Einführung

in die

Spieltheorie

von

Prof. Dr. Wolfgang Leininger

und

PD Dr. Erwin Amann

Lehrstuhl Wirtschaftstheorie
Universität Dortmund
Postfach 500500
D-44221 Dortmund

To be literate in the modern age, you need to have a general understanding of game theory.
Paul Samuelson

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung in die (nicht-kooperative) Spieltheorie

1.1 Spieltheorie

Was ist Spieltheorie? Wie kommt sie zu ihrem (leicht irreführenden) Namen? Dazu ein kleiner historischer Exkurs:
Als Begründer der Spieltheorie als - wenn nicht eigenständiger Wissenschaft, so doch als eigenem Teilgebiet der Mathematik, gilt weithin der Mathematiker (und Universal-interessierte) John Neumann (*eigentlich:* Johann von Neumann).
Von Neumann wurde 1903 in Budapest geboren und starb 1957 in Princeton in den USA, wo er seit 1933 Professor am berühmten Institute for Advanced Study war. Dazwischen lagen Studium der Mathematik in Zürich und Berlin und Lehre in Berlin und Hamburg von wo er 1930 in die USA emigrierte. Im wissenschaftlichen Lebensweg dieses Giganten nimmt sich sein Beitrag zur Begründung der Spieltheorie eher wie eine Fußnote aus, doch sind die beiden Arbeiten aus seiner Bibliographie, die sich der Spieltheorie widmen, von nicht zu unterschätzender Bedeutung (vor allem weil von Neumann das Potential seiner Theorie, das sich nun langsam zu realisieren scheint, schon klar erkannt hat). [1]

In dieser Arbeit wird die grundlegende Bedeutung der mathematischen Theorie, die wir heute Spieltheorie nennen, für die Modellierung sozialer oder allgemein *interaktiver*

[1] V. Neumann, J. [1928]: Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, Mathematische Annalen, Bd. 100.

Phänomene nachgewiesen. Sie fußt auf der Beobachtung - und daher der Name Spieltheorie -, dass es erstaunliche Ähnlichkeiten in den *Verhaltens-* bzw. *Entscheidungsmustern* von als Teil sozialer Interaktion miteinander in Konkurrenz tretenden Individuen und den Verhaltensmustern bzw. *-strategien* von Spielern von Gesellschaftsspielen gibt, in denen Verhandlungen, Reize, Ankündigungen, Koalitionen und Gewinnbeteiligungen eine große Rolle spielen.
In diesen Spielen sind die Konsequenzen eines Spielzuges, z.B. das Ausspielen einer Karte oder Ziehen einer Schachfigur, nicht klar vorhersagbar, da sie *abhängig* vom Verhalten ("Gegenzug") weiterer Mitspieler sind, die der betreffende einzelne Spieler nicht kontrollieren kann. Bevor er sich für einen Zug entscheidet, der seinem Ziel des Spielgewinns dienen soll, muss er sich überlegen, wie sein(e) Gegenspieler, die auch gewinnen wollen, darauf reagieren können und welche Überlegungen diese ihrerseits vor einem (Antwort-) Zug anstellen werden bezüglich seines Zuges und seiner Überlegungen. VON NEUMANN schreibt [1928]: "Es hängt das Schicksal eines jeden Spielers außer von seinen eigenen Handlungen auch noch von denen seiner Mitspieler ab; und deren Benehmen ist von genau denselben egoistischen Motiven beherrscht, die wir beim ersten Spieler bestimmen möchten. Man fühlt, dass ein gewisser Zirkel im Wesen der Sache liegt."

Wirklich wichtig aber ist, dass er diese Zirkularität im Entscheidungsverhalten von *Spielern* genau wiedererkennt in der Entscheidungsproblematik ökonomischer Agenten (oder Entscheider), wenn er schreibt, dass diese Zirkularität, die wir als kennzeichnendes Merkmal eines *interaktiven Entscheidungsproblems* verstehen wollen, genau "das Hauptproblem der klassischen Nationalökonomie: Was wird unter gegebenen äußeren Umständen, der absolut egoistische 'homo oeconomicus' tun?" [2] berührt.

Spieltheorie = interaktive (d.h. Mehrpersonen-) Entscheidungstheorie.

VON NEUMANN hat später (1944) diese grundlegende Einsicht zusammen mit dem Ökonomen OSKAR MORGENSTERN in dem grundlegenden Werk *Theory of Games and Economic Behavior* ausgearbeitet, in dessen Einleitung es aus heutiger Sicht zunehmend weniger kühn und korrekt heißt:

> "this theory of games ... is the proper instrument with which to develop a theory of economic behavior".

[2] V. NEUMANN, J. [1928]: a.a.O.

Dieses Buch erscheint mittlerweile in der x-ten Auflage, und es gibt mittlerweile auch eine höchst angesehene internationale wissenschaftliche Zeitschrift, die 'Games and Economic Behavior' heißt.

Wiederholte Versuche, die auch noch bis heute andauern, Spieltheorie in das umzubenennen, was sie wirklich ist, nämlich *interaktive Entscheidungstheorie*, sind kläglich fehlgeschlagen. Es ist jedoch hilfreich, das Wesen der Spieltheorie als interaktiver (oder interdependenter) Entscheidungstheorie von Anbeginn an zu verstehen, wenn man sie der gängigen (und allgemein akzeptierten) Entscheidungstheorie gegenüberstellt.

Dies berührt in einem ganz entscheidenden Punkt die Volkswirtschaftslehre als Sozialwissenschaft. Sie ist nämlich nicht nur eine Sozialwissenschaft, sondern eine Wissenschaft in genuinem Sinne. Wie die Naturwissenschaften gebraucht sie eine Methodologie, die falsifizierbare Implikationen erzeugt, welche sie dann unter Gebrauch solider statistischer Techniken testet. Dabei legt sie besondere Bedeutung auf drei Faktoren, die sie letztlich von anderen Sozialwissenschaften unterscheidet:

1. Ökonomen gebrauchen das Konstrukt des rationalen Individuums, dessen Verhalten einem Maximierungskalkül entspringt.
2. Ökonomische Modelle betonen strikt die Bedeutung von Gleichgewicht als Teil einer Theorie.
3. Die Ausrichtung auf das Effizienzkriterium lässt Ökonomen Fragen stellen (und beantworten), die andere Sozialwissenschaften schlicht ignorieren.

Und genau diese drei Eigenschaften haben den Erfolg der Ökonomik bedingt, welcher sie heute als "Königin" der Sozialwissenschaften (mit oft beschimpften "imperialistischen" Neigungen in andere Gebiete) ausweist. Die Maximierungshypothese bedeutet, dass Maximierungsprobleme unter Nebenbedingungen als Bausteine der meisten Modelle dienen. Auch wenn eine solche Theorie empirisch falsifiziert wird und daher geändert (bzw. verworfen) werden muss, geschieht dies in der Regel durch ein Modell mit neuem Maximierungsansatz, selbst wenn der Maximand recht unorthodox sein sollte.

Diese Fixierung der Ökonomen auf das Maximierungskalkül hat einen simplen Grund: die Weigerung, davon auszugehen, dass Handelnde nicht wüssten, was sie tun, wenn sie etwas tun!

Dieser strikte methodische Standpunkt hat weitreichende pragmatische Konsequenzen: wenn man annimmt, dass Individuen "etwas" maximieren, kann für jeden Stimulus

eine wohldefinierte und *prognostizierbare* Reaktion ("response") abgeleitet werden und genau dies erlaubt, für *neu* auftretende Situationen Prognosen zu erstellen.

Andere Sozialwissenschaften, wie beispielsweise die Soziologie, die auf eine Maximierungshypothese verzichten, müssen aus genau diesem Grunde auf allgemeine Prognosefähigkeit ihrer Theorien verzichten und diese jeder neuen Situation neu anpassen. Wenn die spieltheoretische Methode also erlaubt, sowohl die für die Ökonomik charakteristische Rationalitäts- wie die Gleichgewichtshypothese auf interaktive Entscheidungsprobleme zu erweitern, wird diese eine enorme Ausdehnung der Anwendung ökonomischer Methodologie mit sich bringen. Genau dies scheinen VON NEUMANN und MORGENSTERN im Auge gehabt zu haben, und die folgende Vorlesung soll aufzeigen, wie berechtigt diese Sicht in der Tat war.

Die meisten mikroökonomischen Theorien einzelwirtschaftlicher Entscheidungen (siehe Vorlesung Mikroökonomie) sind formulierbar als (manchmal komplizierte) Optimierungsprobleme im Rahmen der klassischen Entscheidungstheorie, in der *eine* Entscheidungseinheit eine oder mehrere Entscheidungsvariable unter parametrisch fixierten Nebenbedingungen optimal zu steuern versucht.

(Klassische) Entscheidungsprobleme (neoklassischer Ansatz):

- Konsumverhalten:
  1. Arbeit / Freizeit - Entscheidung gegeben Nutzenfunktion und Budgetbeschränkung.
  2. Konsum / Sparen - Entscheidung gegeben (intertemporale) Nutzenfunktion und Budgetbeschränkung (Zinssatz).
- Produzentenverhalten:
  1. Faktoreinsatz - Entscheidung gegeben Produktionsfunktion, Faktorpreise und Outputziel.
  2. Gewinnmaximierung gegeben Outputpreis und Kostenfunktion.

Allen diesen ökonomischen Problemformulierungen ist gemeinsam, dass das Verhalten des *einen* Entscheiders zu klar bestimmten Konsequenzen bzw. Ergebnissen führt. Natürlich ist dies Folge der parametrisch festgeschriebenen Umweltbedingungen, so dass man im Rahmen dieser Theorie im allgemeinen rechtfertigen muss, warum der

ökonomische Agent keinen Einfluß auf die festgeschriebenen Größen (z.B. Preise) hat oder haben kann. Im Modell des vollständigen Wettbewerbs geschieht dies dadurch, dass durch die sehr große Zahl von Wettbewerbern auf der Konsumenten- wie der Produzentenseite der Einfluss des einzelnen auf diese Größen als verschwindend gering angenommen wird.

Im Allgemeinen kann eine solche parametrische Annahme an die Stationarität der Umwelt in überschaubarem sozialen Kontext jedoch nicht gemacht werden, und dann tritt genau VON NEUMANNS "Zirkularitätsproblem" auf: Das optimale Ergebnis für ein Individuum hängt nicht nur von dessen eigenen Entscheidungen und Handlungen ab, sondern auch von denen anderer, die ihrerseits das für sie bestmögliche Ergebnis zu erreichen suchen. Sofern es keine *objektive* Wahrscheinlichkeitsverteilung für das mögliche Verhalten der anderen als Schätzung gibt, liegt damit ein *interaktives Entscheidungsproblem* vor oder einfacher ausgedrückt: Eine Entscheidungssituation, die als *'Spiel'* formuliert bzw. dargestellt werden kann. Andernfalls hätte man es mit einem (klassischen) Entscheidungsproblem unter Unsicherheit zu tun.

(Interaktive) Entscheidungsprobleme:

- Firmenverhalten in einem Duopol:
  1. COURNOT - BERTRAND;
  2. mit Absprachen (Kartell) - ohne Absprachen.
- Oligopolverhalten (z.B. Wahl der Erdölfördermengen der OPEC-Staaten).
- Festsetzung von Steuer und Zollsätzen etc. (z.B. Quellensteuer und Reaktion des besteuerten Publikums).

In all diesen Entscheidungsproblemen gibt es mehr als *einen* Entscheider, da es unangebracht erscheint, die *gesamte* Umwelt eines einzelnen Entscheiders als parametrisch fixiert zu modellieren. Gleichzeitig tritt eine Abhängigkeit der mehreren individuellen Entscheidungsprobleme voneinander auf: Z.B. wird im zweiten obigen Problem Kuweits Festsetzung seiner Produktionsquote abhängig sein von Kuweits *Erwartung* über die Produktionsquote Saudi-Arabiens, welche wiederum von Saudi-Arabiens Schätzung oder Erwartung der Produktionsquote Kuweits abhängt. Beide Produktionsquoten *zusammen* dürften einen starken Einfluss auf den Weltmarktpreis für Rohöl haben. Diese

Annahme ist gerechtfertigt, da es sich bei diesen beiden Ländern um die größten und gewichtigsten Erdölanbieter handelt. Welche Produktionsquoten sollten Saudi-Arabien und Kuweit also (unabhängig voneinander) festlegen? Der Erlös für Kuweit aus irgendeiner Festlegung seiner Produktionsquote wird mitbestimmt durch die Festlegung der Produktionsquote Saudi-Arabiens und umgekehrt. Wie können die beiden Länder ihre individuellen Interessen nun am besten festlegen?

Dies ist die Frage nach der *Rationalität* einer Entscheidung in einem interaktiven Entscheidungsproblem.

Spieltheorie ist zunächst eine normative Theorie, *die jedem einzelnen Entscheider in einer interaktiven Entscheidungssituation aufzuzeigen versucht, wie er seine eigenen (egoistischen) Interessen in dieser Situation* rationalerweise *am besten verfolgen kann.* (› Weiterentwicklung des neoklassischen Ansatzes.)

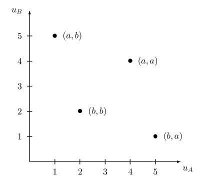
Die ermittelten Verhaltensempfehlungen für die einzelnen Teilnehmer an der interaktiven Entscheidungssituation müssen natürlich logischerweise miteinander konsistent sein, d.h. keiner der Teilnehmer sollte einen Anreiz haben vom empfohlenen Verhalten abzuweichen. Einen solchen Zustand würde man als 'selbst-bindend' oder 'strategisch-stabil' beschreiben können, da es keines irgendwie beschaffenen Verhaltenskontrollmechanismus bedürfte, um die Spieler (Teilnehmer) zur Einhaltung der Empfehlung zu bewegen. In der Sprache der Spieltheorie heißt eine Liste von Verhaltensempfehlungen mit dieser Eigenschaft ein *Gleichgewicht.* Die erste präzise Formulierung eines solchen Gleichgewichtbegriffes findet sich in VON NEUMANNs Arbeit von 1928 für sogenannte *2-Personen-Nullsummenspiele.* Die weitere Entwicklung der Spieltheorie kann als (erfolgreicher) Versuch der Erweiterung dieses Gleichgewichtsbegriffes auf allgemeinere interaktive Entscheidungsprobleme verstanden werden. Ist mit Hilfe einer solchen Gleichgewichtsdefinition erst einmal geklärt, was rationales Verhalten für einen Einzelnen in einer interaktiven Entscheidungssituation bedeutet, so kann man der ökonomisch höchst bedeutenden Frage nachgehen, ob die wohlverstandene Verfolgung egoistischer Interessen durch Einzelne auch in einer interaktiven Entscheidungssituation immer zu 'sozialer Effizienz' führt. Ein einfaches berühmtes Beispiel eines Spieles zeigt, dass dem nicht so sein muss:

Ein interaktives Entscheidungsproblem (= Spiel):
Das Gefangenendilemma (Prisoners' Dilemma):

- Zwei Spieler: A und B.
- Jeder Spieler kann eine von zwei Entscheidungen (Aktionen) treffen: a oder b. 'Gefangenen-Dilemma': a = Leugnen (Schweigen), b = Gestehen

Darstellung des Entscheidungsproblems in Matrix- bzw. *Bimatrixform:* [3]

		SPIELER B	
		a	b
SPIELER A	a	*4, 4*	*1, 5*
	b	*5, 1*	*2, 2*



Ganz klar: "schlechtester" Punkt: (2,2), pareto dominiert von (4,4)!

Pareto-Optima: (4,4), (1,5) und (5,1).

Die Matrixform verdeutlicht in einfacher und klarer Weise die Abhängigkeit der Ergebnisse, d.h. Auszahlungen, vom Verhalten *beider* Spieler. Wählt A z.B. a, so erhält er entweder die Auszahlung 4 (falls B auch a wählt) oder 1 (falls B b wählt).

Annahme: Beide Spieler kennen diese Spielstruktur und müssen nun unabhängig von einander bzw. "gleichzeitig", d.h. in Unkenntnis der Entscheidung des Anderen, ihre Entscheidung treffen.

[3]Die Auszahlungen entsprechen Nutzen (bzw. monetären Auszahlungen).

Was sollen sie - in ihrem eigenen Interesse - tun, wenn sie ihre eigenen Auszahlungen maximieren wollen?

Entscheidungsproblem für Spieler A:

Wie oben erwähnt erhält A bei Wahl von Strategie a entweder 4 oder 1, abhängig von $B's$ Entscheidung. Wie würde B, im Falle A habe a entschieden, selbst entscheiden? Er würde natürlich b wählen, um die Auszahlung 5 zu erhalten. Würde er auch a wählen, würde das Strategienpaar (a, a) realisiert, das ihm nur die Auszahlung 4 bringt. Wählt B aber b, so erhält A nur die Auszahlung 1, die dem Strategienpaar (a, b) entspricht, B hingegen 5. Wählt Spieler A die Strategie b, so erhält er entweder 5 (falls B a wählt) oder 2 (falls B ebenfalls b wählt). B wird natürlich b wählen, da seine Auszahlung in (b, b) gleich 2 und somit höher als in (b, a) ist. Dies wiederum bedeutet, dass (b, b) realisiert wird und somit auch A die Auszahlung 2 erhält. Diese ist besser als die Auszahlung 1, die er erhält, falls er a wählt. Also wird Spieler A die Strategie b wählen (und gestehen!).

Da das Spiel vollkommen symmetrisch ist, wird auch Spieler B aufgrund derselben Überlegung bei seiner Strategie zu dem Schluß kommen, dass er Strategie b wählen muss.

Das Strategienpaar (b, b) ist nun insofern ein *'Gleichgewicht'* als sich die Überlegungen und Handlungen der beiden Spieler gegenseitig bestätigen, und es für beide Spieler am besten ist, b zu spielen, falls der andere b spielt; d.h. beide Spieler spielen eine optimale Gegenstrategie auf die Strategie des anderen.

Die zu diesem 'Gleichgewicht' gehörenden Auszahlungen sind durch $(2, 2)$ gegeben. Obendrein ist dieses Gleichgewicht *eindeutig,* d.h. es gibt kein weiteres in obigem Spiel.

Bereits dieses einfache Beispiel zeigt, dass rationales Verhalten einzelner Teilnehmer an einer interaktiven Entscheidungssituation nicht zu einer pareto-optimalen Situation führen muss, wenn jeder Maximierung seines Eigeninteresses verfolgt. Das Gleichgewicht entspricht einem *ineffizienten Zustand,* der jedoch in gewissem - noch genau zu beschreibendem Sinne - stabil ist.

Für neoklassisch orientierte Ökonomen, die wirtschaftliches Einzelverhalten aus Optimierungskalkülen ableiten möchten, stellt diese mögliche Ineffizienz eine besondere Herausforderung dar: Die Spieltheorie als Untersuchungsmethode, die solche Optimierungskalküle in interaktiven sozialen Problemen erst ermöglicht, scheint gleichzeitig sehnlichst erwünschten Effizienzergebnissen im Wege zu stehen. ($\longrightarrow$ unterschiedliche

Lesarten.)

Dieser Befund ist unter dem Schlagwort eines 'Widerspruches zwischen individueller und kollektiver (d.h. gesellschaftlicher) Rationalität' in vielen - und nicht nur ökonomischen - Zusammenhängen aufgedeckt worden. Er ist für gesellschaftliche Systeme, die auf möglichst weitgefaßten individuellen Freiheitsrechten aufgebaut sind, von allergrößter Bedeutung. Wir wollen zunächst drei ökonomische Ausprägungen des Gefangenendilemmas betrachten (es gibt viel, viel mehr):

Beispiel 1: Kartellabsprachen

Zwei preissetzende Firmen konkurrieren miteinander in einem Markt für ein homogenes Gut. Falls beide ihre Preise unabhängig und unkoordiniert setzen, führt Preiswettbewerb - unter der Annahme, dass Konsumenten immer nur zum niedrigeren Preis kaufen - dazu, dass sich die beiden Firmen auf den Wettbewerbspreis (= Grenzkosten) herunterkonkurrieren. Sie haben daher einen Anreiz, ein Kartell zu bilden und Quoten festzulegen, die sie beide zum Monopolpreis abgeben.

Frage: Ist eine solche Absprache stabil? OSBORNE [1976], [4] zeigt, dass sich das Problem des Einhaltens von Kartellabsprachen auf ein 'Gefangenendilemma' für die beiden Firmen reduziert.

		FIRMA 1	
		P_H	P_N
FIRMA 2	P_H	*4, 4*	*1, 5*
	P_N	*5, 1*	*2, 2*

P_H = Hoher Preis (Absprache einhalten),
P_N = Niedriger Preis (Absprache unterlaufen).

Die Kartellabsprache wäre also nicht stabil, die beiden Firmen könnten sich nicht das für sie (!) optimale Ergebnis, Aufteilung des Monopolgewinnes, garantieren. (Unter Miteinbeziehung der Konsumentenseite in die Bewertung der ökonomischen Situation muss dieses Ergebnis natürlich nicht unerwünscht sein!)

[4]Osborne [1976]: Cartel Problems, American Economic Review, 66.

Beispiel 2: Wettrüsten

Zwei Länder bzw. Militärblöcke können jeweils zwischen ‘Rüste’ und ‘Rüste nicht’ als Strategien wählen.

Gleichgewicht: (Ineffizientes) Wettrüsten!

Beispiel 3: Umweltschutz

Zwei Länder können Umweltschutzmaßnahmen ergreifen oder nicht.

Gleichgewicht: Beide tun’s nicht!

Allgemeine Struktur des Gefangenendilemmas:

		Spieler 2: K	Spieler 2: KK
Spieler 1	K	$x, \; x$	$v, \; u$
	KK	$u, \; v$	$y, \; y$

K = Kooperation, KK = Keine Kooperation.

Relationen (individuelle Präferenzen):

$$u > x > y > v \, ,$$

d.h. vom Standpunkt *individueller Präferenzen* ist die Auszahlung am höchsten, wenn der Gegenspieler sich kooperativ verhält, man selbst nicht (‘Ausbeutung’ des wohlmeinenden Gegenspielers), am niedrigsten im umgekehrten Falle (in dem man selbst ausgebeutet wird). Die Furcht, ausgebeutet zu werden, verhindert für den einzelnen eine kooperative Spielweise!

Klar: $x + x = 2x > 2y = y + y$

d.h. Kooperation ist sozial besser!

Meist gilt auch: $x + x > v + u$

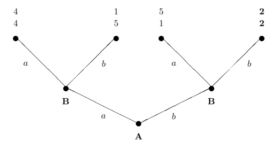
d.h. die Einbuße des ‘Ausgebeuteten’ gegenüber x ist größer als der Zugewinn des ‘Ausbeuters’.

Bemerkungen:

1) Am Ausgang des Gefangenendilemmas würde sich *nichts* ändern, wenn die beiden Spieler *nacheinander*, der zweite in Kenntnis der Entscheidung des ersten, handeln!

   Beispiel: Spieler A zieht zuerst.

   Spielbaum des Gefangenendilemmas:



   A würde b und B ebenfalls b spielen! (Auch wenn B nicht über den Zug von A informiert wäre.)

2) Kommunikation der beiden Spieler vor dem (getrennten) Verhör würde auch nichts ändern! Das (gegenwärtige) Versprechen sich kooperativ zu verhalten und zu leugnen, böte jedem einen Anreiz, es zu brechen. (Vertrauen in den anderen ist abhängig vom Vertrauen des anderen in einen selbst, dies ist aber wieder abhängig von meinem Vertrauen in jenen, welches etc.. Dies ist von Neumann’s “gewisser Zirkel” !!) Vertrauen ist gut, Kontrolle besser! ($\longrightarrow$ Urteil über sich selbst!)

Dies setzt also voraus, dass Spieler nicht in der Lage sind, *bindende Abmachungen* zu treffen. Dies ist in der Tat das entscheidende Merkmal, das die *nicht-kooperative Spieltheorie* von der *kooperativen Spieltheorie* unterscheidet.

Merke: In einem *kooperativen Spiel* können Spieler bindende Abmachungen (Verabredungen) treffen, in einem *nicht-kooperativen* Spiel nicht. In einem nicht-

kooperativen Spiel fragt man nach Existenz und Eigenschaften von “selbst-bindenden” Abmachungen.

Diese Unterscheidung hat *nichts* damit zu tun, ob in einer interaktiven Entscheidungssituation Konfliktpotentiale vorliegen oder nicht.

So würde eine Modellierung des Gefangenendilemmas als kooperativem Spiel so aussehen können: Die Spieler können nun die Absprache treffen, kooperativ zu spielen und falls einer doch abweicht, er dem anderen eine Entschädigungszahlung (side-payment) zu leisten habe, z.B. von 2 Auszahlungseinheiten. Der Effekt ist eine Veränderung der Auszahlungsstruktur: Nun wäre $(4, 4)$, also beidseitige Kooperation, stabil.

		Spieler 1: K	Spieler 1: KK
Spieler 2	K	$4, \; 4$	$1, \; 5$
	KK	$5, \; 1$	$2, \; 2$

$\downarrow$ Abmachung

		Spieler 1: K	Spieler 1: KK
Spieler 2	K	$4, \; 4$	$3, \; 3$
	KK	$3, \; 3$	$2, \; 2$

K = Kooperation, KK = Keine Kooperation.

Problem: Warum sollte ein Spieler, nachdem er von Kooperation abgewichen ist, die versprochene Entschädigung zahlen?

In der Hoffnung, dass die bisherigen, eher losen Ausführungen verdeutlichen konnten, dass trotz der abstrakten Darstellung interaktive Entscheidungstheorie (= Spieltheorie!) sehr realitätsbezogen ist, wenden wir uns nun einer formalen Beschreibung von Spielen und Lösungskonzepten zu.

1.2 Beschreibung eines Spieles

Ein Spiel ist ein abstraktes mathematisches Modell einer interaktiven Entscheidungssituation, in der es um interpersonelle Konfliktaustragung, Kooperation oder auch beides (siehe Gefangenendilemma) gehen kann. Die Beschreibung eines Spieles erfordert zunächst die *Identifizierung der Spieler*, die den noch zu definierenden Spielregeln unterworfen werden.

- Spiel $\cong$ System von Regeln über
  1. zulässige Entscheidungen (Aktionen) der Spieler,
  2. (externe) Zufallsentscheidungen,
  3. Reihenfolge der Entscheidungen,
  4. Informationslage der Spieler,
  5. Ende des Spieles,
  6. Auszahlung (pay-offs) als Bewertung einer realisierten Endsituation
     (in Abhängigkeit der getroffenen Entscheidungen).
- Spieler $\cong$ Rolle eines Agierenden (Entscheidenden)
  (z.B. Person (Konsument), Firma, Team, Behörde, Regierung, Tier, Pflanze, etc.)

Verhaltenshypothese: Jeder Spieler ist bestrebt, den (Erwartungs-) Wert der eigenen Auszahlung zu maximieren (in Kenntnis der Regeln des Spieles und dem Wissen, dass alle Mitspieler diese Regeln kennen ($\Longrightarrow$ ‘common knowledge’-Annahme)).

Common-Knowledge-Annahme: Die Regeln des Spieles sind allen Spielern bekannt, und alle wissen, dass diese allen bekannt sind. Ebenso wissen alle, dass allen bekannt ist, dass allen bekannt ist, dass dies alle wissen, etc. ad infinitum.

Beispiele:

- Kommunikationsprobleme zweier Teilarmeen bei koordiniertem Angriff.
- Brief per Einschreiben.

Kapitel 2

Spiele in Normalform

2.1 Definition

Ein Spiel in Normalform ist durch 3 Elemente beschrieben: Die Spieler, ihre Aktions- (bzw. Strategie-) Mengen und ihre Auszahlungsfunktionen. Eine formale Definition lautet wie folgt:

Definition: *Ein* Spiel in Normalform, G, *ist ein Tripel* (N, S, U) *derart, dass*

- $N = \{1, 2, \dots, n\}$ *die Anzahl und Menge der Spieler beschreibt,*
- $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ *die Menge der (zulässigen) Strategienkombinationen* $s = (s_1, \dots, s_n)$ *beschreibt, wobei* S_i *den Strategienraum von Spieler* $i \in N$ *darstellt, und*
- $U : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *die Auszahlungsfunktionen der Spieler,*

$$U(s) \;=\; (U_1(s), U_2(s), \cdots, U_n(s)) \;,$$

wiedergibt, wobei $U_i(s)$ *die Auszahlung für Spieler* i *bei der Wahl der Strategienkombination* $s = (s_1, \cdots, s_n)$ *angibt.*

Bemerkungen

1) $s_i \in S_i$ heißt auch *reine* Strategie für Spieler i.

2) $s = (s_1, \cdots, s_n)$ wird im Folgenden oft zerlegt in

- s_i – Aktion von Spieler i und
- $s_{-i} = (s_1, \cdots, s_{i-1}, s_{i+1}, \cdots s_n)$ - Aktionen *aller übrigen* Spieler außer i; d.h. $s_i \in S_i$ und $s_{-i} \in S_{-i} = \prod_{j=1, j\neq i}^n S_j$.

Beobachtung: Eine Bimatrix ist nichts anderes als die graphische Darstellung eines Zweipersonenspieles in Normalform!

Beispiel: Gefangenendilemma $G = (N, S, U)$ mit $N = \{A, B\}$ und $S = S_1 \times S_2$, wobei $S_1 = \{a, b\}$, $S_2 = \{a, b\}$ und $U(s) = (U_1(s), U_2(s))$,

mit $U_1(a, a) = 4$, $U_1(a, b) = 1$, $U_1(b, a) = 5$, $U_1(b, b) = 2$, sowie $U_2(a, a) = 4$, $U_2(a, b) = 5$, $U_2(b, a) = 1$, $U_2(b, b) = 2$.

Die Anzahl der Zeilen gibt also die Strategie für Spieler A wider; die Anzahl der Spalten für Spieler B und die Werte in den Matrixfeldern stellen die Werte der beiden Auszahlungsfunktionen in Abhängigkeit von der gewählten Strategienkombination dar. Natürlich kann man nur endliche Spiele, d.h. Spiele in denen jeder Spieler nur endlich viele Strategien zur Verfügung hat, in Matrixform beschreiben. Die Definition der Normalform lässt jedoch auch unendliche Strategieräume zu (und solche treten in ökonomischen Anwendungen z.B. immer dann auf, wenn Entscheidungsvariablen wie Preise oder Mengen als stetige, d.h. beliebig reellwertige, Größen modelliert werden).

Eine Normalform *zeigt also im wesentlichen die Liste von Strategien (Aktionen), die jedem Spieler zur Verfügung stehen, und welche Auszahlungen alle möglichen Strategienkombinationen ergeben.*

2.2 Dominante Strategien

Dies ist das erste und weithin unumstrittene, weil logisch unmittelbar einleuchtende Lösungskonzept der nicht-kooperativen Spieltheorie mit dem wir uns beschäftigen wollen. Es kann allerdings nur auf Spiele angewandt werden, die eine gewisse 'separable' Struktur haben, die zur Existenz dominanter Strategien führt.

Definition: *Sei* S_i *der Strategienraum von Spieler* i *und sei*

$$S_{-i} \;=\; S_1 \times \cdots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \cdots \times S_n.$$

1. *Eine Strategie* $s_i^* \in S_i$ *ist* dominant *für Spieler* i*, falls*

$$U_i(s_i^*, s_{-i}) \;>\; U_i(s_i, s_{-i}) \qquad \text{für alle } s_i \neq s_i^* \text{ und}$$
$$\qquad\qquad \text{für alle } s_{-i} \in S_{-i}.$$

2. *Eine Strategie* s_i^* *ist* schwach dominant *für* i*, falls*

$$U_i(s_i^*, s_{-i}) \;\geq\; U_i(s_i, s_{-i}) \qquad \text{für alle } s_i \neq s_i^* \text{ und}$$
$$\qquad\qquad \text{für alle } s_{-i} \in S_{-i}, \text{ und}$$
$$U_i(s_i^*, s_{-i}) \;>\; U_i(s_i, s_{-i}) \qquad \text{für zumindest ein } s_{-i} \in S_{-i} \text{ und ein } s_i \in S_i.$$

3. *Zwei Strategien* s_i *und* s_i' *sind* äquivalent *für* i*, falls*

$$U_i(s_i, s_{-i}) \;=\; U_i(s_i', s_{-i}) \qquad \text{für alle } s_{-i} \in S_{-i}.$$

Was heißt das? Eine dominante Strategie hat also für einen Spieler die Eigenschaft, für jede Strategienkombination der Gegenspieler besser zu sein als jede andere seiner eigenen Strategien. Eine Strategie mit dieser Eigenschaft muss natürlich eindeutig sein, da jede andere Strategie von ihr dominiert wird. Eine schwach dominante Strategie hat die Eigenschaft, für jede Strategienkombination der Gegenspieler mindestens so gut zu sein wie jede andere der eigenen Strategien. Eine schwach dominante Strategie muss nicht mehr eindeutig sein!

4. *Die Strategie* s_i dominiert *die Strategie* $\overline{s}_i$, $(s_i, \overline{s}_i \in S_i)$, *für Spieler* i *, falls*

$$U_i(s_i, s_{-i}) \;>\; U_i(\overline{s}_i, s_{-i}) \qquad \text{für alle } s_{-i} \in S_{-i}.$$

5. *Die Strategie* s_i dominiert *die Strategie* $\overline{s}_i$, $(s_i, \overline{s}_i \in S_0)$, *für Spieler* i schwach, *falls*

$$U_i(s_i, s_{-i}) \;\geq\; U_i(\overline{s}_i, s_{-i}) \qquad \text{für alle } s_{-i} \in S_{-i}, \text{ und}$$
$$U_i(s_i, s_{-i}) \;>\; U_i(\overline{s}_i, s_{-i}) \qquad \text{für zumindest ein } s_{-i} \in S_{-i}.$$

Eine grundlegende Rationalitätsforderung lautet denn auch:

$$\boxed{\text{Benutze nie eine dominierte Strategie!}}$$

Vorsicht: Es kann dominierte Strategien geben, ohne dass eine Strategie selbst (gegen alle andere) dominant ist!

Definition: *Ein Spiel ist* dominant lösbar, *wenn jeder Spieler (genau) eine dominante Strategie besitzt (Gleichgewicht in dominanten Strategien).*

Lemma: *Das Gefangenen-Dilemma-Spiel ist dominant lösbar.*

Beweis: Zu zeigen: Jeder Spieler hat eine dominante Strategie.

Spieler A: Die Strategie b, dominiert die Strategie a, da

$$U_1(b, a) = 5 \;>\; 4 = U_1(a, a);$$

d.h. falls B a spielt, ist b für A besser als a, und

$$U_1(b, b) = 2 \;>\; 1 = U_1(a, b);$$

d.h. auch falls B b spielt, ist b für A besser als a.

Analog:

Spieler B: Die Strategie b dominiert die Strategie a!

$\Longrightarrow$ Dominante Lösung: (b, b) mit Auszahlung $(2, 2)$!

Die Wahl der dominanten Strategie, falls eine solche existiert, ist eine überzeugende Formalisierung *individueller* Rationalität. Sie führt, falls von jedem Spieler befolgt, aber nicht automatisch zu kollektiver Rationalität, dieser Umstand macht das Gefangenen-Dilemma-Paradigma so bedeutsam.

Problem: Die dominante Lösung ist nicht Pareto-optimal!

Die wenigsten Spiele jedoch haben ein Gleichgewicht in dominanten Strategien, da nicht jeder Spieler - oder sehr oft gar keiner - eine dominante Strategie besitzt. Dennoch kann der Grundsatz, dass ein Spieler nie eine (schwach) dominierte Strategie benutzen sollte, auch in diesem Falle *iterativ* zur Lösung von Spielen benutzt werden.

Beispiel: Die Schlacht in der Bismarck-See [1]

Dieses Spiel hat folgende Normalform:

		General 2	
		N	S
General 1	N	2, -2	2, -2
	S	1, -1	3, -3

N = Nordroute (kurz), S = Südroute (lang).

1. Keiner der Generäle hat eine dominante Strategie.
2. General 2 hat eine schwach dominante Strategie: N dominiert S schwach.
3. General 1 hat noch nicht einmal eine schwach dominante Strategie.

Dennoch kann sich General 1 sagen, dass General 2 nie seine schwach dominierte Strategie S spielen wird (und in der Tat wird 2 sie nicht spielen). Man könnte also ohne weiteres diese Strategie von General 2 von der Spielform eliminieren, es bliebe:

		General 2
		N
General 1	N	2, -2
	S	1, -1

Nun hat General 1 eine dominante Strategie, nämlich N.

Dieses Verfahren der schrittweisen, d.h. iterierten, Elimination dominierter Strategien, führt also dazu, dass genau ein Strategienpaar, eine sogenannte *iteriert dominante Lösung*, übrig bleibt:

$$(N, N)$$

(N, N) war in der Tat, was sich 1943 im Südpazifik ereignete.

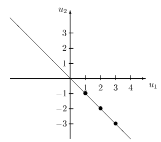
[1] Südpazifik, 1943: General 1 möchte den Truppentransport von General 2 bombardieren.

Die Schlacht in der Bismarck-See ist ein Beispiel eines sogenannten *Nullsummen-Spieles*, da für die Summe der Auszahlungen immer gilt:

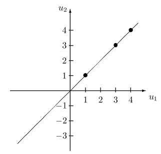
$$U_1(s_1, s_2) + U_2(s_1, s_2) \;=\; 0\ .$$

Nullsummenspiele sind pure Konfliktspiele mit der Eigenschaft, dass *alle* Spielergebnisse pareto-optimal sind. Schon dies zeigt, dass sie in ökonomischen Anwendungen nicht allzu oft anzutreffen sein werden. (Dennoch kann man obiger Matrix auch eine ökonomische Interpretation geben.) Die Analyse von Nullsummen-Spielen war historisch für die Entwicklung der Spieltheorie von großer Bedeutung, die Relevanz dieser Spiele wurde jedoch überschätzt, und die lange Fixierung auf sie hat die Entwicklung der Spieltheorie eher behindert.

Die Koordinatenform für ein Nullsummen-Spiel ist in der folgenden Abbildung dargestellt:



Im Gegensatz hierzu sieht ein reines Koordinationsspiel wie folgt aus:



Die Normalform des Koordinationsspiels ist hierbei:

		Spieler 2	
		B	A
Spieler 1	B	4, 4	1, 1
	A	1, 1	3, 3

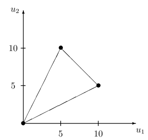
Bemerkung: Es ist keineswegs klar, dass die Spieler (B, B) mit Auszahlung $(4, 4)$ wählen: Weder Spieler 1 noch Spieler 2 hat eine (schwach) dominante Strategie!

Ein Spiel, in dem sowohl Konflikt- als auch Koordinationspotential steckt, ist Folgendes:

		Spieler 2	
		B	A
Spieler 1	B	0, 0	5, 10
	A	10, 5	0, 0

B = Bescheiden, A = Aggressiv.

Im Auszahlungsraum erhalten wir nun folgende Darstellung:



2.3 Nash-Gleichgewicht

Wie gesehen, haben sogar äußerst 'einfach' anmutende Spiele, wie voriges Koordinationsspiel, nicht unbedingt dominante Strategien. In der Tat stellt es eher eine Ausnahme

dar, wenn ein Spiel eine Lösung in dominanten Strategien zulässt. Für allgemeinere Untersuchungszwecke muss man sich daher mit einem schwächeren Lösungsbegriff abfinden, der aber dennoch den entwickelten grundlegenden Stabilitätsgedanken widerspiegelt. Dies ist der auf John Nash [1950] zurückgehende Begriff des 'nichtkooperativen Gleichgewichts', heute Nash-*Gleichgewicht* genannt.

Der dem Nash-Gleichgewichtsbegriff zugrunde liegende Stabilitätsgedanke lässt sich so formulieren:

> *Eine Strategiekombination $s = (s_1, \cdots, s_n)$ bildet dann ein* Nash-*Gleichgewicht, wenn es für keinen Spieler i einen Vorteil bringt, von seiner Strategiewahl s_i abzuweichen, solange die jeweils anderen an ihren Strategien s_{-i} festhalten.*

Eine solche Strategienkombination ist also 'eigenstabilisierend' ('self-enforcing') als Liste individueller Verhaltens*empfehlungen*, da die Erwartung eines jeden Einzelspielers, dass andere der Empfehlung folgen, dazu führt, dass er selbst der für ihn vorgesehen Empfehlung (rationalerweise) folgen wird. Dies bedeutet gleichzeitig, dass die Erwartung, dass andere der Empfehlung folgen werden, auch begründet ist, da sie sich jeweils (für jeden einzelnen Spieler) selbst bestätigt.

Um diese Überlegung zu formalisieren definieren wir zunächst den Begriff einer 'besten Antwort' für einen Spieler auf eine Strategienwahl *aller* anderen Spieler.

Definition: *Eine Strategie $s_i \in S_i$ ist (eine)* beste Antwort *für Spieler i auf die Strategien $s_{-i} \in S_{-i}$ der anderen Spieler, falls*

$$U_i(s_i, s_{-i}) \;\;>\;\; U_i(s_i', s_{-i}) \quad \textit{für alle } s_i' \in S_i$$

$$\textit{(d.h.}\quad U_i(s_i, s_{\ i}) \;\;=\;\; \max_{s_i' \in S_i} U_i(s_i', s_{\ i}))$$

Spieler i maximiert seine Auszahlungsfunktion $U_i(\cdot, s_{-i})$, von der er nur die Komponente s_i kontrollieren kann.
Kurz: $s_i \in b_i(s_{-i}) \Longleftrightarrow s_i$ ist beste Antwort auf s_{-i}.

Bemerkung: Eine dominante Strategie für Spieler i ist *gleichzeitig* eine beste Antwort für i auf alle möglichen Strategien seiner Mitspieler!

Der Gleichgewichtsbegriff von NASH verlangt nun, dass eine Strategienkombination so beschaffen sein soll, dass für jeden Spieler gilt, dass seine Strategie beste Antwort auf die Strategien aller anderen Spieler ist; d.h. $s = (s_1, \cdots, s_n)$ und $s_i \in b_i(s_{-i})$ *für alle* $i = 1, \ldots, n$.

Definition: *Eine Strategienkombination* $s^* = (s_1^*, \cdots, s_n^*)$ *ist ein* NASH-Gleichgewicht, *falls für alle* $i = 1, \ldots, n$ *gilt:*

$$U_i(s_i^*, s_{-i}^*) \; > \; U_i(s_i, s_{-i}^*) \quad \textit{für alle } s_i \in S_i.$$

Beispiel: $n = 2: \; (s_1^*, s_2^*)$ NGG $\iff$

$$U_1(s_1^*, s_2^*) \; \geq \; U_1(s_1, s_2^*) \quad \text{für alle} \quad s_1 \in S_1.$$

(s_1^* ist beste Antwort für 1 auf s_2^*)

$$U_2(s_1^*, s_2^*) \; \geq \; U_2(s_1^*, s_2) \quad \text{für alle} \quad s_2 \in S_2.$$

(s_2^* ist beste Antwort für 2 auf s_1^*)

Übung:

1. Schreiben Sie das obige Beispiel für $n = 3$ Spieler auf, und überprüfen Sie Ihr Ergebnis anhand eines 3 Personen-Spieles (z.B. 2 Bimatrizen)!
2. Zeigen Sie allgemein, dass ein Gleichgewicht in dominanten Strategien immer auch ein NASH-Gleichgewicht ist!

Um uns das Optimierungskalkül jedes einzelnen Spielers, das diesem Lösungsbegriff zugrunde liegt, kennenzulernen, werden wir nun einige Spiele mit Hilfe dieses fundamentalen Lösungsbegriffes analysieren.

Dazu kehren wir zunächst noch einmal zum Gefangenendilemma zurück (mit diesmal veränderten Zahlenwerten):

a) *Gefangenendilemma*

		SPIELER 2 *a*	SPIELER 2 *b*
SPIELER 1	*a*	*3, 3*	*-2, 4*
SPIELER 1	*b*	*4, -2*	*0, 0*

Nun gilt: $b_1(a) = b$, $b_1(b) = b$, $b_2(a) = b$ und $b_2(b) = b$,

folglich ist $b_1(b_2(b)) = b_1(b) = b$ und $b_2(b_1(b)) = b_2(b) = b$.

(b, b) ist folglich das *einzige* NASH-Gleichgewicht des Gefangenendilemmas!

b) *Chicken ('Feigling')*

Dieses Spiel sieht auf den ersten Blick dem Gefangenendilemma zum Verwechseln ähnlich, modelliert aber eine gänzlich andere oft anzutreffende Konfliktsituation. Es hat folgende Repräsentation in Matrixform:

		SPIELER 2 *a*	SPIELER 2 *b*
SPIELER 1	*a*	*1, 1*	*0, 3*
SPIELER 1	*b*	*3, 0*	*-3, -3*

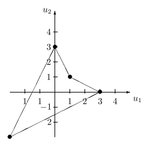
a = Ausweichen, b = Weiterfahren.

Bei den zwei Spielern 1 und 2 handelt es sich um Nachwuchs-Schumis (MICHAEL SCHUMACHER = deutscher F1-Weltmeister), die auf einer Bundesstraße in entgegengesetzter Richtung ihrem Wochenendvergnügen, 'sportliches Fahren' in aufgemotzten Golf GTI's (im Ruhrgebiet: Opel Mantas), nachgehen. Beide fahren aus Gründen der Geschwindigkeitsoptimierung und als Folge falsch verstandener Sicherheitserwägungen auf dem Mittelstreifen. Sie rasen nun auf gerader Strecke aufeinander zu. Jeder Fahrer hat nun zwei Möglichkeiten, entweder auf die rechte Fahrbahn auszuweichen (Strategie a) oder weiter geradeauszufahren (Strategie b). Weicht nur einer der beiden aus, können die beiden Fahrzeuge einander passieren, ebenso wenn beide ausweichen, nicht aber wenn beide weiterfahren. Als 'Feigling' ist jeweils der entlarvt, der ausweicht, ohne

den anderen auch dazu veranlasst zu haben. Der 'Sieger' hingegen erhält den Ehrentitel 'SCHUMI der Woche' mit entsprechend hoher Auszahlung. Wer gibt (zuerst) nach?

Das Spiel hat *keine* dominante Strategie, aber zwei NASH-Gleichgewichte, in denen ein Spieler jeweils ausweicht und der andere nicht: (a, b) und (b, a). Man sieht hier, dass Gleichgewichte eines absolut symmetrischen Spielers sehr asymmetrisch sein können. Ein weiteres Problem, das dieses Spiel aufwirft ist, dass die Spieler aufgrund von Vorüberlegungen oder sogar Vorverhandlungen sich nicht auf ein Gleichgewicht verständigen können. Denkt 1 z.B. der 2 wird schon einsehen, dass ich der coolere Typ bin, und daher das Gleichgewicht (b, a) gespielt wird, und hat 2 gleichzeitig dieselbe Vermutung bezüglich 1, so resultiert (b, b) mit schwerwiegenden Folgen. Denkt jeder (was eher unwahrscheinlich ist), 'der Klügere gibt nach', so resultiert (a, a) und beide ärgern sich um die 'verschenkte' Chance, 'SCHUMI der Woche' zu werden.

Die Konfliktstruktur dieses Spieles wird wiederum in Koordinatenform des Auszahlungsraumes sehr deutlich:



Sie tritt in ökonomischen Wettbewerbssituationen sehr häufig auf, beispielsweise wenn sich zwei Firmen einen Überlebenskampf in einem stagnierenden oder schrumpfenden Markt liefern, in dem nur ein Unternehmen noch (gut) lebensfähig ist. Strategie a (Ausweichen, Nachgeben) hat nun die Interpretation des *Marktaustritts*, Strategie b die des *Marktverbleibes unter Inkaufnahme von Verlusten* (falls die andere Firma auch bleibt).

c) *Kopf oder Zahl* ('Matching Pennies')

Bei diesem Spiel versagt die Gleichgewichtsanalyse á la NASH. Es ist ein Beispiel für ein Spiel, das weder dominante Strategien noch ein NASH-Gleichgewicht besitzt. Bei diesem Spiel hat jeder Spieler eine Münze, die er entweder mit Kopf oder Zahl nach oben auf einen Tisch legen muss. Zeigen beide Münzen dieselben Zeichen, gewinnt Spieler 1, zeigen sie verschiedene, so gewinnt Spieler 2. Sie spielen um 10 Euro.

Eine Matrixdarstellung ist wie folgt:

		SPIELER 2 *a*	SPIELER 2 *b*
SPIELER 1	*a*	*10, -10*	*-10, 10*
SPIELER 1	*b*	*-10, 10*	*10, -10*

a = Kopf, b = Zahl.

Dieses Nullsummenspiel ist ein pures *Diskoordinationsspiel,* der eine Spieler will, dass beide dasselbe tun, der andere, dass beide *nicht* dasselbe tun.

Diskoordinationsspiele sind sowohl in ökonomischen als auch sportlichen Wettbewerbssituationen häufig anzutreffen, jedoch nicht notwendigerweise in Nullsummenform. Das Duell Torwart – Strafstoßschütze beim Fußball fällt zum Beispiel in diese Kategorie. Während der Torwart das Bestreben hat, dass beide Spieler dieselbe 'Ecke' wählen, möchte der Schütze dies um jeden Preis vermeiden. Eine Matrixdarstellung könnte z.B. wie folgt aussehen:

		TORWART *a*	TORWART *b*
SCHÜTZE	*a*	*0, 1*	*1, 0*
SCHÜTZE	*b*	*1, 0*	*0, 1*

a = linke Ecke, b = rechte Ecke.

Die beiden letzten Spiele sind sog. *strikt kompetitive* Spiele; d.h. wenn immer ein Spieler seine Auszahlung verbessert, verschlechtert sich notwendigerweise die Auszahlung des anderen. Sie stellen sogar einen Spezialfall solcher Spiele dar, da in ihnen die *Summe* der Auszahlungen jeweils konstant ist. 'Matching Pennies' ist ein Nullsummenspiel, das 'Elfmeterduell' ein Konstantsummenspiel. In einer solchen Situation hat kein Spieler ein Interesse, seine beabsichtigte Strategie offenzulegen, im Gegenteil, er kann ein *strategisches Interesse* daran haben, seinen Gegenspieler bewusst klarzumachen, dass er seine Verhaltensweise einem *zufälligen* Einfluß unterwirft. Dies wird besonders deutlich beim 'Elfmeterduell': Ein Schütze, der dafür bekannt ist, immer in die linke Ecke zu schießen, wird mit dieser Strategie auf Dauer nicht Erfolg haben können, ebensowenig ein Torwart, der immer in dieselbe Ecke "fliegt". Dieser Umstand veranlasst uns nun, eine Erweiterung des bisherigen Strategien- bzw. Aktionsbegriffes zu betrachten.

2.4 Gemischte Strategien - Gemischte Erweiterung von (N,S,U)

Das letzte Beispiel des 'Elfmeterduelles' legt nahe, dass eine gute Verhaltensempfehlung für die beiden Spieler darin bestehen könnte, ihre Aktionen a und b, die wir nunmehr als *reine Strategien* bezeichnen wollen, nicht immer, sondern in bestimmtem Verhältnis miteinander gemischt zu verwenden. Äquivalent dazu ist die Interpretation, jede der beiden Aktionen bei einmaligem Spiel nicht mit Wahrscheinlichkeit 0 oder 1 zu verwenden, sondern *beide* Strategien mit positiver Wahrscheinlichkeit zu wählen. Eine solche Verhaltensanleitung wollen wir *gemischte* Strategie nennen.

Definition: *Eine gemischte Strategie q_i für Spieler i ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über der Menge der reinen Strategien $s_i \in S_i$ des Spielers i. q_i ordnet jedem $s_i \in S_i$ eine Wahrscheinlichkeit $q_i(s_i)$ zu:*

$$\begin{aligned} q_i : S_i &\longrightarrow [0,1] \\ s_i &\longrightarrow q_i(s_i), \quad \textit{wobei } \textstyle\sum_{s_i \in S_i} q_i(s_i) = 1. \end{aligned}$$

Hier nehmen wir (zunächst) an, dass S_i jeweils nur *endlich* viele reine Strategien enthält.

Klar: Reine Strategien können als Spezialfall von gemischten Strategien angesehen werden, die alle Wahrscheinlichkeitsmasse auf genau eine reine Strategie legen.

Sei nun Q_i die Menge der gemischten Strategien von Spieler i. Dann bezeichnet

$$Q \;=\; Q_1 \times \ldots \times Q_n$$

die Menge der Kombinationen von gemischten Strategien

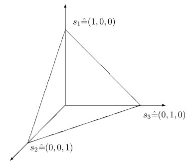
$$q \in Q \;:\; q = (q_1, \ldots, q_n) \quad \text{mit } q_i \in Q_i.$$

Wie sieht Q_i aus? Falls ein Spieler i $k_i = |\,S_i\,| > 1$ reine Strategien zur Verfügung hat, so kann man jede gemischte Strategie $q_i \in Q_i$ mit einem Punkt des *Einheitssimplex* in $\mathbb{R}^k$ identifizieren:

$$\Delta^k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \sum_{h=1}^{k} x_h = 1,\ x_h \;\geq\; 0\}$$

Die Eckpunkte entsprechen dabei reinen Strategien, alle anderen Punkte echten Mischungen.

Beispiel: $k_i = 3$ d.h. $S_i = \{s_1, s_2, s_3\}$



Wie sieht nun die einer gemischten Strategienkombination q zugeordnete Auszahlung für Spieler i aus?

(Erwartete) Auszahlung bei gemischten Strategien

Da bei Wahl der gemischten Strategienkombinationen $q = (q_1, \cdots, q_n)$ die reine Strategienkombination $s = (s_1, \cdots, s_n)$ gerade mit Wahrscheinlichkeit

$$q(s) \;=\; q_1(s_1) \cdot q_2(s_2) \cdot \cdots \cdot q_n(s_n)$$

gespielt wird, ergibt sich die erwartete Auszahlung bei q für Spieler i aus seinen ursprünglichen Auszahlungen bei Verwendung reiner Strategien s als *Erwartungswert* dieser Auszahlungen:

$$\tilde{U}_i(q) \;=\; \sum_{s \in S} q(s) \cdot U_i(s) \;=\; \sum_{s \in S} \left(\prod_{j=1}^{n} q_j(s_j) \right) \cdot U_i(s)$$

d.h. $\tilde{U}_i$ ordnet jeder gemischten Strategienkombination q eine Auszahlung zu:

$$\tilde{U}_i : Q \longrightarrow \mathbb{R} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Es bezeichnet nun $\tilde{U}(q) = (\tilde{U}_1(q), \cdots, \tilde{U}_n(q))$ den zugehörigen Auszahlungsvektor. Das zu einem Spiel $G = (N,S,U)$ gehörende Spiel in gemischten Strategien wollen wir im Folgenden mit $\tilde{G} = (N,Q,\tilde{U})$ bezeichnen. $\tilde{G}$ ist nun ein Spiel mit *unendlichen* (gemischten) Strategieräumen.

Beispiel: Die gemischte Strategie $q = (q_1, q_2)$ mit $q_1 = (0.2, 0.8)$ und $q_2 = (0.4, 0.6)$ bewirkt im Elfmeterduell mit $S = 1$ und $T = 2$ folgendes:

		Spieler 2	
		a	b
Spieler 1	a	*0, 1*	*1, 0*
	b	*1, 0*	*0, 1*

Wahrscheinlichkeit für eine reine Strategienkombination:

	0,4	*0,6*
0,2	*0,08*	*0,12*
0,8	*0,32*	*0,48*

Beiträge zur erwarteten Auszahlung:

0 0,08	*0,12 0*
0,32 0	*0 0,48*

Auszahlungen:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1(q) &= \sum_{s \in S} q(s) \cdot U_1(s) \\ &= q(a,a)U_1(a,a) + q(a,b)U_1(a,b) \\ &\quad + q(b,a)U_1(b,a) + q(b,b)U_1(b,b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 0.08 \cdot 0 + 0.12 \cdot 1 + 0.32 \cdot 1 + 0.48 \cdot 0 \\ &= 0.44 \\ \tilde{U}_2(q) &= \sum_{s \in S} q(s) \cdot U_2(s) \\ &= 0.08 \cdot 1 + 0.48 \cdot 1 \\ &= 0.56 \quad (= 1 - 0.44!) \quad \text{Konstant-Summen-Spiel !} \end{aligned}$$

Der Torwart schneidet also etwas besser ab.

Wir nehmen nun für einen Augenblick an, dem Schützen (Spieler 1) wäre die gemischte Strategie des Torwarts $q_2 = (0.4, 0.6)$ bekannt. Könnte er seine Auszahlung verbessern, indem er eine andere gemischte Strategie als $q_1 = (0.2, 0.8)$ wählt? Und falls ja, welches wäre die beste Strategie als Antwort auf die Strategie $q_2 = (0.4, 0.6)$ des Torwarts?

Diese Frage führt hin zur Verallgemeinerung des Begriffes 'beste Antwort' von reinen auf gemischte Strategien:

Definition: *Eine gemischte Strategie $q_i^* \in Q_i$ ist* beste Antwort *für Spieler i auf $q_{-i} \in Q_{-i}$, falls gilt*

$$\begin{aligned} \tilde{U}_i(q_i^*, q_{-i}) &\;\geq\; \tilde{U}_i(q_i, q_{-i}) \quad \textit{für alle } q_i \in Q_i. \\ \textit{bzw.} \quad \tilde{U}_i(q_i^*, q_{-i}) &\;=\; \max\nolimits_{q_i \in Q_i} \tilde{U}_i(q_i, q_{-i}). \end{aligned}$$

Kurz: $q_i^* \in b_i(q_{-i})$

Fortsetzung des Beispieles:

Welche Strategie q_1^* ist beste Antwort für Spieler 1 auf $q_2 = (0.4, 0.6)$ im Elfmeterduell?

Es gilt $\tilde{U}_1(q_1, q_2) = \tilde{U}_1(q_1, (0.4, 0.6))$ zu maximieren!

Sei $q_1 = (x, 1-x)$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1((x, 1-x), (0.4, 0.6)) &= 0.4x \cdot 0 + 0.6x \cdot 1 + 0.4(1-x) \cdot 1 + 0.6(1-x) \cdot 0 \\ &= 0.6x + 0.4 - 0.4x \\ &= 0.4 + 0.2x \end{aligned}$$

$\Longrightarrow x = 1 \Longrightarrow b_1((0.4, 0.6)) = \{(1, 0)\}.$

Klar: Da der Torwart öfter nach rechts 'fliegt' als nach links, sollte der Schütze immer nach links schießen! D.h. die optimale Reaktion (beste Antwort) auf die gemischte Strategie q_2 ist in diesem Falle eine reine Strategie $q_1^* = (1,0)$.

Angenommen, der Torwart würde die gemischte Strategie $q_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ benutzen. Wie sähe nun die beste Antwort von Spieler 1, dem Schützen, aus?

Nun gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1((x,1-x),(0.5,0.5)) &= 0.5x \cdot 0 + 0.5x \cdot 1 + 0.5(1-x) \cdot 1 + 0.5(1-x) \cdot 0 \\ &= 0.5x + 0.5 - 0.5x \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

Die erwartete Auszahlung ist unabhängig von x!

D.h. jedes $x \in [0,1]$ ist eine optimale Wahl, insbesondere sind beide reine Strategien a ($\hat{=}(1,0)$) und b ($\hat{=}(0,1)$) beste Antworten auf $(0.5, 0.5) = q_2$! Ebenso ist aber jede gemischte Strategie $q_1 = (x, 1-x)$ mit $0 < x < 1$ eine beste Antwort auf die gemischte Strategie $q_2 = (0.5, 0.5)$.

Dieses Ergebnis ist eine Illustration folgenden grundlegenden Sachverhalts:

Fundamental - Lemma (Antwortkriterium): *Eine gemischte Strategie q_i^* ist genau dann eine beste Antwort auf $q_{\ i}$, falls alle $s_i \in S_i$ mit $q_i^*(s_i) > 0$ eine beste Antwort auf $q_{\ i}$ sind.*

Beweis: Angenommen $q_i^* \in b_i(q_{-i})$ mit $q_i^*(s_i') > 0$, $q_i^*(s_i'') > 0$ und $\tilde{U}_i(s_i', q_{-i}) > \tilde{U}_i(s_i'', q_{-i})$.

Dann kann q_i^* nicht beste Antwort sein, da Reduktion der Wahrscheinlichkeit $q_i^*(s_i'')$ zugunsten von $q_i^*(s_i')$ zu einer Erhöhung der erwarteten Auszahlung für i führen muss:

$$\tilde{U}_i(q) \; = \; \sum_{s \in S} \left(\prod_{j=1}^{n} q_j(s_j) \right) \cdot U_i(s).$$

Intuitiv: Da die *erwartete* Auszahlungsmaximierung der Maximierung eines gewogenen Durchschnittswertes entspricht, ist unmittelbar einsichtig, dass der aus endlich vielen

Summanden ermittelte gewogene Durchschnitt dann am größten ist, wenn alle einzelnen Terme nach Gewichtung mit den Wahrscheinlichkeiten denselben Wert haben.

Der Begriff einer "besten Antwort", ausgedehnt auf den verallgemeinerten Strategienbegriff einer gemischten Strategie, bildet nun wiederum die Grundlage des Gleichgewichtsbegriffes:

Definition: *Eine Strategienkombination $q^* = (q_1^*, \cdots, q_n^*)$ heißt* Gleichgewicht in gemischten Strategien, *falls für jeden Spieler i $q_i^* \in b_i(q_{-i}^*)$ gilt; d.h.*

$$\tilde{U}_i(q_i^*, q_{-i}^*) \; = \; \max_{q_i \in Q_i} \tilde{U}_i(q_i, q_{-i}^*) \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n.$$

Beispiel: Elfmeter-Duell Es gibt genau ein Gleichgewicht in gemischten Strategien, nämlich:

$$q_1^* \; = \; (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \quad \text{und} \quad q_2^* \; = \; (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

Wir hatten bereits gesehen, dass

$$\tilde{U}_1((x, 1-x), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) \; = \; 0.5$$

unabhängig von x! D.h. alle $(x, 1-x)$ sind optimal gegen $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ von Spieler 2. Insbesondere: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in b_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Andererseits gilt

$$\tilde{U}_2((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (x, 1-x)) = 0.5$$

unabhängig von x! D.h. Spieler 2 hat als beste Antwort auf $q_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ jede Mischung $(x, 1\ \ x)$ zur Verfügung. Insbesondere gilt

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in b_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$\Longrightarrow (q_1^*, q_2^*) = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$ ist ein Gleichgewicht in gemischten Strategien.

Eindeutigkeit: Es gilt:

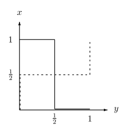
$$b_1(y, 1-y) = \begin{cases} (1,0) & \text{falls} \quad y < \frac{1}{2} \\ (x, 1-x), \; x \in [0,1] & \text{falls} \quad y = \frac{1}{2} \\ (0,1) & \text{falls} \quad y > \frac{1}{2} \end{cases}$$

ebenso

$$b_2(x, 1-x) = \begin{cases} (0,1) & \text{falls} \quad x < \frac{1}{2} \\ (y, 1-y), \; y \in [0,1] & \text{falls} \quad x = \frac{1}{2} \\ (1,0) & \text{falls} \quad x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Hieraus ist ersichtlich, dass *nur* für $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ gelten kann, dass

$$\begin{aligned} b_1(b_2(x, 1-x)) &= (x, 1-x) \qquad \text{bzw.} \\ b_2(b_1(y, 1-y)) &= (y, 1-y). \end{aligned}$$



Der Gleichgewichtspunkt ist also der einzige Schnittpunkt der beiden Reaktionsfunktionen, bzw. der einzige *Fixpunkt* der Korrespondenz

$$\begin{aligned} b = (b_1, b_2): \quad Q_1 \times Q_2 &\longrightarrow \quad Q_1 \times Q_2 \\ (q_1, q_2) &\longrightarrow \quad (b_1(q_2), b_2(q_1)). \end{aligned}$$

Es gilt: $b((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) = (b_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), b_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) = \left\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\right\}.$

Aus dieser Beobachtung kann mit Hilfe des Brouwerschen Fixpunktsatzes (bzw. dessen Verallgemeinerung von Kakutani) folgender grundlegender Satz bewiesen werden:

Satz (Existenzsatz) von Nash (1951): *Jedes endliche Spiel $G = (N, S, U)$ in Normalform hat mindestens ein Gleichgewicht in gemischten Strategien.*

Übung: Zeigen Sie: Jeder Fixpunkt der Beste-Antwort-Korrespondenz ist ein Gleichgewicht und umgekehrt!

Berechnung eines Gleichgewicht-Punktes in gemischten Strategien mit Hilfe des Fundamental-Lemmas:

Wir betrachten nun eine raffiniertere Form des Elfmeter-Duelles. Diese besteht darin, dass der Schütze nun seinen Strategieraum ausweitet, indem er als dritte reine Strategie einen Schuss in die Mitte des Tores (!) in Betracht zieht, was den Torwart zwingt, ebenfalls eine dritte reine Strategie, nämlich 'stehenbleiben', in Betracht zu ziehen. Als 'Erfinder' und (erfolgreicher) Propagandist dieser Version des Elfmeterduelles für die jüngere Fußballgeschichte kann der holländische Spieler Johann Neeskens gelten, der diese Variante in der ersten Hälfte der 70er Jahre wiederholt erfolgreich anwendete (jedem deutschen Fußballfreund dürfte die 1. Minute des Endspieles der Weltmeisterschaft 1974 in München in unvergesslicher Erinnerung bleiben). Welche Auswirkung auf Normalform und Lösung des Spieles hat Neeskens Neuerung?

Die Normalform sieht nun so aus:

		Torwart		
		a	b	c
	a	0, 1	1, 0	1, 0
Schütze	b	1, 0	0, 1	1, 0
	c	1, 0	1, 0	0, 1

a = linke Ecke, b = Mitte, c = rechte Ecke.

Beobachtung: Die neue Version erscheint für den Schützen günstiger, da viermal zusätzlich der Payoff $(1,0)$, aber nur einmal zusätzlich der Payoff $(0,1)$ erscheint!

Klar: Auch die neue Version des Elfmeterduelles hat kein Gleichgewicht in reinen Strategien!

Nach dem Satz von Nash muss es aber eines in gemischten Strategien besitzen. Dieses kann man wie folgt ermitteln:

Sei

$$(x_1, x_2, 1 \quad x_1 \quad x_2) = q_1$$

die gemischte Strategie des Schützen, und

$$(y_1, y_2, 1 \quad y_1 \quad y_2) = q_2$$

die gemischte Strategie des Torwarts.

Aufgrund des Fundamental-Lemmas kann eine Strategie des Schützen nur beste Antwort auf q_2 sein, falls gilt:

$$\begin{aligned} & 0 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 1 \cdot (1 - y_1 - y_2) \\ = \; & 1 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 1 \cdot (1 - y_1 - y_2) \\ = \; & 1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 0 \cdot (1 - y_1 - y_2) \end{aligned}$$

(Der Schütze ist indifferent zwischen allen *reinen* Strategien.)

Analog, muss aus der Sicht des Torwarts gelten:

$$\begin{aligned} & 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot (1 - x_1 - x_2) \\ = \; & 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot (1 - x_1 - x_2) \\ = \; & 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot (1 - x_1 - x_2) \end{aligned}$$

(Der Torwart ist indifferent zwischen allen *reinen* Strategien.)

d.h. für q_2 muss gelten:

$$1 - y_1 = 1 - y_2 = y_1 + y_2 \quad \Longrightarrow \quad y_1 = y_2 = \frac{1}{3}$$

und daher $q_2^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Für q_1 muss gelten:

$$x_1 = x_2 = 1 - x_1 - x_2 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2 = \frac{1}{3}$$

und daher $q_1^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Das eindeutige Gleichgewicht des modifizierten Elfmeter-Duells lautet also (nicht überraschend):

$$(q_1^*, q_2^*) = \left((\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \right)$$

Der Gleichgewichtspunkt weist dieselbe Symmetrie aus wie im Grundspiel. Der entscheidende Unterschied ergibt sich jedoch in den *Gleichgewichtsauszahlungen*:

Es gilt nun:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1(q_1^*, q_2^*) &= 0 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \\ &\quad + 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \\ &\quad + 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \\ &= 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

und daher (Konstantsummenspiel!):

$$\tilde{U}_2(q_1^*, q_2^*) = \frac{1}{3}$$

Im Vergleich zum Grundspiel steigert der Schütze seine Erfolgsaussichten zu Lasten des Torwarts! Zu einem Gleichgewicht in symmetrischen Strategien (sogar identischen!) müssen also keineswegs symmetrische (oder gar gleiche) Auszahlungen gehören!

Implikationen des Fundamentallemmas:

i) Kontrollieren bei Kontrollkosten $c > 0, c < 2$.
   Betrachtet sei das Spiel: Ein Meister (M) kann seinem Lehrling (L) während der Arbeitszeit kontrollieren (K) oder nicht kontrollieren (KK). Der Lehrling kann entweder besonderen (Arbeits-) Einsatz zeigen (E) oder keinen besonderen Arbeitseinsatz zeigen (KE). Diese Situation hat typischerweise kein Gleichgewicht in reinen Strategien:

			Lehrling	
			y	$1 \quad y$
			E	KE
Meister	x	K	8-c, 6	6-c, 2
	$1 - x$	KK	8, 6	4, 8

   Ermittlung des gemischten Strategiengleichgewichts nach dem Fundamentallemma:

K: $(8 \quad c)y + (6 \quad c)(1 \quad y) = 2y + 6 \quad c$
KK: $8y + 4(1 \quad y) = 4y + 4$
Indifferenz: $2y + 6 - c = 4y + 4 \Rightarrow 2y = 2 - c$ $\boxed{y = \frac{2-c}{2} = 1 - \frac{c}{2}}$

$\Rightarrow 1 - y = \frac{c}{2}$
Klar: Höhere Kontrollkosten verleiten L zu durchschnittlich weniger Einsatz.
Warum? Nicht, weil der Meister bei höheren Kontrollkosten seltener kontrolliert!
E: $6 \cdot x + 6(1 - x) = 6$
KE: $2 \cdot x + 8(1 - x) = 8 - 6x$
Indifferenz: $6 = 8 - 6x \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow 1 - x = \frac{2}{3}$
GG: $(x^*, 1 - x^*) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$
$(y^*, 1 - y^*) = (1 - \frac{c}{2}, \frac{c}{2})$
Die Strategie von M hängt *nicht* von c ab, obwohl er die Kosten trägt und eine Änderung in c seine Auszahlungsstuktur verändert. Der Grund ist, dass sich die Auszahlungsstruktur von L *nicht* ändert. L hat nun das Problem den Meister nach Kostenänderung durch eine Verhaltensänderung wieder indifferent zu stellen. Wenn die Auszahlung des Meisters von K fällt (steigt), weil c erhöht (gesenkt) wurde, so muss L dafür sorgen, dass *auch* die Auszahlung von KK fällt (steigt), um Indifferenz herzustellen. Er tut dies, indem er y senkt (erhöht), also auf gestiegene Kontrollkosten des Meisters mit weniger Einsatz reagiert, um auch dessen Auszahlung im Falle KK abzusenken.

ii) Strafandrohung (Abschrecken)
   Dieses Spiel werde zwischen einem Einbrecher (Eb) und der Polizei (P) gespielt. Eb kann einbrechen (E) oder nicht einbrechen (NE); die Polizei kann wachsam sein (W) oder nicht wachsam sein (NW). Wiederum lässt die interaktive Entscheidungssituation kein Gleichgewicht in reinen Strategien zu.

			Polizei	
			y	$1 - y$
			W	NW
Einbrecher	x	E	-c, 2	5, -1
	$1 - x$	NE	0, 0	0 , 1

E: $\quad c \cdot y + 5(1 \quad y) = \quad (5 + c) \cdot y + 5$
NE: 0
Indifferenz: $(5 + c)y = 5 \Rightarrow$ $\boxed{y = \frac{5}{5+c}, \; 1 - y = \frac{c}{1+c}}$

Also: Mit steigender Strafdrohung lässt Wachsamkeit der Polizei nach! Warum? Nicht, weil sie denkt der Dieb kommt nun seltener (Abschreckung) auf die Idee einzubrechen!
W: $2x$
NW: $-x + (1 - x) = 1 - 2x$
Indifferenz: $2x = 1 - 2x \Rightarrow$ $\boxed{x = \frac{1}{4}, \; 1 - x = \frac{3}{4}}$

Der Dieb ändert seine Strategie *nicht*, wenn sich c ändert. Er bricht genauso oft ein, weil er weiß, dass dem höheren Schaden bei Erwischtwerden nur eine geringere Wahrscheinlichkeit des Erwischtwerdens gegenübersteht. Die Polizei *muss* ihn im GG indifferent halten! Es ist ihre Auszahlungsstruktur, die die Strategie des Diebes bestimmt, und diese ändert sich nicht.

Allgemein: Betrachte ein beliebiges 2×2-Spiel

		y	$1 - y$
		L	R
x	O	$a_1, \; a_2$	$b_1, \; b_2$
$1 - x$	U	$c_1, \; c_2$	$d_1, \; d_2$

$$\boxed{\begin{aligned} x^* &= \frac{d_2 - c_2}{d_2 - c_2 + a_2 - b_2} \\ y^* &= \frac{d_1 - b_1}{d_1 - b_1 + a_1 - c_1} \end{aligned}}$$

GG-Strategie des Zeilenspielers wird von Auszahlungsmatrix des Spaltenspielers bestimmt.
GG-Strategie des Spaltenspielers wird von Auszahlungsmatrix des Zeilenspielers bestimmt.

$1 - x^* = \frac{a_2 - b_2}{d_2 - c_2 + a_2 - b_2}$
$1 - y^* = \frac{a_1 - c_1}{d_1 - b_1 + a_1 - c_1}$

$\Rightarrow$ erwartete Auszahlungen im GG:

$$\tilde{u}_1((x^*,1-x^*),(y^*,1-y^*)) = \tilde{u}_1(O,(y^*,1-y^*)) = \frac{a_1d_1-b_1c_1}{d_1-b_1+a_1-c_1}$$
$$\tilde{u}_2((x^*,1-x^*),(y^*,1-y^*)) = \tilde{u}_2((x^*,1-x^*,L)) = \frac{a_2d_2-b_2c_2}{d_2-c_2+a_2-b_2}$$

Diese hängen natürlich nur von der jeweils eigenen Auszahlungsstruktur ab!

Zur Interpretation gemischter Strategien

Das vorherige Beispiel des Elfmeterduelles (und generell die Aussage des Fundamental-Lemmas) zeigt, dass in einem Gleichgewicht in vollständig gemischten Strategien ein Spieler *indifferent* bezüglich der Wahl der eigenen Strategie ist: Er kann jede reine Strategie spielen, da diese jeweils mit positiver Wahrscheinlichkeit in der Mischung berücksichtigt ist. Diese Form von Instabilität (ex ante) erlaubt einem Spieler im Prinzip Abweichungen vom vorgegebenen Mischungsverhältnis, ohne dass damit eine erwartete Nutzeneinbuße verbunden wäre. In einem (strikten) Gleichgewicht in reinen Strategien ist dies nicht möglich. Gemischte Strategien werden daher oft mit dem Argument abgelehnt, dass sie letztlich eine schlechte behavioristische Modellierung tatsächlicher Entscheidungsfindung wären: Entscheidungsträger "würfeln" nicht! Dieses Argument geht jedoch von einer falschen Interpretation gemischter Strategien aus. Sie sind lediglich gedacht als (rationale) Beschreibung von Verhalten, das zufällig *erscheint*. Vermutlich weiß ein Elfmeterschütze schon beim Anlauf (unabhängig von der Aktion des Torwarts), in welche Ecke er schießen wird. Dennoch erscheint sein Verhalten für einen Beobachter zufällig, da er sich vor jedem Elfmeter neu zu entscheiden hat und aus strategischen Überlegungen heraus nicht immer dieselbe (oder fast immer dieselbe) Ecke wählen darf. Auch ist nicht ausgeschlossen, dass manche Spieler in manchen Entscheidungssituationen tatsächlich würfeln bzw. losen. Fahrkartenkontrolleure haben strikt geheime und wechselnde Kontrollstrecken, Parkuhren werden 'zufällig' überwacht, Steuererklärungen nach Zufallsprinzipien strenger kontrolliert, usw. Die Kontrollwahrscheinlichkeit hat im allgemeinen erhebliche Rückwirkungen auf das Verhalten der (potentiell) Kontrollierten, da sie wesentlich deren erwarteten Nutzen vom gewählten Verhalten beeinflusst. (Dopingkontrollen im Sport als Übung!)

Eine andere Interpretationsmöglichkeit gemischter Strategien besteht darin, sie als *Häufigkeiten der verwendeten reinen Strategien* einer ganzen Population von identi-

schen Spielern (z.B. Torhütern und Elfmeterschützen) zu verstehen. Wird in der Hälfte aller Fälle ein Elfmeter in die linke Ecke geschossen, so erlaubt dies wiederum im Falle eines *einzelnen* Elfmeterduelles die Interpretation, dass der betreffende Schütze zufällig aus der Population aller Schützen ausgewählt wurde, von welcher nur bekannt ist, dass die Hälfte davon das linke Eck präferieren; die andere Hälfte das rechte. Entsprechend weiß der Schütze nicht, welcher Populationshälfte der Torwart entstammt.

Da in der Hälfte der Fälle beim einfachen Elfmeterduell der Torwart den Ball hält, ist auch offensichtlich, dass eine (hier vom Schützen) gewählte reine Strategie, die in der Mischung einer gemischten Strategie auftritt, ex post nicht optimal sein muss. Dies kann Ursache einer weiteren Form von Instabilität sein (› Wiederholung eines Elfmeters, Verhalten von Spielern beim Roulett). In einem strikt kompetitiven Spiel wie dem Elfmeterduell profitiert natürlich immer ein Spieler vom Pech des anderen, es ist jedoch auch möglich, dass zwei den jeweiligen Mischungen entsprechend ausgewählte reine Strategien für beide Spieler ex post suboptimal sind. Ein Beispiel hierfür wäre die Strategiekombination (Ausweichen, Ausweichen) im Chicken-Spiel. (Dieser Fall tritt allerdings hinreichend selten auf.)

Eine theoretisch weit anspruchsvollere Rechtfertigung gemischter Strategien gibt HARSANYI [1971]. Er interpretiert ein Spiel in Normalform (mit vollständiger Information über pay-offs) als *Grenzfall* einer Situation, in der jeder Spieler zwar über seine eigenen Auszahlungen genau Bescheid weiß, nicht aber über die seiner Mitspieler. Deren Auszahlungen sind ihm nur in Form einer (mehr oder weniger zentrierten) Wahrscheinlichkeitsverteilung bekannt. In einem solchermaßen 'gestörten' Spiel sind gemischte Strategien des ungestörten Spieles (mit vollständiger Information) als reine Strategien des gestörten Spieles interpretierbar, da die reinen Strategien, die in der Mischung vorkommen, jeweils als Verhaltensweisen für bestimmte Realisierungen der zufälligen Auszahlungen der anderen Spieler gedeutet werden können. HARSANYI weist nach, dass die gestörten Spiele jeweils ein Gleichgewicht in reinen Strategien besitzen und dass jede Folge von solchen Gleichgewichten, die einer Folge von gestörten Spielen, die gegen das ungestörte Spiel konvergieren, entnommen sind, im Limes ein Gleichgewicht in gemischten Strategien für das ungestörte Spiel liefern. Diese überzeugende Rechtfertigung der Verwendung von gemischten Strategien hat darüberhinaus den Vorteil, dass ein Spieler nicht selbst dafür zu sorgen hat, dass er seine reinen Strategien im richtigen Mischungsverhältnis gebraucht (wie in den vorherigen Interpretationen). Vielmehr ist es simple optimale Anpassung an die zufällige Fluktuation in den pay-offs der anderen

Spieler, die ihn zwingt, den Häufigkeiten der möglichen Gegenspieleridentitäten entsprechend seine jeweiligen reinen Strategien zu benutzen. Das Verhalten in einer (in gewissem Sinne idealisierten) Situation mit vollkommener Information über Auszahlungsstrukturen wird also erklärt aus Verhalten unter (realistischeren) unvollkommenen Informationsbedingungen.

In einer Hinsicht unterscheiden sich Gleichgewichts-Analysen in reinen Strategien jedoch grundlegend von solchen in gemischten Strategien:

NASH-Gleichgewichte in reinen Strategien hängen nur ab von den *ordinalen* Eigenschaften der Auszahlungsfunktionen der einzelnen Spieler. NASH-Gleichgewichte in gemischten Strategien sind jedoch an die jeweilige Kardinalisierung der Auszahlungsfunktionen gebunden. Dies kann aus den Gleichgewichtsbedingungen in den Definitionen von reinen und gemischten Gleichgewichten leicht abgelesen werden:

Die Bedingung

$$U_i(s_i^*, s_{-i}^*) \;=\; \max_{s_i \in S_i} U_i(s_i, s_{-i}^*) \qquad i = 1, \ldots, n$$

liefert für verschiedene U_i's immer dann dieselben Maximierer (und daher dieselben Gleichgewichte), falls für zwei individuelle Auszahlungsfunktionen U_i und $\bar{U}_i$ gilt:

$$U_i(s) \;>\; U_i(s') \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{U}_i(s) \;>\; \bar{U}_i(s') \quad \text{für alle } s, s' \in S\,. \qquad (*)$$

Falls $(*)$ gilt, heißen die beiden Spiele $G = (N, S, U)$ und $\bar{G} = (N, S, \bar{U})$ auch *ordinal äquivalent*. $(*)$ ist äquivalent zu der Bedingung, dass $\bar{U}_i$ (resp. U_i) eine monotone Transformation von U_i (resp. $\bar{U}_i$) ist, d.h. $\bar{U}_i = f(U_i)$ mit $f' > 0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Lemma:

1. *Für ordinal äquivalente Spiele sind die* NASH*-Gleichgewichte in reinen Strategien identisch.*
2. *Für ordinal äquivalente Spiele können die* NASH*-Gleichgewichte in gemischten Strategien jedoch verschieden sein.*

Der Grund für Aussage 2. ist in der Durchschnittsbildung, die der Auszahlung für gemischte Strategien zugrunde liegt, zu sehen. Eine zusätzliche Bedingung an die Auszahlungsfunktionen zweier Spiele, um auch die Identität der Gleichgewichte in gemischten Strategien zu erzwingen, wäre, dass

$$U_i(s) \;=\; \alpha_i \cdot \bar{U}_i(s) + \beta_i, \quad \text{mit } \alpha_i > 0 \text{ und } \beta_i \in \mathbb{R}.$$

Zwei Spiele $G = (N, S, U)$ und $\bar{G} = (N, S, \bar{U})$ heißen *affin* (oder *kardinal*) *äquivalent*, wenn sie letztere Bedingung erfüllen. Obiges Lemma kann nun ergänzt werden:

Lemma: *Zwei affin äquivalente Spiele besitzen dieselben* NASH*-Gleichgewichte (in gemischten Strategien).*

2.5 Das Cournot - Wettbewerbsspiel

Sowohl das Modell vollständigen Wettbewerbs als auch das Modell des reinen Monopoles, die eine zentrale Stellung in der Wirtschaftstheorie der Märkte und des Marktverhaltens beanspruchen, sind von der Entscheidungsstruktur her überaus einfach: sie beinhalten keinerlei *interaktive* Entscheidungsprobleme. Im ersten Modell verhalten sich die konkurrierenden Firmen als *Preis*anpasser, ohne die Entscheidungen anderer Firmen zu berücksichtigen oder besser: Bücksichtigen zu müssen, in letzterem ist von der Marktform her a priori keinerlei Interaktion mit Konkurrenten vorgesehen. Ein realistischeres Bild der Wettbewerbssituation in vielen Märkten zeichnet sich jedoch dadurch aus, dass zwar mehr als eine Firma im Markt aktiv ist, andererseits aber nicht so viele Firmen, dass die vollständige Wettbewerbsannahme der Preisnehmerschaft akzeptabel wäre. Dieses Szenarium liegt also 'zwischen' den beiden Extremen und zeichnet sich – im Gegensatz zu diesen – gerade dadurch aus, dass der Verbleib von 'Marktmacht' bei mehr als nur einer Firma theoretisch nur durch ein interaktives Entscheidungsproblem adäquat modelliert werden kann.

Dies hat als erster COURNOT [1838] erkannt, der als erste Referenz des (spieltheoretischen) Gleichgewichtsbegriffes á la NASH gilt. Ihm zu Ehren wird das NASH-Gleichgewichtskonzept in den Wirtschaftswissenschaften (im Zusammenhang mit Wettbewerbsmodellen) auch COURNOT-NASH-Gleichgewicht genannt. COURNOT betrachtete und analysierte das Wettbewerbsverhalten zweier Firmen in einem Markt für ein homogenes Gut, wenn diese – unter Berücksichtigung des daraus resultierenden Marktpreises – unabhängig voneinander ihr Angebot bzw. ihre Produktionsmengen wählen. Wir formulieren zunächst dieses Problem als ein Spiel in Normalform und betrachten später eine Verallgemeinerung dieses sog. COURNOT-Wettbewerbs auf mehr als zwei Firmen.

Sei

$$p \;=\; a - b(x_1 + x_2) \;=\; a - b \cdot x$$

die (lineare) Nachfragefunktion für das betreffende Gut. Dabei bezeichne x_i, $(i = 1, 2)$, die Angebotsmenge von Firma i und folglich $x = x_1 + x_2$ das Gesamtangebot. Ein *Gesamt*angebot von $x = x_1 + x_2$ kann also gerade zum Preis $p(x) = a - b \cdot x$ abgesetzt werden. Dies bedeutet jedoch gerade, dass der Erlös jeder einzelnen Firma (über den Preis) vom Verhalten der anderen Firma abhängig ist. Genauer bedeutet dies, wenn wir identische Kostenfunktionen

$$c_i(x_i) \;=\; c \cdot x_i, \qquad i = 1, 2$$

unterstellen, dass die Gewinnfunktionen der beiden Firmen wie folgt lauten:

$$\begin{aligned} \Pi_1 \;=\; \Pi_1(x_1, x_2) \;&=\; p \cdot x_1 - c \cdot x_1 \\ &=\; [a - b(x_1 + x_2)] \cdot x_1 - c \cdot x_1 \\ &=\; (a - c) \cdot x_1 - b \cdot x_1^2 - b \cdot x_1 \cdot x_2 \\ \text{analog:}\quad \Pi_2 \;=\; \Pi_2(x_1, x_2) \;&=\; (a - c) \cdot x_2 - b \cdot x_2^2 - b \cdot x_1 \cdot x_2 \end{aligned}$$

Π_1 und Π_2 sind offensichtlich die Auszahlungsfunktionen des COURNOT-Spieles und x_1 resp. x_2, die Angebotsmengen, die reinen Strategien. Wenn wir berücksichtigen, dass aufgrund der Nachfragefunktion allenfalls a/b Einheiten des Gutes abgesetzt werden können, so können wir die Strategienräume als $S_1 = S_2 = [0, \frac{a}{b}]$ wählen, d.h. jede Firma wird eine Angebotsmenge zwischen 0 und $\frac{a}{b}$ wählen.

Das COURNOT-Spiel ist damit vollständig beschrieben als das Spiel

$$G \;=\; (N, S, U) \;=\; \left(\{1, 2\}, [0, \frac{a}{b}] \times [0, \frac{a}{b}], (\Pi_1, \Pi_2)\right).$$

Man beachte, dass dies nun kein endliches Spiel mehr ist, da die Mengenvariablen x_1 und x_2 als stetige Variable modelliert sind. Dennoch greift der allgemein definierte Begriff des NASH-Gleichgewichtes zur Lösung dieses Spiels. Wir unterstellen dabei, dass beide Firmen ihre Entscheidungen gleichzeitig treffen. Ein COURNOT-NASH-Gleichgewicht liegt genau dann vor, wenn die Angebotsmengen (x_1^*, x_2^*) die Eigenschaft haben, dass

$$\begin{aligned} \Pi_1(x_1^*, x_2^*) \;&>\; \Pi_1(x_1, x_2^*) \quad \text{für alle} \quad x_1 \in [0, \frac{a}{b}] \\ &\text{und} \\ \Pi_2(x_1^*, x_2^*) \;&\geq\; \Pi_2(x_1^*, x_2) \quad \text{für alle} \quad x_2 \in [0, \frac{a}{b}]. \end{aligned}$$

Beide Firmen maximieren also – gegeben das Angebot ihres Konkurrenten – ihren Gewinn und die insgesamt angebotene Menge wird gerade abgesetzt.

Ermittlung der Reaktionsfunktionen bzw. Beste-Antwort-Korrespondenzen:

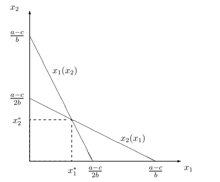
Firma 1: $\quad \max_{x_1 \in [0,a]} \Pi_1(x_1, x_2) \quad$ bzw. $\quad max_{x_1 \in [0,a]}(a - c) \cdot x_1 - b \cdot x_1^2 - b \cdot x_1 \cdot x_2$

i) $\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1} = (a \quad c) \quad 2bx_1 \quad b \cdot x_2 = 0$ $\qquad$ und analog

ii) $\frac{\partial \Pi_2}{\partial x_2} = (a - c) - 2bx_2 - b \cdot x_1 = 0.$

Aus i) folgt: $x_1 = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}x_2$, und aus ii) folgt: $x_2 = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}x_1$.

Graphisch sehen diese Reaktionsfunktionen wie folgt aus:



Der Schnittpunkt löst gerade obige beiden Gleichungen, so dass für das *eindeutige* Gleichgewicht gilt:

$$\boxed{x_1^* \;=\; x_2^* \;=\; \tfrac{a \quad c}{3b}}$$

Die (positiven) Gewinne ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \Pi_1^* \;=\; \Pi_2^* \;&=\; (a - c) \cdot \frac{a - c}{3b} - b \cdot \left(\frac{a - c}{3b}\right)^2 - b \cdot \frac{(a - c)}{3b}\frac{(a - c)}{3b} \\ &=\; \frac{1}{b}(a - c)^2 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\right] \\ &=\; \frac{1}{b}\left(\frac{a - c}{3}\right)^2 \end{aligned}$$

Das COURNOT-Spiel besitzt also ein Gleichgewicht in reinen Strategien, das sich als (eindeutiger) Schnittpunkt der beiden Beste-Antwort-Korrespondenzen ergibt. Die Tatsache, dass nun ein unendliches Spiel vorliegt, hat offensichtlich keinen Einfluss auf die (eindeutige) Lösbarkeit.

Die Lösung zeigt, dass die beiden Firmen mehr als ein Monopolist (der $\frac{a-c}{2b}$ anbieten würde) anbieten, aber weit weniger als zum vollen Wettbewerbspreis $p = c$ (wo $\frac{a-c}{b}$

angeboten würde) auf den Markt bringen. Entsprechend liegt der Gleichgewichts-Preis

$$p^* \;=\; \frac{a + 2c}{3} \;>\; c, \quad \text{und} \quad p^* \;<\; \frac{a + c}{2} \qquad (\text{da } a > c)$$

zwischen dem Wettbewerbspreis $p = c$ (beachte, dass $a > c$, sonst würde nie ein Angebot erfolgen) und dem Monopolpreis $p_m = \frac{a+c}{2}$.

Es ist für den Wirtschaftstheoretiker nun äusserst interessant zu studieren, wie sich die Gleichgewichtslösung des COURNOT-Spiels mit Anwachsen der Wettbewerber verhält.

Wir betrachten nun also n Firmen, die sich im Markt, der durch die Nachfragefunktion

$$p \;=\; a - b \cdot x \;=\; a - b(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

beschreiben ist, gegenüberstehen.

Die Gewinnfunktionen lauten nun:

$$\begin{aligned} \Pi_i \;=\; \Pi_i(x_1, x_2, x_i, x_n) \;&=\; \Pi_i(x_i, x_{-i}) \\ &=\; (a - b \cdot x) \cdot x_i - c \cdot x_i, \end{aligned}$$

wobei $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ den Gesamtoutput bezeichnet.
Wir können nun wiederum die Reaktionsfunktionen aus den Bedingungen erster Ordnung ermitteln:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_i}{\partial x_i} \;&=\; a - b \cdot x - b \cdot x_i - c \\ &=\; a - b(x_1 + \cdots + x_n) - b \cdot x_i - c \\ &=\; 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad x_i \;=\; \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}\sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{n} x_j.$

Es folgt für das Gleichgewicht:

$$\begin{aligned} x_i^* \;&=\; \frac{a - c}{(n + 1)b} \qquad i = 1, \ldots, n \\ \Pi_i^* \;&=\; \frac{1}{b}\frac{(a - c)^2}{(n + 1)^2} \qquad i = 1, \ldots, n \\ \text{und} \quad x^* \;&=\; \sum_{i=1}^{n} x_i^* \;=\; \frac{n(a - c)}{(n + 1)b} \end{aligned}$$

Für den Gleichgewichts-Preis folgt daraus:

$$p^* \;=\; \frac{a + n \cdot c}{n + 1} \;=\; \frac{a}{n + 1} + \frac{n}{n + 1} \cdot c.$$

Wie verhält sich nun der Gleichgewichts-Preis mit zunehmender Anzahl n der Wettbewerber? Es ist leicht zu sehen, dass

$$p^* \overset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} c, \quad \text{da} \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{a}{n + 1} + \frac{n}{n + 1}c \;=\; c$$

Die Gleichgewichtslösung ergibt also mit zunehmendem n eine immer größere Annäherung an die vollkommene Wettbewerbslösung! Entsprechend konvergiert dann auch die insgesamt angebotene Menge zu der, die unter vollkommenem Wettbewerb angeboten würde:

$$x^* \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i^* \;=\; \frac{n}{n + 1}\frac{(a \quad c)}{b} \overset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \frac{a \quad c}{b}$$

Angebot der Menge $\frac{a-c}{b}$ zum Preis $p = c$ führt gerade zu Nullgewinnen (der gesamten Industrie):

$$\Pi \;=\; p \cdot x - c \cdot x \;=\; c \cdot \frac{a - c}{b} - c \cdot \frac{a - c}{b} \;=\; 0.$$

Diskussionen des Cournot-Nash-Gleichgewichtes unter ökonomischen Aspekten:

Obiges Argument zeigte, dass mit steigender Firmenanzahl n der Marktpreis in einem COURNOT-NASH-Gleichgewicht sinkt und ebenso die gesamten Industriegewinne

$$n \cdot \Pi^* \;=\; n \cdot \frac{1}{b}\frac{(a - c)^2}{(n + 1)^2},$$

bis bei genügend hoher Firmenzahl n der Marktpreis annähernd gleich dem Wettbewerbspreis $p = c$ ist und die Gewinne fast vollständig wegkonkurriert sind. Für jedes feste n - wie groß auch immer - gilt jedoch, dass der Marktpreis p_c *über* den Grenzkosten c liegt:

$$p^* \;=\; \frac{a}{n + 1} + \frac{n}{n + 1}c \;=\; c + \frac{a - c}{n + 1} \;>\; c.$$

Daher gilt, dass ein COURNOT-NASH-Gleichgewicht nicht sozial effizient (pareto-optimal) ist.

Das COURNOT'sche Wettbewerbsmodell liefert folgenden für die (angewandte) Industrieökonomik wichtigen Zusammenhang zwischen Angebots- und Nachfragestruktur eines Marktes:

Es bezeichne

$$L_i \;=\; \frac{p - c}{p}$$

den sogenannten *Lernerindex* als relatives Maß für die Abweichung zwischen Preis und Grenzkosten für eine Firma i, ein sog. *Konzentrationsmaß*,

$$\alpha_i \;=\; \frac{x_i}{x} \;=\; \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

den Marktanteil einer Firma i, und

$$\frac{1}{\varepsilon} \;=\; -\frac{x}{p} \cdot \frac{dp}{dx}$$

die inverse Preiselastizität der Nachfrage.

Dann gilt im Cournot-Nash Gleichgewicht:

$$L_i \;=\; \frac{\alpha_i}{\varepsilon}$$

Der Lernerindex ist proportional zum Marktanteil einer Firma und umgekehrt proportional zur Nachfrageelastizität. Er ist insbesondere *positiv.*

Beweis:

$$\alpha_i \;=\; \frac{x_i}{x} \;=\; \frac{\frac{a-c}{(n+1)b}}{\frac{n(a-c)}{(n+1)b}} \;=\; \frac{1}{n}$$

Klar: bei lauter identischen Firmen kann dies nur von deren Anzahl abhängen!

$$\frac{1}{\varepsilon} \;=\; -\frac{n \cdot x_i}{p} \cdot \frac{dp}{dx_i} \;=\; -\frac{n \cdot x_i}{p} \cdot (-b) \;=\; \frac{n \cdot bx_i}{p} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\alpha_i}{\varepsilon} \;=\; \frac{b \cdot x_i^*}{p}$$

und:

$$L_i = \frac{\frac{a-c}{n+1}}{p^*} \;=\; \frac{b \cdot x_i^*}{p^*}.$$

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wollen wir uns nun fragen, welche Struktureigenschaften des COURNOT-Modelles dafür verantwortlich sind, dass es ein NASH-Gleichgewicht des Spieles in *reinen* Strategien gibt. Bisher hatten wir für Spiele mit unendlichen Strategienräumen den Begriff nur definiert, aber nicht in Form eines Satzes sichergestellt, dass – wie im endlichen Fall durch den Satz von NASH – ein Gleichgewicht immer existiert.

2.6 Existenzsätze für Nash-Gleichgewichte

Die Geometrie des vorherigen Beispieles zeigt, dass die Reaktionsfunktionen oder – allgemeiner – beste Antwortkorrespondenzen der beiden Spieler *stetige* Funktionen sind, die sich an genau einer Stelle schneiden. Für die *Existenz* eines Gleichgewichtes ist also wichtig, *dass* die beste Antwortkorrespondenzen einen Punkt gemeinsam haben. Jeder solche (gemeinsame) Punkt ist ein Gleichgewicht, und jedes Gleichgewicht muss genau diese Eigenschaft haben. Die *strukturelle* Eigenschaft der Reaktionsfunktionen, die den gemeinsamen Punkt erzwingt, ist in obigem Beispiel ganz offensichtlich die Stetigkeit. Wir können also zunächst fragen, unter welchen Bedingungen eine beste Antwortkorrespondenz überhaupt *existiert.* Dazu genügt es ganz offensichtlich, dass $U_i(s)$, die Auszahlungsfunktion von Spieler i $(i = 1, 2)$ stetig in s_i, der Strategie von Spieler i ist. Damit die beste Antwort auf s_i immer *eindeutig* ist, genügt es, dass $U_i(s)$ strikt konkav in s_i ist (für alle s_{-i}). Dies bedeutet schon, dass die beste Antwort-Korrespondenz $b_i(s_{-i})$ sogar eine *Funktion* ist. Diese Funktion ist – wie gefordert – darüberhinaus stetig, wenn $U_i(s)$ auch stetig in s_{-i} ist.

Eine Verallgemeinerung dieser grundlegenden Einsicht liefert der folgende

Satz von Debreu, Glicksberg und Fan (1952): *Sei $G = (N, S, U)$ ein Spiel in Normalform. Falls*

- *S_i kompakt und konvex und*
- *$U_i(s)$ stetig in s und quasi-konkav in s_i ist, für $i = 1, \ldots, n$,*

dann existiert ein NASH-*Gleichgewicht in reinen Strategien.*

Seine ursprüngliche Version, die auf GLICKSBERG [1952] zurückgeht, lautete:

Falls alle $S_i, (i = 1, \ldots, n)$, kompakt und konvex sind, und alle beste-Antwort-Korrespondenzen $b_i(s_{-i})$, $(i = 1, \ldots, n)$, stetig sind, dann existiert ein NASH-*Gleichgewicht in reinen Strategien.*

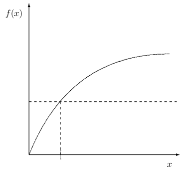
Ein Vergleich zeigt also, dass es gerade die zusätzlichen Annahmen der Stetigkeit und Quasi-Konkavität an die Auszahlungsfunktionen sein müssen, die diese Stetigkeit der $b_i(s_{-i})$ erzwingen. Ein Satz wie der von GLICKSBERG ist immer "unschön" oder von begrenztem Wert, weil er Forderungen an eine *abgeleitete* Strukturgröße, nämlich die beste Antwort-Korrespondenzen stellt, ohne gewährleisten zu können, dass diese durch

nachvollziehbare und - vom praktischen Standpunkt aus gesehen - auch nachprüfbare Bedingungen an die Grundgrößen des Modells (hier: *Spiels*) erfüllt werden können. Die Erweiterung durch DEBREU und FAN hilft diesem Mangel gerade ab.

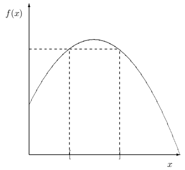
Die Stetigkeitsforderung ist unmittelbar einsichtig und ist verhaltenstheoretisch auch gut zu begründen: sie besagt im wesentlichen, dass "geringe" Ursachen geringe Folgen haben sollten. Eine intuitive Erklärung der Quasi-Konkavität ist nicht so einfach zu erbringen. Formal lautet diese Forderung an eine Funktion f, dass die Mengen

$$\{x \in X \mid f(x) \geq \alpha\}$$

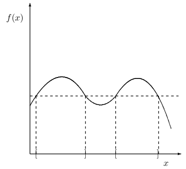
konvex sein müssen, wobei $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und X (natürlich) konvex. Danach ist insbesondere eine konkave Funktion quasi-konkav. (Beachte, dass Konkavität von Funktionen in der Wirtschaftstheorie in aller Regel "natürliche" Interpretation besitzt!).



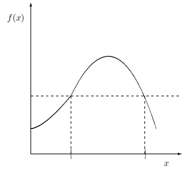
f ist stetig und konkav



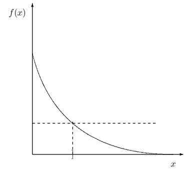
f ist stetig und konkav



f ist stetig und nicht konkav,
nicht quasi-konkav



f ist stetig und nicht konkav,
aber: quasi-konkav



f ist stetig und nicht konkav,
quasi-konkav

Wie abgeleitet, sind die Reaktionsfunktionen im COURNOT-Spiel stetig. Wir prüfen hier die Bedingungen des Satzes von DEBREU et al. hinsichtlich der Auszahlungsfunktionen nach $(i = 1, 2)$:

$$\Pi_i \;=\; (a-c) \cdot x_i - b \cdot x_i^2 - b \cdot x_i \cdot x_{-i}$$

konkav in x_i :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \;=\; (a \quad c) \quad 2b \cdot x_i \quad b \cdot x \;\; _i$$
$$\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial x_i} \;=\; -2b \;<\; 0 \quad \text{konkav also: quasi-konkav}$$

Dass es wirklich die (schwächere) Eigenschaft der Quasi-Konkavität ist, um die es in diesem Falle geht, ist vielleicht am besten daraus ersichtlich, dass diese Eigenschaft einer Funktion nur von *ordinalem* Charakter ist, Konkavität hingegen nicht. Da NASH-Gleichgewichte (in reinen Strategien) jedoch nur von den ordinalen Eigenschaften eines Spieles abhängen, ist naheliegend, dass Existenzsätze auch nur ordinale Forderungen stellen sollten.

Es gilt: *Ist f quasi-konkav, so ist auch jede monotone (positiv) Transformation von f quasi-konkav.*

Beweis: Sei $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine positiv monotone Funktion. Dann ist $g \circ f : S \longrightarrow_f \mathbb{R} \longrightarrow_g \mathbb{R}$ quasi-konkav, falls f quasi-konkav:

Sei $\{x \in S \mid f(x) \geq \alpha\}$ konvex für alle α, zu zeigen ist,

dass $\{x \in S \mid g \circ f(x) \geq \alpha\}$ konvex.

Dies ist aber klar, da

$$\{x \in S \mid g \circ f(x) \geq \alpha\} \;=\; \{x \in S \mid f(x) \geq g^{-1}(\alpha)\} \quad \text{konvex.}$$

(g^{-1} existiert wegen Monotonie, Ungleichheitszeichen bleibt in gleicher Richtung erhalten, da *positive* Monotonie.)

Es gilt aber *nicht*: f konkav $\Longrightarrow g \circ f$ konkav!

Beispiel:

$$f(x) \;=\; x^{\frac{1}{2}} \quad \text{konkav :} \quad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} :\; x \longrightarrow x^4$$
$$\Longrightarrow \; g \circ f(x) = x^2 \quad \text{nicht konkav.}$$

Bemerkung: Der Existenzsatz von NASH [1951] für Gleichgewichte in gemischten Strategien für endliche Spiele kann als Spezialfall obigen Satzes gesehen werden: Der Übergang von reinen zu gemischten Strategien bedeutet gerade, dass die Strategienräume (W-Verteilungen auf reinen Strategien) auch konvex werden und die (erwarteten) Auszahlungen stetig und quasi-konkav werden, da die betreffenden Integrale (Summen) lineare Funktionale darstellen.

Der Existenzsatz von NASH ist in folgender Weise verfeinert worden:

Satz von Wilson (1971): *Sei $G = (N, S, U)$ ein endliches Spiel in Normalform. Dann besitzt G - normalerweise, mit Wahrscheinlichkeit 1, "fast immer" - eine ungerade Anzahl von Gleichgewichten (in möglicherweise gemischten Strategien).*

Der einschränkende Term "normalerweise" ist dabei technisch definiert und führt zu weit von der Grundvorstellung ab, die dieser Abschnitt vermitteln soll. Jedenfalls besagt der Satz, dass bei Vorliegen von zwei Gleichgewichten in reinen Strategien eines Spieles (Beispiel: Battle of the Sexes) in der Regel auch noch zumindest ein Gleichgewicht in gemischten Strategien existieren muss.

Kapitel 3

Spiele in extensiver Form

Nach unseren grundlegenden Betrachtungen zu interaktiven Entscheidungsproblemen (Spielen in Normalform) in den bisherigen Kapiteln, wollen wir uns nun spezielleren Spielen und Entscheidungssituationen zuwenden, die vor allem für die Ökonomische Theorie von großer Bedeutung sind. Es sind dies Spiele, in denen die *Reihenfolge* der Spielzüge und (daraus folgend) die Information, die ein Spieler zum Zeitpunkt einer Entscheidung besitzt, von großer Bedeutung sind. Zieht ein Spieler beispielsweise vor dem anderen, so kann er dies möglicherweise zu seinem Vorteil ausnutzen, was wiederum davon abhängen mag, ob der andere Spieler den (früheren) Zug eines Gegenspielers beobachten kann oder nicht.

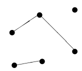
Eine allgemeine mathematische Struktur zur Beschreibung solcher Spiele wurde 1953 von KUHN in Form der sog. *extensiven Form* bzw. des *Spielbaumes* eines Spieles eingeführt. Wir wenden uns zunächst dieser Darstellung und ihrer spieltheoretischen Interpretation zu.

3.1 Extensive Form, Spielbaum und Teilspiele

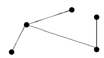
Abstrakt gesprochen ist ein Spielbaum ein sog. *Graph*, d.h. eine Menge von Eckpunkten und Verbindungslinien zwischen Eckpunkten. Ein Graph wird zu einem *Baum* (= Spezialfall eines Graphen), wenn er *zusammenhängend* und *schlaufenlos* ist. Zusammenhängend bedeutet, dass jeder Eckpunkt mit allen anderen Eckpunkten durch einen Streckenzug (= mehrere Verbindungslinien) verbunden ist. Schleifenlos bedeutet, dass es in dem Graphen keine geschlossenen Streckenzüge gibt, die wieder zum Ausgangs-

punkt zurückkehren.

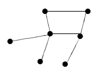
Beispiel:



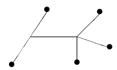
nicht zusammenhängend



zusammenhängend



zusammenhängend
mit Schleife



zusammenhängend
schleifenlos

Ein *Spielbaum* ist nun ein Baum, der einen als Ursprung (Wurzel) ausgezeichneten Eckpunkt besitzt (siehe beispielsweise den Spielbaum auf der folgenden Seite). Die Analogie zur Struktur eines Baumes dürfte offensichtlich sein: Eckpunkte korrespondieren zu Astgabelungen, Verbindungslinien zu den Ästen selbst. Der Ursprung ist am oberen Stammende fixiert.

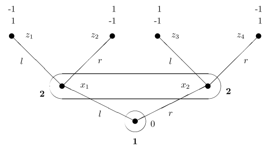
Die Interpretation einer solchen Baumstruktur als ein interaktives Entscheidungsproblem ist nun am leichtesten anhand eines einfachen Beispieles nachzuvollziehen. Betrachtet sei das simple 'Streichholzspiel', das darin besteht, dass ein Spieler ein Streichholz in die linke oder rechte Hand nimmt, und der andere Spieler dann entscheiden (bzw. raten) muss, in welcher Hand von Spieler 1 das Streichholz verborgen ist. Rät der Spieler richtig, so gewinnt er, liegt er falsch, so gewinnt Spieler 1. Gespielt werde um 1 Euro.

Dieses einfache Nullsummenspiel würde durch die Normalform wie folgt wiedergegeben.

		Spieler 2	
		l	r
Spieler 1	l	-1, 1	1, -1
	r	1, -1	-1, 1

l = linke Hand, r = rechte Hand

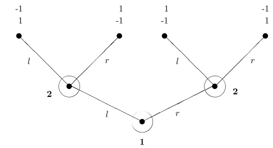
Aus dieser Darstellung wird nun aber nicht ersichtlich, dass Spieler 1 sich *vor* Spieler 2 entscheiden muss (und folglich auch nicht, wie die Informationslage von Spieler 2 nach der Entscheidung von Spieler 1 ist). Aus der extensiven Form ist dies unmittelbar abzulesen, zunächst verdeutlicht die Baumstruktur die *sequentielle* Abfolge der Züge.



Die Eckpunkte z_1, z_2, z_3, z_4 heißen *Endpunkte* des Spiels oder *Graphen*, an ihnen werden Auszahlungen als Ergebnis des Spieles fällig; die Eckpunkte 0, x_1 und x_2 hingegen sind sog. *Entscheidungspunkte*, da an ihnen Entscheidungen (Aktionen) zu treffen sind, die zu weiteren Eckpunkten führen.

Kreise ( ) stellen sogenannte *Informationsbezirke* (oder *-mengen*) dar, die jeweils dem Spieler, der an dem betreffenden Knoten oder Eckpunkt am Zuge ist, zugeordnet sind. Ihre Interpretation ist die Folgende: Befinden sich mehrere Entscheidungsknoten innerhalb einer einzigen Informationsmenge, so weiß der Spieler nur, dass diese Menge erreicht wurde, nicht aber an welchem Knoten dies geschah. Im obigen Beispiel weiß also Spieler 2, *dass* Spieler 1 gezogen hat (weil er beobachten konnte, wie Spieler 1 das Streichholz zwischen seine beiden Handflächen legte), aber er weiß nicht, in welcher Hand nach Auseinandernehmen der Handflächen sich das Streichholz befindet. (Er kann auch nicht vom anderen Spieler in *glaubhafter* Weise darüber informiert werden,

in welcher Hand es liegt!). Könnte Spieler 2 genau beobachten, in welche Hand Spieler 1 das Streichholz nimmt, so sähe die extensive Form (dieses nun *neuen*; d.h. vom ersten verschiedenen Spieles) wie folgt aus:



Beobachtung: Diese extensive Form führt zu folgender Normalform des 'Streichholzspieles'.

		Spieler 2			
		ll	lr	rl	rr
Spieler 1	l	-1, 1	-1, 1	1, -1	1, -1
	r	1, -1	-1, 1	1, -1	-1, 1

Beachte: Spieler 2 hat nun *vier* verschiedene Strategien, da eine vollständige Beschreibung eines Verhaltensplanes für das Spiel ($\hat{=}$ Strategie) für Spieler 2 für *beide* Informationsmengen des Spielers 2 eine Entscheidung vorsehen muss. Bei 2 Informationsmengen mit jeweils 2 Alternativen ergibt dies insgesamt 4 Möglichkeiten!

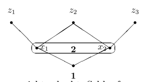
Zunächst wollen wir jedoch eine genaue formale Definition eines extensiven Spieles geben.

Definition: *Ein* extensives Spiel $\Gamma = (K, P, I, p, U)$ *ist beschrieben durch*

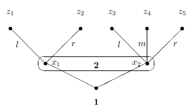
- *einen Spielbaum K mit Ursprung* 0,

- *eine Spielerzerlegung $P = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$, $P_0 \hat{=}$ Spieler 'Natur' (Zufallszüge etc.), die die Menge der Entscheidungspunkte X in $(n+1)$ Teilmengen (X_0, ..., X_n) zerlegt, die jeweils einem Spieler i zugeordnet sind,*
- *eine Informationszerlegung $I = (H_0, \ldots, H_n)$, die eine Verfeinerung der Spielerzerlegung P darstellt, die P in Informationsmengen zerlegt, wobei*
  1. *jede Zugfolge durch den Spielbaum bis zu einem Endpunkt höchstens einen Eckpunkt mit einer Informationsmenge gemeinsam hat,*
  2. *von jedem Eckpunkt x in einer Informationsmenge h die gleiche Anzahl von Zügen $A(x) = A(h)$ möglich ist,*
  3. *die Informationsmengen in P_0 einelementig sind,*
- *eine Wahrscheinlichkeitsverteilung p, die jedem Zug an den Eckpunkten in P_0 eine Wahrscheinlichkeit > 0 zuordnet,*
- *eine Auszahlungsfunktion U, die jedem Endpunkt z von K einen Auszahlungsvektor $U(z) = (U_1(z), \ldots, U_n(z))$ zuordnet, wobei $U_i(z)$, $i = 1, \ldots, n$, die Auszahlung von Spieler i darstellt.*

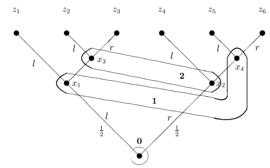
Beispiele:



nicht erlaubt: Schlaufe



nicht erlaubt: $A(x_1) \neq A(x_2)$

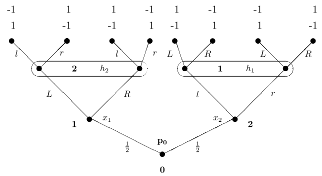


erlaubt

Teilspiele

Ein Spiel enthält ein Teilspiel, wenn - grob gesagt - sein Spielbaum K einen (Teil-) Graphen enthält, der selbst wiederum ein Spielbaum ist.

Beispiel: Streichholzspiel mit Auslosung der Rollen: Dieses Spiel hat zwei Teilspiele, die an den Knoten x_1 bzw. x_2 beginnen, d.h. dort ihren Ursprung haben. Offensichtlich bestehen beide Teilspiele gerade aus der extensiven Form des 'Streichholzspieles', wobei einmal Spieler 1 der Erstziehende ist (links) und einmal Spieler 2. Die Interpretation des Gesamtspielbaumes ist dann auch, dass per Zufallszug (z.B. Würfel) am Beginn des 'Streichholzspieles' festgelegt wird, wer von den beiden Spielern den Streichholzpart erhält und wer raten muss.



3.2 Strategien in extensiven Spielen

Die explizite Berücksichtigung der Informationsstruktur in der Beschreibung eines Spieles durch die extensive Form erfordert nun auch einen leicht erweiterten Strategienbegriff, der dies ebenfalls berücksichtigt.

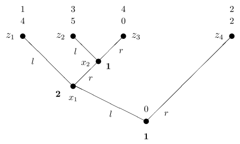
Definition: *Eine* reine Strategie s_i *für Spieler i ordnet jeder Informationsmenge $h_i \in H_i$ von Spieler i eine zulässige Aktion (Entscheidung, Zug) $a \in A_i(h_i)$ zu; d.h.*

$$s_i \;:\; H_i \longrightarrow A_i$$

$$h_i \;\longrightarrow\; s_i(h_i)\;.$$

Der Menge aller möglichen Zuordnungen s_i bildet den Strategienraum S_i.

Eine Strategie s_i für einen Spieler i sieht also für *jede* Informationsmenge eines Spielers eine Entscheidung vor *unabhängig* davon, ob eine Informationsmenge tatsächlich erreicht wird oder nicht. Sie beugt in diesem Sinne für alle Eventualitäten vor. Besonders deutlich wird dies im folgenden Beispiel:



Hier hat Spieler 1 *vier* reine Strategien: (l,l), (l,r), (r,l) und (r,r). Der Knoten x_2 wird bei Wahl von r an 0 *nicht* erreicht.

Eine Strategienkombination $(s_1,\ldots,s_n)$ zusammen mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung für die (zufälligen) Züge an Knoten in P_0 (Zufallsstrategien s_0) bestimmt daher eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über den Endpunkten Z. Ist kein Zufallszug vorhanden, so bestimmt eine (reine) Strategienkombination genau einen Endpunkt. Daher kann man jeder Strategienkombination $s=(s_1,\ldots,s_n)$ eine erwartete Auszahlung zuordnen:

$$(s_1,\ldots,s_n) \;\longrightarrow\; z \;\longrightarrow\; U(z)=(U_1(z),\ldots,U_n(z)).$$

Im obigen Beispiel:

$$(s_1,s_2)=((l,l),l) \;\longrightarrow\; z_1 \;\longrightarrow\; (1,4)$$

$$(\bar{s}_1,\bar{s}_2)=((r,l),l) \;\longrightarrow\; z_4 \;\longrightarrow\; (2,2).$$

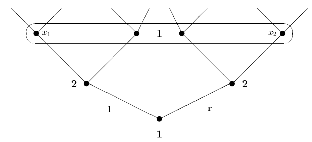
Eine gemischte Strategie ist - wie bisher definiert und benutzt - eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über S_i, dem Raum der reinen Strategien von Spieler i. Mit dem verfeinerten Begriff einer reinen Strategie in der extensiven Form, kann diese Definition unmittelbar übertragen werden. Allerdings impliziert diese Übertragung dann, dass die Spieler über ihre reinen Strategien mischen und als Ergebnis der Mischung (-slotterie) eine reine Strategie wählen, *bevor der erste Zug des Spieles in extensiver Form getan wurde*. Dies würde bedeuten, dass die Spieler *während des Spieles* - wenn z.B. eine bestimmte Informationsmenge erreicht wurde - nicht mehr über den bisherigen Spielverlauf und den noch zu erwartenden reflektieren, sondern sich strikt an die einmal zu Beginn zufällig gewählte reine Strategie halten. Dies ist als realistische Verhaltens*beschreibung* wohl wenig überzeugend. Realistischer wäre, die Spieler an jeder Informationsmenge entscheiden und (möglicherweise zufällig) wählen zu lassen, also die

sequentielle Struktur des Spieles im Entscheidungsverhalten entsprechend zu berücksichtigen. Eine solche Strategie, die also an jeder Informationsmenge eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über die an dieser Menge möglichen Züge (Aktionen) spezifizieren würde, heißt daher auch *Verhaltensstrategie*. Ein wichtiger Struktursatz über extensive Spiele besagt nun (Kuhn, [1953]), dass für eine wichtige Klasse von Spielen in extensiver Form, nämlich solche, in der die Spieler vollkommene Erinnerung haben, diese beiden Strategienbegriffe für Beschreibung und Lösung dieser Spiele äquivalent sind. Man kann für solche Spiele also die Unterscheidung zwischen gemischten Strategien und Verhaltensstrategien vernachlässigen, da letztere alle strategischen Möglichkeiten, die durch eine extensive Form den Spielern eröffnet werden, auch vollkommen berücksichtigen. Wir wollen daher im folgenden, da *nur* Spiele mit vollkommener Erinnerung von Bedeutung sein werden, eine gemischte Strategie gleich als Verhaltensstrategie definieren, ohne den Kuhn'schen Satz zu beweisen. Auf seine Formulierung und Bedeutung wollen wir aber eingehen.

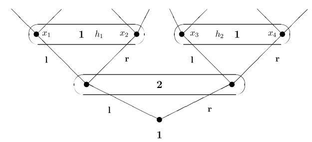
Definition: *Ein extensives Spiel Γ hat* vollkommene Erinnerung *(perfect recall), falls jeder Spieler an jeder seiner Informationsmengen weiß, welche Züge (Entscheidungen) er im bisherigen Spielverlauf an welchen Informationsmengen gewählt (getroffen) hat.*

Obwohl diese Annahme zunächst eine starke Idealisierung darzustellen scheint (wer von uns vergisst nicht schon hin und wieder etwas!), ist sie für eine rationale Entscheidungstheorie nahezu unverzichtbar, wenn man davon ausgeht, dass etwas für eine Entscheidungssituation Relevantes "vergessen" zu haben, nicht rational vom Standpunkt des Entscheidenden aus sein kann.

Beispiel 1:



Beispiel 2:



Beispiel 1: *Unvollkommene Erinnerung:* kein *perfect recall! Spieler* 1 *hat nach dem ersten Zug von Spieler* 2 *vergessen, welchen Zug er zu Beginn gemacht hat.*

Beispiel 2: *Vollkommene Erinnerung: Spieler* 1 *weiß zwar an seinen Informationsmengen, welchen Zug er zu Beginn gemacht hat (Erinnerung!), aber nicht, welchen Zug Spieler* 2 *gemacht hat.*

Im Spielbaum drückt sich vollkommene Erinnerung also so aus, dass für jeden Spieler i gelten muss, dass falls ein Entscheidungspunkt x in einer Informationsmenge h_i des Spielers durch einen früheren Zug dieses Spielers erreicht werden kann - Züge anderer Spieler dazwischen sind natürlich zugelassen - dann muss auch jeder andere Entscheidungspunkt in h_i durch diese frühere Entscheidung des Spielers i prinzipiell erreichbar sein. Im zweiten Beispiel ist dies der Fall: x_1 kann nur durch den Zug l von Spieler 1 zu Beginn erreicht werden, dasselbe gilt für x_2, der auch noch zur Informationsmenge h_1 gehört. h_2 erfüllt die Bedingung bezüglich des Zuges r zu Beginn. Im ersten Beispiel ist die Bedingung jedoch verletzt, da x_1 nur über l zu Beginn erreicht werden kann, nicht aber x_2, obwohl x_2 zur selben Informationsmenge gehört.

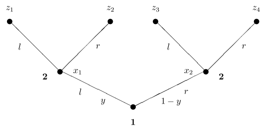
Der Äquivalenzbegriff zwischen gemischten Strategien im klassischen Sinne und Verhaltenstrategien für Spiele mit vollkommener Erinnerung beruht auf folgender Definition:

Definition: *Zwei Strategien heißen* realisationsäquivalent *für Spieler i, falls es für die Realisationswahrscheinlichkeiten von Endpunkten keinen Unterschied macht, ob bei gegebenen Strategien der anderen Spieler die eine oder die andere Strategie von Spieler i gewählt wird.*

Der angekündigte Satz von Kuhn besagt dann:

Satz (Kuhn (1953)): *In einem Spiel mit vollkommener Erinnerung gibt es zu jeder gemischten Strategie eine realisationsäquivalente Verhaltensstrategie.*

Illustration des Satzes von Kuhn:



Spieler 2 hat vier reine Strategien: $(l,l),(l,r),(r,l),(r,r)$

Betrachte die gemischte Strategie $q_2^1 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Effekt: jede reine Strategie wird mit der WS $\frac{1}{4}$ gespielt. Dazu $q_2^2 = (\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})$; d.h. (l,l) wird mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ und ebenso (r,r) mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ gespielt. Beide gemischten Strategien q_2^1 und q_2^2 erzeugen - gegeben die Strategie $q_1 = (y, 1-y)$ von Spieler 1 - dieselbe Verteilung über den Endpunkten (z_1, z_2, z_3, z_4), nämlich:

$$\left(\frac{1}{2}y,\ \frac{1}{2}y,\ \frac{1}{2}(1-y),\ \frac{1}{2}(1-y)\right) \ .$$

Diese Endverteilung ist auch durch folgende *Verhaltensstrategie* erzielbar und beschreibbar: an x_1 spielt 2 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und an x_2 spielt 2 ebenfalls $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Wir sehen also, dass 2 gemischte Strategien durch ein und dieselbe Verhaltensstrategie beschrieben werden können. Wir nehmen daher diese einfachere und das Verhalten besser beschreibende Definition als Definition einer *gemischten Strategie*, obwohl diese traditionellerweise anders definiert waren.

Unter Berücksichtigung des Satzes von Kuhn definieren wir also:

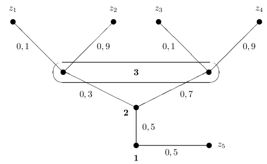
Definition: *Eine* gemischte Strategie (Verhaltensstrategie) q_i *für Spieler i ordnet jeder Informationsmenge von Spieler i, $h_i \in H_i$, eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über die Menge der an h_i zulässigen Züge zu; d.h.*

$$\begin{aligned} q_i : H_i &\longrightarrow \Delta \\ h_i &\longrightarrow q_i(a) = (q_i(a_1), \cdots, q_i(a_s)) \\ & \qquad mit \quad \textstyle\sum_{j=1}^s q_i(a_j) = 1 \end{aligned}$$

$$\{a_1, \cdots, a_s\} \ = \ \textit{Menge der zulässigen Züge an } h_i.$$

q_i heißt vollständig gemischt, falls $q_i(a) > 0$ für alle $a \in A_i = \sum_{h_i} A_i(h_i)$.

Beispiel: Verhaltensstrategien $\longrightarrow$ Realisationswahrscheinlichkeit $\longrightarrow$ erwartete Auszahlung.



$$\begin{aligned} Prob(z_1) &= 0.5 \cdot 0.3 \cdot 0.1 = 0.015 \\ Prob(z_2) &= 0.5 \cdot 0.3 \cdot 0.9 = 0.135 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Prob(z_3) &= 0.5 \cdot 0.7 \cdot 0.1 = 0.035 \\ Prob(z_4) &= 0.5 \cdot 0.7 \cdot 0.9 = 0.315 \\ Prob(z_5) &= 0.5 = 0.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EU_i(q_1, q_2, q_3) &= \tilde{U}(q_1, q_2, q_3) \ = \ \sum_{k=1}^{5} Prob(z_k) \cdot U_i(z_k) \\ &= 0.015 \cdot U_i(z_1) + 0.135 \cdot U_i(z_2) + \cdots + 0.5 \cdot U_i(z_5). \end{aligned}$$

Die (erwartete) Auszahlungsfunktion der extensiven Form des Spieles ergibt sich also als Summe der Auszahlungen an den Endpunkten *gewichtet mit den durch die gewählten Strategien bestimmten Realisationswahrscheinlichkeiten der Endpunkte.*

Mit dieser allgemeinen Definition einer (gemischten) Strategie für ein extensives Spiel ist der Lösungsbegriff von Nash unmittelbar übertragbar. Wir definieren zunächst:

Definition: q_i^* *heißt* beste Antwort *für Spieler i auf q_{-i}, falls*

$$\tilde{U}_i(q_i^*, q_{\ i}) \ = \ \max_{q_i \in Q_i} \tilde{U}_i(q_i, q_{\ i}),$$

d.h. $\quad q_i^* \in b_i(q_{-i})$. *Ein Nash-Gleichgewicht eines Spieles Γ ist eine Strategienkombination $q^* = (q_1^*, \cdots, q_n^*)$, so dass $q_i^* \in b_i(q_{-i}^*)$ für $i = 1, \cdots, n$.*

Man beachte, dass der Spieler 0 ('Natur', 'Zufall') nur indirekt in die Definition des Gleichgewichtes eingeht, nämlich über den Einfluß seiner Züge auf die Realisationswahrscheinlichkeiten der Endpunkte, die wiederum die zu Strategiekombinationen gehörenden Auszahlungen mitbestimmt.

Wenn wir daher die zu einem Spiel in extensiver Form Γ gehörende Normalform betrachten, taucht Spieler 0 in dieser nicht explizit auf (sondern steht "implizit" in den Auszahlungen). Unter dieser versteht man normalerweise das Spiel (in reinen Strategien) $G = (N, S, U)$, wobei $N = 1, \cdots, n$ (also nicht $N = 0, 1, \cdots, n$) und S die Menge der reinen Strategienkombinationen angibt und U die erwartete Auszahlung unter $s \in S$, wobei Zufallszüge berücksichtigt sind. Die zum Streichholzspiel mit Auslosung der Rollen gehörende Normalform lautet:

		Spieler 2 (x_2, h_2)			
		ll	*lr*	*rl*	*rr*
Spieler 1 (x_2, h_2)	*LL*	0, 0	1, -1	-1, 1	0, 0
	LR	-1, 1	0, 0	0, 0	1, -1
	RL	1, -1	0, 0	0, 0	-1, 1
	RR	0, 0	-1, 1	1, -1	0, 0

Dies sind nun jeweils *erwartete* Auszahlungen, die den Zufallszug $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ an P_0 berücksichtigen.

Von diesem Spiel in Normalform, das *endlich* ist, können wir nun aufgrund des Satzes von Nash sagen, dass es zumindest ein Gleichgewicht in gemischten Strategien besitzt. Da wir jede dieser gemischten Strategien für Spieler $i = 1, \cdots, n$ durch eine realisationsäquivalente Verhaltensstrategie bzw. gemischte Strategie der extensiven Form ersetzen können, folgt somit auch, dass das Spiel Γ in extensiver Form ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien besitzt.

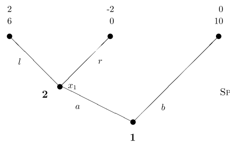
Kapitel 4

Spiele mit vollkommener Information

4.1 Teilspielperfekte Nash-Gleichgewichte

Die zuletzt getroffene Aussage, dass auch jedes extensive Spiel Γ zumindest ein Gleichgewicht in gemischten Strategien besitzt, wird nun einer genaueren Analyse unterzogen. Wir fragen insbesondere, ob alle NASH-Gleichgewichte der Normalform sinnvoll auf die extensive Form übertragen werden können. Ein einfaches Beispiel zeigt, dass dies möglicherweise nicht der Fall ist:

Gegeben sei folgendes extensives Spiel Γ mit der zugehörigen Normalform:



		Spieler 2	
		l	r
Spieler 1	a	2, 6	-2, 0
	b	0, 10	0, 10

Die Normalform besitzt zwei Gleichgewichte in reinen Strategien: (a, l) und (b, r). Die Gleichgewichts-Auszahlungen sind $(2, 6)$ und $(0, 10)$.

Betrachten wir diese beiden Gleichgewichte nun in der extensiven Form des Spieles: Falls der zuerst ziehende Spieler 1 a wählt, ist es für Spieler 2 an Knoten x_1 in der Tat am besten l zu spielen, um die Auszahlung 6 (statt 0 für r) zu erhalten. l ist also beste Antwort auf a. Umgekehrt ist a auf die *Bekundung* oder *Absicht* von Spieler 2, an Knoten x_1 l zu spielen, beste Antwort, da a zur Auszahlung 2 (statt 0 für b) führt. Die Ankündigung oder (unterstellte) Absicht, Spieler 2 würde an x_1 l wählen, ist darüberhinaus vernünftig bzw. glaubwürdig, da dies in der Tat die optimale Verhaltensweise für Spieler 2 an x_1 darstellt.

Das Gleichgewicht (b, r) ist hingegen problematisch: der Knoten x_1 von Spieler 2 wird nicht erreicht, wenn Spieler 1 b spielt. Insofern ist ohne Auswirkung auf die Auszahlung, ob Spieler 2 an x_1 l oder r wählt. Beide Entscheidungen, insbesondere also r, stellen daher eine beste Antwort für Spieler 2 auf die Entscheidung b von Spieler 1 dar. Umgekehrt ist die Entscheidung b von Spieler 1 beste Antwort auf die Ankündigung von Spieler 2 oder Vermutung von Spieler 1 über das Verhalten von Spieler 2, an x_1 r zu spielen. Doch ist diese Ankündigung *glaubwürdig* (bzw. Vermutung vernünftig)? Angenommen, Spieler 1 hätte aus Versehen zu Beginn a gespielt (und x_1 würde also tatsächlich erreicht). Würde Spieler 2 an seiner Absicht r zu spielen festhalten? Sicherlich nicht: falls x_1 erreicht wird, ist es für ihn immer am besten l zu spielen. Die Ankündigung, r zu spielen, ist also *unglaubwürdig*. Das NASH-Gleichgewicht (b, r) wird also durch *nicht* rationales Verhalten von Spieler 2 an Knoten x_1 gestützt. Dies bedeutet, dass die Frage, welches der beiden NASH-Gleichgewichte die Spieler realisieren *sollten*, mit (a, l) beantwortet werden muss: Die "Auseinandersetzung" der beiden Spieler über die beiden Gleichgewichte (Spieler 1 möchte (a, l) mit Auszahlung $(2, 6)$, Spieler 2 möchte (b, r) mit Auszahlung $(0, 10)$ geht zugunsten von Spieler 1 aus. Die "Drohung" von Spieler 2, an x_1 r zu spielen ist nicht glaubwürdig, da die Ausführung der Drohung (nachdem Spieler 1 a gewählt hat) ihm selbst schadet. Spieler 1 als der Erstziehende sollte daher unbeeindruckt a spielen und somit Spieler 2 vor "vollendete Tatsachen" stellen. Spieler 2 müsste dann einsehen, dass l das beste ist, was er tun kann. D.h. das einzige vernünftige Gleichgewicht der extensiven Form des Spieles ist (a, l).

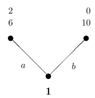
In den Wirtschaftswissenschaften tritt obiges Spiel mit folgender wichtiger Interpretation auf: In dem Spiel geht es um Marktzutritts- und entsprechende Abwehrentscheidungen. Spieler 1 ist eine Firma, die in den von der Firma 2 beherrschten Markt eintreten könnte (Strategie a) oder dies nicht tun könnte (Strategie b). In letzterem

Falle behält Firma 2 ihre Monopolstellung im Markt mit Monopolgewinnen in Höhe von 10. Tritt Firma 1 hingegen zu, so muss Firma 2 sich überlegen, ob sie diesen Zutritt einfach hinnehmen und eine Teil der Gewinne (in Höhe von 4) abgeben sollte (Strategie l), oder ob sie auf den Eintritt aggressiv durch eine Senkung ihres Preises auf den Wettbewerbspreis reagieren sollte. Beide Firmen würden dann Gewinne in Höhe von 0 erzielen (Strategie r). Da Markteintritt jedoch Eintrittskosten in Höhe von 2 verursacht, würde Firma 1 sogar Verluste in Höhe von -2 erleiden (und daher besser nicht zutreten).

Die obige Analyse zeigt, dass die Drohung der Firma im Markt, auf Zutritt aggressiv zu reagieren, nicht glaubwürdig ist. Im *Teilspiel* nach Marktzutritt würde sie eine Marktabsprache mit Firma 1 aggressivem Verhalten allemal vorziehen.

Das Gleichgewicht (b, r) hat also in der extensiven Form den Defekt, dass es im Teilspiel von x_1 ein Verhalten vorschreibt, das keinem (NASH-) Gleichgewicht dieses Teilspieles entspricht. Das einzige Gleichgewicht des Teilspieles x_1 ist l. Dies bedeutet, dass das Gleichgewicht (a, l) frei von diesem Defekt ist.

Dieses Gleichgewicht kann durch rückwärtige Analyse des Spieles *eindeutig* gefunden werden. Man analysiert zunächst das Teilspiel, das an x_1 beginnt: Das einzige NASH-Gleichgewicht dieses "Spieles", in dem nur ein Spieler, nämlich Spieler 2, auftritt, ist l. Man kann also das gesamte Teilspiel durch die Auszahlung, die zu diesem Gleichgewicht gehört, ersetzen und erhält:



In diesem reduzierten Spiel hat 1 als alleiniger Spieler nur einen optimalen Zug, nämlich a. Die Strategienkombination (a, l) ist also ein NASH-Gleichgewicht. Dieses rückwärtige Analyse- bzw. Induktionsverfahren funktioniert in der Tat für alle endlichen Spiele mit vollkommener Information. Das sind solche Spiele, in denen alle Informationsmengen einelementig sind.

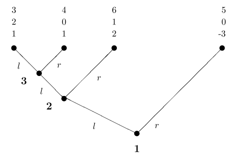
Satz von Zermelo I: *Jedes endliche extensive Spiel Γ mit vollkommener Information hat mindestens ein* NASH-*Gleichgewicht in reinen Strategien (das durch Rückwärtsanalyse ermittelt werden kann).*

Ein Vergleich dieses Satzes mit dem Existenzsatz von NASH für Normalformspiele zeigt also, dass ein Preis für den Informationsverlust, der mit dem Übergang von der extensiven Form eines Spieles zur Normalform verbunden ist, der Verlust der Existenz von Gleichgewichten in reinen Strategien ist. Das mit Hilfe des ZERMELO'schen Algorithmus (Rückwärtsinduktion) gefundene NASH-Gleichgewicht hat jedoch per Konstruktion eine weitere wünschenswerte Eigenschaft, die das andere NASH-Gleichgewicht (b, r) nicht besitzt: Es ist intern konsistent in dem Sinne, dass es in jedem Teilspiel wiederum ein NASH-Gleichgewicht induziert. D.h. die Einschränkung der Strategien der Spieler auf das (ein) Teilspiel hat zur Folge, dass die eingeschränkten Strategien für das Teilspiel NASH-Gleichgewichtsstrategien darstellen.

Definition: *Ein Gleichgewicht $(s_1^*, \cdots, s_n^*)$ von Γ in reinen Strategien heißt* teilspielperfekt, *falls es in jedem Teilspiel von Γ ein Gleichgewicht (in reinen Strategien) induziert.*

Satz von Zermelo II: *Jedes endliche extensive Spiel mit vollkommener Information hat ein teilspielperfektes Gleichgewicht in reinen Strategien.*

Beispiel:



2 teilspielperfekte Gleichgewichte: 1) (r, l, l) Auszahlung: $(5, 0, -3)$

2) (l, r, r) Auszahlung: $(6, 1, 2)$

Dieses Spiel hat auch ein nicht teilspielperfektes NASH-Gleichgewicht: (r, l, r).

Übung: Ermitteln Sie Normalform und NASH-Gleichgewichte dieses Spieles.

Obiges Beispiel zeigt, dass der Grund für Nichteindeutigkeit des teilspielperfekten Gleichgewichtes darin zu sehen ist, dass Spieler 3 indifferent zwischen seinen beiden optimalen Strategien l und r ist. Ohne solche Indifferenzen zwischen *optimalen* Alternativen muss die rückwärtige Induktion an jedem Knoten x eine eindeutige Lösung haben, weshalb auch dann nur ein teilspielperfektes Gleichgewicht existieren kann.

Satz: *Ein endliches Spiel in extensiver Form mit vollkommener Information, das regulär in dem Sinne ist, dass kein Spieler an zwei verschiedenen Endpunkten dieselbe Auszahlung erhält, besitzt ein eindeutiges teilspielperfektes Gleichgewicht.*

Es sei hier angemerkt, dass obiger Regularitätsbegriff rein mathematischer Natur ist. Fast alle durch die mathematische Struktur der extensiven Form beschreibbaren Spiele sind regulär. Dies heißt jedoch *nicht*, dass die Modellierung bestimmter kontextbezogener Situationen als Spiel in extensiver Form *zwangsweise* Strukturen enthält, die das Modell (= Spiel) notwendigerweise degeneriert, d.h. nicht regulär werden lassen. Nichtreguläre Spiele, d.h. solche die möglicherweise mehr als ein Gleichgewicht besitzen, können daher nicht von vornherein als wenig interessant abgetan werden. In der Tat führt gerade die Modellierung ökonomischer Entscheidungsprobleme sehr oft zu nicht-regulären Spielen. Im Folgenden wollen wir ein Beispiel hierfür, die sogenannte Dollar Auktion, anhand eines Beispieles genauer analysieren und den Algorithmus von ZERMELO zu deren Lösung anwenden.

Im Folgenden wird eine einfache Version der sogenannten "Dollarauktion" behandelt. Zwei Spieler (1 und 2 genannt) können 5 \$ ersteigern. Zulässige Gebote sind nur 2 \$, 4 \$ und 6 \$ sowie 0 \$, was "passen" bedeutet. Es wird abwechselnd geboten, Spieler 1 beginnt, und bestehende Gebote müssen entweder überboten werden oder es muss gepasst werden. Die Auktion ist beendet, falls ein Spieler passt oder das unüberbietbare Gebot 6 \$ wählt. Als Auszahlung erhält der Höchstbietende die 5 \$ minus seinem letzten Gebot. Das besondere dieser Auktion ist aber, dass auch das zweithöchste Gebot, also das des unterlegenen Bieters, beglichen werden muss. Die Auszahlung dieses Spielers

ist also das Negative *seines höchsten Gebotes*. Beginnt Spieler 1 mit dem Gebot "0 \$" (also passen), so erhält Spieler 2 die Auszahlung 5 \$.

Aufgabe:

1. Stellen Sie das Spiel in extensiver Form dar. Beachten Sie folgende Hilfe. Beide Spieler besitzen jeweils zwei Informationsbezirke: Spieler 1 einen im Ursprung (nennen Sie diesen u) und einen, nachdem er "2 \$" und Spieler 2 "4 \$" geboten hat (nennen Sie diesen Informationsbezirk v). Die beiden Informationsbezirke von Spieler 2 ergeben sich nach den Eröffnungsgeboten "2 \$" bzw."4 \$" von Spieler 1 (nennen Sie diese Bezirke x und y).

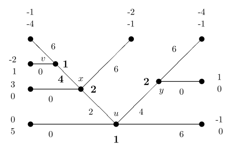
2. Wie viele reine Strategien besitzt Spieler 1 und wie viele Spieler 2?

3. Ein Zahlenpaar (m, n) beschreibe wie folgt eine reine Strategie von Spieler 1: m ist sein Gebot im Informationsbezirk u und n ist sein Gebot im Informationsbezirk v. Entsprechendes gelte für ein Zahlenpaar (s, t) von Spieler 2 für die Informationsbezirke x und y. Welche der folgenden Strategiekombinationen sind Gleichgewichtspunkte, und welche sind teilspielperfekte Gleichgewichtspunkte? Begründen Sie ganz kurz Ihre Antworten.

1)	Spieler 1 :	(m, n)	=	$(0, 6)$	NASH-Gleichgewicht
	Spieler 2 :	(s, t)	=	$(6, 6)$	
2)	Spieler 1 :	(m, n)	=	$(6, 6)$	
	Spieler 2 :	(s, t)	=	$(6, 6)$	
3)	Spieler 1 :	(m, n)	=	$(2, 6)$	Teilspielperfektes-GG
	Spieler 2 :	(s, t)	=	$(0, 0)$	
4)	Spieler 1 :	(m, n)	=	$(4, 6)$	
	Spieler 2 :	(s, t)	=	$(4, 0)$	NASH-Gleichgewicht

Wie viele teilspielperfekte Gleichgewichte besitzt das Spiel? Wir ermitteln zunächst den Spielbaum der oben beschriebenen Dollar-Auktion, identifizieren die Menge der reinen Strategien S_i für jeden der beiden Spieler $i = 1, 2$, und erstellen daraus zum Vergleich die Normalform.

Extensive Form:



Entscheidungsknoten von Spieler 1: u und v mit jeweils 4 (an u) bzw. 2 (an v) Alternativen $\Longrightarrow$ Spieler 1 hat $2 \times 4 = 8$ reine Strategien.

Entscheidungsknoten von Spieler 2: x und y mit jeweils 3 (an x) bzw. 2 (an y) Alternativen $\Longrightarrow$ Spieler 2 hat $3 \times 2 = 6$ reine Strategien.

Der Algorithmus von ZERMELO zur Lösung des Spieles Γ (Rückwärtsinduktion) beginnt nun mit der Analyse des Entscheidungsproblems von Spieler 1 an Knoten (Informationsmenge) v:

1. Beste Antwort (Entscheidung) von Spieler 1 an v: 6.

2. *Gegeben dies* folgt für Spieler 2 an Knoten x: beste Antwort von Spieler 2 an x: 0 (Aufgabe). (Ein Gebot von 4 würde von 1 an v mit 6 erwidert, ein Gebot von 6 gewinnt zwar, führt aber zum Nettogewinn von -1).

   Offensichtlich gilt ebenso: beste Antwort von Spieler 2 an y: 0 (Aufgabe).

3. *Gegeben* 1. *und* 2. folgt für Spieler 1 an u: beste Antwort von Spieler 1 an u: 2. (Dies führt zur Auszahlung 3 für ihn, da Spieler 2 an x notgedrungen aufgibt. Ein Gebot von 4 würde auch gewinnen und zur positiven Nettoauszahlung von 1 führen, da 2 auch an y aufgibt. Ein Gebot von 6 führt zum Verlust von 1.) Die rückwärtige Induktion liefert also ein eindeutiges Strategienpaar, das ein teilspielperfektes Gleichgewicht darstellt:

$$\begin{aligned} \text{GG-Strategie für Spieler 1} &: \{(2_u, 6_v)\} \\ \text{GG-Strategie für Spieler 2} &: \{(0_x, 0_y)\} \end{aligned}$$

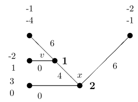
   Diese Strategien führen zum Gleichgewichts*pfad* $(2, 0)$ und der Auszahlung $(3, 0)$.

Es ist also bemerkenswert, dass Spieler 1 die 5 Dollar für *weniger* als 5 Dollar, nämlich 2 Dollar, ersteigern kann, ohne dass es sich für Spieler 2 lohnt, dies zu verhindern! Immerhin führt die in einem teilspielperfekten Gleichgewicht ausgedrückte (sequentielle) Rationalität dazu, dass keine *Verschwendung* in dem Sinne stattfindet, dass *beide* Spieler bieten und sich dann ein wahres Bietgefecht liefern mit dem Ergebnis, dass weit mehr als 5 Dollar ausgegeben werden. Der einfache Lösungsbegriff des NASH-Gleichgewichts verhindert solchermaßen irrationales Verhalten zwar auch, führt aber auch zu unplausiblen Lösungen, die auf nicht glaubwürdigen Drohungen beruhen. Die Normalform von Γ wird durch folgende $8 \times 6-$Matrix beschrieben:

		SPIELER 2 (S,T)					
		0,0	*0,6*	*4,0*	*4,6*	*6,0*	*6,6*
SPIELER 1 (M,N)	*0,0*	0, 5	0, 5	0, 5	0, 5	0, 5	0, 5
	0,6	0, 5	0, 5	0, 5	0, 5	0, 5	0, 5
	2,0	3, 0	3, 0	-2, 1	-2, 1	-2, -1	-2, -1
	2,6	3, 0	3, 0	-1, -4	-1, -4	-2, -1	-2, -1
	4,0	1, 0	-4, -1	1, 0	-4, -1	1, 0	-4, -1
	4,6	1, 0	-4, -1	1, 0	-4, -1	1, 0	-4, -1
	6,0	-1, 0	-1, 0	-1, 0	-1, 0	-1, 0	-1, 0
	6,6	-1, 0	-1, 0	-1, 0	-1, 0	-1, 0	-1, 0

Die Strategienkombination $(4, 6), (4, 0)$ ist ein NASH-Gleichgewicht mit Auszahlung $(1, 0)$.

In diesem Gleichgewicht 'droht' Spieler 2 an x, was erreicht würde nach einem Eröffnungsgebot von 2 durch Spieler 1, mit einem Gegengebot von 4 zu antworten, was Spieler 1 zum Eröffnungsgebot von 4 veranlaßt, woraufhin 2 an y aufgibt. Diese Drohung an x ist jedoch nicht glaubwürdig: ein Gebot von 4 von Spieler 2 würde unweigerlich Verlust nach sich ziehen, da 1 auf 6 erhöht und gewinnt. Spieler 2 hätte also kein Interesse, seine Drohung an x, falls 1 tatsächlich mit einem Gebot von 2 eröffnet, auszuführen. D.h. das Gleichgewicht $(4,6),(4,0)$ induziert *kein* Gleichgewicht in dem Teilspiel, das an x beginnt. Für dieses Spiel mit der extensiven Form Γ_x



sieht es die Strategien 4 (für Spieler 2) und 6 (für Spieler 1) vor. $(4,6)$ ist aber kein Nash-Gleichgewicht von Γ_x, da 4 nicht beste Antwort von Spieler 2 auf 6 von Spieler 1 ist. Dennoch können diese für dieses Teilspiel abstruse Verhaltensvorschriften Teil eines Nash-Gleichgewichtes des Gesamtspiels sein!

Die acht (!) weiteren nicht teilspielperfekten Gleichgewichte von Γ beinhalten ähnliche "Bluffs", die vom Gegenspieler jeweils als solche erkannt und daher ignoriert werden sollten. Nur das Gleichgewicht $(2,6),(0,0)$ ist frei von solcher Kritik. Es ist daher als *die* Lösung des Spieles anzusehen, die die sequentielle Spielstruktur als einzige korrekt berücksichtigt. Von den zehn Nash-Gleichgewichten ist also nur eines teilspielperfekt.

4.2 Das 'chain-store'-Paradox

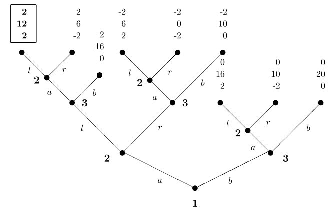
Das im vorigen Abschnitt behandelte einfache Marktzutrittsspiel zeichnete sich gerade dadurch aus, dass nur eines seiner beiden Nash-Gleichgewichte teilspielperfekt war. Die Drohung, Marktzutritt aggressiv zu beantworten, kann zwar ein Nash-Gleichgewicht stützen, doch ist die fehlende Glaubwürdigkeit der Drohung dafür verantwortlich, dass dieses Nash-Gleichgewicht nicht stabil ist. Spieler 1 *würde* zutreten und danach Spieler 2 seine Drohung nicht ausführen. Marktzutritt mit nachfolgender Marktabsprache ist das einzige vernünftige (= teilspielperfekte) Gleichgewicht.

Hätte diese Aussage auch Bestand, wenn sich ein Unternehmen (z.B. eine Ladenkette für Lebensmittel) in 20 jeweils separierten Märkten (= Orten mit Filialen) jeweils einem potentiellen Marktzutreter gegenüber sähe? Würde das Unternehmen nicht einen Anreiz haben, bei dieser 20-maligen Wiederholung obigen Grundspieles den ersten Marktzutritt bei Filiale 1 aggressiv zu beantworten, um später Zutreter erst gar nicht auf

den Gedanken zu bringen einzutreten?

Die vielleicht überraschende Antwort ist, dass das Filialunternehmen in einem teilspielperfekten Gleichgewicht des 20-mal wiederholten Grundspiels Marktzutritt immer zulässt und daher auf Zutritt nie aggressiv reagiert. Dieses Ergebnis ist wenig intuitiv, daher der Zusatz 'Paradox', der auf Selten [1978] zurückgeht. Die Logik teilspielperfekten Verhaltens, die diese Lösung erzwingt, ist Folgende: Wir betrachten zunächst die letzte, d.h. 19. Wiederholung des Spieles. Unabhängig vom vorherigen Geschehen muss sich die Ladenkette bei Auftritt eines Konkurrenten im Markt ihrer 20. Filiale sagen, dass aggressives Verhalten nutzlos ist, da niemend mehr da ist (insbesondere kein 21. Markt, der von Zutritt bedroht ist), gegenüber dem man eine abschreckende Reputation aufbauen könnte. Die *letzte* Wiederholung (eines jeden endlich oft wiederholten Spieles) ist daher genau gleich einer nur einmaligen Durchführung des Spieles. Es folgt daher, dass im letzten Markt Zutritt mit nachfolgender Marktabsprache stattfinden muss. Dies aber bedeutet, dass auch bei der 18. Wiederholung Filiale 19 keine Reputation für die Ladenkette im Markt 20 erwerben kann durch aggressive Beantwortung von Marktzutritt! Daher findet auch in Markt 19 Zutritt und Marktabsprache statt. Das Argument wiederholt sich nun bis zum Markt 1.

Beispiel: 2 Filialen: d.h. das Grundspiel Γ wird einmal wiederholt. Die extensive Form des zweimal gespielten Grundspiels Γ, Γ^2 ist wie folgt:



Man sieht, dass dieses Spiel von Anzahl und Struktur der reinen Strategien her wesentlich komplexer ist als das nur einmal gespielte Spiel: Zwar kann jeder Spieler in jeder der beiden Durchführungen nur zwischen 2 Alternativen wählen, doch hat Spieler 1 nun 2 Strategien, Spieler 2 hat 16 Strategien und Spieler 3 hat 8 Strategien.

In Kapitel 5 werden wir uns genauer mit Struktur und Gleichgewichten wiederholter Spiele beschäftigen.

4.3 Appendix

Verfeinerung des Nash-Gleichgewichtsbegriffes

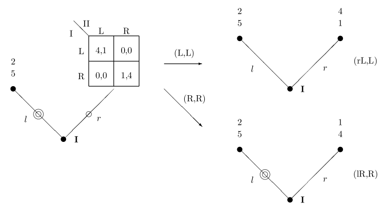
Das Prinzip der Rückwärtsinduktion erzwingt, dass die Strategie eines Spielers (im Gleichgewicht) beste Antwort auf die Strategien der anderen Spieler ist, nicht nur zu Beginn des Spieles, sondern auch an *jeder* anderen Informationsmenge. Als Konsequenz ergibt sich, dass jedes rückwärts induktiv ermittelte teilspielperfekte Gleichgewicht ein Nash-Gleichgewicht in jedem Teilspiel erzeugen muss.

Rückwärtsinduktion (und somit die Verfeinerung 'teilspielperfekt') ist jedoch nicht immer hinreichend, um ein Gleichgewicht 'selbstbindend' (self-enforcing) zu machen. Das folgende Beispiel zeigt, dass teilspielperfekte Gleichgewichte 'unplausibel' sein können, sofern sie nicht *zusätzlich* einer 'vorwärts induktiven' Logik genügen.

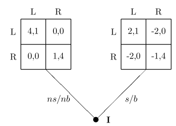
In diesem Spiel kann Spieler I l mit Auszahlung $(2,5)$ wählen oder sich nach Wahl von r in ein Koordinationsspiel mit Spieler II begeben, das zwei Gleichgewichte besitzt: (L,L) und (R,R).

(lR,R) ist – obwohl teilspielperfekt – nicht selbstbindend: die Drohung von II, R zu spielen ist nicht glaubwürdig: Er kommt *nur* ans Spiel, wenn I am Anfang r spielt, was für diesen nur in Verbindung mit L und der Auszahlung 4 im Gleichgewicht (L,L) des Teilspiels Sinn macht, da er durch die Wahl von r auf 2 als sichere Auszahlung bei Wahl von l *verzichtet* hat. Also muss II schließen, dass I im Teilspiel L wählt und sich fügen (auch das Gleichgewicht in gemischten Strategien des Teilspiels kommt aus diesem Grund nicht in Frage, es führt nur zu Auszahlungen $(\frac{4}{5},\frac{4}{5})$). Hier ist offensichtlich *zusätzlich* zur Rückwärtsinduktion, die optimales *zukünftiges* Verhalten der Spieler auswertet, auch *Vorwärtsinduktion* im Spiele, die die Rationalität von vergangenem Verhalten der Spieler auswertet. In obigem Spiel genügen also 3 Gleichgewichte der Rückwärtsinduktionsforderung (und sind somit teilspielperfekt), aber nur eines,

nämlich (rL,L) mit Auszahlung $(4,1)$ genügt der Rückwärts- *und* Vorwärtsinduktionsbedingung.



Wichtige Anwendung von Vorwärtsinduktion: sunk cost oder: "burning money"



Erläuterung: *ns/nb* bedeutet not sunk, not burn und dementsprechend *s/b* sunk, burn.

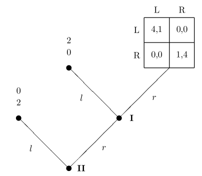
Spieler I "verbrennt" bzw. verschleudert 2 Auszahlungseinheiten!

Vorwärtsinduktion (wie zuvor) ergibt, dass im Teilspiel nach 'burn' von Spieler I das Gleichgewicht (L,L) gespielt werden muss mit Auszahlung $(2,1)$, dies gilt nun unabhängig davon, welches Gleichgewicht im Teilspiel nach 'not burn' gespielt würde, da R nach 'burn' zu spielen für Spieler I von 'not burn' *dominiert* wird (im Teilspiel nach 'not burn' ist seine Auszahlung mindestens 0!). Dies aber bedeutet, dass 'not-burn' zu spielen von II als den sicheren *Verzicht* auf 2 von I (nach (L, L) im 'burn'-Teilspiel) gelesen werden muss. Dies macht jedoch (Vorwärtsinduktion!) nur Sinn, wenn auf 'not burn' auch L von I folgt. II erkennt also, dass das Gleichgewicht (L, L) nach 'not burn'gespielt werden muss.

Das Bemerkenswerte an dieser Situation ist, dass im Gleichgewicht, das Vorwärts- und Rückwärtsinduktion genügt, 'not burn' gespielt wird. Es wird also kein 'pay-off' verschwendet; Spieler I zieht lediglich Vorteil daraus, dass er die Option 'burn' gehabt hat und der andere, II, *weiß*, dass er diese Option gehabt hat.

Natürlich zeigt das Argument auch, dass 'burn' tatsächlich zu wählen, Spieler I zumindest den Vorteil bringt, das Koordinationsproblem im Teilbereich 'Battle of the Sexes' zu seinem Gunsten zu lösen, er vermeidet das Gleichgewicht (R, R) mit der für ihn niedrigen Auszahlung 1, zugunsten einer Auszahlung von 2. Spielt er jedoch gegen einen ebenso rationalen Kontrahenten, so genügt *dessen* Wissen um diese Möglichkeit, das Koordinationsproblem soz. 'kostenlos' via Vorwärtsinduktion zugunsten von I zu lösen.

Problem: Vorwärts- und Rückwärtsinduktion sind nicht immer miteinander verträglich.



Unsere bisherige Analyse sagt für das Teilspiel von I an, dass $(4, 1)$ resultieren muss. Da aber II zuvor auch auf 2 verzichtet hat, sagt dasselbe Argument $(1, 4)$ voraus!

Lösung: Rückwärts- geht *vor* Vorwärtsinduktion

In obigem Beispiel bedeutet dies, dass sich II sagen muss, dass, nachdem er r gewählt

hat, I eigentlich nur l oder r gefolgt von L spielen kann. *Beides* führt für ihn jedoch zu einer geringeren Auszahlung als 2, die er erhält, wenn er gleich zu Beginn l wählt. Also ist $(0, 2)$ die einzige sich selbstbindend ergebende GG-Auszahlung nach Anwendung von Vorwärts- und Rückwärtsinduktion. Ein Nash-Gleichgewicht, das - hierarchisch geordnet - sowohl Rückwärts- als auch Vorwärtsinduktion genügt, heißt ein 'stabiles Gleichgewicht' (stable equilibrium). Die Theorie von Kohlberg und Mertens (1986) impliziert:

Satz: *Jeder endliche Spielbaum besitzt ein Gleichgewicht, das sowohl mit Rückwärts- als auch mit Vorwärtsinduktion konsistent ist.*

Obwohl wir hier darauf verzichtet haben, Vorwärtsinduktion formal zu definieren, sollte klar sein, welche prinzipielle *zusätzliche* Überlegung zur Rückwärtsinduktion involviert ist. Diese ist von besonderer Wichtigkeit in sog. 'signalling'-Spielen, die vor allem in der ökonomischen Theorienbildung prominent sind, ja dieser entstammen. Zurückgehend auf Spence (1974) haben diese Spiele folgende Struktur. Zuerst zieht die 'Natur' und bestimmt den 'Typ'von Spieler I. Spieler I kennt diesen 'Typ', Spieler II hingegen nicht. Daraufhin wählt I eine Aktion, die II (soz. als 'Signal' über dessen Typ) beobachten kann; Spieler II reagiert daraufhin seinerseits mit einem Zug. Die Auszahlungen für die beiden Spieler hängen dabei sowohl vom 'Typ' des Spielers I ab als auch von den gewählten Aktionen (bzw. wie üblich von den gewählten Aktionen *inklusive* der Wahl des 'Spielers' Natur!).

Kapitel 5

Wiederholte Spiele - Superspiele

Um die Analyse zunächst wieder einfach zu halten, betrachten wir Spiele G in *Normalform*, die nun wiederholt gespielt werden. Wir tun dies, um zunächst den Aspekt der Erweiterung des Strategienraumes für die Spieler durch den Wiederholungsvorgang zu analysieren.

Betrachtet sei folgendes Normalformspiel G:

		Spieler 2		
		a	*b*	*c*
	a	*4, 4*	*0, 5*	*-1, 0*
Spieler 1	*b*	*5, 0*	*2, 2*	*-1, 0*
	c	*0, -1*	*0, -1*	*0, 0*

G enthält als Unterstruktur das Gefangenen-Dilemma, das jeweils um eine Strategie für jeden Spieler erweitert wurde.

Dieses *Grund*spiel oder *Quellen*spiel soll nun wiederholt gespielt werden. Welchen Effekt auf die Gleichgewichtsmenge wird die Wiederholung haben? Die Ausgangssituation ist die, dass das Grundspiel zwei Nash-Gleichgewichte besitzt: (b, b) mit Auszahlungen $(2, 2)$ und (c, c) mit Auszahlungen $(0, 0)$.

Nach jedem Spiel werden die gemachten Züge offenbart und die erzielten Auszahlungen auch ausgezahlt. Dies eröffnet die Möglichkeit für die Spieler, ihr Verhalten in

Wiederholungen des Spieles vom bisherigen Spielverlauf *abhängig* zu machen, was den Strategienraum der Spieler (und damit auch ihre strategischen Möglichkeiten) explosionsartig vergrößert.

Reine Strategien im Wiederholungsfalle - ein Beispiel:

Das Spiel G werde 1-mal wiederholt, also insgesamt zweimal gespielt. Das zweimal gespielte Spiel G bezeichnen wir mit G^2. In G hat jeder Spieler drei reine Strategien. Wieviele Strategien hat jeder Spieler in G^2? Da in G jeder 3 reine Strategien hat, kann die erste Ausführung des Spiels 9 verschiedene Ausgänge haben; d.h. es gibt 9 Informationsmengen für jeden Spieler, an denen ihm jeweils 3 Alternativen offenstehen bei der Wiederholung des Spieles. Also hat jeder zu Beginn der Wiederholung 3^9 reine Strategien! Insgesamt hat also jeder Spieler in G^2 $3 \cdot 3^9 = 3^{10} = 59049$ (!!) reine Strategien zur Verfügung. Eine weitere Wiederholung würde die Strategienanzahl von G^3 weiter exponentiell anwachsen lassen: Betrachtet sei hierfür eine zweifache Wiederholung (= dreimaliges Spiel) des Gefangenendilemma-Spieles, das in G enthalten ist.

Im Quellenspiel $\bar{G} = \bar{G}^1$ hat jeder Spieler 2 reine Strategien, d.h. nach erster Durchführung des Spieles können vier Ausgänge auftreten und somit hat vor der ersten Wiederholung jeder Spieler 4 Informationsmengen, an denen ihm je zwei Alternativen offenstehen. In der 1. Wiederholung kann jeder Spieler also unter $2^4 = 16$ reinen Strategien wählen. Das zweimal gespielte Grundspiel kann genau $4 \cdot 4 = 16$ verschiedene Spielausgänge haben, so dass jeder Spieler zu Beginn der 2. Wiederholung 16 Informationsmengen besitzt, die ihm die Verwendung von 2^{16} verschiedenen reinen Strategien ermöglichen, da ihm an jeder der 16 Informationsmengen genau 2Alternativen offenstehen. Insgesamt stehen jedem Spieler in $\bar{G}^3$ also $2 \cdot 2^4 \cdot 2^{16} = 2^{21} = 2097152$ reine Strategien zur Verfügung!

Inwiefern ermöglicht diese Vervielfältigung reiner Strategien den Spielern nun, sich strategisch 'besser' zu verhalten? Wird das Grundspiel G zweimal gespielt und wird in jedem Spielverlauf ein *Gleichgewicht* des Grundspieles gespielt, so kann allenfalls die Gesamtauszahlung $(4, 4) = (2 + 2, 2 + 2)$ erzielt werden. Natürlich repräsentiert wiederholtes Spiel eines (oder mehrerer) Gleichgewichte des *Grund*spieles auch ein Nash-Gleichgewicht des wiederholten Spieles. Doch machen diese 'statischen' Gleichgewichte von der dynamischen Struktur eines wiederholten Spieles wenig Gebrauch. Im Folgenden konstruieren wir ein Nash-Gleichgewicht des wiederholten Spieles G^2, das eine *höhere* Auszahlung als $(4,4)$ für die beiden Spieler verspricht:

In Periode 1 wird (a,a) gespielt, in Periode 2 wird (b,b) gespielt. Gesamtauszahlung: $(6,6)=(4+2,4+2)$. Welche Strategien der beiden Spieler führen zu diesem Ergebnis? Strategie für Spieler $i, i=1,2$, in Periode 1 : a

Strategie für Spieler $i, i=1,2$, in Periode 2 :

b, falls in Periode 1 (a,a) gespielt wurde

c, falls in Periode 1 nicht (a,a) gespielt wurde.

D.h. die Strategien sehen ausführlich wie folgt aus:

	Periode 1	Periode 2								
		aa	ab	ac	ba	bb	bc	ca	cb	cc
Spieler 1	a	b	c	c	c	c	c	c	c	c
Spieler 2	a	b	c	c	c	c	c	c	c	c

Die beiden (symmetrischen) Strategien drohen also damit, in der 2. Periode das 'schlechte' Gleichgewicht des Grundspiels, (c,c), zu spielen, falls in der ersten Periode keine Kooperation (im Gefangenendilemma) mit Auszahlung $(4,4)$ erfolgt. Wurde in der ersten Periode hingegen wechselseitig kooperiert, so wird dies - wechselseitig - durch Spiel des 'guten' Gleichgewichtes (b,b) in Periode 2 belohnt. Für keinen der beiden Spieler lohnt es, von seiner Strategie abzuweichen: Durch Abweichen von Kooperation (a,a) kann ein Spieler - falls er b statt a spielt - seine Auszahlung nur um 1 erhöhen (5 statt 4), doch er verliert bei der anschließenden Bestrafung 2, indem er 0 (im Gleichgewicht (c,c)) statt 2 (im Gleichgewicht (b,b)) erhält. Die Drohung ist überdies glaubwürdig, da (c,c) ein *Gleichgewicht* des Teilspieles 'letzte Wiederholung' des Grundspieles ist. Obige Strategien repräsentieren also sogar einen teilspielperfekten Gleichgewichtspunkt von G^2.

Bemerkenswert ist, dass in diesem *nicht-kooperativen* Gleichgewicht bei Spielwiederholung zumindest partiell (nämlich während des ersten Spieles) *Kooperation, die keinem Gleichgewicht des Grundspieles entspricht*, erzwungen bzw. selbststabilisierend erhalten werden kann. Natürlich kann Kooperation über *beide* Perioden kein Gleichgewicht sein: In der letzten Periode hätte jeder Spieler wieder einen Anreiz von Kooperation

abzuweichen, um die Auszahlung 5 zu erzielen, weil er für die Abweichung nicht mehr bestraft werden könnte. In der letzten Wiederholung eines (endlich oft) wiederholten Spieles *muss* also zwingend ein Gleichgewicht des Grundspieles gespielt werden, um auch über den gesamten Spielverlauf des wiederholten Spieles gleichgewichtiges Verhalten zu erzielen. Diese einsichtige *notwendige* Bedingung für ein Gleichgewicht des wiederholten Spieles hat nun für wiederholte Spiele, deren Grundspiel nur ein einziges Gleichgewicht besitzt, die fatale Folge, dass - aufgrund des rückwärtigen Induktionsschlusses - das einzige (teilspielperfekte) Gleichgewicht des wiederholten Spiels aus wiederholtem Spiel des Gleichgewichts des Grundspiels bestehen muss. Ist das Grundspiel beispielsweise das 2×2-Gefangenendilemma, so kann auch durch wiederholtes Spiel kein Gleichgewicht, in den die beiden Spieler zumindest partiell kooperieren würden, auftreten! Dieser normative Befund steht allerdings in starkem Widerspruch zur deskriptiven Theorie dieses Spieles und vielen experimentellen Befunden. Dieselbe Feststellung gilt für das oben erwähnte 'chain-store' Paradox! Daher der Namenszusatz 'Paradox'!

5.1 Unendlich oft wiederholte Spiele - Das 'Folk Theorem'

Die im vorigen Beispiel angedeutete Möglichkeit, durch Spiel*wiederholung* eine höhere *Gleichgewichts*auszahlung erreichen zu können als in einem Nash-Gleichgewicht des (einmal gespielten) Grundspiels, kann in ihrer extremsten Form anhand unendlich oft wiederholter Spiele studiert werden. Diese Bezeichnung sollte für die praktische Interpretation solcher Spiele nicht allzu wörtlich genommen werden. Natürlich wird kein Spiel (noch dazu von denselben Spielern) unendlich oft gespielt. Dennoch haben solche Spiele *praktischen* Modellierungswert. Wichtig für die Verhaltensweise von Spielern in solchen Spielen ist letztlich, dass es in ihnen keine letztmalige Spielwiederholung gibt, sondern jeder Wiederholung *weitere* folgen. Die etwas unintuitiven aber logischen (!) Konsequenzen von Schlußeffekten via rückwertiger Induktion sind daher in ihnen nicht zu erwarten. Sie eignen sich somit zur Modellierung von Entscheidungssituationen, in denen die Entscheidenden bei gegenwärtigen Entschlüssen berücksichtigen, dass Wiederholungen der Entscheidungssituation auftreten werden.

Sei also $G=(N,S,U)$ ein Grund- oder Quellenspiel in Normalform. Dieses Spiel werde nun in den 'Perioden' $t=1,2,3,\ldots,n,\ldots$ jeweils einmal gespielt, wobei zu Beginn

des Spieles in Periode $(t+1)$ die in den Perioden 1 bis t getroffenen Entscheidungen (und deren Ergebnisse in Form von Auszahlungen) bekannt sind. D.h. es herrscht vollkommene Vorstufeninformation.

Ein Spielverlauf bis t heißt auch *Vorgeschichte* des $(t+1)$. Spieles $a^t=(s^1,s^2,\ldots,s^t)$, wobei s^i eine Strategienkombination von G bezeichnet, $s^i\in S$, nämlich die in Periode i tatsächlich gespielte reine Strategienkombination von G.

Der Begriff der Vorgeschichte (englisch: history) führt nun unmittelbar zum Begriff einer reinen Strategie für ein Superspiel.

Definition: *Eine* reine Strategie *für Spieler i* im Superspiel G^∞ *ist eine Funktion g_i, $\quad i=1,...,n$, die jeder Vorgeschichte a^t eine Aktion $g_i(a^t)=s_i^{t+1}\in S_i$ zuordnet; d.h.*

$$\begin{array}{llll} g_i: & A \longrightarrow & S_i & A = \text{Menge der möglichen Vorgeschichten} \\ & a^t \mapsto & g_i(a^t) & a^0 = \text{‘Ursprung’} \end{array}$$

Die Menge der reinen Strategien g_i für Spieler i sei mit S_i^∞ bezeichnet.

Eine (reine) Strategienkombination von G^∞, $g=(g_1,\ldots,g_n)$, bestimmt nun einen Spielverlauf des Superspiels wie folgt: Der Spielverlauf a^∞ ergibt sich induktiv aus den durch g während des Spieles erzeugten Vorgeschichten:

$$a^\infty \;=\; (s^1,s^2,s^3,\cdots,\cdots)\in S^\infty \;=\; S\times S\times S\times\cdots\times\cdots$$

mit $s^1=(g_1(a^0),\ldots,g_n(a^0))=g(a^0)$, d.h. $a^1=(a^0,s^1)$

und $s^2=(g_1(a^1),\ldots,g_n(a^1))=g(a^1)$, d.h. $a^2=(a^0,s^1,s^2)=(a^1,s^2)$

bzw. $s^t=g(a^{t-1})$ mit $a^{t-1}=(a^0,s^1,s^2,\ldots,s^{t-1})$, d.h. $a^t=(a^{t-1},s^t)$.

Wir bezeichnen den von $g=(g_1,\ldots,g_n)$ erzeugten Spielverlauf auch mit $a(g)$, bzw. $a(g_1,\cdots,g_n)$. Jedem Spielverlauf muss nun noch eine Auszahlung zugeordnet werden, um das Superspiel G^∞ vollständig zu definieren.

Hierbei werden in Anwendungen prinzipiell zwei Möglichkeiten von Interesse sein.

1. Die *Durchschnittsauszahlung* über alle Spiele des Quellenspieles ergibt für Spieler i, $i=1,\ldots,n$, die Auszahlung

$$\begin{aligned} U_i^\infty(a^\infty) &= \lim_{t\to\infty}\inf \tfrac{1}{t}\cdot\textstyle\sum_{j=1}^t U_i(s^j) \qquad \text{wobei } a^\infty=(s^1,s^2,\ldots,s^t,\cdots) \\ U^\infty(a^\infty) &= (U_1^\infty(a^\infty),\ldots,U_n^\infty(a^\infty)) \end{aligned}$$

2. Die abdiskontierten Periodenauszahlungen ergeben für jeden Spieler i die *abdiskontierte Auszahlung*

$$U_i^\infty(a^\infty) \;=\; \sum_{t=1}^{\infty}\beta^{t-1}\cdot U_i(s^t)$$

wobei $0\le\beta\le1$ den Diskontfaktor bezeichnet.

(Oft wird statt der abdiskontierten Auszahlung auch die *durchschnittliche* abdiskontierte Auszahlung

$$U_i^\infty(a^\infty) \;=\; \frac{\sum_{t=1}^{\infty}\beta^{t-1}\cdot U_i(s^t)}{(1+\beta+\beta^2+\cdots)} \;=\; (1-\beta)\cdot\sum_{t=1}^{\infty}\beta^{t-1}\cdot U_i(s^t)$$

verwendet, doch ist Maximierung der einen durch einen Spieler identisch zur Maximierung der anderen, da sie sich nur um den konstanten Faktor $\frac{1}{1-\beta}=1+\beta+\beta^2+\cdots$ unterscheiden.)

In ökonomischen Anwendungen ist zumeist die abdiskontierte Auszahlung die korrekte Zielfunktion für die einzelnen Spieler. An ihr wollen wir uns im folgenden auch orientieren.

Ein (Nash-) Gleichgewicht von G^∞ ist nun eine Strategienkombination $g^*=(g_1^*,\ldots,g_n^*)$, derart, dass für $i=1,\ldots,n$

$$U_i^\infty(a(g^*)) \;>\; U_i^\infty(a(g_i,g_{-i}^*)) \quad \text{für alle } g_i\in S_i^\infty.$$

Ein Gleichgewicht von G^∞ ist teilspielperfekt, falls es von jeder Vorgeschichte ($\hat{=}$ Teilspiel) an ein Nash-Gleichgewicht erzeugt. Um teilspielperfekte Gleichgewichte von G^∞ zu konstruieren, werden wir im Folgenden ganz bestimmte sogenannte 'Auslöser'-Strategien (englisch: trigger strategies) verwenden.

Betrachten wir noch einmal das allgemeine Gefangenen-Dilemma-Spiel aus Abschnitt 1.1.:

		Spieler 2	
		a	b
Spieler 1	a	$x,\ x$	$v,\ u$
	b	$u,\ v$	$y,\ y$

G^∞ bestehe nun aus dem unendlich oft wiederholten Spiel G, den reinen Strategienmengen S_i^∞ und den Auszahlungen U_i^∞ gemäß der abdiskontierten Auszahlungsregel wie oben allgemein definiert.

Die Spieler 1 und 2 verwenden nun die reinen Strategien, $i = 1, 2$,

$$g_i^*(a^t) \;=\; \begin{cases} a \quad \text{falls} \quad a^t = a^0 \quad \text{oder} \quad a^t = (a^0, (a,a)) \\ \quad\;\; \text{oder} \quad a^t = (a^0, \underbrace{(a,a), \cdots, (a,a)}_{s-mal}) \quad s \in N \\ b \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Behauptung: (g_1^*, g_2^*) bilden ein teilspielperfektes Gleichgewicht von G^∞.

Zunächst besagt g_1^* Folgendes: Spieler 1 spielt beim ersten Mal a (d.h. zeigt 'guten Willen' zur Kooperation). Hat Spieler 2 beim ersten Mal auch a gespielt (d.h. kooperiert), so dass die Vorgeschichte $(a^0, (a,a))$ entstand, so ist 1 wiederum bereit a zu spielen usw.. Sollte jedoch irgendwann eine nicht-kooperative Spielweise von 2 beobachtet werden; d.h. 2 hat das Kooperationsangebot von 1 'ausgebeutet' und b gespielt, so spielt 1 fortan zur Strafe b. Entsprechend symmetrisch ist g_2 zu interpretieren.

Warum lohnt es sich (bei entsprechend festzulegendem Diskontfaktor β) nie für einen Spieler, von der kooperativen Spielweise (a,a) abzuweichen?

Angenommen, Spieler 2 weicht schon zu Beginn ab und spielt b, während Spieler 1 mit a eröffnet. Die Auszahlung der ersten Periode ist also u für Spieler 2 und nur v für Spieler 1. Spieler 1 spielt daraufhin nur noch b, worauf für Spieler 2 fortgesetztes Spiel von b ebenfalls beste Antwort darstellt; d.h. die Gesamtauszahlung für Spieler 2 aus dieser Verhaltensweise ist

$$\beta^0 \cdot u + \sum_{t=2}^{\infty} \beta^{t-1} \cdot y \;=\; u + \frac{\beta}{1-\beta} \cdot y \;\leq\; \frac{1}{1-\beta} x$$

für β groß genug, da $y \leq x$.

Da $(\frac{1}{1-\beta}) \cdot x$ die Auszahlung für 2 bei fortgesetzter Kooperation ist, lohnt sich diese Abweichung für 2 *nicht*. Dieses Argument ist nun aber unabhängig davon in welcher Periode die 1. Abweichung von Spieler 2 auftritt. Er wird fortan mit b seitens von 1 bestraft und muss daher optimalerweise mit b antworten. Diese 'ewig' andauernde Strafe macht *jede* Abweichung daher unprofitabel. Da die Situation von Spieler 1 als Abweicher genau symmetrisch ist, folgt, dass (g_1^*, g_2^*) ein teilspielperfektes Gleichgewicht von G^∞ bilden. In diesem *Gleichgewicht* wird fortwährend kooperiert; d.h. (a,a) gespielt, was zur abdiskontierten Auszahlung von

$$\frac{1}{1-\beta}x, \;\; \frac{1}{1-\beta}x$$

führt, oder (dies macht den 'Zugewinn' pro Spieler im Vergleich zum nur einmal gespielten G mit Gleichgewicht (y,y) deutlicher) zur *durchschnittlichen* abdiskontierten Auszahlung von (x,x). Spielwiederholung lässt den pareto-optimalen Auszahlungsvektor (x,x) also zum Kandidaten für eine teilspielperfekte Gleichgewichtsauszahlung werden! Für effizienzorientierte Ökonomen ist dies von eminenter Bedeutung. Leider ist diese Auszahlung nicht die einzige Gleichgewichtsauszahlung von G^∞. Es gibt unendlich viele weitere. Dies ist relativ leicht einzusehen, da die oben verwandte Bestrafungsandrohung mittels 'Auslöserstrategien' immer dann angewandt werden kann, wenn es eine Strategienkombination (s_1, s_2) des Grundspieles G gibt mit der Eigenschaft, dass $(U_1(s_1,s_2), U_2(s_1,s_2)) \geq (U_1(s^*), U_2(s^*))$, wobei s^* ein Gleichgewicht von G ist.

Allgemeiner kann man mit diesen 'Auslöser'-Strategien das folgende (schwache) 'Folk-Theorem' beweisen:

Folk-Theorem: *Sei $G = (N,S,U)$ ein (Quellen-) Spiel in Normalform und s^* ein* NASH-*Gleichgewicht von G. Dann gibt es für jedes $\overline{s} \in S$ mit $U_i(\overline{s}) \geq U_i(s^*)$ für $i = 1, \ldots, n$ ein $\overline{\beta} \in (0,1]$, sodass G^∞ (mit Diskontfaktor $\beta \geq \overline{\beta}$) ein teilspielperfektes Gleichgewicht g^* besitzt mit durchschnittlicher abdiskontierter Auszahlung*

$$U^\infty(g^*) \;=\; (U_1^\infty(g^*), \ldots, U_n^\infty(g^*)) = (U_1(\overline{s}), \ldots, U_n(\overline{s}))$$

Bemerkung: $\beta = 1$ funktioniert immer!

Es sei hier bemerkt, dass obere Form des Folk-Theorems insofern 'schwach' ist, als es unnötig 'ineffiziente' Bestrafungen anwendet. 'Auslöser'-Strategien drohen dieselbe Strafe unabhängig vom begangenen Verbrechen an, sie sind 'gnadenlos', indem sie für immer strafen und 'gnadenlos hart', weil der strafende Spieler selbst dieselbe Strafe erleidet wie der Bestrafte! Effizienter wäre sicherlich, Abweichungen durch Strafe in endlich vielen der folgenden Perioden abzugelten und danach wieder einen Kooperationsversuch anzubieten. In der Tat können solche 'minimalen' Bestrafungsstrategien konstruiert werden. Mit ihrer Hilfe lässt sich der Bereich teilspielperfekter Gleichgewichts-Auszahlungen des Superspieles noch weiter ausdehnen.

Sei $\underline{v}_i = \min\limits_{s_{-i}}(\max\limits_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}))$ der sog. Reservationsnutzen bzw. minimax-Wert von Spieler i. Er gibt an, welche Auszahlung sich ein Spieler i (durch Wahl von s_i) *mindestens* garantieren kann, selbst wenn er dauernd 'worst-case'-Szenarien in bezug auf das Verhalten der anderen Spieler ($\min\limits_{s_{-i}}$!) unterstellt. Das sog. 'minimax'- Verhalten der ande-

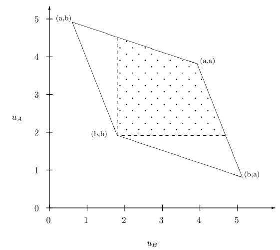
ren Spieler stellt für jene die härteste Strafe für i, gegeben dessen Aktion s_i, dar! Man kann nun zeigen

Folk-Theorem (Fudenberg/Maskin 1986): *Sei V die Menge der zulässigen Auszahlungsvektoren von $G = (N,S,U)$ und $dimV = n =$ Anzahl der Spieler. Dann gilt: Für jeden zulässigen Auszahlungsvektor $u = (u_1, \cdots, u_n)$ mit $u_i > \underline{v}_i, \quad i = 1, \cdots, n$, gibt es $\overline{\beta} \in (0,1]$, so dass für alle $\beta \in (\overline{\beta}, 1]$ ein teilspielperfektes Gleichgewicht von G^∞ mit durchschnittlicher Auszahlung u existiert.*

Die Dimensionalitätsforderung wird hier benötigt, um Teilspielperfektheit garantieren zu können. Sie gibt den Spielern in der Auszahlungsmenge genügenden 'Raum', um für *jede* Vorgeschichte, d.h. in jedem Teilspiel, effiziente Bestrafungen für jeden Spieler konstruieren zu können.

Eine Warnung sollte jedoch schon hier ausgesprochen werden. Für den ökonomisch interessierten Anwender von Spieltheorie in Form des Folk-Theorems sollte Effizienz-Orientiertheit nicht in Effizienz-Gläubigkeit ausarten, derart dass er unter all den möglichen Gleichgewichtsauszahlungen des Superspieles nur - ohne jede weitere Begründung - jeweils die pareto-effizienten für die einzig ökonomisch relevanten hält. Er müsste ein *zusätzliches* Argument dafür liefern können, warum gerade diese und nicht auch andere Gleichgewichte als Ergebnis des wiederholten Spieles zu erwarten sind.

Kehren wir kurz noch einmal zum im Abschnitt 1.1. betrachteten Gefangenen-Dilemma mit $x = 4$, $y = 2$, $u = 5$, und $v = 1$ zurück. In diesem Spiel sind (durch gemischte Strategien) folgende Auszahlungen möglich: (s. Abbildung)



Gleichgewichtsauszahlungen im wiederholten Spiel

Das Folk-Theorem besagt nun, dass alle Auszahlungen in der schraffierten Fläche zu Gleichgewichten von G^∞ gehören! Jedoch nur die auf dem nordöstlichen Rand dieser Fläche liegenden Auszahlungen sind pareto-effizient. Das Folk-Theorem erlaubt aber *nicht*, zwischen solchen Gleichgewichten und Gleichgewichten, die zu einer Auszahlung im Inneren der schraffierten Fläche führen, zu diskriminieren.

5.2 Endlich oft wiederholte Spiele

Die Aussage des Folk-Theorems kann offensichtlich nicht auf nur endlich oft wiederholte (Super)spiele übertragen werden. Insbesondere gilt für den Fall, dass das Quellenspiel nur ein NASH-Gleichgewicht besitzt, folgendendes extremes "Nicht-Folk-Theorem".

Satz: *Sei $G = (N,S,U)$ ein Spiel in Normalform. Besitzt G genau ein* NASH-*Gleichgewicht, dann besitzt G^T für alle $\beta \in (0,1]$ genau ein teilspielperfektes Gleichgewicht, das aus T-fachem Spiel des Gleichgewichts von G besteht ($T < \infty$).*

Von entscheidender Bedeutung in diesem Zusammenhang ist jedoch die Qualifikation, dass G nur ein Gleichgewicht besitze. Das Eingangsbeispiel zu diesem Kapitel zeigt, dass schon für $T = 2$ der Satz ohne diese Zusatzqualifikation nicht mehr gelten muss.

Allgemein kann man jedoch für alle Grundspiele, also auch solche, die mehr als ein Gleichgewicht besitzen, folgendes für G^T festhalten:

1. $(s^1, \cdots, s^T)$ ist ein teilspielpefekter Gleichgewichtspfad von G^T, falls alle $s^i, i = 1, \ldots, T$ (nicht notwendigerweise gleiche) Gleichgewichte von G sind.
2. Falls $(s^1, \ldots, s^T)$ ein teilspielperfekter Gleichgewichtspfad von G^T ist, so muss s^T ein Gleichgewicht von G sein.

Aussage 1 bedeutet schon, dass ein Quellenspiel mit n Gleichgewichten und T-facher Wiederholung zu mindestens n^T Gleichgewichten des Superspieles G^T führt.

Beispiel: $n = 3$; d.h. G hat 3 Gleichgewichte $\Rightarrow G^T = G^5$ hat zumindest $3^5 = 243$ Gleichgewichte! (siehe 1.)

Es kommen natürlich - vor allem mit größer werdendem T - noch viele weitere mögliche Gleichgewichte nach 2. hinzu, so dass man erwarten könnte, dass für $T \to \infty$ die Gleichgewichtsmenge von G^∞ nach dem Folk-Theorem approximativ erreicht wird. Dies haben für 'fast alle' Spiele in Normalform *mit mehr als einem Gleichgewicht* Benoit und Krishna [1985] auch in der Tat beweisen können. Die Komplexität dieser Arbeit geht jedoch über den hier angestrebten beschränkten formalen Rahmen weit hinaus. Natürlich müssen Grundspiele mit nur einem Gleichgewicht von diesem Resultat (siehe obigen Satz) ausgenommen bleiben. Es ist im Einzelfalle zwar möglich für festes T, Gleichgewichtsbedingungen für G^T anzugeben, jedoch eher schwierig aufgrund dieser Bedingungen die gesamte Gleichgewichtsmenge bzw. deren Pfade oder Auszahlungen auch explizit zu ermitteln. Festzuhalten bleibt jedoch, dass es in aller Regel Strafandrohungen für Spielwiederholungen gibt, die (zumindest beschränkt) kooperative Verhaltensweisen des Grundspieles, die in jenem *kein* Gleichgewicht darstellen, zu einem Bestandteil von Gleichgewichtsverhalten des wiederholten Spieles machen. Es ist *nicht* notwendig - so ein weitverbreiteter Glaube - dass die Spielwiederholung unendlich oft zu erfolgen hat.

Folk-Theorem für endlich oft wiederholte Spiele (Benoit/Krishna 1985): *Es existiere für jeden Spieler i, $\quad i = 1, \cdots, n$, ein Nash-Gleichgewicht des Grundspiels $G = (N, S, U)$, $\quad (s_1^*, \cdots, s_n^*)^i$, mit $u_i((s_1^*, \cdots, s_n^*)^i) > \underline{v}_i$. Dann konvergiert die Menge der Nash-Gleichgewichte von G^T für $T \to \infty$ gegen die Menge der Nash-Gleichgewichte von G^∞.*

Der obige Satz kann analog auf den Fall der *Teilspielperfektheit* erweitert werden, wiederum muss die Dimensionalitätsforderung gestellt werden.

Kapitel 6

Spiele mit unvollständiger Information

In der Spieltheorie wird eine Unterscheidung getroffen zwischen Spielen mit 'unvollständiger Information' und Spielen mit 'unvollkommener Information'. Grob gesprochen könnte man sagen, dass ein Spiel 'unvollkommene Information' besitzt, wenn ein Spieler nicht genau (oder auch gar nicht) über die früheren Züge anderer Spieler informiert ist, wohingegen 'unvollständige Information' vorliegt, wenn ein Spieler nicht genau weiß, welche Identität seine Mitspieler haben, d.h. eine wichtige Charakteristik der Gegenspieler ihm unbekannt ist. In ökonomischem Kontext kann diese beispielsweise bedeuten, dass zwei miteinander konkurrierende Firmen jeweils nicht über die Kostenfunktion der anderen Firma informiert sind (unvollständige Information) bzw. über die Produktionsmengen des Konkurrenten in der Vorperiode nicht informiert sind (unvollkommene Information). Da wir bisher ein Spiel durch ein Tupel (N, S, U) beschrieben haben, könnte man auch sagen, dass bei *unvollkommener Information* das Spiel selbst, das 'gespielt' wird, bekannt ist. Alle wissen also über (N, S, U) Bescheid, man weiß nur nicht (immer) genau, was im Spiel schon geschehen ist oder gerade geschieht. Bei *unvollständiger Information* hingegen ist - strikt gesprochen - nicht genau bekannt, *welches Spiel* (N, S, U) gespielt wird, da beispielsweise die Auszahlungsfunktion eines Gegenspielers U_i nicht genau bekannt ist (dies wäre im obigen Beispiel der zwei Firmen der Fall, da Unkenntnis der Kostenfunktion des Konkurrenten Unkenntnis seiner Gewinnfunktion impliziert).

Wir wollen in diesem Kapitel *statische* Spiele mit unvollständiger Information, in denen

alle Spieler gleichzeitig ziehen, analysieren. Deren Struktur ist insofern einfach, als kein Spieler auf den Zug des anderen *reagieren* kann und insofern auch nicht *lernen* kann, welche wahre Identität sein Gegenüber besitzt. Dennoch ist die strategische Interaktion in einem Gleichgewicht, einem sogenannten Bayesianischen Nash-Gleichgewicht, aufgrund der unvollständigen Information schon hinreichend komplex. Dies soll das folgende für die Wirtschaftswissenschaften grundlegende Tausch- bzw. Verhandlungsspiel zeigen.

Beispiel: Ein einfaches Verhandlungsspiel

Zwei Spieler, im folgenden Käufer und Verkäufer genannt, 'verhandeln' über den Transfer einer Ware, d.h. darüber, ob der Verkäufer die Ware zu einem *beiderseits* akzeptablen Preis an den Käufer verkauft oder nicht.

Der Käufer, K, bewertet die Ware mit V (Euro), was seinem Reservationspreis entspricht, und ist bestrebt, sie vom Verkäufer nach Möglichkeit *billiger* erwerben zu können. Der Verkäufer, Vk, möchte zumindest seine Einstandskosten (was z.B. Produktionskosten sein können) decken und ist nicht bereit, die Ware für weniger als C (Euro) abzugeben. C ist also sein Reservationspreis. Natürlich kann nur freiwillig Tausch stattfinden, wenn $V \geq C$, d.h. der Käufer einen höheren Reservationspreis für die Ware hat als der Verkäufer.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Bewertung Käufer:} & V \\ \text{Bewertung Verkäufer:} & C \end{array}\right\} \text{Freiwilliger Tausch ist nur möglich, falls } V > C.$$

Die beiden Spieler haben sich auf folgende 'Verhandlungsprozedur' geeinigt:

> *Jeder Spieler gibt verdeckt ein (z.B. schriftliches) Gebot ab. Der Käufer ein Angebot, der Verkäufer eine Forderung. Übersteigt der angebotene Preis des Käufers den geforderten Preis des Verkäufers, so findet Tausch statt zum Durchschnittspreis der beiden Gebote. Übersteigt die Forderung das Preisangebot, so findet kein Tausch statt.*

Informationsannahme: Der Käufer kennt seinen Reservationspreis, aber nicht den des Verkäufers. Der Verkäufer kennt seinen Reservationspreis, nicht aber den des Käufers.

Welche Gebote (in Abhängigkeit von ihrer Informationslage) sollten die Spieler abgeben?

Sei v das Gebot von K und c die Forderung von Vk.

Ist $v \geq c \implies$ Tausch zum Preis $p = \frac{v+c}{2}$.

Ist $v < c \implies$ kein Tausch.

Dieses Bietverfahren führt, ähnlich einem Markt, zur Bestimmung eines Preises durch Angebot und Nachfrage.

Die Verhandlungssituation kann also als bilaterales Monopol interpretiert werden. Das Gebot v des Käufers wird so interpretiert: Bis zu einem Preis $p \leq v$ bin ich bereit eine Einheit nachzufragen, bei Preisen $p > v$ ist meine Nachfrage gleich Null. Dies ergibt eine klassische Nachfragefunktion. Ebenso kann das Gebot des Verkäufers als Anbieterverhalten über alle Preise interpretiert werden.

Die Auszahlungsfunktion für den Käufer lautet

$$u_K(v, c; V) \; = \; \begin{cases} V - \frac{v+c}{2} & \text{falls } v \geq c \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Auszahlungsfunktion des Verkäufers lautet

$$u_{Vk}(c, v; C) \; = \; \begin{cases} \frac{v+c}{2} - C & \text{falls } c \leq v \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Da ein Spieler die wahre Identität seines Gegenübers nicht kennt, kann er auch nicht direkt ‘voraussehen’ oder vorhersagen, was dieser tun wird. Er kann jedoch Vermutungen darüber anstellen, in welcher Weise seine Aktion von der wahren Identität abhängt. Das heißt, jeder Spieler überlegt, wie sich das Gebot eines Gegenspielers mit hohem Reservationspreis vom Gebot eines Spielers mit niedrigem Reservationspreis unterscheidet.

Nehmen wir zunächst an, es gebe nur zwei mögliche Bewertungen, sowohl für den Käufer als auch für den Verkäufer, eine hohe bzw. eine niedrige Bewertung,

Käufer:	$V_N = \frac{1}{2}$	$V_H = 1$
Verkäufer:	$C_N = \frac{1}{8}$	$C_H = \frac{5}{8}$

und zwei zulässige Gebote/Forderungen

$$P_N = \frac{1}{4} \qquad P_H = \frac{3}{4}$$

Geben beide Spieler dasselbe Gebot ab, so stellt dieses den Preis dar, ist das Gebot des Käufers geringer als die Forderung des Käufers, findet keine Transaktion statt. Ist

schließlich $c = p_N, v = p_H$, so ergibt sich die Transaktion zum Preis $p = \frac{p_N + p_H}{2} = \frac{1}{2}$. Es wird also eines von 4 möglichen Normalformspielen gespielt:

C_N, V_N:

$Vk \backslash K$	p_N	p_H
p_N	$\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$, 0
p_H	0, 0	$\frac{5}{8}$, -$\frac{1}{4}$

C_N, V_H:

$Vk \backslash K$	p_N	p_H
p_N	$\frac{1}{8}$, $\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$
p_H	0, 0	$\frac{5}{8}$, $\frac{1}{4}$

C_H, V_N:

$Vk \backslash K$	p_N	p_H
p_N	-$\frac{3}{8}$, $\frac{1}{4}$	-$\frac{1}{8}$, 0
p_H	0, 0	$\frac{1}{8}$, -$\frac{1}{4}$

C_H, V_H:

$Vk \backslash K$	p_N	p_H
p_N	-$\frac{3}{8}$, $\frac{3}{4}$	-$\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}$
p_H	0, 0	$\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$

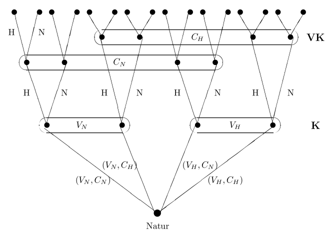
Jeder Spieler weiß, dass nur zwei der vier Spiele in Frage kommen, der Verkäufer kennt die Zeile, der Käufer die Spalte im obigen Diagramm. Sie wissen jedoch nicht, welches konkrete Spiel gespielt wird.

6.1 Die Harsanyi-Transformation:

Charakteristisch am eben behandelten Beispiel ist, dass die Spieler zwar (jeweils) wissen, wieviel andere Spieler noch mitspielen und welche Strategienräume sie haben, aber sie wissen nicht genau, welche Auszahlungsfunktion die anderen Spieler haben. Unvollständigkeit (= incompleteness) der Information über das Spiel $M = (N, S, U)$, äussert sich also gerade durch unvollständige Kenntnis von $U = (U_1, \ldots, U_n)$. Über U_{-i} ist jedem Spieler i nur bekannt, aus welcher Menge oder Familie von Auszahlungsfunktionen sie stammen könnten. Für Informationsunvollständigkeiten dieser Art hat Harsanyi (1967, 1968) eine allgemeine Transformation vorgeschlagen, die das vorliegende Spiel mit *unvollständiger* Information umwandelt in ein Spiel mit *vollständiger*, aber *unvollkommener* Information. Die Grundidee ist die, alle Typen eines Spielers i (= Ausprägungen, die U_i in den Augen der anderen Spieler annehmen kann) als Spieler eines größeren Spieles aufzufassen, in dem der zuätzliche Spieler ‘Natur’ den 1. Zug

erhält. Auf dieser Stufe wählt die Natur jeweils aus der Spielermenge, die die Typen des Spielers i repräsentiert, *einen* Typ (= Spieler) aus, der auf Stufe II des Spieles aktiv werden wird (in obigem Beispiel würde die Natur also “wahre” Werte für V und C bestimmen). Ein gewählter Spieler (= Typ von i) wird darüber informiert, dass er *aktiv* sein wird, ein nicht-gewählter Spieler wird darüber informiert, dass er *inaktiv* sein wird. Ein aktiver Typ – wie auch der inaktive Typ desselben Spielers – weiß jedoch nichts über die Information der Typen jedes seiner Mitspieler.

Das oben betrachtete Verhandlungsspiel kann man somit als ein Spiel mit *vier* (potentiellen) Spielern auffassen, nämlich 2+2 “Typen”. Die Natur bestimmt dann (zufällig), ob V_N oder V_H und (gleichzeitig) ob C_N oder C_H aktiv sein werden. Danach handeln die aktiven Spieler. Dann hätte das gesamte 2-Stufen-Spiel folgende extensive Form:



Beachte:

- Entscheidungsknoten für den Käufer: V_N und V_H.
- Entscheidungsknoten für den Verkäufer: C_N und C_H. Wie auch für den Käufer gilt für den Verkäufer: Linker Ast = hohes Gebot (p_H), rechter Ast = niedriges Gebot (p_N).

Von besonderer Wichtigkeit ist hierbei die Struktur der Informationsmengen: Man

beachte, dass das Spiel *kein* Teilspiel besitzt (trotz der zwei Stufen)! Die Information ist unvollkommen, weil kein Spieler über den 1. Zug der Natur genau Bescheid weiß und auch weil kein Spieler zum Zeitpunkt *seiner* Entscheidung über Züge der anderen informiert ist. Die *Auszahlungen* sind aber nun *überall* wohldefiniert und bekannt (= vollständige Information). Jeder der vier Spieler V_N, V_H, C_N und C_H “kontrolliert” eine Informationsmenge, wobei jeweils nur eine von zweien aufgrund des Zuges der Natur erreicht werden kann. Mit welcher *Wahrscheinlichkeit* die Natur einen der vier möglichen Züge zu Beginn wählt, haben wir noch nicht spezifiziert. Nehmen wir einfach an, die Natur gehorche einer Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$p(x, y) \; = \; \text{Prob}\,(V = x,\; C = y).$$

Wir müssen dann nur noch voraussetzen, dass alle Spieler dieses $p(x, y)$ kennen, um das Spiel zu vervollständigen. Damit kann jeder Spieler aus der Kenntnis des eigenen Typs die (bedingte) Wahrscheinlichkeit ermitteln, welcher Typ sein Gegenspieler ist und mit Hilfe der Annahme über das Verhalten der Mitspieler, die erwartete Auszahlung bestimmen.

6.2 Bayes-Nash-Gleichgewicht

Der Begriff eines Bayesianischen Gleichgewichtes kann nun allgemein in Bezug auf das ursprüngliche Spiel mit unvollständiger Information definiert werden, in dem wir einen Spieler als Vereinigung seiner Typen interpretieren:

Jede Ausprägung der nicht allgemein bekannten Charakteristik (in der Auszahlungsfunktion) des Spielers i definiert einen *Typ* dieses Spielers t_i. Die möglichen Ausprägungen der Typen aller Spieler sind bekannt (common knowledge) und verteilt nach $p(t_1, \ldots, t_n)$.

Da i seinen eigenen Typ kennt, wird für ihn die Informationslage durch die *bedingte Wahrscheinlichkeit*

$$p(t_{-i}|t_i) = \frac{p(t_{-i}, t_i)}{\sum_{t'_{-i}} p(t'_{-i}, t_i)}$$

beschrieben, wobei $t_{-i} = (t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n)$ und $p(t_{-i}, t_i) = p(t_1, \ldots, t_i, \ldots, t_n)$. Es sei S_i der Strategienraum von Spieler i, aus dem er *abhängig* von seinem Typ t_i eine Aktion $s_i = s_i(t_i)$ wählt. Haben alle Spieler eine Entscheidung s_i, $i = 1, \ldots, n$ gewählt, erhält i die Auszahlung

$$U_i(s_1, \dots, s_n; t_i).$$

Definition: *Die Normalform eines* BAYESianischen *Spieles setzt sich zusammen aus*

- *der Spielermenge* $N = \{1, \dots, n\}$
- *dem Strategienraum* $S = \Pi\, S_i \quad i = 1, \dots, n$
- *dem Typenraum* $T \quad \Pi\, T_i \quad i = 1, \dots, n$
- *der Wahrscheinlichkeitsverteilung* $p(t)$ *und*
- *der Auszahlungsfunktion* $U = (U_i)$, $U_i = U_i(s;\ t_i)$.

Eine Strategie eines Spielers i in einem Bayesianischen Spiel ist eine Funktion $S_i(t_i)$, die jedem Typen t_i eine zulässige Strategie $s_i \in S_i$ zuordnet. Die erwartete Auszahlung des Spielers i vom Typ t_i ergibt sich damit als

$$E[U_i(s_{-i}, s_i, t_i)] \;=\; \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} U_i(s_1(t_1), \dots, s_{i-1}(t_{i-1}), s_i, s_{i+1}(t_{i+1}), \dots, s_n(t_n)) \cdot p(t_{-i}|t_i)$$

Definition: *Ein* BAYESianisches (NASH) Gleichgewicht *ist eine Kombination typen-abhängiger Strategien* $(s_1^*(t_1), \dots, s_n^*(t_n))$, *so dass jeder Spieler* i *seinen erwarteten Nutzen, gegeben seinen Typ* t_i *und die typen-abhängigen Strategien der anderen Spieler, durch Spiel von* $s_i = s_i^*(t_i)$ *maximiert; d.h. es gilt für* $i = 1, \dots, n$, $s_i = s_i^*(t_i)$ *maximiert*

$$E[U_i(s_i, t_i)] \;=\; \sum_{t_{-i}} U_i(s_1^*(t_1), \dots, s_i, \dots, s_n^*(t_n); t_1, \dots, t_i, \dots, t_n) \cdot p(t_{\ i}|t_i)$$

(Typen endlich verteilt) für alle t_i.

Ein BAYESianisches Gleichgewicht kann also (siehe das einfache Beispiel) verstanden werden als ein einfaches NASH-Gleichgewicht in einem Spiel, das jeden *Typ* eines Spielers als einen eigenen Spieler behandelt; d.h. in einem Spiel mit $\sum_i |T_i|$ Spielern, falls $|T_i| =$ Anzahl der Typen von i, in dem jeder Spieler eine reine Strategie $s_i \in S_i$ wählt, falls er einen Typ von i repräsentiert.

Zurück zum Verhandlungsspiel:
Die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Typen seien wie folgt:

$p(V,C)$	V_N	V_H
C_N	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
C_H	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

Der Käufer mit der niedrigen Bewertung V_N sowie der Verkäufer mit der hohen Bewertung C_H haben in diesem Verhandlungsspiel eine dominante Strategie.

$$s_K^*(V_N) = p_N$$

$$s_{Vk}^*(C_H) = p_H$$

Sei q_{Vk} nunmehr die Wahrscheinlichkeit, mit der der Verkäufer mit der niedrigen Bewertung C_N ein niedriges Gebot p_N wählt. Der Käufer mit der hohen Bewertung V_H steht dann vor folgendem Entscheidungsproblem:

Entscheidet sich der Käufer, ein niedrigeres Gebot abzugeben, $(v = p_N)$, so wird die Transaktion nur dann (zum Preis $p_N = \frac{1}{4}$) zustande kommen, wenn der Verkäufer eine niedrige Forderung stellt, somit nur, wenn er geringe Kosten hat (Wahrscheinlichkeit $p(C_N|V_H)$), und auch dann nur gemäß seiner Strategie mit Wahrscheinlichkeit q_{Vk}:

$$\begin{aligned} E\left[U(p_N;\ V_H)\right] &= \left[V_H - \tfrac{1}{4}\right] \cdot q_{Vk} \cdot p\,(C_N|V_H) \\ &= \tfrac{3}{4} \cdot q_{Vk} \cdot \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

Entscheidet er sich hingegen für ein hohes Gebot $(v = p_H)$, so wird die Transaktion in jedem Fall zustande kommen. Trifft er auf den Verkäufer mit den hohen Kosten $(p(C_H|V_H))$, so wird die Transaktion zum Preis $p_H = \frac{3}{4}$ durchgeführt. Trifft er auf den Verkäufer mit niedrigen Kosten $(p(C_N|V_H))$, so ist mit Wahrscheinlichkeit q_{Vk} der Preis gleich $p = \frac{1}{2}$, mit der Gegenwahrscheinlichkeit $(1 - q_{Vk})$ gleich $p = \frac{3}{4}$:

$$\begin{aligned} E\left[U(p_H;\ V_H)\right] \;&=\; (V_H - \frac{3}{4}) \cdot p\,(C_H|V_H) + \left[(V_H - \frac{1}{2}) \cdot q_{Vk} + (V_H - \frac{3}{4})(1 - q_{Vk})\right] \\ &\quad \cdot p\,(C_N|V_H) \end{aligned}$$

$$= \;\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \left[\frac{1}{2} \cdot q_{Vk} + \frac{1}{4} \cdot (1 - q_{Vk})\right] \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{12}\left[3 + 2 \cdot q_{Vk}\right]$$

Ein niedriges Gebot ist immer dann beste Antwort, wenn

$$q_{Vk} \;\geq\; \frac{3}{4}$$

Entsprechend gilt für den Verkäufer mit der niedrigen Bewertung, falls q_K die Wahrscheinlichkeit ist, dass der Käufer mit der hohen Bewertung ein niedriges Gebot abgibt,

$$\begin{aligned} E\left[U(p_N;\ C_N)\right] \;&=\; (\frac{1}{4} - C_N) \cdot p\,(V_N|C_N) + \left[(\frac{1}{4} - C_N) \cdot q_k + (\frac{1}{2} - C_N)(1 - q_K)\right] \\ &\quad \cdot p\,(V_H|C_N) \\ &=\; \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{5} + \left[\frac{1}{8} q_K + \frac{3}{8} \cdot (1 - q_K)\right] \cdot \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$E\left[U(p_H;\ C_N)\right] = 0 \cdot q_K \cdot p\,(V = V_N|C_N) + \tfrac{5}{8} \cdot (1 - q_K) \cdot \tfrac{4}{5}$$

Eine niedrige Forderung ist immer dann beste Antwort, wenn

$$q_K \;>\; \frac{7}{12}$$

Das Verhandlungsspiel hat drei Gleichgewichte:

Gleichgewicht 1:

$$s_{Vk}^*(C_N) = p_N \qquad s_{Vk}^*(C_H) = p_H$$

$$s_K^*(V_N) = p_N \qquad s_K^*(V_H) = p_N$$

Gleichgewicht 2:

$$s_{Vk}^*(C_N) = p_H \qquad s_{Vk}^*(C_H) = p_H$$

$$s_K^*(V_N) = p_N \qquad s_K^*(V_H) = p_H$$

Gleichgewicht 3:

$$s_{Vk}^*(C_N) \;=\; \begin{cases} p_N & \text{mit Wahrscheinlichkeit} \quad q_{Vk} = \frac{3}{4} \\ p_H & \text{mit Wahrscheinlichkeit} \quad (1 - q_{Vk}) = \frac{1}{4} \end{cases} \qquad s_{Vk}^*(C_H) = p_H$$

$$s_K^*(V_N) = p_N \qquad s_K^*(V_H) \;=\; \begin{cases} p_N & \text{mit Wahrscheinlichkeit} \quad q_K = \frac{7}{12} \\ p_H & \text{mit Wahrscheinlichkeit} \quad (1 \quad q_K) = \frac{5}{12} \end{cases}$$

In jedem dieser Gleichgewichte findet mit positiver Wahrscheinlichkeit kein Tausch statt, auch in Situationen, in denen Tausch zu einer Pareto-Verbesserung führen würde.

Die Definition eines Bayesianischen Spiels erfordert nicht, wie bisher angenommen, dass die Anzahl möglicher Typen endlich ist. Häufig ist ein Gleichgewicht sogar leichter zu finden, wenn der Typenraum nicht diskret sondern kontinuierlich formuliert werden kann. Allerdings muss dann die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Typenvektors durch eine gemeinsame Dichtefunktion $f(t)$ ersetzt werden. Im folgenden soll der Einfachheit halber unterstellt werden, dass die Typen der verschiedenen Spieler unabhängig verteilt sind, die gemeinsame Dichte somit als das Produkt

$$f(t) = \prod_i f_i(t_i)$$

dargestellt werden kann. Damit ist die bedingte Dichte $f(t_{-i}|t_i)$ unabhängig von der Realisierung t_i. Ein einfaches Beispiel, in dem eine solche Typenverteilung analysiert werden kann, ist die folgende Auktion.

6.3 Auktion

Eine Auktion ist ganz allgemein ein *Zuteilungsmechanismus* für ein *unteilbares* Gut. Neben der klassischen Auktion (englische Auktion) in der sich die Spieler sequentiell überbieten und die einzelnen Gebote entsprechend offen abgeben werden, gibt es eine Vielzahl alternativer Möglichkeiten, von denen hier lediglich zwei Repräsentanten vorgestellt werden sollen. In beiden werden die Gebote schriftlich (geheim) abgegeben, jeder Spieler muss sein Gebot somit abgeben ohne zu wissen, welche Gebote die Mitbieter abgeben. Wie bei der klassischen Auktion erhält der Bieter das Objekt, der das höchste Gebot abgegeben hat und nur er muss einen - von den abgegebenen Geboten abhängigen - Preis bezahlen.

Erst- Preis- Auktion:

*) Alle Gebote werden schriftlich abgegeben.

*) Der Bieter mit dem höchsten abgegebenen Gebot erhält das Objekt zu dem von ihm genannten Preis. Sind zwei höchste Gebote identisch, so erhält jeder der Spieler mit diesem höchsten Gebot mit gleicher Wahrscheinlichkeit den Zuschlag.

Es gebe nur zwei (risikoneutrale) Bieter. Wie im Verhandlungsspiel unterstellen wir, dass jeder Bieter seine eigene Bewertung v_i kennt, nicht aber die des Mitbieters. Gebote müssen positiv sein (oder 0 = passen). Erhält ein Bieter den Zuschlag zum Gebot p, so sei seine Auszahlung

$$u_i(b_i; V_i) = V_i - b_i$$

erhält er den Zuschlag nicht, ist seine Auszahlung gleich 0. Es ergibt sich die zusammengesetzte Auszahlungsfunktion

$$u_i(b_i, b_j; V_i) = \begin{cases} V_i - b_i & \text{wenn } b_i > b_j \\ \frac{V_i - b_i}{2} & \text{wenn } b_i = b_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Bewertungen sind so normiert, dass die höchst mögliche Bewertung gleich 1 ist:

$$V_i \in [0, 1],$$

und außerdem sind sie unabhängig, identisch gleichverteilt:

$$\begin{aligned} f(V_1, V_2) &= f_1(V_1) \cdot f_2(V_2) \\ f_i(V_i) &= 1 \end{aligned}$$

Da niemand einen Anreiz besitzt mehr als die eigene Bewertung zu bieten ($b_i > V_i$ wird dominiert durch $b_i = 0$) kann der Strategienraum auf $S_i = [0, 1]$ eingeschränkt werden.

Eine Strategie für Spieler i ordnet jedem Typen V_i ein Gebot $b_i(V_i)$ zu. Die erwartete Auszahlung für einen bestimmten Typen V_i ergibt sich dann als

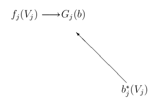
$$E[u_i(b_i, b_j; V_i)] = (V_i - b_i) \cdot Prob(b_i > b_j(V_j)) + \frac{1}{2}(V_i - b_i) \cdot Prob(b_i = b_j(V_j))$$

Hierbei ergibt sich die Verteilungsfunktion Prob $(x < \overline{x})$ aus der entsprechenden Dichtefunktion

$$Prob(x \leq \overline{x}) = F(\overline{x}) := \int_{-\infty}^{\overline{x}} f(y)dy \tag{6.1}$$

$$\text{bzw.} \quad Prob(x > \overline{x}) = 1 - Prob(x \leq \overline{x}). \tag{6.2}$$

Allerdings kennt der Bieter zunächst lediglich die Dichtefunktion $f_j(V_j)$ der Bewertungen des Gegenspielers. Mit Hilfe der unterstellten Strategie $b_j(V_j)$ kann er aber auch eine Verteilung über den zulässigen Geboten ermitteln



Unterstellt man eine (strikt) monotone Bietfunktion $b_j(V_j)$, d.h. je höher die Wertschätzung von Bieter i für das Objekt, desto höher ist sein Gebot, so lässt sich dieser Zusammenhang folgendermaßen ausdrücken:

$$G_j(b) := Prob(b_j(V_j) \leq b) = Prob(V_j \leq b_j^{-1}(b)) = \int_0^{b_j^{-1}(b)} f_j(V_j)dV_j = \int_0^{b_j^{-1}(b)} 1 \cdot dV_j = b_j^{-1}(b)$$

Da die Bietstrategie strikt monoton unterstellt wird und die Wahrscheinlichkeit eines konkreten Typen V_i gleich 0 ist, d.h. $(Prob(b_i^* = \overline{b}) = 0)$, vereinfacht sich die erwartete Auszahlung zu

$$E[u_i(b_i, b_j; V_i)] = (V_i - b_i) \cdot prob(b_i \geq b_j(V_j)) = (V_i - b_i) \cdot b_j^{-1}(b_i)$$

$b_i^{-1}(b)$ ist gerade der Typ von Spieler i V_i, der genau das Gebot b abgibt.

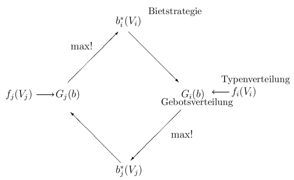
Das Nutzenmaximierungskalkül lautet somit

$$\max_{b_i}(V_i - b_i) \cdot b_j^{\;1}(b_i)$$

und die Bedingung 1.Ordnung

$$-b_j^{-1}(b_i) + (V_i - b_i) \cdot \frac{db_j^{-1}(b_i)}{db_i} = 0$$

Fügt man zum obigen Diagramm dieses Maximierungskalkül hinzu und ergänzt es durch die entsprechenden Überlegungen von Spieler j, so erhält man folgendes Diagramm:



Struktur des Gleichgewichtsbegriffes

Jeder Spieler berechnet aus der Typenverteilung und der unterstellten Strategie die Gebotsverteilung des Gegenspielers und ermittelt daraus (mit einem Maximierungskalkül) sein optimales Gebot. Ein Gleichgewicht ist dann gefunden wenn sich in obigem Diagramm die Strategien wechselseitig als Ergebnis des Maximierungskalküls bestätigen.

Bezeichnet man die Funktion $b_i^{-1}(\cdot) = z_i(\cdot)$ so ergibt sich

$$\begin{aligned} z_1'(b_2) &= \tfrac{z_1(b_2)}{V_2 - b_2} = \tfrac{z_1(b_2)}{z_2(b_2) - b_2} \\ z_2'(b_1) &= \tfrac{z_2(b_1)}{V_1 - b_1} = \tfrac{z_2(b_1)}{z_1(b_1) - b_1} \end{aligned}$$

ein System von Differentialgleichungen. Wählt man für die (eindeutige) Lösung einen linearen Ansatz

$$z_1(b) = \beta_1 \cdot b \qquad z_1' = \beta_1$$

$$z_2(b) = \beta_2 \cdot b \qquad z_2' = \beta_2$$

und berücksichtigt $z_i(b) = V_i$ (für i = 1,2), so reduziert sich dieses System auf ein Gleichungssystem

$$\beta_1 = \tfrac{\beta_1 \cdot b_2}{\beta_2 b_2 - b_2} \qquad \beta_2 = 2$$

$$\beta_2 = \tfrac{\beta_2 \cdot b_1}{\beta_1 b_1 - b_1} \qquad \beta_1 = 2$$

Damit ergeben sich die Gleichgewichtsgebote als

$$b_1^{-1}(b) = 2 \cdot b \qquad b_1(V_1) = \tfrac{V_1}{2}$$

$$b_2^{-1}(b) = 2 \cdot b \qquad b_2(V_2) = \tfrac{V_2}{2}$$

Jeder Spieler bietet genau die Hälfte dessen, was ihm das Objekt tatsächlich Wert ist. Dieses Gleichgewicht ist tatsächlich auch das einzige Bayesianische-Nash-Gleichgewicht, da das oben erhaltene System von Differentialgleichungen eine eindeutige Lösung besitzt.

Da der Spieler im Vergleich zu seiner wahren Bewertung relativ wenig bietet, kann sich das Gebot ex-post als unglücklich erweisen:

Hat der Bieter 1 etwa eine Bewertung von $V_1 = \frac{3}{4}$ und bietet somit im Gleichgewicht $b_1 = \frac{3}{8}$, so ist es möglich, dass er gegen ein Gebot von z.B. $b_2 = 0.4$ verliert und damit einen möglichen Gewinn von 0.35. Obwohl er etwa durch ein Gebot von $b_1 = \frac{1}{2}$ sicherstellen könnte das Objekt zu erhalten (vorausgesetzt sein Kontrahent hält an seiner Gleichgewichtsstrategie fest), hat er jedoch keinen Grund (ex-ante) von seiner eigenen Strategie abzuweichen. Im Gleichgewicht beträgt seine erwartete Auszahlung

$$(V_1 - \frac{V_1}{2}) \cdot V_1 = \frac{V_1^2}{2}$$

Erhöht er sein Gebot (marginal um db), so erhöht er die Wahrscheinlichkeit das Objekt zu erhalten, reduziert aber in den Fällen seine Auszahlung, in denen er auch mit einem geringeren Gebot gewinnt:

$$(V - b) \cdot db - b \cdot db \leq 0$$

Im Beispiel beträgt seine erwartete Auszahlung im Gleichgewicht $\frac{1}{2} \cdot (\frac{3}{4})^2 = 0.28$ während er mit einem Gebot $b = \frac{1}{2}$ nur eine (sichere) Auszahlung von 0.25 erhält.

Der Auktionator hat die erwarteten Erlöse

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot \max\{V_1, V_2\} \, d\max\{V_1, V_2\} \\ &= \int_0^1 \int_{V_1}^1 \frac{1}{2} \cdot V_2 \, dV_2 \, dV_1 = \int_0^1 \frac{1}{2} - \frac{1}{2} V_1^2 \, dV_1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Zweit-Preis-Auktion:

Die Zweit-Preis-Auktion ist im wesentlichen gleich, wie die Erst-Preis-Auktion, jedoch ergibt sich hier der Preis für das Objekt durch das *zweithöchste* Gebot. Der Bieter mit dem höchsten abgegebenen Gebot erhält also das Objekt, bezahlt aber nur das nächsthöchste Gebot.

Man sieht leicht, dass diese Auktionsform jedem Spieler den Anreiz gibt, seine *wahre* Bewertung als Gebot abzugeben. Da er dieses Gebot nicht bezahlt (er bezahlt nur das nächst niedrigere Gebot), ändert sich der Preis für das Objekt nicht, wenn er selbst ein etwas niedrigeres Gebot abgibt. Gibt er dennoch ein Gebot ab, das niedriger ist als sein Reservationspreis, so geht er jedoch das Risiko ein, das Objekt nicht zu erhalten, selbst wenn er es zu dem tatsächlichen Preis hätte erwerben wollen.

Eine Situation wie oben beschrieben kann hier somit im Gleichgewicht nicht auftreten, auch ex post kann sich keiner durch Abgabe eines anderen Gebots besser stellen.
Da jeder seinen wahren Reservationspreis als Gebot abgibt, erhält auch hier der Bieter mit dem höchsten Reservationspreis das Objekt. Der Sieger bezahlt jedoch nur die Bewertung des anderen Bieters für das Objekt, im Mittel ist dies

$$p(V_i) = \frac{\int_0^{V_i} f_j(V) \cdot V \cdot dV}{\int_0^{V_i} f_j(V) \cdot dV} = \frac{\frac{V_i^2}{2}}{V_i} = \frac{V_i}{2}$$

somit genau der Betrag, den ein Bieter in der Erst-Preis-Auktion bietet und im Falle des Zuschlags auch bezahlt.

Aus der Sicht des Auktionators sind die beiden Auktionen somit äquivalent.

Dieses Ergebnis gilt im übrigen für jede Auktionsform, sofern folgende Bedingungen erfüllt sind (Revenue equivalence theorem, Myerson (1981)):

*) Die Bieter sind risikoneutral.
*) Die Bewertungen sind unabhängig und identisch verteilt.
*) Die Teilnahme an der Auktion ist freiwillig.
*) Der Bieter mit der höchsten Bewertung erhält das Objekt.

Dies bedeutet jedoch nicht, dass der Auktionator keine Möglichkeit besitzt, den erwarteten Ertrag zu erhöhen, wie die folgende Auktionsform zeigt:

Betrachte nunmehr eine Zweit-Preis-Auktion mit minimalem Gebot $\underline{b} = \frac{1}{2}$. Der Bieter mit dem höchsten Gebot erhält das Objekt, falls sein Gebot $\geq \frac{1}{2}$ ist, zum Preis des Maximums aus dem zweithöchsten Gebot und $\frac{1}{2}$.

Dies hat zur Folge, dass der Auktionator mit Wahrscheinlichkeit

$$Prob((V_1 < \frac{1}{2}) \wedge (V_2 < \frac{1}{2})) = \frac{1}{4}$$

das Objekt gar nicht absetzen kann. Er verzichtet somit auf einen Teil des Erlöses, um von den Bietern mit höherer Bewertung einen entsprechend höheren Erlös erzielen zu können. Der erwartete Erlös für den Auktionator beträgt nunmehr mindestens

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} > \frac{1}{3} \ .$$

(Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ setzt er das Gut ab und erhält mindestens den Mindestpreis $b = \frac{1}{2}$).

Diese Auktion verletzt jedoch die 4. Bedingung des Revenue-Equivalence-Theorems, da der Fall eintreten kann, dass keiner der Bieter das Objekt erhält.

In gewissem Sinne ist dies derselbe Grund, weshalb man im Verhandlungsspiel mit einer gewissen Ineffizienz rechnen muss, d.h. Tausch findet nicht statt, obwohl er lohnend wäre. Tatsächlich ist das Verhandlungsspiel auch eine Art Auktion, in der nicht nur der Käufer sonder auch der Verkäufer bietet.

Zum Abschluss soll deshalb an dieser Stelle das Verhandlungsspiel mit stetigem Typenraum analysiert werden.

6.4 Doppelte Auktion

Im Verhandlungsspiel mit einem Käufer und einem Verkäufer, welche jeweils verdeckt eine Forderung bzw. ein Gebot abgeben, seien die Bewertungen nunmehr unabhängig gleichverteilt im Intervall [0,1].

Die Strategien für die beiden Spieler werden wie folgt als Funktionen modelliert:

$$\begin{array}{llccc} \text{Käufer:} & \alpha: & [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ & & \text{“Typen”} & & \text{Gebote} \\ & & \text{des Käufers} & & \text{des Käufers} \\ & & V & \longmapsto & v \end{array}$$

$$\begin{array}{llccc} \text{Verkäufer:} & \beta: & [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ & & \text{“Typen”} & & \text{Gebote} \\ & & \text{des Verkäufers} & & \text{des Verkäufers} \\ & & C & \longmapsto & c \end{array}$$

Ein Strategienpaar $(\alpha(V), \beta(C))$, das für jeden Typ von Käufer und Verkäufer eine Verhaltensweise festlegt, legt dann Auszahlungen an die Verhandlungspartner fest, je nachdem, ob die von den gewählten Strategien vorgeschriebenen Gebote zu Tausch führen oder nicht.

Die Gewinnfunktion des Käufers lautet

$$\Pi^{\beta}_{Kf}(V, v) \;=\; \begin{cases} V - \frac{v+\beta(C)}{2} & \text{falls } v \geq \beta(C) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(lies: Die Gewinne des Käufers mit Reservationspreis V bei einem Gebot von v, wenn der Verkäufer der Strategie β folgt.) Die Gewinnfunktion des Verkäufers ist bestimmt zu

$$\Pi^{\alpha}_{Vk}(C, c) \;=\; \begin{cases} \frac{\alpha(V)+c}{2} - C & \text{falls } c \leq \alpha(V) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(lies: Die Gewinne des Verkäufers mit Reservationspreis C bei einem Gebot von c, wenn der Käufer der Strategie α folgt.)

Als Verhaltensmaxime unterstellen wir Maximierung des erwarteten Nutzens aus einem Gebot; d.h. für den Käufer, dass die Lösung des folgenden Problems sein Verhalten beschreibt:

$$\max_{v \in [0,1]} E_N \Pi^{\beta}_{Kf}(V, v) \quad \text{für alle } V \in [0,1] \ ,$$

wobei $E_N \Pi^{\beta}_{Kf} \;=\; \int_0^{\beta^{-1}(v)} \left(V - \frac{v+\beta(C)}{2}\right) h(C)\, dC \qquad (h \text{ Dichte von } N).$

So erhalten wir für jeden Reservationspreis V des Käufers ein optimales Gebot $\alpha(V)$, eine *Strategie* in Reaktion auf das Verkäuferverhalten, das $\beta(C)$ folgt.

Das Verkäuferziel ist beschrieben durch

$$\max_{c \in [0,1]} E_M \Pi^{\alpha}_{Vk}(C, c) \quad \text{für alle } C \qquad \left(\int_{\alpha^{-1}(C)}^{1} \left(\frac{\alpha(V) + c}{2} - C \right) f(V) dV \right)$$

So erhält man die optimale Strategie des Verkäufers in Reaktion auf das Bietverhalten des Käufers nach $\alpha(V)$.

Ein Strategienpaar (α^*, β^*) bildet ein (Bayes*ianisches* Nash-) *Gleichgewicht*, falls für alle $V, C \in [0,1]$ gilt:

(i) $E_N \Pi^{\beta^*}_{Kf}(V, \alpha^*(V)) \;\geq\; E_N \Pi^{\beta^*}_{Kf}(V, v)$ für alle $v \in [0,1]$

(ii) $E_M \Pi^{\alpha^*}_{Vk}(C, \beta^*(C)) \;>\; E_M \Pi^{\alpha^*}_{Vk}(C, c)$ für alle $c \in [0,1]$

Die a priori - Typenverteilung M des Käufers erzeugt – kombiniert mit einer Verhaltenshypothese bzw. Strategie für den Käufer, α – eine Verteilung von zu erwarteten *Geboten*, F, des Käufers relativ zu welcher der Verkäufer sein, den (erwarteten) Nutzen maximierendes, Gebot $\beta(C)$ bei wahrem Reservationspreis C bestimmt. Umgekehrt erzeugt die a priori-Verteilung N der Verkäufertypen, zusammen mit einer Strategie für den Verkäufer β, eine Verteilung von zu erwarteten Geboten des Verkäufers, G, bezüglich der der Käufer sein nutzenmaximierendes Gebot $\alpha(V)$ bei Reservationspreis V bestimmt. Ist die so bestimmte Strategie des Käufers $\alpha(V)$ genau diejenige, die – zusammen mit dem Typenprior M – die vom Verkäufer erwartete Gebotsverteilung F bestimmt, so befinden wir uns in einem (rationalen) Erwartungsgleichgewicht. Kein Käufer- bzw. Verkäufertyp kann von einer alleinigen Abweichung von der Strategie α bzw. β profitieren.

$$\begin{tikzcd}
 & & \alpha(V) \arrow[dl] & & \\
M \arrow[r] & F \arrow[dr, "\max!"] & & G \arrow[ul, "\max!"'] & N \arrow[l] \\
 & & \beta(C) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Schreiben wir die Gewinnfunktion der beiden potentiellen Tauschpartner in Abhängigkeit der Gebotsverteilungen F und G, so erhalten wir folgende Ausdrücke:

Käufer: $\max_{v \in [0,1]} \int_0^v \left(V - \frac{v+c}{2}\right) dG(c)$

Verkäufer: $\max_{c \in [0,1]} \int_c^1 \left(\frac{v+c}{2} - C\right) dF(v)$

Ableitung der notwendigen Bedingung 1. Ordnung für den Käufer:

Es gilt: $\int_0^v \left(V - \frac{v+c}{2}\right) dG(c)$

$$= \int_0^v \left(V - \frac{v+c}{2}\right) \cdot G'(c)dc$$

$$= \int_0^v \left(V - \frac{v}{2}\right) \cdot G'(c)dc - \int_0^v \frac{c}{2} \cdot G'(c)dc$$

$$= \left[\left(V - \frac{v}{2}\right) \cdot G(c)\right]_0^v - \left[\frac{c}{2} \cdot G(c)\right]_0^v + \int_0^v G(c) \cdot \frac{1}{2}dc$$

$$= \left(V - \frac{v}{2}\right) \cdot G(v) - \frac{v}{2} \cdot G(v) + \int_0^v G(c) \cdot \frac{1}{2}dc$$

Dies wird nun nach v abgeleitet und $= 0$ gesetzt:

$$\begin{aligned} \left(V - \tfrac{v}{2}\right) \cdot G'(v) - \tfrac{1}{2} \cdot G(v) - \tfrac{1}{2} \cdot G(v) - \tfrac{v}{2} \cdot G'(V) + \tfrac{1}{2} \cdot G(v) &= 0 \\ V \cdot G'(v) &= v \cdot G'(v) + \tfrac{1}{2} \cdot G(v) \\ V &= v + \tfrac{1}{2}\tfrac{G(v)}{G'(v)} \end{aligned}$$

Analoge Ableitungen für den Verkäufer ergeben die notwendigen Gleichgewichtsbedingungen:

$$\boxed{V = v + \tfrac{1}{2}\tfrac{G(v)}{G'(v)} \quad \text{und} \quad C = c - \tfrac{1}{2}\tfrac{(1-F(c))}{F'(c)}}$$

Daraus können wir bereits eine wichtige Schlußfolgerung über die Beziehung von Gebot v bzw. c zu dem (wahren) Reservationspreis V bzw. C in einem Gleichgewicht ablesen:

Das Gebot v des Käufers ist um den (positiven) Betrag $\frac{1}{2}\frac{G(v)}{G'(v)}$ kleiner *als sein Reservationspreis V*

und

das Gebot c des Verkäufers ist um den (positiven) Betrag $\frac{1}{2}\frac{(1-F(c))}{F'(c)}$ größer *als der Reservationspreis C.*

Diese Aussage gilt unabhängig von der genauen Form der Verteilungen G und F. Die Verhandlungspartner offenbaren also *nicht* ihre wahren Reservationspreise, der Käufer "untertreibt", der Verkäufer "übertreibt". Sie nehmen also eine Erhöhung der Wahrscheinlichkeit von Nicht-Tausch im Falle von $v < c$ in Kauf!

Obige Gleichgewichts-Bedingungen stellen Forderungen an die Verteilungen der Gebote im Gleichgewicht dar. Sie sind äquivalent zu folgenden Forderungen an die *Strategien*, die sie erzeugen:

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha^{-1}(v) &= v + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{N(\beta^{-1}(v))}{N'(\beta^{-1}(v))\cdot(\beta^{-1})'(v)} \qquad \text{und} \\ \beta^{-1}(c) &= c - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1-M(\alpha^{-1}(c))}{M'(\alpha^{-1}(c))\cdot(\alpha^{-1})'(c)} \end{aligned}}$$

Wir haben dabei benutzt, dass

$$G(v) = \text{Prob}(\beta(C) < v) = \text{Prob}(C < \beta^{-1}(v)) = N(\beta^{-1}(v))$$

$$F(c) = \text{Prob}(\alpha(V) \leq c) = \text{Prob}(V \leq \alpha^{-1}(c)) = M(\alpha^{-1}(c))$$

und – trivialerweise – $V = \alpha^{-1}(v)$ und $C = \beta^{-1}(c)$.

Um dem Problem etwas mehr Struktur zu geben und damit zu besseren Aussagen über die Bestimmungsgründe dieses Verhaltens zu gelangen, wird im Folgenden der Fall, dass sowohl M, die a-priori-Typenverteilung für den Käufer, als auch N, die a-priori-Typenverteilung für den Verkäufer, Gleichverteilungen sind, betrachtet.

Sei also M Gleichverteilung auf $[0,1]$ und N Gleichverteilung auf $[0,1]$.

Für die Gleichverteilung von M und N gilt nun:

$$F(\alpha(x)) = \text{Prob}\,(\alpha(V) \leq \alpha(x)) = \text{Prob}\,(V \leq x) = x$$

d.h. $F = \alpha^{-1}$ und analog: $G = \beta^{-1}$

Die Gleichgewichts-Bedingungen werden nun zu Bedingungen an (Inverse von) *Strategien*:

$$\boxed{\alpha^{-1}(v) = v + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{\beta^{-1}(v)}{(\beta^{-1})'(v)} \quad \text{und} \quad \beta^{-1}(c) = c - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{(1-\alpha^{-1}(c))}{(\alpha^{-1})'(c)}}$$

Lösungsversuch mit α^{-1} und β^{-1} *linear* und gleicher Steigung; d.h. $\alpha^{-1}(v) = a \cdot v + b_1$ und $\beta^{-1}(c) = a \cdot c + b_2$ führt zu eindeutiger Lösung

$$F = \alpha^{-1}(v) = \frac{3}{2} \cdot v - \frac{1}{8} \quad \text{und} \quad G = \beta^{-1}(c) = \frac{3}{2} \cdot c - \frac{3}{8}$$

bzw. zu den *Gleichgewichtsstrategien* (Invertieren !)

$$\boxed{v = \alpha(V) = \tfrac{2}{3} \cdot V + \tfrac{1}{12} \qquad \text{und} \qquad c = \beta(C) = \tfrac{2}{3} \cdot C + \tfrac{1}{4}}$$

klar:

$$v \geq c \iff \frac{2}{3}V + \frac{1}{12} \geq \frac{2}{3}C + \frac{1}{4} \iff V \geq C + \frac{1}{4}$$

Dies heißt nun aber, dass die Gleichgewichtsstrategien genauer lauten müssen:

$$\alpha(V) = \begin{cases} V & 0 \leq V \leq \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3}V + \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \leq V \leq 1 \end{cases}$$

$$\beta(C) = \begin{cases} \frac{2}{3}C + \frac{1}{4} & 0 \leq C \leq \frac{3}{4} \\ C & \frac{3}{4} \leq C \leq 1 \end{cases}$$

Nur unter der Bedingung von Tausch stellen die Lösungen der Differentialgleichung auch Gleichgewichte dar; Käufer mit $V < \frac{1}{4}$ oder Verkäufer mit $C > \frac{3}{4}$ können jedoch nicht tauschen.

D.h. im Gleichgewicht liegt Ineffizienz vor:

Getauscht werden *sollte*, wenn immer $V \geq C$.

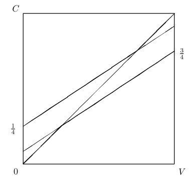
Getauscht *wird* aber nur, wenn immer $V \geq C + \frac{1}{4}$.

Beispiel: $V = \frac{1}{2}$, $C = \frac{3}{8}$

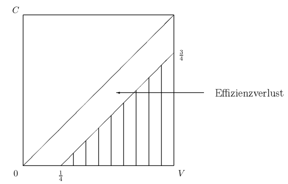
$$\alpha(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12} < \frac{1}{2} \qquad \beta(\frac{3}{8}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Die Gebote sind *nicht* kompatibel, obwohl der Käufer eine höhere wahre Bewertung für die Ware hat als der Verkäufer.

Gleichgewichts-Strategien:



Symmetrie: $\alpha(V) = 1 - \beta(1 - V)$; d.h. der Verkäufer mit Reservationspreis C lässt sein Gebot um genausoviel nach *oben* abweichen, wie der Käufer mit Reservationspreis $V = 1 - C$ nach *unten*. Diese Strategien führen zu folgender Tauschzone:



Man sieht, dass genau solche realen Tauschmöglichkeiten im Gleichgewicht nicht realisiert werden, die "nahe" der 45°-Linie liegen. Das sind jedoch gerade diejenigen, bei denen der potentielle Tauschgewinn ('gains from trade') $V - C$ *gering* ist, da sich die wahren Reservationspreise nicht wesentlich unterscheiden. Es stellt sich somit die Frage, ob es nicht, wie etwa bei der Zweit-Preis-Auktion, einen Mechanismus gibt, der beiden (Käufer und Verkäufer) dazu bewegt, die wahre Bewertung zu offenbaren. Tatsächlich sagt das "Offenbarungsprinzip" (Myerson 1979), dass *jedes* Bayesianische-Nash-Gleichgewicht durch einen "*Anreizverträglichen Mechanismus*" implementiert werden kann, in welchem die Spieler ihren wahren Typ (freiwillig) offenbaren.

Dies führt jedoch nicht notwendigerweise dazu, dass obige Ineffizienz vermieden werden kann, da "Freiwilligkeit" gewisse Anreize erfordert, welche unter Umständen mit Ineffizienz erkauft werden kann

Genau dies begründet auch eine Effizienzeigenschaft obigen Gleichgewichtes: obwohl es – wie gesehen – ineffizient im Vergleich zur 'first-best'-Lösung (tausche, falls $V \geq C$) ist, ist es effizient als second-best-Lösung. Aufgrund der Informationsstruktur ist die 'first-best'-Lösung nicht implementierbar (nicht nur nicht mit diesem Verhandlungsverfahren, in dem 'die Wahrheit sagen', also $(\alpha(V), \beta(C)) = (V, C)$, *kein* Gleichgewicht bildet). Ein tiefgehender Struktursatz von Myerson und Satterthwaite (1983) besagt, dass obiges Gleichgewicht der betrachteten Verhandlungsprozedur – unter der gegebenen Informationsstruktur – das bestmögliche Ergebnis darstellt bzw. auch verfahrensmäßig implementiert. Das von dieser Verhandlungsprozedur ausgelöste *strategische* Verhalten der Bieter ist gerade so, dass die "wirklich lohnenden" Tauschmöglichkeiten realisiert werden und nur das Scheitern weniger lohnender aus strategischen Gründen in Kauf genommen wird.

Kapitel 7

Evolutionäre Spieltheorie

7.1 Motivation

Wir nähern uns nun dem Konzept des Nash-Gleichgewichts von einer völlig anderen Seite, die zudem ohne jede Rationalitäts- oder "common-knowledge" Annahme an die Spieler auskommt. Entscheidend für die neue Sichtweise sind nicht individuelle Spieler, sondern (große) Populationen von individuellen Spielern:

Eine archetypische Konfliktsituation aus der Biologie führt auf folgendes "Hawk-Dove"-Spiel zwischen zwei Vertretern ein und derselben Spezies oder Art:

		Vertreter 2: D	Vertreter 2: H	
Vertreter 1	D	$\frac{1}{2}V, \quad \frac{1}{2}V$	$0, \quad V$	"Streitwert": V
	H	$V, \quad 0$	$\frac{1}{2}V \quad c, \quad \frac{1}{2}V \quad c$	für beide Spieler

Zwei Vertreter einer Spezies streiten sich um eine Ressource mit Wert (in der Biologie: Fitness-Zugewinn) V; z.B. ein "Revier". Beide haben beim Aufeinandertreffen die Möglichkeit, Kampfbereitschaft zu zeigen (H $\widehat{=}$ hawk) oder friedfertig zu sein (D $\widehat{=}$ dove). Sind beide friedfertig, teilen sie sich das Revier, ist einer friedfertig und einer kampflustig, gewinnt der Kampflustige das Revier *kampflos*; sind beide kampfbereit, so kommt es zum Kampf, in dem die Verletzungsgefahr sogar zu einem Verlust (an

Fitness) führen kann (in Höhe von $c > 0$).

Falls $\frac{1}{2} \cdot V - c > 0$: Gefangenen-Dilemma

Bsp.: $c = \frac{1}{3}V$

	D	H
D	$\frac{1}{2}V, \quad \frac{1}{2}V$	$0, \quad V$
H	$V, \quad 0$	$\frac{1}{6}V, \quad \frac{1}{6}V$

Falls $\frac{1}{2} \cdot V - c < 0$: "chicken" oder "Feigling"

z.B.: $c = V$

	D	H
D	$\frac{1}{2}V, \quad \frac{1}{2}V$	$0, \quad V$
H	$V, \quad 0$	$-\frac{1}{2}V, \quad -\frac{1}{2}V$

Diese Situation wird nun – ohne jede Rationalitätsannahme – wie folgt analysiert:

– *Strategien* stehen nun nicht einem *Spieler*, sondern der ganzen *Spezies* zur Verfügung. Jeder Vertreter/Repräsentant der Spezies erbt genau eine Strategie, die er immer spielt. Verschiedene Repräsentanten können verschiedene Strategien geerbt haben.

– Die *Interaktion* im evolutionären Spiel basierend auf dem Grundspiel besteht nunmehr aus wiederholtem *zufälligen* Paaren von Vertretern der Spezies, die ihre ererbten Strategien gegeneinander spielen.

– An Stelle des Nash-Gleichgewichts tritt der Begriff der *evolutionär stabilen Strategie* (ESS). Eine Strategie ist evolutionär stabil, falls eine ganze Population von Individuen, die sie benutzt, nicht von einer kleinen Gruppe von "Mutanten", Individuen, die eine *andere* Strategie benutzen, erfolgreich invadiert werden kann.

7.2 Evolutionär stabile Strategien

Annahme: Die ererbte Strategie eines Individuums kann eine gemischte Strategie sein.

Sei $S_1 = S_2 = \{s_1, \ldots, s_n\}$ und $Q_1 = Q_2 = Q$ der zugehörige Raum gemischter Strategien. Es gelte ferner, dass $\pi_1(p,q) = \pi_2(q,p)$ für alle $p, q \in Q$. D.h. das Spiel ist *symmetrisch* und es genügt somit die Auszahlungsmatrix *eines* Spielers zu betrachten. Diese sei A für Spieler 1.

$$\pi_1(p,q) = p \cdot A \cdot q \qquad \text{und} \qquad \pi_2(p,q) = p \cdot B \cdot q$$

Symmetrie: $A = B'$ bzw. $B = A'$, wobei A' die transponierte Matrix von A sei.

Bsp.: Hawk-Dove

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}V & 0 \\ V & \frac{1}{2}V - c \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}V & V \\ 0 & \frac{1}{2}V - c \end{pmatrix}$$

Man betrachte nun eine große Population. Jedes Individuum der Population sei vom Typ i für ein $s_i \in S$. Sei p_j der Anteil von Typ s_j und der Zustand der Population durch $(p_1, \ldots, p_n)$ gegeben.
Die durchschnittlich erwartete Auszahlung eines zufällig betrachteten Individuums ist dann

$$\pi_1(p,p) = \pi_2(p,p) = p \cdot A \cdot p$$

(da $\pi_1(s_i, p) = (A \cdot p)_i$ und somit gemittelt über s_i wie oben.)

Dringt eine kleine Gruppe von Mutanten j in die gegebene Population ein und ersetzt sie zum Anteil $\varepsilon > 0$, dann ist der neue Zustand der Population gegeben durch

$$(1-\varepsilon) \cdot (p_1, \ldots, p_n) + \varepsilon \cdot s_j$$

Die Auszahlung eines zufällig betrachteten Mutanten ist dann im Mittel

$$(1-\varepsilon) \cdot \pi_1(s_j, p) + \varepsilon \cdot \pi_1(s_j, s_j)$$

wohingegen die Auszahlung eines Nicht-Mutanten

$$(1-\varepsilon) \cdot \pi_1(p,p) + \varepsilon \cdot \pi_1(p, s_j)$$

beträgt.

Der Mutant kann die gegebene Population *invadieren*, falls für genügend kleines ε gilt:

$$(1-\varepsilon) \cdot \pi_1(s_j, p) + \varepsilon \cdot \pi_1(s_j, s_j) \geq (1-\varepsilon) \cdot \pi_1(p,p) + \varepsilon \cdot \pi_1(p, s_j)$$

Definition: *Eine (möglicherweise gemischte) Strategie p heißt* evolutionär stabil, *wenn für alle $q \neq p$ und alle $\varepsilon > 0$ genügend klein gilt:*

$$(1-\varepsilon)\cdot\pi_1(p,p)+\varepsilon\cdot\pi_1(p,q) > (1-\varepsilon)\cdot\pi_1(q,p)+\varepsilon\cdot\pi_1(q,q)$$

d.h. eine evolutionär stabile Strategie kann von keiner anderen Strategie invadiert werden.

Eine evolutionär stabile Strategie lässt zwei Interpretationen zu:

– die einer *monomorphen* Population von Individuen, die alle dieselbe gemischte Strategie spielen (zwingend im Falle, dass p eine reine Strategie ist) und

– die einer *polymorphen* Population, in der der Anteil von Typ j gerade durch den Anteil von s_j in der gemischten Strategie p gegeben ist.

Von entscheidender Bedeutung ist nun folgende Beobachtung:

Lemma: Eine Strategie p ist genau dann evolutionär stabil, wenn gilt

i) $\pi_1(p,p) \geq \pi_1(q,p)$ für alle q

ii) Falls $\pi_1(p,p) = \pi_1(q,p)$, dann gilt

$$\pi_1(p,q) > \pi_1(q,q)$$

Beweis:

$\Longrightarrow$: Sei p evolutionär stabil, d.h.

(S) $(1-\varepsilon)\cdot\pi_1(p,p)+\varepsilon\cdot\pi_1(p,q) > (1-\varepsilon)\cdot\pi_1(q,p)+\varepsilon\cdot\pi_1(q,q)$

$\varepsilon \to 0$: $\pi_1(p,p) \geq \pi_1(q,p)$ für beliebiges q $\Rightarrow$ i)

Sei $\pi_1(p,p) = \pi_1(q,p)$. Einsetzen in Stabilitätsbedingung (S) ergibt

$(1-\varepsilon)\cdot\pi_1(p,p)+\varepsilon\cdot\pi_1(p,q) > (1-\varepsilon)\cdot\pi_1(p,p)+\varepsilon\cdot\pi_1(q,q)$

$\Longleftrightarrow$ $\pi_1(p,q) > \pi_1(q,q)$ $\Rightarrow$ ii)

$\Longleftarrow$: Sei i) erfüllt, d.h. $\pi_1(p,p) \geq \pi_1(q,p)$ für alle q. Sei q beliebig.

Fall 1: $\pi_1(p,p) > \pi_1(q,p)$. Dann gilt in (S) für $\varepsilon \to 0$
$LS \approx \pi_1(p,p)$ und $RS \approx \pi_1(q,p)$ und daher die behauptete Ungleichung für ε genügend klein.

Fall 2: $\pi_1(p,p) = \pi_1(q,p)$. Nun folgt (S) *direkt* von ii), da die jeweils ersten Therme auf beiden Seiten gleich sind.

i) besagt, dass p beste Antwort auf sich selbst ist (für Spieler 1). Da in einem symmetrischen Spiel p dann aber auch beste Antwort auf sich selbst für Spieler 2 sein muss, heißt dies:

Korollar: Jede evolutionär stabile Strategie ist ein Nash-Gleichgewicht!

(Bemerkung: In einem symmetrischen Spiel gilt $\pi_2(q,p) = \pi_1(p,q)$ und daher folgt aus $\pi_1(p,p) \geq \pi_1(q,p)$, dass $\pi_2(p,p) \geq \pi_2(p,q)$ und damit, dass p beste Antwort für Spieler 2 auf p ist.)

ii) besagt, dass falls es eine weitere beste Antwort auf p gibt (p als beste Antwort auf p also nicht eindeutig ist), so muss p gegen den Mutanten besser abschneiden als der "Mutant" q gegen sich selbst.

Das Konzept der evolutionär stabilen Strategie (ESS) liefert also eine *Verfeinerung* des Nash-Gleichgewichtsbegriffes.

Bsp.: i) Nicht jedes NGG ist evolutionär stabil:

	a	b
a	*2, 2*	*1, 2*
b	*2, 1*	*2, 2*

Z.B. im Stadion: a =Sitzen, b =Stehen

(a,a) ist nicht ESS, (b,b) ist ESS.

Grund: (b,b) ist striktes GG, (a,a) nicht (obwohl selbe Auszahlung).

Auf a gibt es zwei beste Antworten a und b, auf b gibt es nur eine beste Antwort (und daher kann Fall ii) des Lemmas gar nicht auftreten!). a ist nun aber *schlechter* gegen b als b gegen sich selbst und daher verletzt (a,a) Bedingung ii) des Lemmas.

ii) Es kann mehr als eine evolutionär stabile Strategie geben:

	a	b
a	*2, 2*	*0, 0*
b	*0, 0*	*2, 2*

(a,a) und (b,b) sind evolutionär stabil, da *beide* strikte Gleichgewichte sind.

Das Gleichgewicht in gemischten Strategien $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ist *nicht* evolutionär stabil.

Es kann sowohl von a als auch von b invadiert werden, da a (resp. b) auf p jeweils bessere Antwort ist als p. Bedingung ii) wird also verletzt. Bedingung i) ist erfüllt aufgrund des Fundamentallemmas.

"Hawk-Dove"-Spiele:

Falls $\frac{1}{2}V - c > 0$ gilt im Gefangenen-Dilemma natürlich, dass das einzige (strikte) Gleichgewicht (H,H) evolutionär stabil ist.

Falls $\frac{1}{2}V - c < 0$ ist die einzige evolutionär stabile Strategie durch das N-GG in gemischten Strategien gegeben, da sowohl eine reine D-Population von H's invadiert werden kann als auch ein reine H-Population von D's.

Falls nur H's in der Population vorhanden sind, erzielt ein H die Auszahlung $\frac{1}{2}V - c < 0$, ein einzelner Mutierter D, der nur auf H's trifft, erzielt aber 0. Das ist besser. Für kleine ε gilt somit

$$(1-\varepsilon)\cdot(\frac{1}{2}V - c) + \varepsilon\cdot V < (1-\varepsilon)\cdot 0 + \varepsilon\cdot\frac{1}{2}V$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{2}V - (1-\varepsilon)\cdot c < 0 \quad \Longleftrightarrow \varepsilon < 1 - \frac{V}{2c} = \frac{2c - V}{2c} > 0$$

Analog gilt, falls nur D's in der Population vorhanden sind, dass ein D Auszahlung $\frac{1}{2}V$ realisiert. Ein einzelner Mutierter H, der nur auf D's trifft, erzielt aber V. Das ist besser. Für kleine ε gilt somit

$$\begin{aligned} (1-\varepsilon)\cdot\tfrac{1}{2}V + \varepsilon\cdot 0 &< (1-\varepsilon)\cdot V + \varepsilon\cdot(\tfrac{1}{2}\cdot V - c) \\ \Leftrightarrow \quad 0 &< \tfrac{1}{2}(1-\varepsilon)\cdot V + \varepsilon\cdot(\tfrac{1}{2}\cdot V - c) \\ &= \tfrac{1}{2}V - \varepsilon\cdot c \qquad \text{für } \varepsilon < 1 \text{ falsch} \\ &\Leftrightarrow \varepsilon < \tfrac{V}{2c} \end{aligned}$$

Polymorphe Populationen können also nicht evolutionär stabil sein.

Fazit: Evolutionäre Stabilität ist – wie das Nash-Gleichgewichtskonzept – ein *statisch* formuliertes Kriterium. Es sagt allerdings etwas über *dynamische* Eigenschaften eines Systemes aus ohne eine Dynamik spezifizieren zu müssen. Dies ist zugleich ein großer Vorteil wie auch ein großer Mangel. Die genauere Beziehung zwischen

dynamischem System und evolutionär stabilem Ruhepunkt desselben sind allgemein nicht offensichtlich. Für eine besondere Klasse von Dynamik, sog. aggregiert monotone Dynamiken ist sie allerdings weitgehend ermittelt.

Es gilt:

Satz: Für $n = 2$ besitzt jedes endliche symmetrische Spiel zumindest eine evolutionär stabile Strategie.
Für $n > 2$ muss nicht jedes endliche symmetrische Spiel eine ESS besitzen.

Beispiel:

		Spieler 2		
		a	b	c
Spieler 1	a	ε, ε	*1, -1*	*-1, 1*
	b	*-1, 1*	ε, ε	*1, -1*
	c	*1, -1*	*-1, 1*	ε, ε

$\underline{\varepsilon = 0}$: Stein, Schere, Papier

d.h. $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & -1 \\ -1 & \varepsilon & 1 \\ 1 & -1 & \varepsilon \end{pmatrix}$ $\qquad A' = \begin{pmatrix} \varepsilon & -1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & -1 \\ -1 & 1 & \varepsilon \end{pmatrix}$

Es gibt nur ein Gleichgewicht, nämlich $p = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Dieses ist aber für $0 < \varepsilon < 1$ nicht evolutionär stabil:

Aufgrund des Fundamental-Lemmas ist z.B. a beste Antwort auf p. Bedingung ii) des Lemmas würde dann verlangen, dass $\pi_1(p,a) > \pi_1(a,a)$. Es gilt aber

$$\pi_1(p,a) = \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\varepsilon < \varepsilon = \pi_1(a,a)$$

a kann also invadieren. Aus Symmetriegründen ebenso b und c.

Diese Nichtverallgemeinerbarkeit des Satzes auf $n > 2$ zwingt uns in manchen Situationen tatsächlich die Dynamik des evolutionären Prozesses zu modellieren.

Asymmetrische Spiele:
In asymmetrischen Spielen gilt nicht mehr, dass $\pi_1(p,q) = \pi_2(q,p)$ ist; d.h. die Positionen der beiden Spieler sind nicht mehr austauschbar.
Somit gibt es zwei unterscheidbare Gruppen oder Populationen von Spielern, die jetzt jeweils nur mit Vertretern der *anderen* Gruppe zufällig gepaart werden. (Männlein/Weiblein, Jäger/Gejagter, Boss/Arbeiter, Inhaber/Eindringling).
Diese asymmetrische Situation kann jetzt als symmetrische reinterpretiert werden, wenn wir uns eine hypothetische homogene Spielermenge vorstellen, der mit der zufälligen Paarung auch die zufällige Rollenverteilung "zugelost" wird. Eine evolutionär stabile Strategie in dieser "symmetrisierten" Version des Spieles ist dann wiederum eine Strategie $V = (p,q)$, wobei p die Strategie eines Individuums für den Fall, dass es Zeilenspieler geworden ist, darstellt, und q diejenige für die Rolle als Spaltenspieler, die nicht invadiert werden kann. "Invadieren" ist nun anders zu verstehen. Eindringlinge müssen vom selben Typ, Zeilen- oder Spaltenspieler, sein wie die bestehende Bevölkerung. Zusätzliche Spaltenspieler sehen sich also derselben unveränderten Population von Zeilenspielern gegenüber, nur ihre eigene Population hat sich verändert (mit der sie allerdings nie interagieren). D.h. die Stabilitätsbedingung ii) des Lemmas entfällt, da ein Mutant nie auf sich selbst trifft. Es verbleiben die beiden Bedingungen

$$\begin{aligned} \pi_1(p,q) &> \pi_1(p',q) && \text{für alle } p' \neq p \quad \text{und} \\ \pi_2(p,q) &> \pi_2(p,q') && \text{für alle } q' \neq q. \end{aligned}$$

Nun gilt:

Satz (Selten, 1980): *Eine evolutionär stabile Strategie in (der symmetrisierten Form von) einem asymmetrischen evolutionären Spiel muss ein striktes Nash-Gleichgewicht sein.*

Implikation: Gemischte Strategien in asymmetrischen Spielen können nicht evolutionär stabil sein.

Beweis:
Angenommen $v = (p,q)$ sei ein Nash-Gleichgewicht der symmetrisierten Version und p

sei echt gemischte Strategie. Sei s_1 in der Mischung von p vertreten.
Ein "Mutant" $(s_1, q) = v'$ würde genauso gut abschneiden, da s_1 auch beste Antwort gegen q; d.h. v' ist gegen v ebenso gut wie v gegen sich selbst. Andersherum ist aber auch v' gegen v' genauso gut wie v gegen v'.
Grund: s_1 gegen q ist genauso gut wie p gegen q. Es besteht keinerlei Konkurrenz zwischen den beiden.

7.3 Dynamiken

Der dynamische Anpassungsprozess von Verhalten in großen Populationen soll nun modelliert werden. Grundlegend dafür ist der Begriff des *Replikators*, ein nicht weiter zu spezifizierender Mechanismus, der die Fähigkeit hat sich selbst zu reproduzieren. Dies kann z.B. ein Gen, ein Organismus, eine Tradition, eine institutionelle oder kulturelle Verhaltensform oder – allgemein – eine Strategie in einem Spiel sein. Ist eine Interaktionsstruktur – wie z.B. zufälliges Paaren – zwischen Populationsmitgliedern vorgegeben, so "kämpfen" die Replikatoren um ihre Verbreitung in der Population; "erfolgreiche" Replikatoren werden sich dabei häufiger reproduzieren und verbreiten als weniger erfolgreiche, die vielleicht sogar ganz "aussterben" können.

Bei n Strategien $\{s_1, \ldots, s_n\}$ sei $p_i(t)$ der Anteil der Population zum Zeitpunkt t, der Strategie s_i geerbt hat und spielt.

$$p(t) = (p_1(t), \ldots, p_n(t)), \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Die Änderung der Bevölkerungsanteile p_i, die jeweils s_i spielen, ändere sich nach

$$\dot{p}_i(t) = G_i(p(t)).$$

Die Funktion G charakterisiert also die Dynamik. Klar, es gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{p}_i(t) = 0 = \sum_{i=1}^{n} G_i(p(t)).$$

Weisen alle Individuen identisches Anpassungsverhalten auf, so werden die Veränderungsraten proportional zum jeweiligen gegebenen Bevölkerungsanteil sein.

$$\dot{p} = p_i \cdot g(p)$$

Ist es z.B. Ziel eines Individuums eine möglichst hohe Auszahlung (fitness) zu erzielen, unterstellen wir, dass g monoton in den Auszahlungen sei: eine erfolgreichere Strategie

wird häufiger gewählt werden und daher schneller in der Population wachsen. (Das Individuum kann seine Entscheidung nur an beobachteten Auszahlungen orientieren, es weiß nichts über Absichten oder Rationalität der anderen.)

Definition: *Für ein symmetrisches 2-Personenspiel mit Auszahlungsmarix A (für Spieler 1) heißt eine* Anpasssungsregel *g monoton, falls*

$$g_i(p) > g_j(p) \Longleftrightarrow (A \cdot p)_i > (A \cdot p)_j$$

Klar: Dominiert s_i bspw. s_j srikt, so wird für jedes p gelten $(Ap)_i > (Ap)_j$; d.h. der Anteil von s_i wird ständig wachsen und der von j muss letztendlich (auf Null) sinken. Eine dominierte Strategie wird also von einer monotonen Dynamik eliminiert.

Eine Verallgemeinerung solcher Dynamiken auf heterogene Populationen führt zum Begriff der aggregiert monotonen Anpassungsregel:

g heißt aggregiert monoton, falls

$$q \cdot A \cdot p > z \cdot A \cdot p \Longleftrightarrow q \cdot g(p) > z \cdot g(p)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

durchschnittliche Auszahlung von Population q	durchschnittliche Veränderungsrate von Population q

Jede solche Dynamik hat die Darstellung

$$g_i(p) = \lambda(p)((A \cdot p)_i - p \cdot A \cdot p)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

Auszahlung für i-Gruppe	durchschnittliche Auszahlung über alle Gruppen

Die sog. Replikator-Dynamik resultiert für $\lambda(p) \equiv 1$.

In einem evolutionären Spiel mit n Strategien gilt dann im Zustand $p = (p_1, \ldots, p_n)$ der Population

$$\begin{aligned} \pi_i(p) = \sum_{j=1}^{n} pj \cdot a_{ij} \quad \text{und} \quad \bar{\pi}(p) &= \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \pi_i(p) \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot a_{ij} \end{aligned}$$

also gilt:

$$\dot{p}_i = p_i(\pi_i(p) - \bar{\pi}(p))$$

An wichtigen Aussagen kann man nun beweisen:

1. Jedes Nash-GG des Spieles A ist ein Fixpunkt der Replikator-Dynamik; d.h. ein Zustand für den $\dot{p}_i \equiv 0$ für alle i.
   (Aber nicht jeder Fixpunkt ist Nash-GG, z.B. eine Population, die einheitlich *eine* Strategie spielt, ist Fixpunkt, diese Strategie muss aber kein GG sein.)

2. Ist p eine evolutionär stabile Strategie (ESS), so ist p auch 'asymptotisch stabil' bezgl. der Dynamik. Die Verfeinerung, die eine ESS über ein Nash-Gleichgewicht hinaus darstellt, äußert sich also in der Stabilitätseigenschaft.

3. Ist p eine vollständig gemischte evolutionär stabile Strategie, so ist p sogar 'global stabil'.
   (Wiederum muss ein stabiles GG bezgl.der Dynamik nicht evolutionär stabil sein.)

Literatur

Kapitel 1:

- OSBORNE, [1976], "Cartel Problems", *American Economic Review*, 66.
- VON NEUMANN, JOHN [1928], "Zur Theorie der Gesellschaftsspiele", *Mathematische Annalen*, 100, S.295-320.
- VON NEUMANN, JOHN und OSKAR MORGENSTERN [1944], *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton: Princeton University Press.

Kapitel 2:

- BERTRAND, J. 1883], "Théorie mathematique de la richesse sociale", *Journal des Savantes*, S.499-508.
- BROUWER, L.E.J. [1910], "Über eindeutige, stetige Transformationen von Flächen in Sich", *Mathematische Annalen*, 67, S.176-180.
- COURNOT, AUGUSTIN [1938], *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses*, Paris: Hachette.
- DEBREU, G [1952], "A Social Equilibrium Existence Theorem", *Proceedings of the National Academy of Science*, 38, S.886-893.
- GLICKSBERG [1952], „A Further Generalization of the Katutani Fixed Point Theorem with Application to Nash Equilibrium Points", *Proceedings of the American Mathematical Society*, 3, S.170-174.
- HARSANYI, J. [1973], "Games with randomly distributed pay-offs: A new rationale for mixed strategy Equilibrium Points", *International Journal of Game Theory*, 2, S.1-23.

- KAKUTANI, SHIZUO [1941], "A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem", *Duke Mathematical Journal*, 8, S.457-459.
- NASH, JOHN F. [1950], "The Bargaining Problem", *Econometrica*, 18, S.155-162.
- NASH, JOHN F. [1951], "Non-Cooperative Games", *Annals of Mathematics*, 54, S.286-295.
- WILSON, R. [1971], "Computing Equilibria of n-Person Games", *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 21, S.80-87.

Kapitel 3:

- KUHN, HAROLD W. [1953], "Extensive Games and the Problem of Information", in W. Kuhn and A.W. Tucker, eds., *Contributions to the Theory of Games*, Vol. 2, Princeton: Princeton University Press.

Kapitel 4:

- SELTEN, REINHARD [1978], "The Chain Store Paradox", *Theory and Decision*, 9, S.127-159.
- ZERMELO, E. [1913], "Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels", *Proceedings Fifth International Congress of Mathematicians*, 2, S.501-504.

Kapitel 5:

- BENOIT, JEAN-PIERRE und VIJAY KRISHNA [1985], "Finitely Repeated Games", *Econometrica*, 53, S.905-922.
- FUDENBERG, DREW und MASKIN, ERIC [1986], "The folk theorem in repeated games with discounting or with incomplete information", *Econometrica*, 54, S.533-556.

Kapitel 6:

- HARSANYI, J. [1967], "Games with Incomplete Information Played by 'Baysian' Players, Part I: The Basic Model", *Management Science*, 14, S.159-182.
- HARSANYI, J. [1968a], "Games with Incomplete Information Played by 'Baysian' Players, Part II: The Basic Model", *Management Science*, 14, S.320-334.
- HARSANYI, J. [1968b], "Games with Incomplete Information Played by 'Baysian' Players, Part III: The Basic Model", *Management Science*, 14, S.486-502.
- MYERSON, R. und M. SATTERTHWAITE [1983], "Efficient mechanisms for bilateral trading", *Journal of Economic Theory*, 28, S.265-281.
- LEININGER, W., LINHART, P. und R. RADNER [1989], "Equilibria of the Sealed-Bid Mechanism for Bargaining with Incomplete Information", *Journal of Economic Theory*, 48, S.63-106.

Weiterführende Lehrbücher:

- FRIEDMAN, J. [1990], *Game Theory with Applications to Economics*, 2nd edition, MIT Press.
- FUDENBERG, D. und J. TIROLE [1991], *Game Theory*, MIT Press.
- RASMUSEN, E. [1989], *Games and Information*, Blackwell.

Für ökonomisch interessierte Anwender:

- KREPS, D. [1990], *Game Theory and Economic Modelling*, Oxford University Press.