir p_{100} = 338 350.

e
```
sum = 0
for n in range(1,101):
    K_n = n**2
    sum = sum + K_n
print(sum)
```

1.127

Det første leddet får vi ved å la n være 2 i det generelle uttrykket $\frac{2}{n^2-1}$. Lar vi n være 1, blir nevneren 0. Altså kan det virke som om formelen gjelder for alle naturlige tall større enn 1. Vi prøver å bevise dette ved induksjon.

Utsagnet for n = 2 gir $\frac{2}{2^2-1} = \frac{3}{2} - \frac{2\cdot2+1}{2^2+2}$, som er sant fordi $\frac{2}{2^2-1} = \frac{2}{3}$ og $\frac{3}{2} - \frac{2\cdot2+1}{2^2+2} = \frac{3}{2} - \frac{5}{6} = \frac{9}{6} - \frac{5}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Vi antar at utsagnet er sant for et naturlig tall $n = k$, altså at

$$\frac{2}{2^2-1} + \frac{2}{3^2-1} + \frac{2}{4^2-1} + \cdots + \frac{2}{k^2-1} = \frac{3}{2} - \frac{2k+1}{k^2+k}$$

Vi må vise at utsagnet da også er sant for $n = k + 1$, altså at

$$\frac{2}{2^2-1} + \frac{2}{3^2-1} + \frac{2}{4^2-1} + \cdots + \frac{2}{k^2-1} + \frac{2}{(k+1)^2-1} = \frac{3}{2} - \frac{2(k+1)+1}{(k+1)^2+(k+1)}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{2k+3}{k^2+2k+1+k+1} = \frac{3}{2} - \frac{2k+3}{k^2+3k+2} = \frac{3}{2} - \frac{2k+3}{(k+1)(k+2)}$$

Vi summerer de $k+1$ første leddene. Det gir

$$\frac{2}{2^2-1}+\frac{2}{3^2-1}+\frac{2}{4^2-1}+\cdots+\frac{2}{k^2-1}+\frac{2}{(k+1)^2-1}=\frac{3}{2}-\frac{2k+1}{k^2+k}+\frac{2}{(k+1)^2-1}$$

Vi bruker antakelsen.

$$=\frac{3}{2}-\frac{2k+1}{k^2+k}+\frac{2}{k^2+2k+1-1}$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{2k+1}{k(k+1)}+\frac{2}{k(k+2)}$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{(2k+1)(k+2)}{k(k+1)(k+2)}+\frac{2(k+1)}{k(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{(2k+1)(k+2)-2(k+1)}{k(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{2k^2+5k+2-2k-2}{k(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{2k^2+3k}{k(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{k(2k+3)}{k(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{2k+3}{(k+1)(k+2)}$$

Vi har nå vist at utsagnet er sant for $n = k + 1$ under antakelsen at det er sant for $n = k$.
Vi har dermed bevist ved induksjon at utsagnet er sant for alle naturlige tall $n > 1$.

1.128

a $$\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}$$

$$=\ln\left(\cancel{2}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cdot\cdots\cdot\frac{\cancel{n}}{\cancel{n-1}}\cdot\frac{n+1}{\cancel{n}}\right)=\ln(n+1)$$

b Utsagnet for $n = 1$ gir $\ln 2$ som er sant fordi $\ln(1+1)=\ln 2$.

Vi antar at utsagnet er sant for et naturlig tall $n = k$, altså at

$$\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln(k+1)$$

Vi må vise at da er utsagnet også sant for $n = k + 1$, altså at

$$\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{k+1}\right)=\ln(k+2)$$

Vi summerer de $k+1$ første leddene. Det gir

$$\begin{aligned}\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{k+1}\right) &= \ln(k+1)\ +\ln\left(1+\frac{1}{k+1}\right) \qquad \text{Vi bruker antakelsen.}\\ &= \ln(k+1)+\ln\left(\frac{k+1}{k+1}+\frac{1}{k+1}\right)\\ &= \ln(k+1)+\ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right)\\ &= \ln\left((k+1)\left(\frac{k+2}{k+1}\right)\right)\\ &= \ln(k+2)\end{aligned}$$

Vi har nå vist at utsagnet er sant for $n = k + 1$ under antakelsen at det er sant for $n = k$.
Vi har dermed bevist ved induksjon at utsagnet er sant for alle naturlige tall n.

1.129

Vi skriver et program som skriver ut $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ for større og større verdier av n opp til $n = 100$.

```
a = 1
b = 1
n_slutt = 100

for n in range(n_slutt - 1):
    c = a + b
    a = b
    b = c
    print("For n =", n + 2, "blir forholdet", b/a, ".")
```

Kjøring av programmet gir at $\frac{f_{101}}{f_{100}} = 1{,}6180$. Faktisk viser det seg at fra og med $n = 13$ blir alle forholdene rundet av til fire desimaler lik 1,6180.

Vi regner ut det gylne snitt i GeoGebra.

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$\rightarrow 1.61803$$

Vi konkluderer med at forholdet nærmer seg det gylne snitt når n går mot uendelig.

1.130

Vi har $k(x) = \frac{x}{1-x}$.

Vi løser $-1<\dfrac{x}{1-x}<1$ for å finne konvergensområdet, men først ser vi at ulikheten kan omformes til $\dfrac{x^2}{(1-x)^2}<1$.

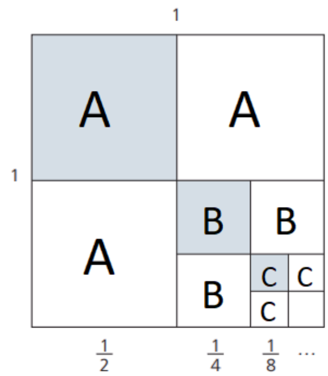
$\dfrac{x^2}{(1-x)^2}<1$ Vi kan multiplisere med $(1-x)^2$ på begge sider av ulikhetstegnet fordi $(1-x)^2$ alltid er positivt og x er ikke lik 1.

$$x^2<(1-x)^2$$
$$x^2-(1-x)^2<0$$
$$x^2-\left(1-2x+x^2\right)<0$$
$$x^2-1+2x-x^2<0$$
$$2x-1<0$$
$$2x<1$$
$$x<\frac{1}{2}$$

Konvergensområdet er $\left\langle \leftarrow, \dfrac{1}{2}\right\rangle$.

1.131

a Først er en firedel av kvadratet fargelagt. Det er $\dfrac{1}{4}$.



Så er en firedel av en firedel fargelagt. Det er $\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{16}$.

Så er en firedel av en sekstendel fargelagt. Det er $\dfrac{1}{16}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{64}$.

Osv.

Samtidig ser vi at det er $\dfrac{1}{3}$ av kvadratene merket med A som er fargelagt.

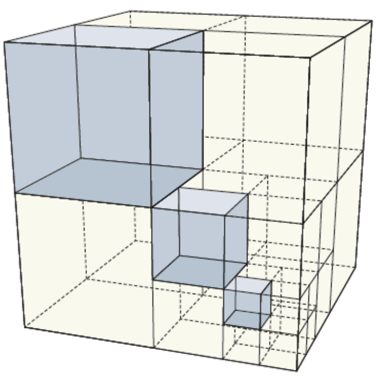
$\dfrac{1}{3}$ av kvadratene merket med B som er fargelagt.

$\dfrac{1}{3}$ av kvadratene merket med C som er fargelagt.

Osv.

Det illustrerer at $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{64}+\cdots=\dfrac{1}{3}$.

b Rekka kan illustreres av figuren til høyre.



Den største fargelagte kuben er $\dfrac{1}{8}$ av hele kuben.

Den nest største fargelagte kuben er $\frac{1}{8}$ av $\frac{1}{8}$ av hele kuben. Altså $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$.

Osv.

De fargelagte kubene danner rekka $\frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{1}{512} + \cdots$

Så ser vi at en av de sju kubene som ikke brukes til å lage flere mindre kuber, er fargelagt. Slik fortsetter det. For hver ny størrelse av kubene er det én av de sju som ikke brukes til å lage flere mindre kuber, som er fargelagt. Altså er en sjudel av den store kuben fargelagt. $\frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{1}{512} + \cdots = \frac{1}{7}$

c En metode vi kan bruke er summeformelen for konvergente geometriske rekker. Her kan det være litt forvirrende at k er en konstant i rekka, siden det vanligvis er k vi bruker på kvotienten. Uansett så er $a_1 = \frac{1}{k}$, og kvotienten er $\frac{1}{k}$. Vi kan legge merke til at kvotienten alltid vil være mellom 0 og 1 så lenge $k > 1$.

Den geometriske rekka er derfor konvergent.

$$s = \frac{a_1}{1 - \text{kvotient}} = \frac{\frac{1}{k}}{1 - \frac{1}{k}} = \frac{1}{k-1}$$ Her multipliserte vi over og under brøkstreken med k.

Vi kan også vise det med CAS.

1 $\text{Sum}\left(\left(\frac{1}{k}\right)^n, n, 1, \text{inf}\right)$

$\rightarrow \mathbf{\frac{1}{k-1}}$

1.132

a Hvis $a_n = C \cdot 2^n$, så er $a_{n+1} = C \cdot 2^{n+1} = C \cdot 2 \cdot 2^n = 2 \cdot C \cdot 2^n = 2a_n$.

b

$$a_1 = 1$$
$$C \cdot 2^1 = 1$$
$$C = \frac{1}{2}$$

Vi får $a_n = \frac{1}{2} \cdot 2^n = 2^{n-1}$. Da er $a_{n+1} = 2^{(n-1)+1} = 2^n = 2a_n$. Uttrykket passer inn i det rekursive uttrykket.

c Hvis vi følger den samme logikken, får vi at $b_n = C \cdot (-3)^n$.

$$b_1 = 2$$
$$C \cdot (-3)^1 = 2$$
$$C = -\frac{2}{3}$$

Det er følgen $b_n = -\frac{2}{3} \cdot (-3)^n$ som oppfyller differenslikningen.

1.133

a Siden de mister 5 % av seerne hver dag, så beholder de 95 %. På dag n er det t_n seere, og dagen etter vil det være 95 % av t_n, eller $0{,}95 \cdot t_n$. Da er $t_{n+1} = 0{,}95 \cdot t_n$.

b Vi får $t_n = C \cdot 0{,}95^n$.

$$t_1 = 1235\,000$$

$$C \cdot 0{,}95^1 = 1235\,000$$

$$C = \frac{1235\,000}{0{,}95}$$

$$C = 1300\,000$$

Det er følgen $t_n = 1300\,000 \cdot 0{,}95^n$ som gir antall seere på dag n.

c Vi løser likningen $t_n = 100\,000$ i CAS.

1. $t(n) := 1300000 \cdot 0.95^n$
   $\rightarrow \; t(n) := 1300000 \left(\frac{19}{20}\right)^n$
2. $t(n) = 100000, n = 1$
   NLøs: $\{n = 50.01\}$

Det er litt flere enn 100 000 seere på dag 50, altså sendes programmet i 51 dager.

1.134

a Med tre desimalers nøyaktighet er $\frac{\pi}{4} = 0{,}785$.

Vi prøver oss fram i CAS med forskjellige verdier av *n*.

1 $a(n) := \frac{(-1)^n}{2n+1}$

$\rightarrow\ a(n) := \frac{(-1)^n}{2n+1}$

2 $\sum_{n=0}^{1000} a(n)$

$\approx\ 0.7856479136$

3 $\sum_{n=0}^{2500} a(n)$

$\approx\ 0.7854981234$

4 $\sum_{n=0}^{2450} a(n)$

$\approx\ 0.7855001626$

5 $\sum_{n=0}^{2453} a(n)$

$\approx\ 0.7852962889$

6 $\sum_{n=0}^{2452} a(n)$

$\approx\ 0.7855000794$

7 $\sum_{n=0}^{2454} a(n)$

$\approx\ 0.7854999964$

Siden dette er en alternerende rekke, er det viktig å sjekke at to påfølgende verdien for den øvre summasjonsgrensen tilfredsstiller tilnærmingene. Vi ser at dette skjer nå øvre summasjonsgrense er 2453. Siden summasjonen begynner med $n = 0$, betyr det 2454 ledd.

b Med tre desimalers nøyaktighet er e = 2,718.
Vi prøver oss fram i CAS med forskjellige verdier av *n*.

1 $a(n) := \frac{1}{n!}$
$\rightarrow \mathbf{a(n) := \frac{1}{n!}}$

2 $\sum_{n=0}^{10} a(n)$
$\approx \mathbf{2.7182818011}$

3 $\sum_{n=0}^{5} a(n)$
$\approx \mathbf{2.7166666667}$

4 $\sum_{n=0}^{6} a(n)$
$\approx \mathbf{2.7180555556}$

5 $\sum_{n=0}^{7} a(n)$
$\approx \mathbf{2.7182539683}$

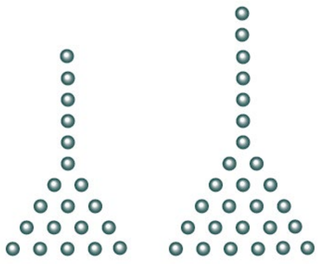
Det er i rute nummer 4 vi får den laveste verdien på *n*, som gir 3 desimalers nøyaktighet. Siden summasjonen begynner med $n = 0$, betyr det 7 ledd.

c Rekke nummer 2 konvergerer «raskere» enn rekke nummer 1. Det er fordi leddene i rekke nummer 2 blir små raskere. Legg merke til hvordan nevneren blir stor i rekke nummer 2 mye raskere enn i rekke nummer 1.

KAPITTELTEST

Oppgave 1

a



b De 6 første kan vi telle fra figurene. For den sjuende kan vi legge merke til at trekanten i figur nummer n danner trekanttall nummer n. Stolpen på toppen av figur n har høyde n.

$a_1 = 2$

$a_2 = 5$

$a_3 = 9$

$a_4 = 14$

$a_5 = 20$

$a_6 = 27$

$a_7 = T_7 + 7 = \frac{7 \cdot 8}{2} + 7 = 28 + 7 = 35$

c $E_n = T_n + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n = \frac{n^2 + n}{2} + \frac{2n}{2} = \frac{n^2 + 3n}{2}$

d

```
def E(n):
    return (n**2 + 3*n)/2

print(E(200))
```

Kjøring av programmet gir 20 300.

Oppgave 2

a Vi sjekker at kvotienten er den samme hele tiden.

$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{8}{5}}{2} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

$\frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{32}{25}}{\frac{8}{5}} = \frac{32}{25} \cdot \frac{5}{8} = \frac{32}{8} \cdot \frac{5}{25} = \frac{4}{1} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

$\frac{a_4}{a_3} = \frac{\frac{128}{125}}{\frac{32}{25}} = \frac{128}{125} \cdot \frac{25}{32} = \frac{128}{32} \cdot \frac{25}{125} = \frac{4}{1} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

Kvotienten er den samme mellom alle leddene og er mellom –1 og 1.

Altså er rekka konvergent og geometrisk.

b $s = \frac{a_1}{1-k} = \frac{2}{1-\frac{4}{5}} = \frac{2}{\frac{1}{5}} = 2 \cdot 5 = 10$

Oppgave 3

a $a_5 = a_2 + 3d$

$27 = 9 + 3d$

$18 = 3d$

$d = 6$

$a_1 = a_2 - d = 9 - 6 = 3$

Dette er den aritmetiske rekka med $a_1 = 3$ og $d = 6$.

b $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d = 3 + (n-1)\cdot 6 = 3 + 6n - 6 = 6n - 3$

c $a_n = 597$

$6n - 3 = 597$

$6n = 600$

$n = 100$

597 er ledd nummer 100 i rekka.

d $s_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2}\cdot n = \dfrac{3 + (6n-3)}{2}\cdot n = \dfrac{6n}{2}\cdot n = 3n^2$

e $s_n = 306$

$3n^2 = 306$

$n^2 = 102$

Men 102 er ikke et kvadrattall. Likningen har derfor ingen heltallig løsning. 306 kan ikke være summen av de n første leddene i rekka.

Oppgave 4

a Forholdet mellom to etterfølgende ledd er $4 - x$, så kvotienten er $k(x) = 4 - x$.

b Vi løser $-1 < 4 - x < 1$ for å finne konvergensområdet.

$-1 < 4 - x < 1$

$-5 < -x < -3$

$5 > x > 3$

$3 < x < 5$

Konvergensområdet er $\langle 3\,,5\rangle$.

c $s(x) = \dfrac{a_1}{1 - k(x)} = \dfrac{1}{1-(4-x)} = \dfrac{1}{x-3}$

d Vi løser likningen:

$$\begin{aligned}
s(x) &= 2\\
\frac{1}{x-3} &= 2\\
1 &= 2(x-3)\\
1 &= 2x-6\\
2x &= 7\\
x &= \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

$x=\frac{7}{2}$ er innenfor konvergensområdet og er derfor en gyldig løsning.

e Vi løser likningen:

$$\begin{aligned}
s(x) &= \frac{1}{3}\\
\frac{1}{x-3} &= \frac{1}{3}\\
1 &= \frac{x-3}{3}\\
3 &= x-3\\
x &= 6
\end{aligned}$$

$x = 6$ er utenfor konvergensområdet og er ikke en gyldig løsning, så ingen løsning.

Oppgave 5

Utsagnet for $n = 1$ gir $6=\frac{1\cdot(5\cdot 1+7)}{2}$, som er sant fordi $\frac{1\cdot(5\cdot 1+7)}{2}=\frac{12}{2}=6$.

Vi antar at utsagnet er sant for et naturlig tall $n = k$, altså at

$$6+11+16+21+\cdots+(5k+1)=\frac{k(5k+7)}{2}$$

Vi må vise at utsagnet da også er sant for $n = k + 1$, altså at

$$6+11+16+21+\cdots+(5k+1)+(5(k+1)+1)=\frac{(k+1)(5(k+1)+7)}{2}=\frac{(k+1)(5k+12)}{2}=\frac{5k^2+17k+12}{2}$$

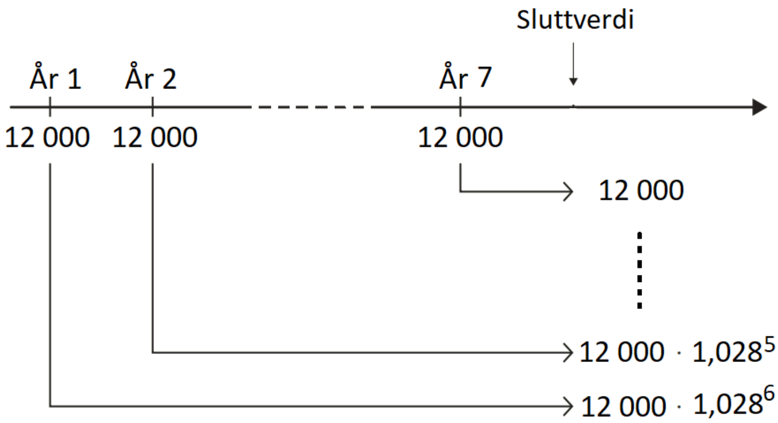
Vi summerer de $k+1$ første leddene. Det gir

$$\begin{aligned}
6+11+16+21+\cdots+(5k+1)+(5(k+1)+1) &= \frac{k\cdot(5k+7)}{2}+(5(k+1)+1) \qquad \text{Vi bruker antakelsen}\\
&= \frac{5k^2+7k}{2}+(5k+6)\\
&= \frac{5k^2+7k}{2}+\frac{2\cdot(5k+6)}{2}\\
&= \frac{5k^2+7k}{2}+\frac{10k+12}{2}\\
&= \frac{5k^2+7k+10k+12}{2}\\
&= \frac{5k^2+17k+12}{2}
\end{aligned}$$

Vi har nå vist at utsagnet er sant for $n = k + 1$ under antakelsen at det er sant for $n = k$.
Vi har dermed bevist ved induksjon at utsagnet er sant for alle naturlige tall n.

Oppgave 6

a Vi lager et tidsskjema med sluttverdi for å få oversikt over informasjonen.



Vi ser at beløpene danner den geometriske rekka $12\,000 + 12\,000 \cdot 1{,}028 + \cdots + 12\,000 \cdot 1{,}038^6$.

$a_1 = 12\,000$, $k = 1{,}028$ og $n = 7$.

$$s_7 = a_1 \frac{k^7 - 1}{k - 1} = 12\,000 \cdot \frac{1{,}028^7 - 1}{1{,}028 - 1} = 12\,000 \cdot \frac{1{,}028^7 - 1}{0{,}028} = 91\,395$$

Richard har 91 395 kr på konto i slutten rett etter det 7. innskuddet.

b Nå er n ukjent. Vi løser likningen $s_n = 170\,000$ i CAS.

$$12\,000 \cdot \frac{1{,}028^n - 1}{1{,}028 - 1} = 170\,000$$

1 $$12000 \cdot \frac{1.03^n - 1}{0.03} = 170000$$

NLøs: $\{n = 12.1\}$

Han passerer ikke 170 000 kr når han setter inn beløp nummer 12. Da passerer han enten 170 000 kr når rentene legges til i løpet av året, eller etter at beløp nummer 13 settes inn. Vi sjekker hvor mye han har på konto etter rett før det 13. innskuddet.

Da er $a_1 = 12\,000 \cdot 1{,}028$, $k = 1{,}028$ og $n = 12$.

2 $$12000 \cdot 1.028 \cdot \frac{1.028^{12} - 1}{0.028}$$

$\approx$ **173096.89**

Richard passerer 170 000 kr før det 13. innskuddet. Dette skjer altså i det 12. året. (Idet han får renter på slutten av det 12. året.)

Oppgave 7

Vi finner et uttrykk for ledd nummer n i den geometriske rekka. Vi lar utslippet i 1981 være u_1 og utslippet i 1990 være u_{10}. Vi finner vekstfaktoren k.

$$u_{10} = u_1 \cdot k^9$$

$$k^9 = \frac{u_{10}}{u_1}$$

$$k^9 = \frac{54\,000}{126\,000}$$

$$k^9 = \frac{3}{7}$$

$$k = \sqrt[9]{\frac{3}{7}}$$

$$k = 0{,}91$$

Det gir $u_n = 126\,000 \cdot 0{,}91^{n-1}$.

Vi finner summen i CAS i GeoGebra.

1 $\quad k := \sqrt[9]{\frac{3}{7}}$

$\approx \quad \mathbf{k := 0.91}$

2 $\quad \text{Sum}\left(126000 \cdot k^{n-1}, n, 1, 10\right)$

$\approx \quad \mathbf{855348.96}$

Det totale utslippet de 10 årene er på omtrent 855 000 tonn SO_2.

Oppgave 8

a Diametrene i sirklene danner rekka 64 + 32 + 16 + 8 + …

Dette er en konvergent geometrisk rekke med $k = \frac{1}{2}$ og $a_1 = 64$.

$$s = \frac{a_1}{1-k} = \frac{64}{1-\frac{1}{2}} = \frac{64}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 64 = 128$$

b Arealene av sirklene danner rekka

$$\pi \cdot 32^2 + \pi \cdot 16^2 + \pi \cdot 8^2 + \pi \cdot 4^2 + \cdots$$

$$= \pi \cdot 32^2 + \pi \cdot \left(\frac{32}{2}\right)^2 + \pi \cdot \left(\frac{32}{4}\right)^2 + \pi \cdot \left(\frac{32}{8}\right)^2 + \cdots$$

$$= \pi \cdot 32^2 + \pi \cdot 32^2 \left(\frac{1}{2^2}\right) + \pi \cdot 32^2 \left(\frac{1}{4^2}\right) + \pi \cdot 32^2 \left(\frac{1}{8^2}\right) + \cdots$$

$$= \pi \cdot 32^2 + \pi \cdot 32^2 \left(\frac{1}{4}\right) + \pi \cdot 32^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \pi \cdot 32^2 \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots$$

Dette er en konvergent geometrisk rekke med $k = \frac{1}{4}$ og $a_1 = \pi \cdot 32^2$.

$$s = \frac{a_1}{1-k} = \frac{\pi \cdot 32^2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\pi \cdot 32^2}{\frac{3}{4}} = \pi \cdot 32^2 \cdot \frac{4}{3} = \pi \cdot 32^2 \cdot \frac{4}{3} = \pi \cdot 1024 \cdot \frac{4}{3} = \frac{4096}{3}\pi$$