TD1 : Arbres couvrants

vendredi 3 septembre 2021 09:35

Exercice 1.
Ci-dessous, nous disposons de cables ethernet en quantité suffisante, mais ni de hub ni de switch pour connecter les ordinateurs entre eux.

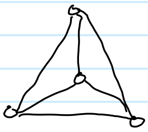
Q1. Est-il possible de relier 15 ordinateurs de sorte que chaque appareil soit relié à exactement 3 autres ?

Q2. Est-il possible de relier 4 ordinateurs les uns aux autres sans que les cables ne se croisent ?

Q3. Et 5 ordinateurs ? Et plus encore ?

Q1) Faux, car la somme des degrés des sommet est paire et que $3 \times 15 = 45 \equiv 1 [2]$

Q2)



Q3) Non, 4 zones à tester depuis la $\boxed{Q2}$ toutes KO.

Exercice 2.
Montrez que dans toute assemblée de n personnes au moins 2 ont le même nombre d'amis présents.

Raisonnons par l'absurde : si tous les degrés sont différents ($V=\{v_1, \dots, v_n\}$), alors on peut supposer $d(v_1)=0, \dots, d(v_n)=n-1$ car $d(v) \in \{0, \dots, n-1\}$. Impossible car $d(v_n) = n-1$ implique $d(v_1) \geq 1$.

Exercice 3. *Q1.* Combien d'arêtes peut comporter un graphe simple à n sommets au maximum ?

Q2. Combien existe-t-il de graphes simples différents à 4 sommets ? à n sommets ?

Q1) $\sum_{k=1}^{n-1} k = \alpha = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \underbrace{\binom{n}{2} = \frac{n!}{2(n-2)!}}_{\text{nb de paires de sommets}} = \frac{n(n-1)}{2}$

Q2) $\sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k}$

Pour $k \in \{0 \dots \frac{n(n-1)}{2}\}$, il y a $\binom{\frac{n(n-1)}{2}}{k}$ graphes différents à k arretes.

Tous les graphes différents $= \sum_{k=0}^{\frac{n(n-1)}{2}} \binom{\frac{n(n-1)}{2}}{k} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$

Exercice 4.
Soit $G = (V, E)$ un graphe.

Q1. Montrer que la somme des degrés des sommets de G est égale à deux fois son nombre d'arêtes.

Q2. En déduire que G a un nombre pair de sommets de degré impair.

1) Soit l'arrête $v_1 v_2$ augmente de 1 le degré de v_1 et de 1 le degré de v_2.
Donc $\sum_v d(v) = 2|E|$

2) $\sum_v d(v) = \underbrace{\sum_{v | d(v) \equiv 0 [2]} d(v)}_{\text{paire}} + \underbrace{\sum_{v | d(v) \equiv 1 [2]} d(v)}_{\text{paire uniquement si le nombre de termes est paire}}$

Exercice 8.
Une entreprise est basée sur huit sites reliés par un sytème de cables. Le réseau ci-dessous, Figure A, donne la longueur (en kilomètres) de chaque tronçon.

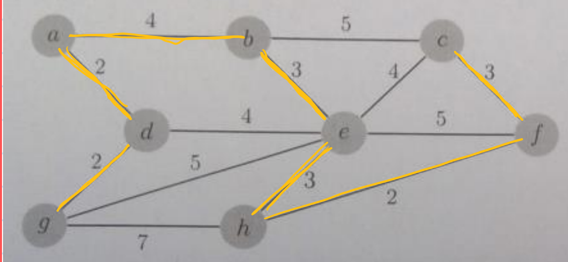


Figure A

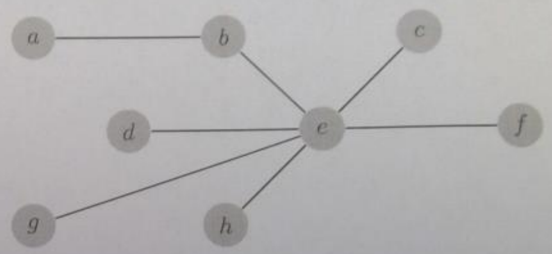


Figure B

L'hiver, à cause d'une tempête de neige, les communications sont coupées. Dans l'urgence, l'ingénieur système en chef doit décider quelles liaisons il faut rétablir pour que tous les sites soient accessibles et que le coût d'entretien soit le plus petit possible. On supposera que le coût d'entretien d'une liaison est proportionnel à la longueur du tronçon. Il propose la solution donnée par la Figure B ci-dessus.

Q1. Un jeune en stage de fin de L3 INFO propose d'utiliser un algorithme. Lequel d'après vous ?
Q2. Simuler son exécution sur le graphe de la Figure A.
Q3. Dessiner la solution renvoyée par l'algorithme.
Q4. Comparer son coût à celui de la solution de l'ingénieur système en chef. Notre étudiant a-t-il raison ?

1) Kruskal
2) On trie par poids : ~~ad~~, ~~dg~~, ~~hf~~, ~~be~~, ~~cf~~, ~~eh~~, ~~ab~~, ce, de, bc, ef, eg, gh
3) voir en jaune
4) $2+2+4+3+3+2+3 = 19$ $\quad 19 < 28$ L'étudiant a raison.
$4+3+4+5+3+5+4 = 28$

Exercice 9.
Les Eaux et Forêts ont décidé d'abattre 8 bosquets situés dans une forêt. Les distances mutuelles entre ces bosquets sont données (en km) dans la matrice ci-dessous :

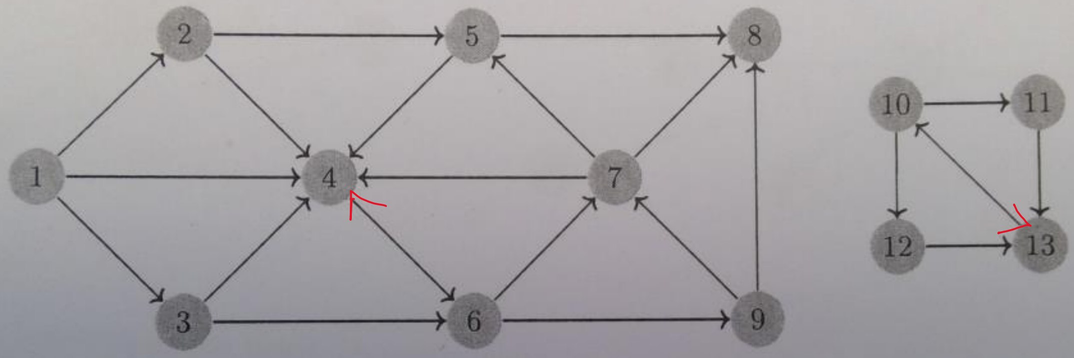
	1	2	3	4	5	6	7	8
1		2.6	4.2	1.8	1.4	3.6	4	3
2	2.6		1.8	3.6	2.4	5.2	4.6	2.2
3	4.2	1.8		5.2	3.4	5	3.8	2
4	1.8	3.6	5.2		1.4	3.2	3	1.8
5	1.4	2.4	3.4	1.4		1.8	2.1	1.6
6	3.6	5.2	5	3.2	1.8		1.2	2
7	4	4.6	3.8	3	2.1	1.2		1
8	3	2.2	2	1.8	1.6	2	1	

Pour mener à bien cette opération, il faut tracer un réseau de chemins qui permette de se rendre de tout bosquet à tout autre bosquet. Les coûts de construction de ces chemins sont proportionnels à leurs longueurs. Quel réseau proposeriez-vous de construire pour minimiser les coûts de construction ?

TD2 : Parcours

vendredi 3 septembre 2021 15:18

Exercice 1.
Soit $D = (V, A)$ le graphe orienté suivant.

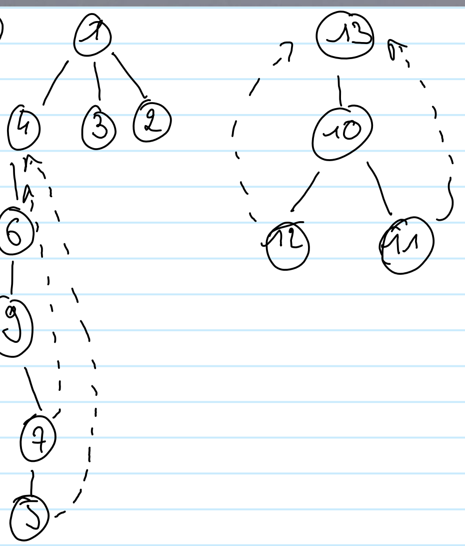


Q1. Faire un parcours en profondeur à partir du sommet 1 en prenant le sommet de plus grand indice lorsqu'il y a le choix.

Q2. Utiliser la réponse précédente pour montrer que D contient des circuits.

Q3. Modifier l'orientation de deux arcs afin de rendre le graphe D sans circuit.

Q1)



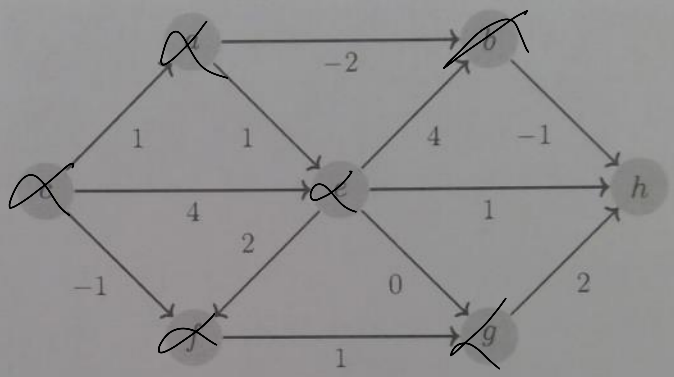
Q2) On a (5,4) donc on a des circuits. On a aussi (12,13) et (11,13)

Q3)

TD3 : Bellman

mardi 14 septembre 2021 10:26

Exercice 1.
Soit G le graphe orienté suivant.



Q1. Le graphe G admet-il un tri topologique ?

Q2. Appliquer l'algorithme de Bellman pour obtenir les plus courts chemins partant du sommet c.

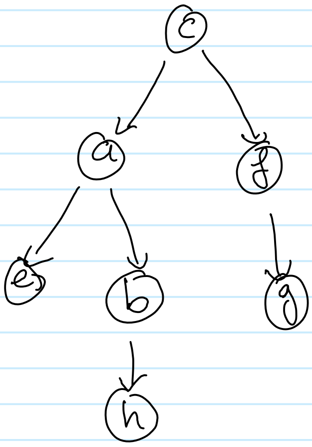
Q3. Donner l'arborescence des plus courts chemins obtenue.

1) Le graphe ne possède pas de circuits. Il admet donc un tri topologique.

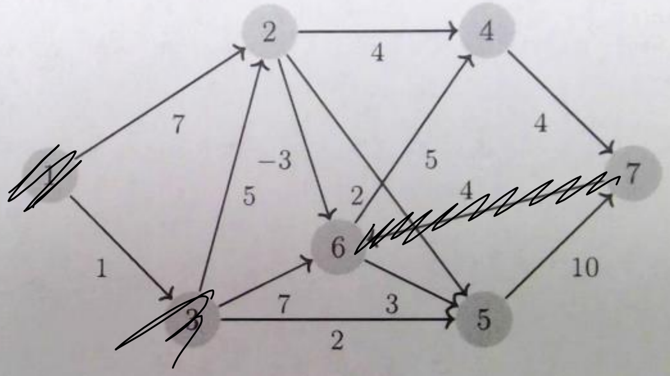
2) Tri topologique : c a e f b g h

Sommet	c	a	e	f	b	g	h
λ	0	1	2	−1	−1	0	−2
pred	/	c	a	c	a	f	b

3)



Exercice 2.
Soit G le graphe orienté suivant.



Q1. Peut-on appliquer l'algorithme de Bellman pour trouver les plus courts chemins à partir du sommet 1 ?

Q2. Supprimer un nombre minimum d'arcs pour pouvoir le faire.

Q3. Appliquer l'algorithme de Bellman pour obtenir les plus courts chemins partant du sommet 1.

Q4. Comment obtenir les plus courts chemins partant du sommet 2 ?

1) Il existe un circuit (5-6-7) donc non.

2) On supprime (7,6)

3)

Tri topologique :	1	3	2	6	4	5	7
λ	0	1	6	3	8	3	12
pred	/	1	3	2	6	3	4

4) On applique Bellman en enlevant 1 et 3 du tri topo.

	2	6	4	5	7
λ	0	−3	2	0	6
pred	/	2	6	6	4

Exercice 3.

Un navigateur doit aller du port A au port L. Pour cela plusieurs étapes intermédiaires sont possibles. D'après les cartes et les prévisions météorologiques, il a déterminé un nombre représentant le risque de ne pas pouvoir effectuer le parcours entre deux étapes ; ces nombres sont présentés dans le tableau suivant (lorsqu'un nombre n'est pas donné, c'est qu'il n'est pas possible d'aller d'un port à l'autre).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
A		0.1	0.2									
B				0.3								
C				0.3	0.2							
D						0.7	0.1					
E						0.5	0.4					
F								0.9	0.6			
G									0.9			
H										0.8		
I										0.5	0.1	
J												0.4
K												0.9

Q1. Quel est le meilleur chemin s'il veut minimiser la somme des risques ?

Q2. Quel chemin lui conseilleriez-vous afin de minimiser le risque total ? Quelle hypothèse avez-vous faite pour ce faire ?

Exercice 4.

On considère le problème de minimisation suivant :

Entrée : des nombres $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Sortie : i et j avec $1 \leq i \leq j \leq n+1$ et tels que $\sum_{k=i}^{j-1} a_k$ soit minimum.

Q1. Donner un algorithme en $O(n^3)$ resolvant ce problème.

Q2. Améliorer la méthode de calcul précédente pour trouver un algorithme en $O(n^2)$.

Q3. Proposer un graphe dans lequel ce problème devient un problème de plus court chemin.

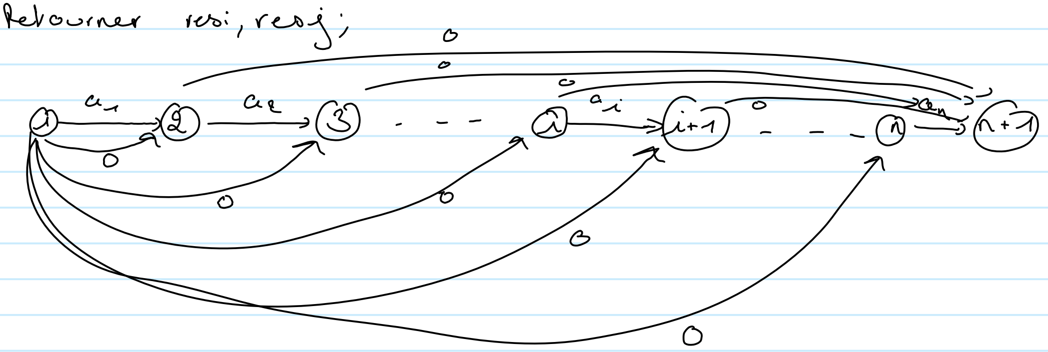
Q4. En déduire un algorithme en $O(n)$ resolvant le problème.

1)
```
Res = 0 ; resi = 1 ; resj = 1 ;
Pour i = 1 ... n
    Pour j = i ... n
        Somme = 0
        Pour k = i ... j-1
            Somme += a_k
        Si somme < res alors res = somme ; resi = i ; resj = j ;
Retourner resi, resj ;
```

2)
```
res = 0
resi = 1
```

2) res = 0
resi = 1
resj = 1
Pour i = 1 ..... n
    somme = 0
    Pour j = i+1, ... n
        somme += a_{j-1}
        Si somme < res alors res = somme ; resi = i ; resj = j
Retourner resi, resj ;

3)



4) Bellman

$O(|V| + |A|)$

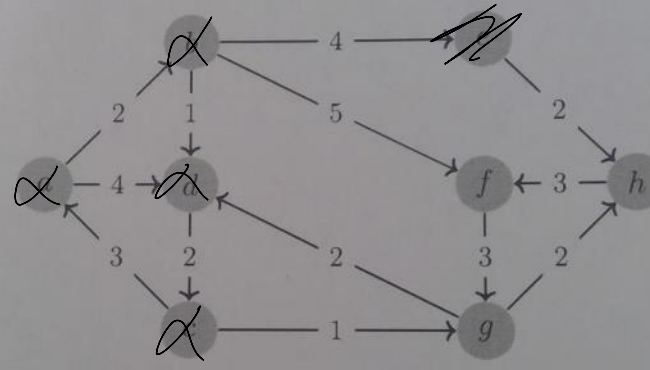
n   3n { n ->, n, n

Q1 Bourrin
Q2 Bourrin - Malin
Q3.4 Meurtre par graphe

TD4 : Dijkstra

mardi 14 septembre 2021 14:01

Exercice 1.
Soit G le graphe orienté suivant.



Q1. Appliquer l'algorithme de Dijkstra pour obtenir les plus courts chemins issus de a.

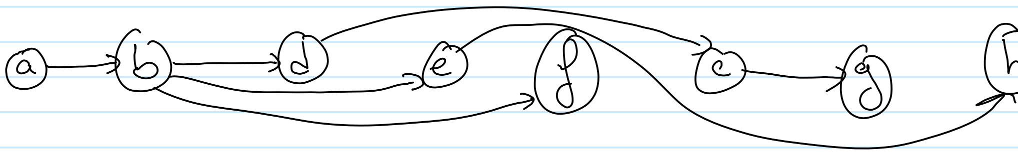
Q2. Dessiner l'arborescence des plus courts chemins obtenue.

Q3. Exhiber un graphe pour lequel l'algorithme de Dijkstra ne renvoie pas les plus courts chemins.

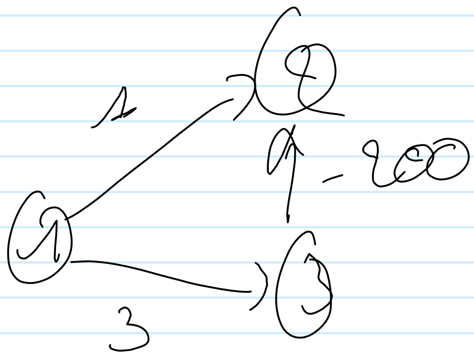
1)

Sommets marqués	Sommet courant	a	b	c	d	e	f	g	h
∅		0	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞	+∞
a	a		2	+∞	4	+∞	+∞	+∞	+∞
a, b	b			+∞	3	6	7	+∞	+∞
a, b, d	d			5		6	7	+∞	+∞
a, b, c, d	c					6	7	6	+∞
a, b, c, d, e	e						7	6	8
a, b, c, d, e, g	g						7		8
a, b, c, d, e, f, g	f								8

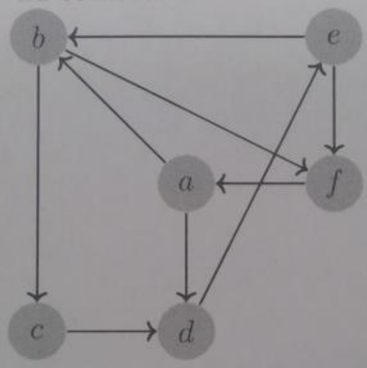
2)



3)



Exercice 3.
Dans le graphe orienté D ci-dessous, on cherche à déterminer le nombre minimum d'arcs pour atteindre chaque sommet à partir du sommet a.



Q1. Formuler le problème sous forme de recherche de plus courts chemins.

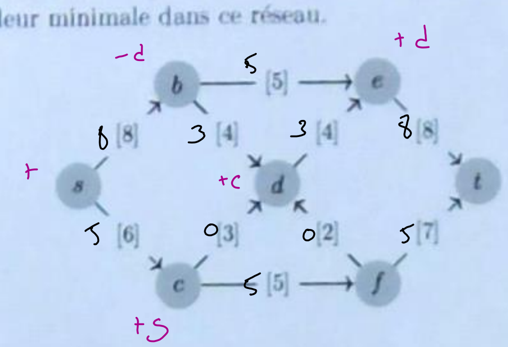
Q2. Résoudre le problème.

Mettre un poid de 1 partout et algo de + courts chemins

TD5 : Flots

mardi 21 septembre 2021 13:00

Exercice 1.
Appliquer l'algorithme de Ford-Fulkerson pour trouver un flot de valeur maximale dans le réseau ci-dessous. Déterminer une coupe de valeur minimale dans ce réseau.



Exercice 2.
Une société d'import-export dispose, dans les ports de Veracruz, São Paulo, Conakry et Abidjan, de stocks de café de respectivement $120t$, $100t$, $100t$ et $100t$, pour lesquels elle a reçu des commandes d'importateurs de Dunkerque ($100t$), Bordeaux ($80t$), Saint-Nazaire ($90t$) et Le Havre ($150t$).

Divers bateaux se rendent des ports étrangers considérés vers les ports français de destination. Les tonnages sont donnés dans le tableau suivant :

	Dunkerque	Bordeaux	Saint-Nazaire	Le Havre
Veracruz	70	30	20	
São Paulo	50	40	10	
Conakry		20	40	80
Abidjan		20	40	80

TABLE 1 – Tonnages des bateaux

Déterminer les diverses cargaisons de façon à satisfaire au mieux les demandes, les commandes destinées à Bordeaux et au Havre étant prioritaires.

Exercice 3.
Plusieurs familles souhaitent dîner ensemble. Mais pour développer leurs affinités, elles aimeraient qu'à chaque table, il y ait au plus un membre de chaque famille. Supposons que p familles dînent ensemble, que la famille i possède a_i membres et que la salle de réception comporte q tables de b_j places chacune. Montrer que ce problème peut se formuler comme un problème de flot maximum.

Exercice 4.
L'objectif est de partitionner un graphe non orienté en deux sous-ensembles de sommets non vides tels que le nombre d'arêtes entre ces deux ensembles soit minimal.

Comment peut-on résoudre ce problème ?

Exercice 1 :

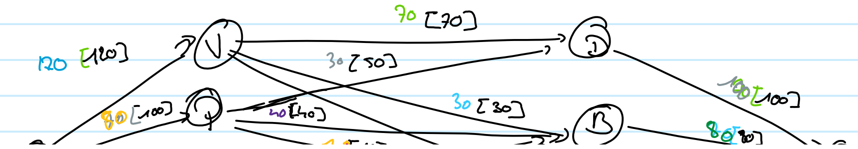
Itération 1. $s \xrightarrow{0[8]} b \xrightarrow{0[5]} e \xrightarrow{0[8]} t$ $\delta = \min\{8-0, 5-0, 8-0\} = 5$

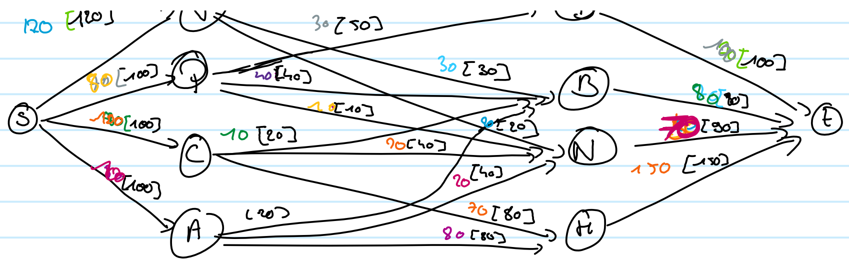
Itération 2 : $s \xrightarrow{0[6]} c \xrightarrow{0[5]} f \xrightarrow{0[7]} t$ $\delta = \min\{6-0, 5-0, 7-0\} = 5$

Itération 3 : $s \xrightarrow{5[8]} b \xrightarrow{0[4]} d \xrightarrow{0[4]} e \xrightarrow{5[8]} t$ $\delta = \min\{8-5, 4-0, 4-0, 8-5\} = 3$

Itération 4. Flot-max = 13 et coupure min = $\delta^-(s,b,c,d,e)$

Exercice 2 :





It 1 : $S \xrightarrow{0[100]} A \xrightarrow{0[80]} H \xrightarrow{0[150]} t$ $\delta = 80$

It 2 : $S \xrightarrow{0[100]} C \xrightarrow{0[90]} H \xrightarrow{80[150]} t$ $\delta = 70$

It 3 : $S \xrightarrow{0[100]} P \xrightarrow{0[40]} B \xrightarrow{[80]} H$ $\delta = 4$

It 4 : $S \xrightarrow{0[120]} V \xrightarrow{0[30]} B \xrightarrow{40[90]} H$ $\delta = 3$

It 5 : $S \xrightarrow{70[100]} C \xrightarrow{0[20]} B \xrightarrow{70[80]} A$ $\delta = 10$

It 6 : $S \xrightarrow{30[120]} V \xrightarrow{0[70]} D \xrightarrow{0[100]} t$ $\delta = 70$

It 7 : $S \xrightarrow{100[120]} V \xrightarrow{0[20]} N \xrightarrow{0[90]} t$ $\delta = 20$

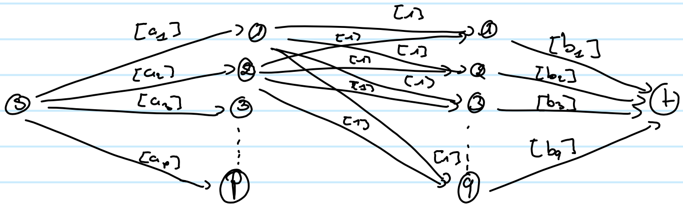
It 8 : $S \xrightarrow{40[100]} P \xrightarrow{0[50]} D \xrightarrow{70[100]} t$ $\delta = 30$

It 9 : $S \xrightarrow{70[100]} P \xrightarrow{0[10]} N \xrightarrow{20[30]} t$ $\delta = 10$

It 10 : $S \rightarrow C \rightarrow N \rightarrow t$ $\delta = 20$

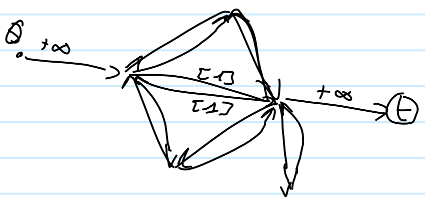
It 11 : $S \rightarrow A \rightarrow N \rightarrow t$ $\delta = 20$

Exercice 3



Exercice 4

Transformer le graphe non orienté en réseau de transport avec des arcs de capacité 1 et faire une coupure minimale.
On ajoute une source et un puit et pour chaque paire de sommet, on fait un st-coupe min.



On choisit tous les paires de sommets possible pr faire les st-coupes min

Exercice supplémentaire

1) Proposer un algo qui prend en entrée un graphe non orienté connexe $G = (V, E)$ et détermine s'il est biparti.

2) Idem en $O(|E|)$.

Coloration de graphe, si 2 couleurs → biparti

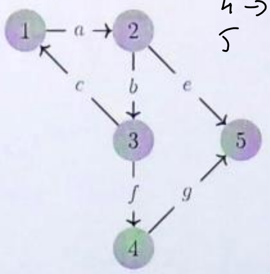
TD 6

vendredi 24 septembre 2021 10:24

Algorithmique des graphes :

Exercice 1.

Donner les trois représentations du graphe suivant.



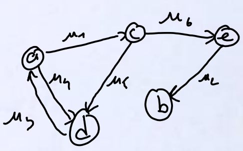
1 → 2
2 → 3 → 5
3 → 1 → 4
4 → 5
5

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.

Soit la matrice d'incidence représentant le graphe G :



	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
a	+1		−1	+1		
b		−1				
c	−1				+1	+1
d			+1	−1	−1	
e		+1				−1

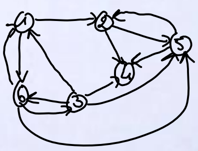
$d^-(a) = 1$ $d^+(a) = 2$
$d^-(b) = 1$ $d^+(b) = 0$
$d^-(c) = 1$ $d^+(c) = 2$
$d^-(d) = 2$ $d^+(d) = 1$
$d^-(e) = 1$ $d^+(e) = 1$

Q1. Quel est le degré entrant de chacun des sommets ?
Q2. Quel est le degré sortant de chacun des sommets ?
Q3. Quelle est la matrice d'adjacence associée à G ?
Q4. Dessiner le graphe G.

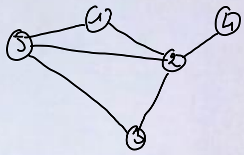
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.

Soit A et B les matrices suivantes :



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$



Q1. Tracer un graphe de matrice d'adjacence A.
Q2. B est-elle la matrice d'adjacence d'un graphe ? Non, elle n'est pas carrée
Q3. Tracer un graphe dont la matrice d'incidence est B.

Exercice 4.

$A_{u,v} = 1 \Leftrightarrow \exists e \in E \ |M_{u,e}| = |M_{v,e}| = 1$ $\quad O(|V|^2 + |V| \times |E|)$

Combien faut-il d'opérations pour passer d'une matrice d'incidence à une matrice d'adjacence ? Et l'inverse ?

Exercice 5.

Dans un graphe orienté $G = (V, E)$, un sommet est un *puits universel* s'il est de degré entrant $|V| - 1$ et de degré sortant 0. En supposant G donné par sa matrice d'adjacence, proposer un algorithme permettant de déterminer si G contient un puits universel.

On parcours la matrice, on cherche
i tel que la somme de la colonne $i = |V| - 1$
et la somme de la ligne $i = 0$.

(A^n) est le nombre de chemin de longueur n allant de u à v

$(A^n)_{uv}$ est le nombre de chemin de longueur n allant de u à v

Exercice 6.
Soit A la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté $G = (V, E)$. Que contiennent les matrices A^2, $A^3, \ldots, A^{n-1}$? et A^n ?

Exercice 7.
Il existe différentes manières de représenter les graphes. Nous citons les deux représentations suivantes :

a) — la représentation par `matrice d'adjacence` consiste en une matrice carrée M d'ordre n telle que $M_{ij} = 1$ si i, j est une arête (resp. si (i, j) est un arc) de G, $M_{ij} = 0$ sinon.

b) — la représentation par `liste d'adjacence` consiste en un tableau Adj de n listes. Pour tout sommet i de S, la liste $Adj[i]$ contient la liste des sommets j de S tels que i, j est une arête (resp. (i, j) est un arc) de G.

a -> $|V|^2$ b -> $O(|V| + |E|)$

Q1. Quelles est la taille en mémoire requise pour représenter un graphe de n sommets et m arêtes (resp. arcs) selon les deux représentations ?

Q2. Si G est non orienté, déterminer pour chacune des représentations, la complexité des primitives suivantes : a -> $O(1)$ b -> $O(|V|)$

(a) fonction `Adjacent(i,j : sommet) : booléen`, qui rend "vrai" si i et j sont adjacents.

(b) fonction `Degré(G : graphe; i : sommet) : entier`, qui calcule le degré du sommet i dans le graphe G. a -> $O(|V|)$ b -> $O(|V|)$

Q3. Si G est orienté, déterminer pour chacune des représentations, la complexité des primitives suivantes :

a -> $O(1)$ b -> $O(|V|)$

(a) fonction `Successeur(i,j : sommet) : booléen`, qui rend "vrai" si j est un successeur de i.

(b) fonction `Prédécesseur(i,j : sommet) : booléen`, qui rend "vrai" si j est un prédécesseur de i. a -> $O(1)$ b -> $O(|V|)$

(c) fonction `Degré Extérieur(G : graphe; i : sommet) : entier`, qui calcule le degré extérieur du sommet i de G. a -> $O(|V|)$ b -> $O(|V|)$

(d) fonction `Degré Intérieur(G : graphe; i : sommet) : entier`, qui calcule le degré intérieur du sommet i de G. a -> $O(|V|)$ $O(|V|+|A|)$

Q4. Le carré d'un graphe orienté est le graphe $G^2 = (S, A^2)$ tel que $(i, j) \in A^2$ si et seulement si il existe un sommet $k \in S$ tel que $(i, k) \in A$ et $(k, j) \in A$. Décrire les algorithmes permettant de calculer G^2 lorsque G est décrit par une matrice d'adjacence ou par une liste d'adjacence. Donner la complexité de ces algorithmes. a -> A^2 $O(|V|^3)$ b -> $O((|V|+|A|) \times |V|)$

Exercice 8.
Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe orienté $D = (V, A)$.

Q1. Que peut-on dire de M lorsque D satisfait $xy \in A \Leftrightarrow yx \in A$?

Q2. Que peut-on dire de $M + M^t$ lorsque D est satisfait $xy \in A \Rightarrow yx \notin A$?

Q3. Que peut-on dire de $M + M^t$ lorsque D est complet ?

Exercice 9.
Soit X la matrice d'incidence d'un graphe orienté $D = (V, A)$.

Q1. Que représente la matrice XX^t ?

Exercice 10.
On considère le graphe orienté $D = (V, A)$ dont les sommets sont les entiers $1, 3, 5, 6, 8, 12, 15, 24$ et dont l'ensemble des arcs représente la relation binaire $(i, j) \in A \Leftrightarrow i$ divise j et $i \neq j$.

Q1. Représenter le graphe en donnant pour chanque sommet la liste de ses prédecesseurs.

Q2. le graphe D possède-t-il des circuit ? Justifier votre réponse.

Q3. Le graphe D peut-il avoir plusieurs racines ? Si oui quelles sont-elles ? A quoi correspondent les racines d'un tel graphe ?