#5. Exprimer sign(x) en utilisant des fonctions indicatrices

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{sign}(x) = \mathbb{1}_{\{x>0\}}(x) - \mathbb{1}_{\{x<0\}}(x)$$

#6 Écrire la dérivée de abs(x) = |x|
Note: abs'(0) = 0 et utiliser la fonction sign

$\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| = \sqrt{x^2} \Rightarrow \dfrac{d\,|x|}{dx} = \dfrac{d\,(x^2)^{1/2}}{dx} = \dfrac{1}{2} \cdot (x^2)^{-1/2} \cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2}} = \dfrac{x}{|x|}$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \Rightarrow |x| = x\,\text{sign}(x)$$

$\text{abs}'(x) = \dfrac{x}{x\,\text{sign}(x)} = \dfrac{1}{\text{sign}(x)}$ mais on veut que $\text{abs}'(0) = 0$

Alors, on écrit $\text{abs}'(x) = \text{sign}(x)$

#7. Écrire la dérivée de $\text{rect}(x) = \max(0, x) = x . \mathbb{1}_{\{x>0\}}(x)$
Note: rect'(0) = 0 et utiliser une fonction indicatrice

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{Alors, } \text{rect}'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \text{rect}'(x) = \mathbb{1}_{\{x>0\}}(x)$