

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
“САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИТМО”

ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

**Лабораторная работа №2:**  
**«Переходные процессы,**  
**свободное движение, устойчивость»**  
по дисциплине Теория автоматического управления

Вариант №17

Выполнил: Студент группы  
R33362 Осинина Т. С  
Преподаватель: Перегудин А.А.

## Задание №1. Свободное движение.

Дана система 2-го порядка, представленная в форме Вход-Выход

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = u.$$

Самостоятельно придумайте семь наборов  $(\lambda_1, \lambda_2)$  корней характеристического уравнения, соответствующих:

1. двум устойчивым аperiodическим модам;
2. устойчивой и неустойчивой аperiodическим модам;
3. нейтральной и аperiodической модам;
4. нейтральной и линейной\* модам;
5. паре консервативных мод;
6. паре устойчивых колебательных мод;
7. паре неустойчивых колебательных мод.

Вычислите коэффициенты  $a_1, a_0$  системы и найдите аналитическое выражение для свободной составляющей её движения  $y_{св}(t)$ . В отчёте приведите все вычисления и полученные результаты. Проанализируйте устойчивость каждой из систем на основании корневого критерия, сделайте соответствующие выводы. Для каждой системы выберите ненулевые начальные условия  $y(0)$  и  $y'(0)$ . Составьте схему для моделирования свободного движения и проведите моделирование сначала с нулевыми начальными условиями, а затем с выбранными ненулевыми. В отчёте приведите графики зависимостей  $y(t)$  и  $y'(t)$ . Сделайте выводы.

Решение

$$\begin{aligned} y''_{св} + a_1 y_{св} + a_0 y_{св} &= 0 \\ \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 &= 0 \\ D &= a_1^2 - 4a_0 \\ \lambda_1, \lambda_2 &= \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} \end{aligned}$$

1. Сначала найдем коэффициенты двум устойчивыми аperiodическим модам. Подберем  $a_1, a_0$  таким образом, чтобы  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ .

Так как это условие устойчивой аperiodической моды:

$$\frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} < 0$$

Пусть  $a_1=4, a_0=3$ , тогда:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = -1, -3 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 < 0$$

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}$$

$$y(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0$$

При нулевых условиях:  $0 = C_1 + C_2 \Rightarrow C_1 = -1, C_2 = 1$

$$y(t) = -e^{-t} + e^{-3t}$$

При ненулевых условиях, пусть  $y(0) = 3$

$$y(0) = C_1 + C_2 \Rightarrow 3 = 1 + 2$$

$$y(t) = e^{-t} + 2e^{-3t}$$

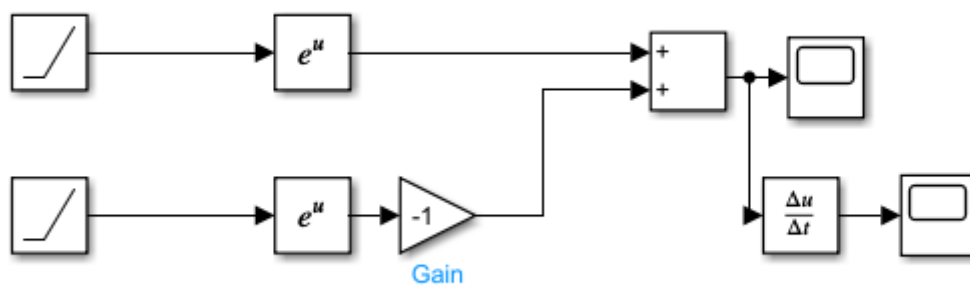


Рисунок 1. Схема моделирования для уравнения 1

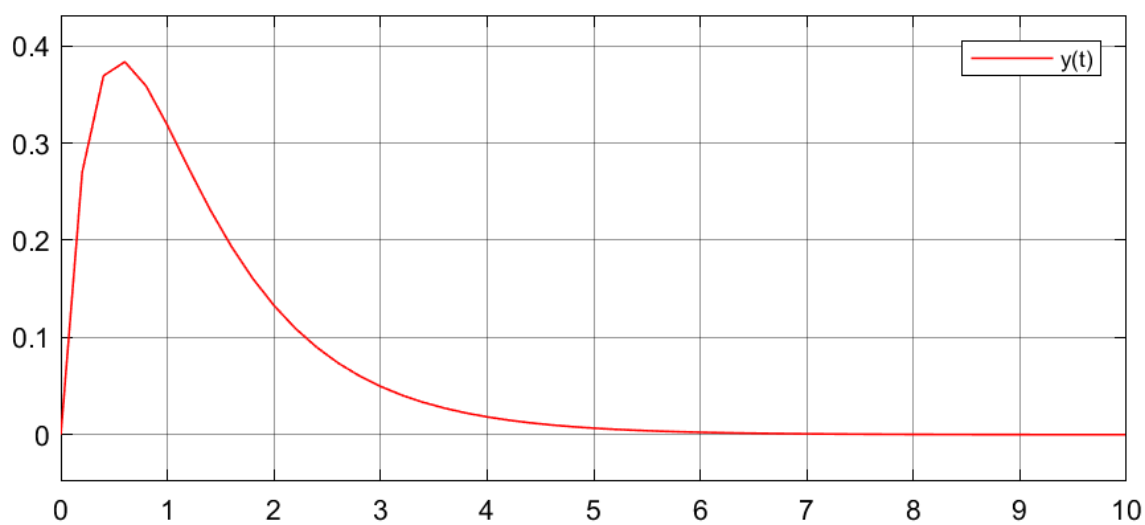


Рисунок 2. График зависимости  $y(t)$  при нулевых условиях для набора 1

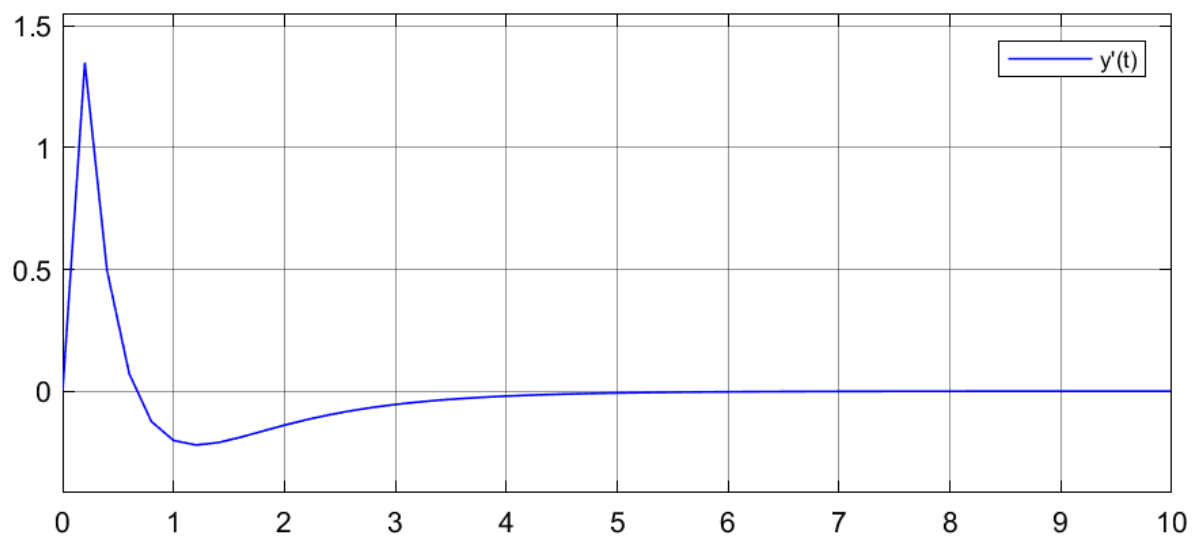


Рисунок 3. График зависимости  $y'(t)$  при нулевых условиях для набора 1

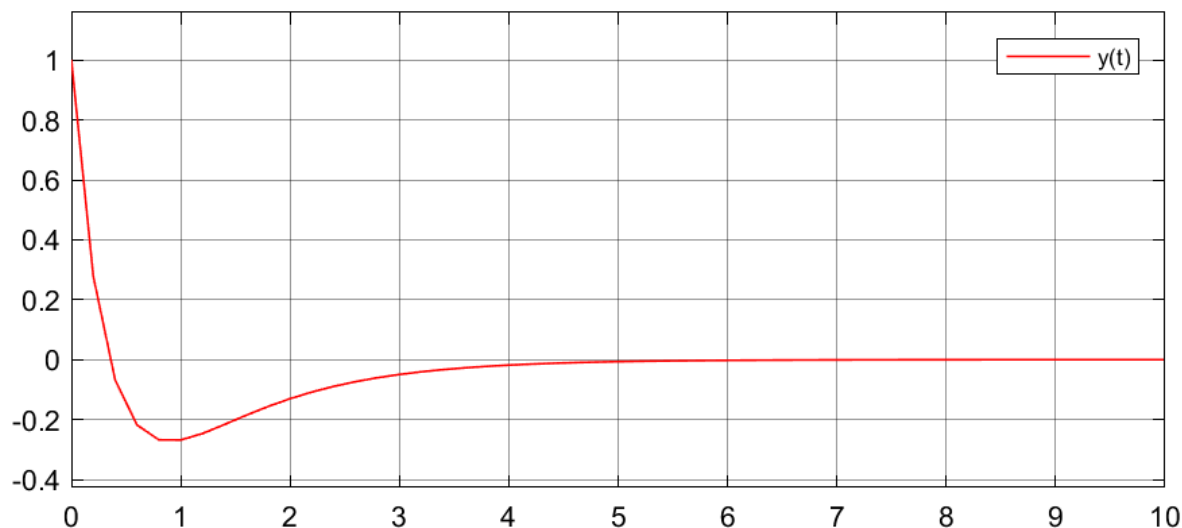


Рисунок 4. График зависимости  $y(t)$  при ненулевых условиях для набора 1

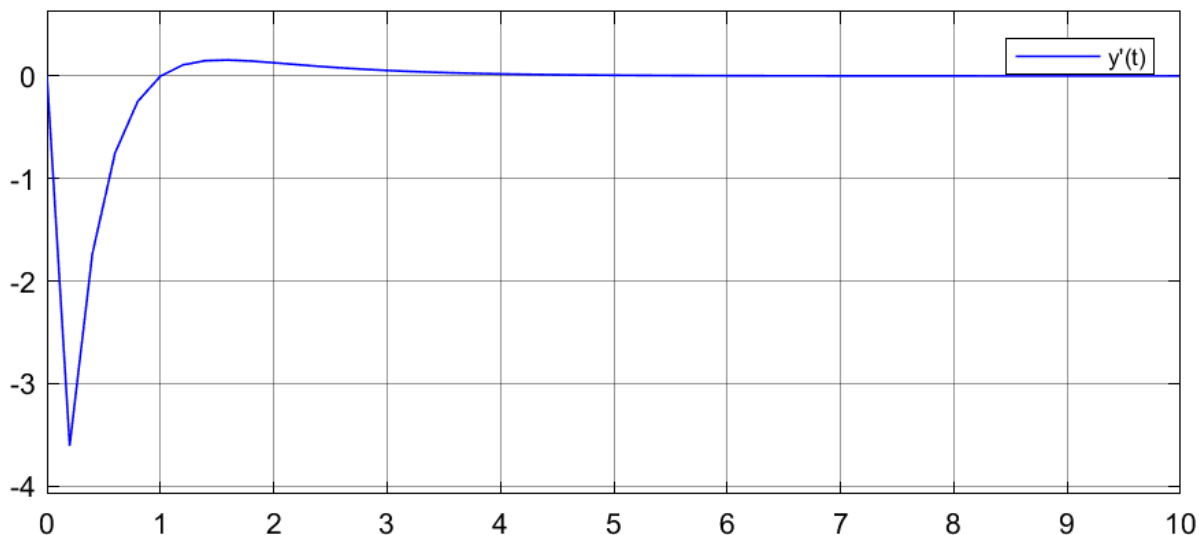


Рисунок 5. График зависимости  $y'(t)$  при ненулевых условиях для набора 1

2. Подберем коэффициенты устойчивой и неустойчивой апериодическим модам. Корни уравнения должны соответствовать следующим условиям:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &< 0, \lambda_2 > 0 \\ \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} &< 0 \\ \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} &> 0 \end{aligned}$$

Пусть  $a_1 = -4, a_0 = -5$ , тогда:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{4 - \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 - 6}{2} = -1 < 0 \\ \lambda_2 &= \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} = \frac{4 + \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 + 6}{2} = 5 > 0 \end{aligned}$$

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}$$

$$y(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0$$

При нулевых условиях:  $0 = C_1 + C_2 \Rightarrow C_1 = -1, C_2 = 1$

$$y(t) = -e^{-t} + e^{5t}$$

При ненулевых условиях, пусть  $y(0) = 3$

$$y(0) = C_1 + C_2 \Rightarrow 3 = 1 + 2$$

$$y(t) = e^{-t} + 2e^{5t}$$

Схема моделирования аналогична схеме на Рисунок 1. Схема моделирования для уравнения 1.

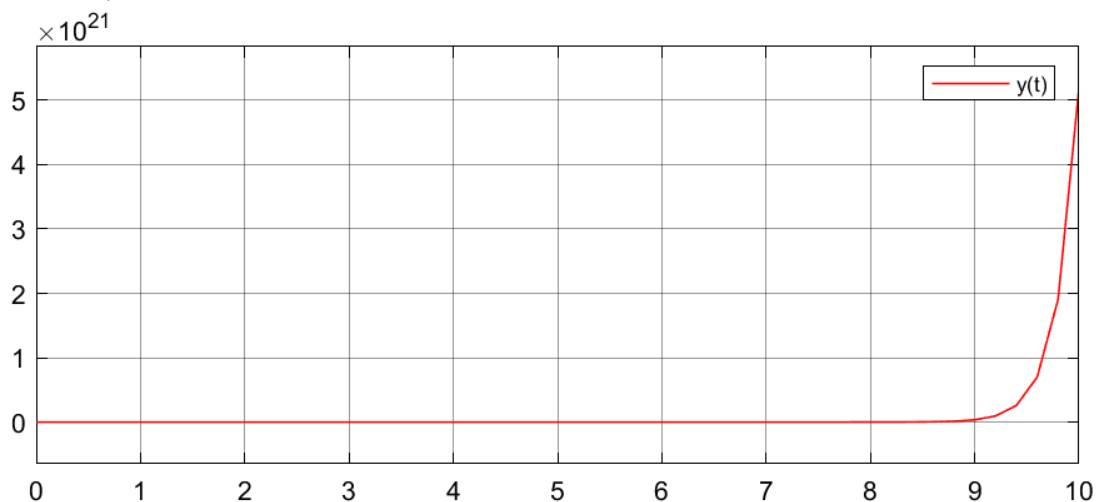


Рисунок 6. График зависимости  $y(t)$  при ненулевых условиях для набора 2

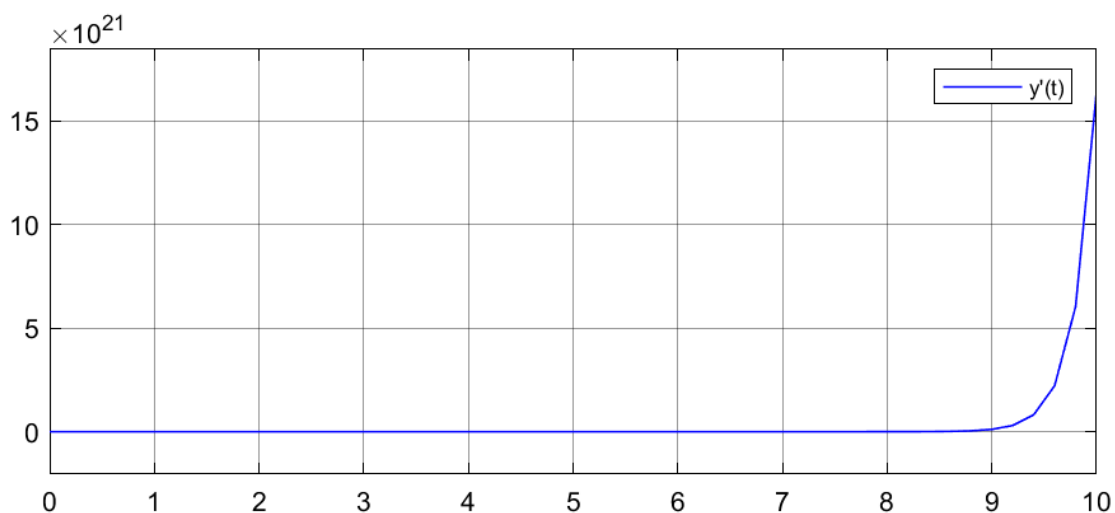


Рисунок 7. График зависимости  $y'(t)$  при нулевых условиях для набора 2

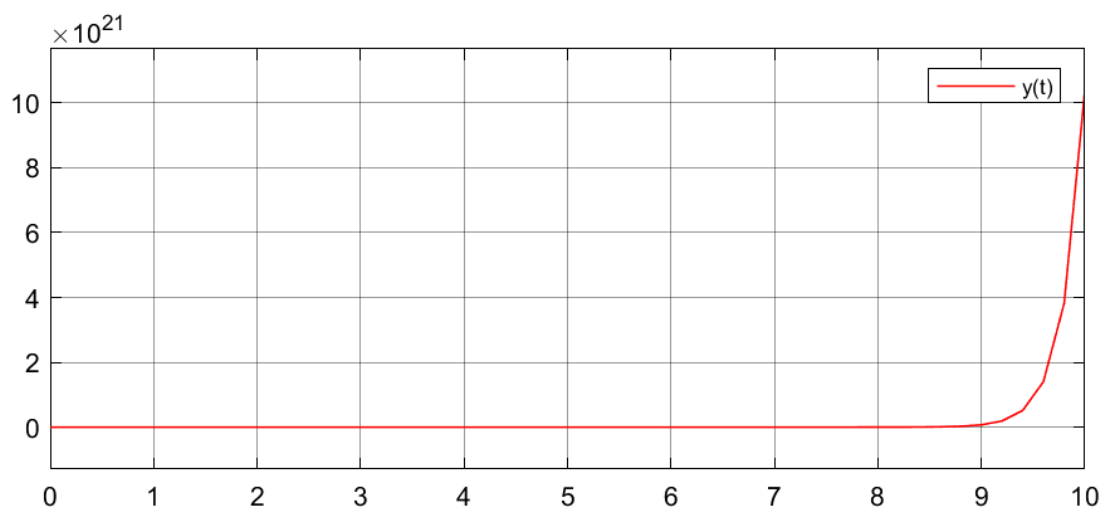


Рисунок 8. График зависимости  $y(t)$  при ненулевых условиях для набора 2

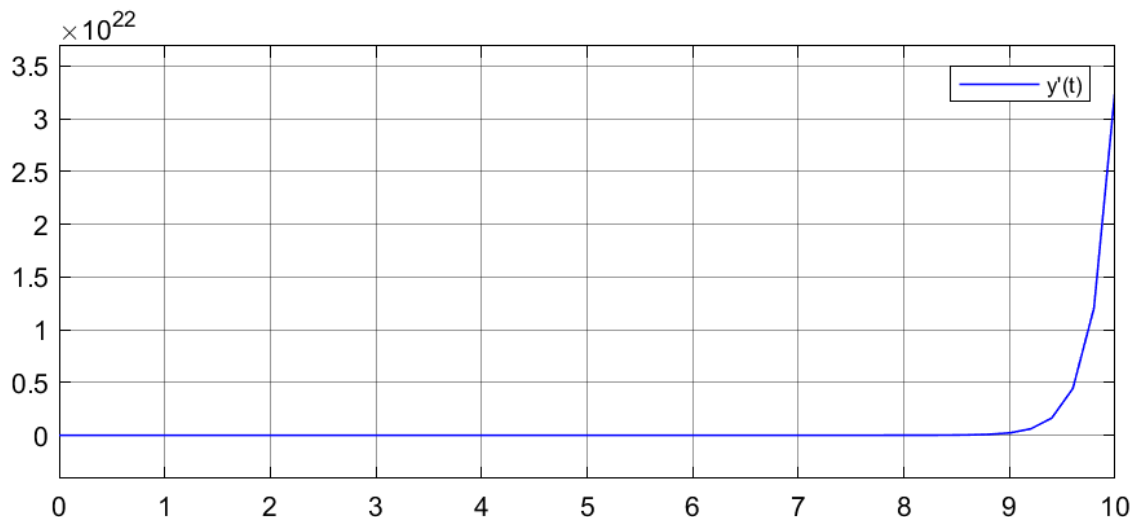


Рисунок 9. График зависимости  $y'(t)$  при ненулевых условиях для набора 2

3. Далее найдем коэффициенты, корни системы которых будут соответствовать нейтральной и апериодической модам.

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Условие нейтральной и апериодической мод:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0 \text{ или } \lambda_2 > 0$$

Пусть  $a_1 = 1, a_0 = 0$ , тогда:

$$\lambda^2 + a_1\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda + a_1) = 0$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = -a_1 = -1 < 0$$

В этом случае получили корни, которые соответствуют нейтральной и устойчивой апериодической модам.

$$y(t) = 1 + C_1 e^{-t}$$

$$y(0) = 1 + C_1 e^0$$

При нулевых условиях:  $0 = C_1 + 1 \Rightarrow C_1 = -1$

$$y(t) = 1 - e^{-t}$$

При ненулевых условиях, пусть  $y(0) = 3$

$$y(0) = 1 + C_1 \Rightarrow -2 = 1 - 3 \Rightarrow C_1 = -3$$

$$y(t) = 1 - 3e^{-t}$$

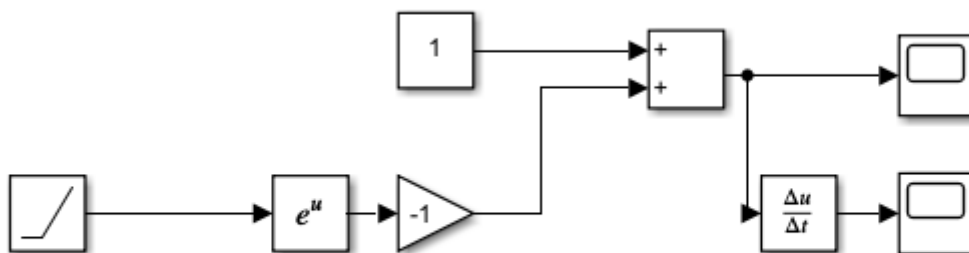


Рисунок 10. Схема моделирования для набора 3

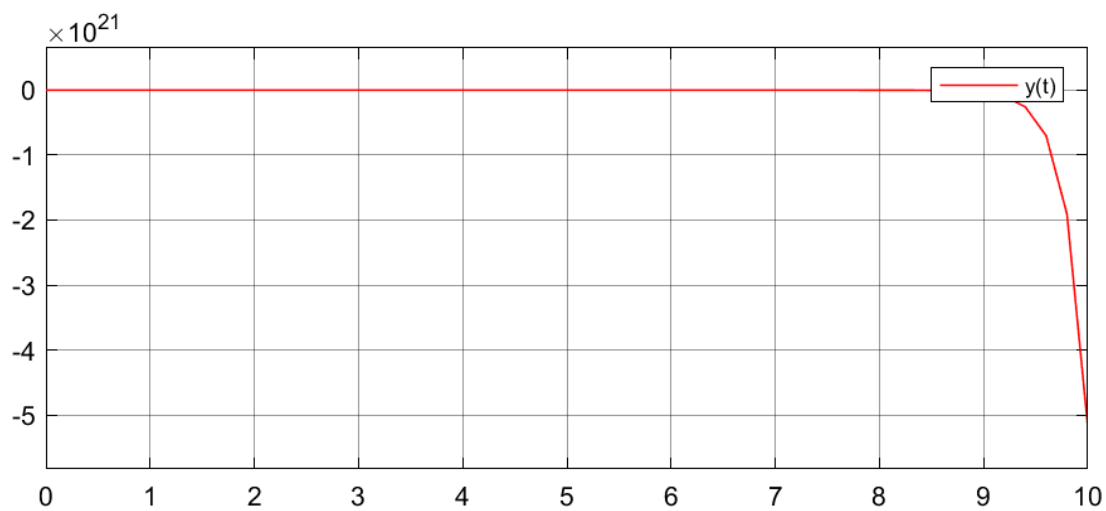


Рисунок 11. График зависимости  $y(t)$  при нулевых условиях для набора 3

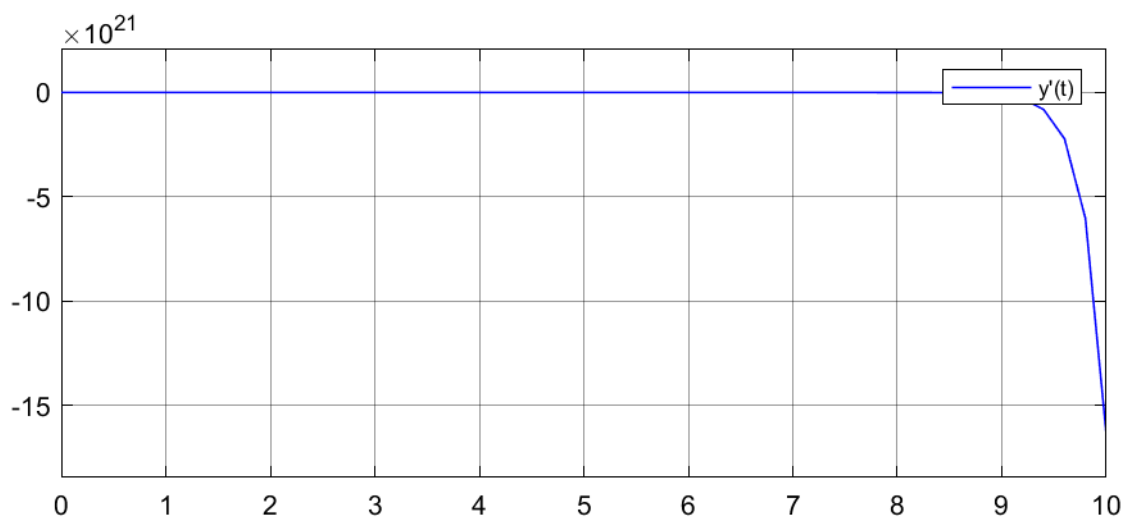


Рисунок 12. График зависимости  $y'(t)$  при нулевых условиях для набора 3

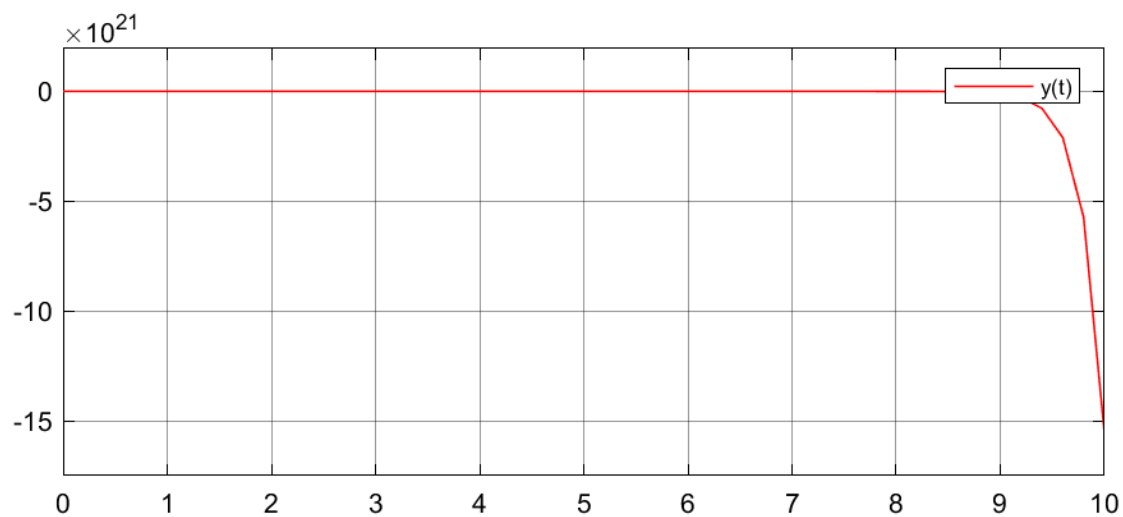


Рисунок 13. График зависимости  $y(t)$  при ненулевых условиях для набора 3

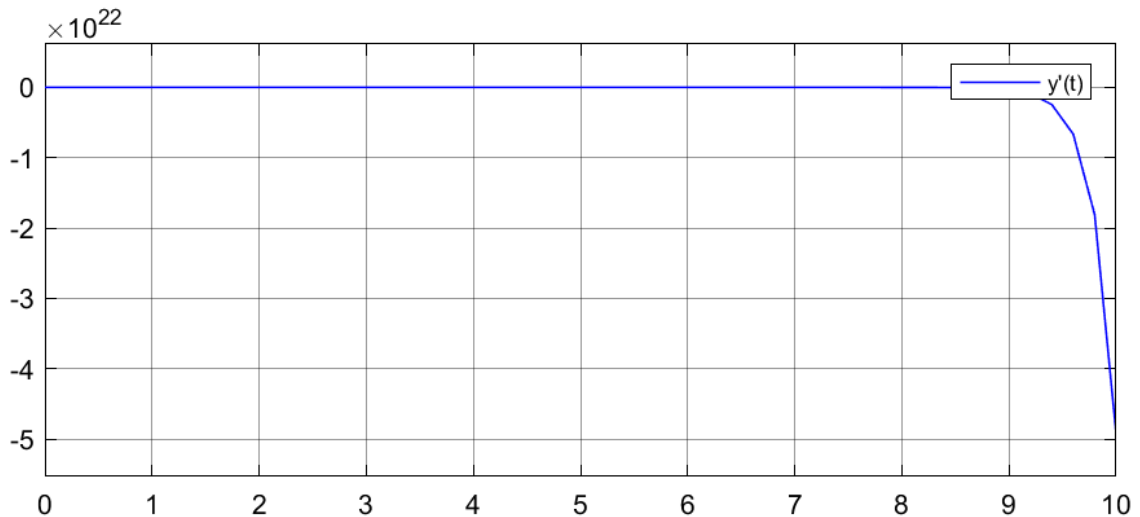


Рисунок 14. График зависимости  $y'(t)$  при ненулевых условиях для набора 3

4. Подберем коэффициенты нейтральной и линейной модом. Под «линейной» модой понимают моду, пропорциональную времени  $t$ . Так как я думаю, пример линейной моды – при рассмотрении уравнения движения простого тела через координату  $x'' = \frac{1}{m}F \Rightarrow x''_{св} = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 0$ , то корни уравнения должны соответствовать данному условию:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Это условие выполняется, когда  $a_I = 0, a_0 = 0$ :

$$\lambda^2 = 0$$

$$y(t) = C_1 + C_2 t$$

При нулевых условиях:  $0 = 0 + 0 \Rightarrow C_1 = 0$ , пусть  $C_2 = 2$

$$y(t) = 2t$$

При ненулевых условиях,  $y(0) = 1$

$$y(0) = 1 + 0 \Rightarrow C_1 = 1 \text{ пусть } C_2 = 2$$

$$y(t) = 1 + 2t$$

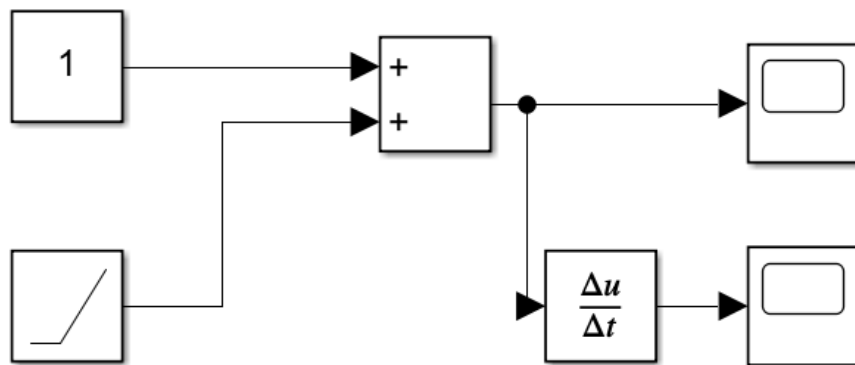


Рисунок 15. Схема моделирования для набора 4 при ненулевых условиях



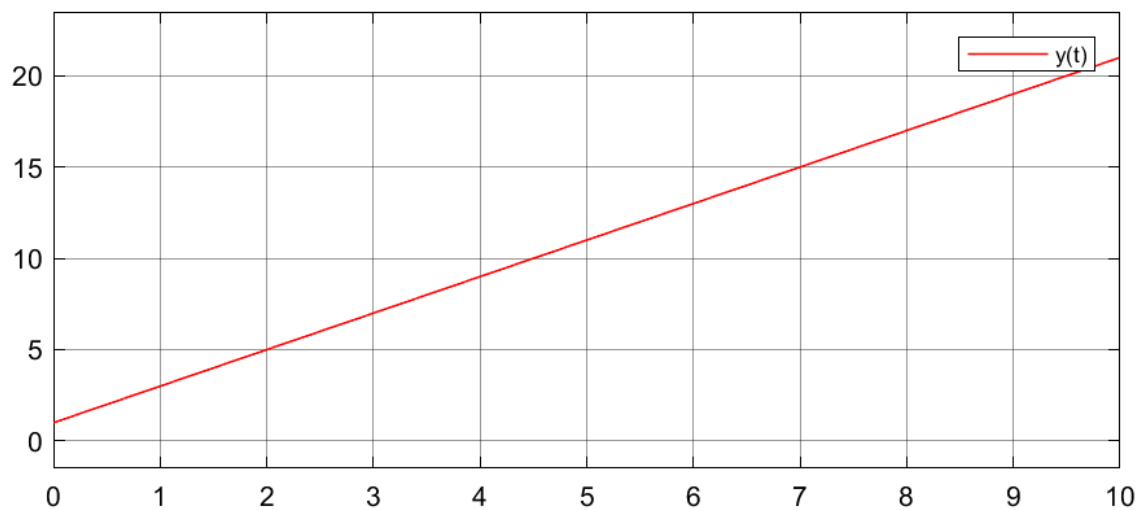


Рисунок 16. График зависимости  $y(t)$  при ненулевых условиях для набора 4

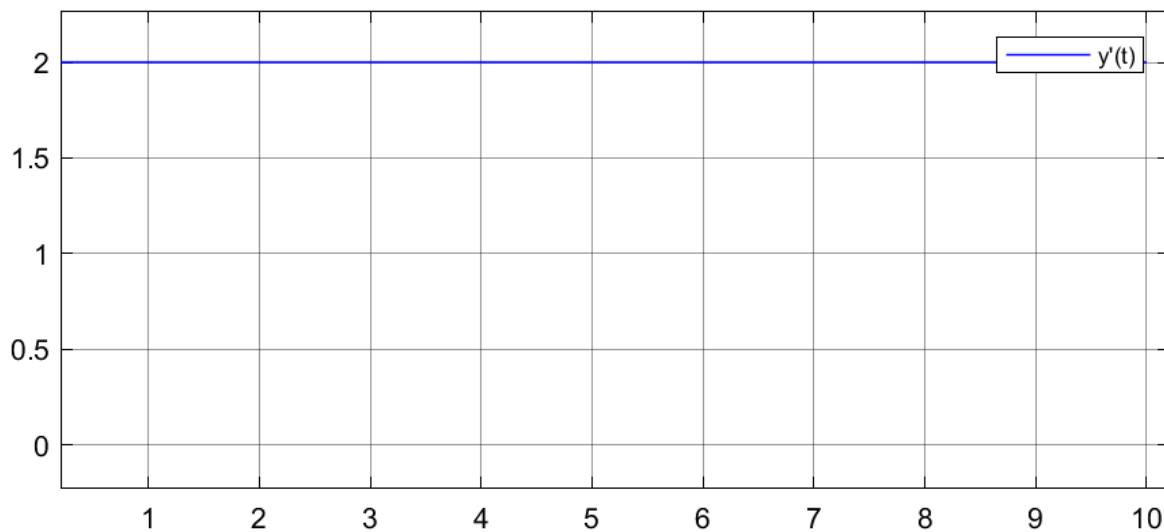


Рисунок 17. График зависимости  $y'(t)$  при ненулевых условиях для набора 4

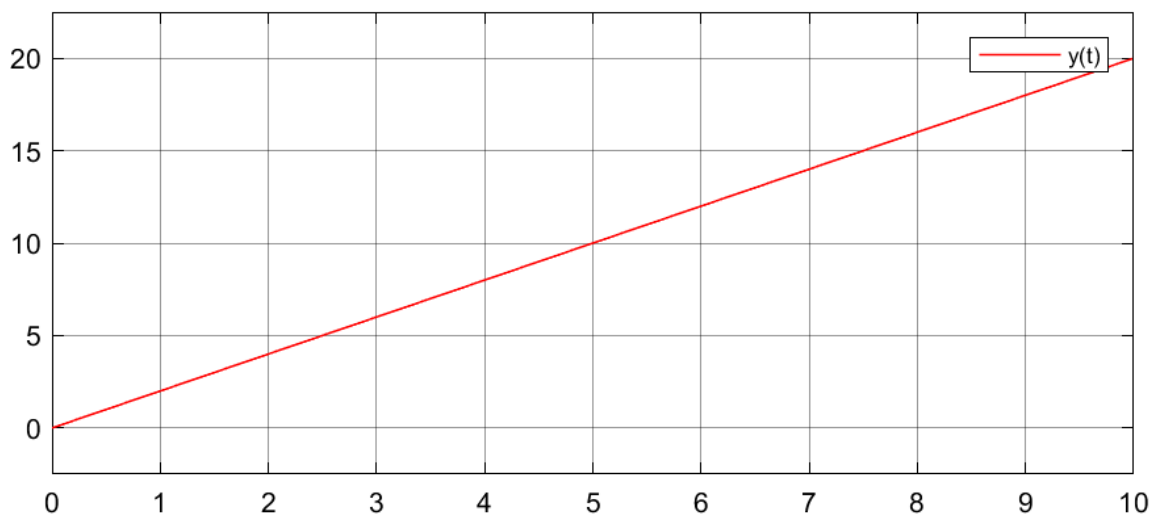


Рисунок 18. График зависимости  $y(t)$  при нулевых условиях для набора 4

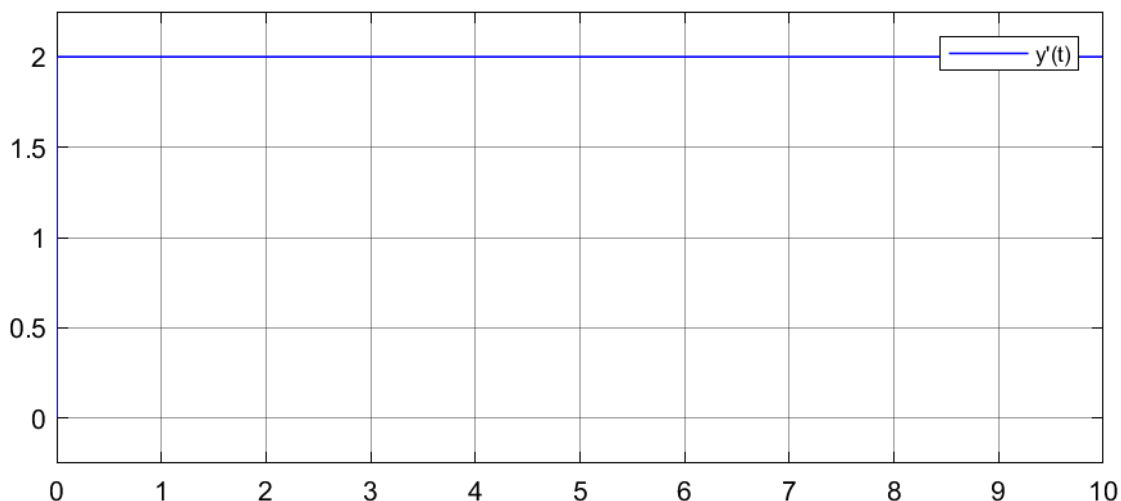


Рисунок 19. График зависимости  $y'(t)$  при нулевых условиях для набора 4

5. Далее рассмотрим вариант пары консервативных мод, корни должны соответствовать следующим условиям:

$$\lambda_{1,2} = \pm \beta i$$

Пусть  $a_1=0$ ,  $a_0=4$ :

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

$$\lambda^2 + a_0 = 0$$

$$\lambda^2 = -a_0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{a_0}i = \pm 2i$$

$$y(t) = C_1 \cdot \sin(2t) + C_2 \cdot \cos(2t)$$

При нулевых условиях:  $0 = 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$ , пусть  $C_1 = 3$

$$y(t) = 3 \cdot \sin(2t)$$

При ненулевых условиях, пусть  $y(0) = 3$

$$y(0) = 1 \cdot \sin(2t) + 3 \cdot \cos(2t) \Rightarrow 3 = 0 + 3 \Rightarrow C_1 = 1, C_2 = 3$$

$$y(t) = \sin(2t) + 3 \cdot \cos(2t)$$

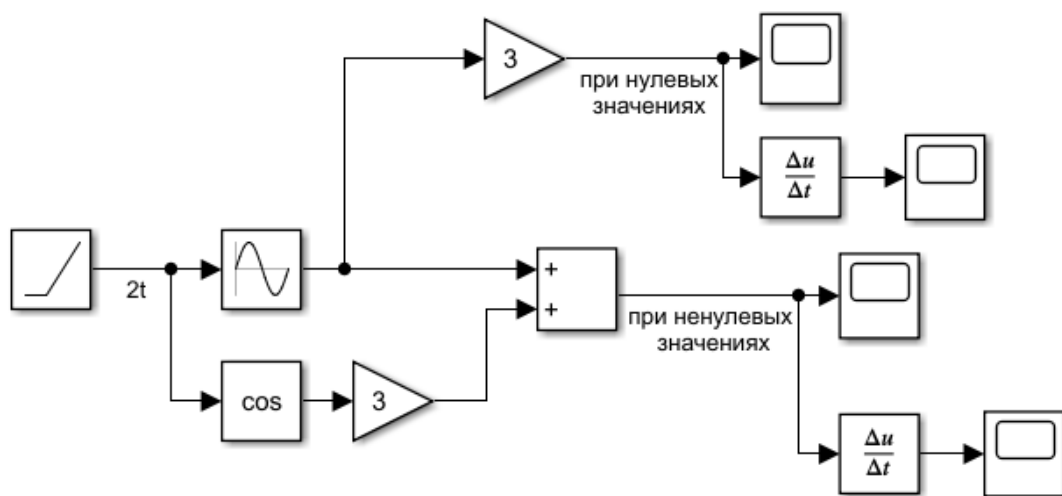


Рисунок 20. Схема моделирования уравнения 5

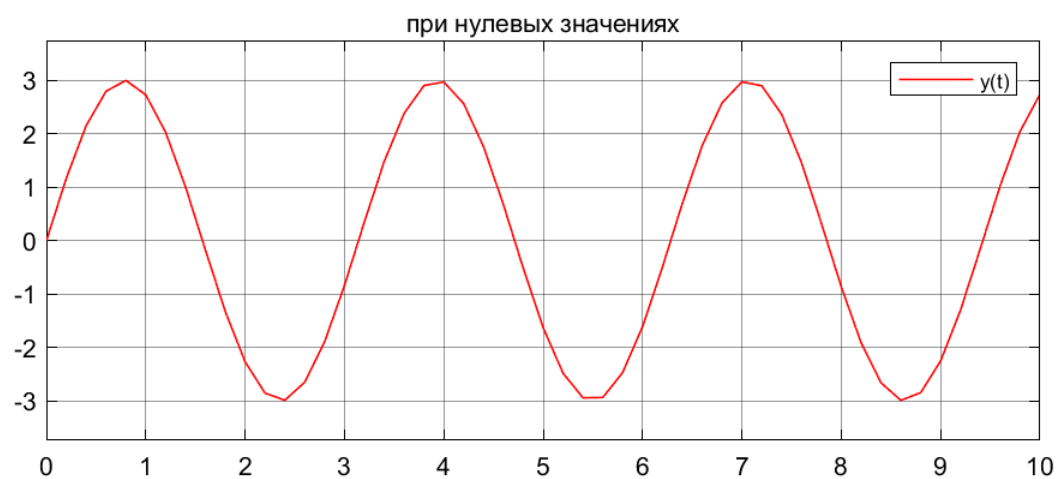


Рисунок 21. График зависимости  $y(t)$  при нулевых условиях для набора 5

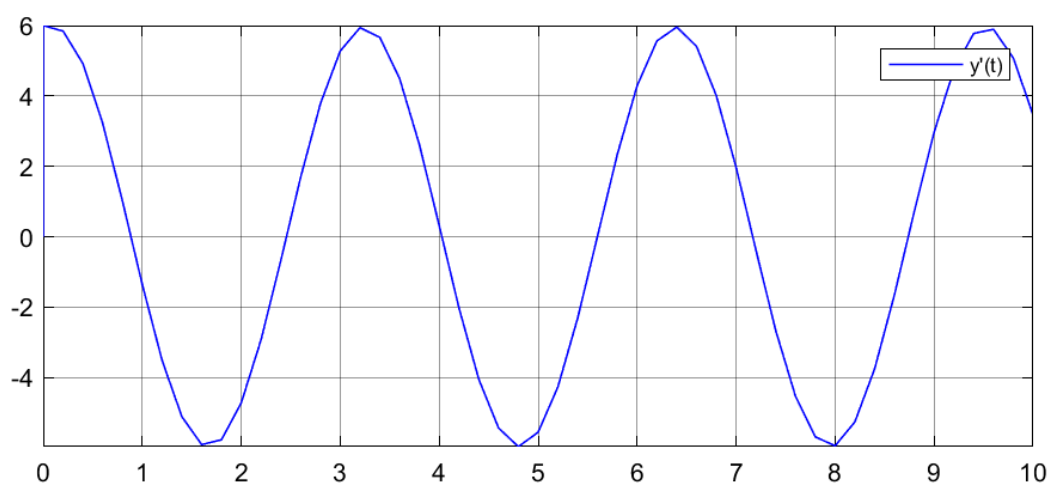


Рисунок 22. График зависимости  $y'(t)$  при нулевых условиях для набора 5



Рисунок 23. График зависимости  $y(t)$  при ненулевых условиях для набора 5

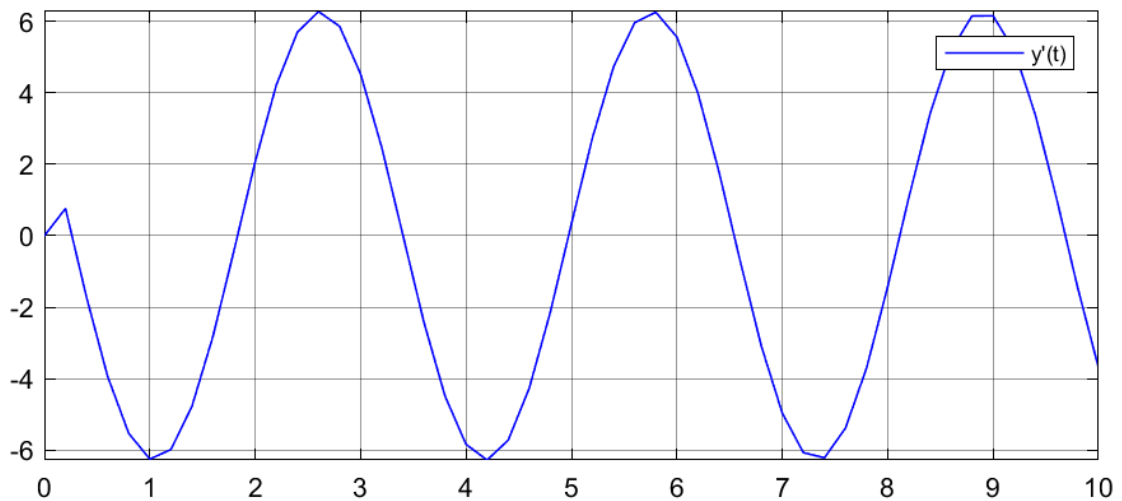


Рисунок 24. График зависимости  $y'(t)$  при ненулевых условиях для набора 5

6. Найдем коэффициенты, корни системы которых будут соответствовать паре устойчивых колебательных мод;

$$\lambda_{1,2} = a \pm \beta i, a < 0$$

Пусть  $a_1=2, a_0=2$ :

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm 1i$$

$$y(t) = C_1 e^{-t} \cdot \sin(t) + C_2 e^{-t} \cdot \cos(t)$$

При нулевых условиях:  $0 = 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$ , пусть  $C_1 = 3$

$$y(t) = 3e^{-t} \cdot \sin(t)$$

При ненулевых условиях, пусть  $y(0) = 3$

$$y(0) = 1 \cdot e^{-t} \sin(t) + 3 \cdot e^{-t} \cos(t) \Rightarrow 3 = 0 + 3 \Rightarrow C_1 = 1, C_2 = 3$$

$$y(t) = e^{-t} \cdot \sin(t) + 3e^{-t} \cdot \cos(t)$$

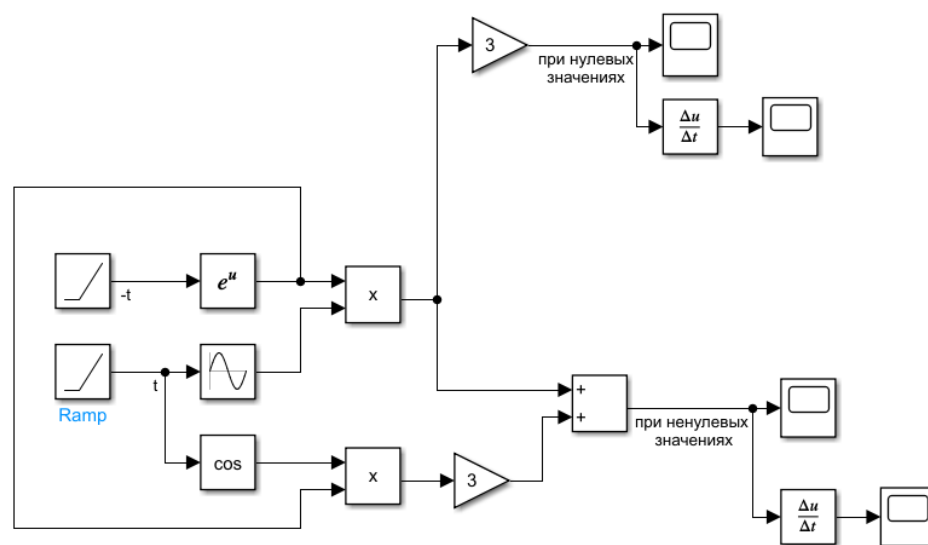


Рисунок 25. Схема моделирования уравнения 6

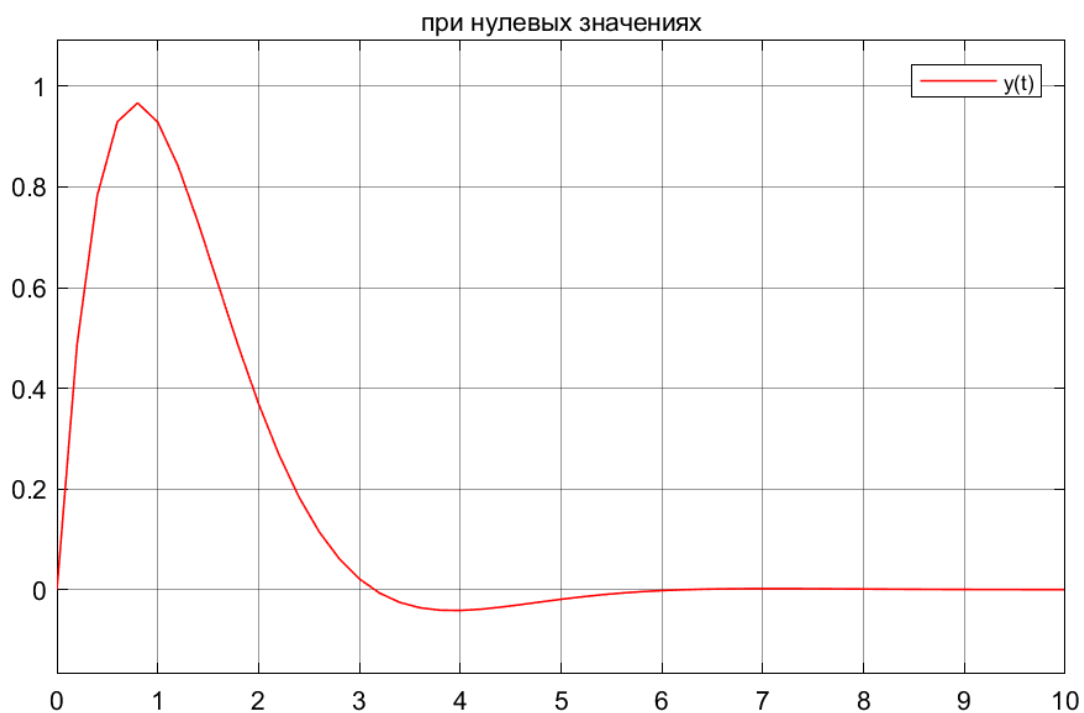


Рисунок 26. График зависимости  $y(t)$  при нулевых условиях для набора 6

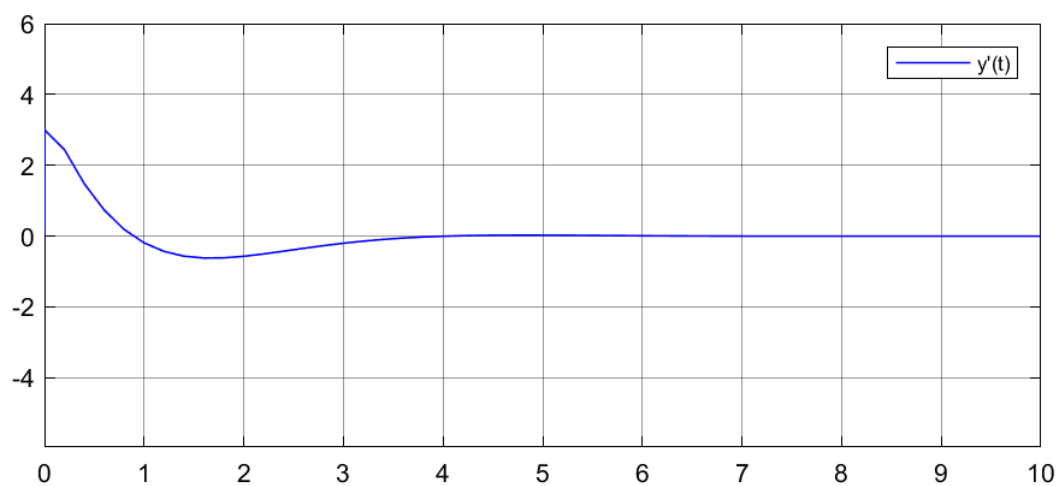


Рисунок 27. График зависимости  $y'(t)$  при нулевых условиях для набора 6

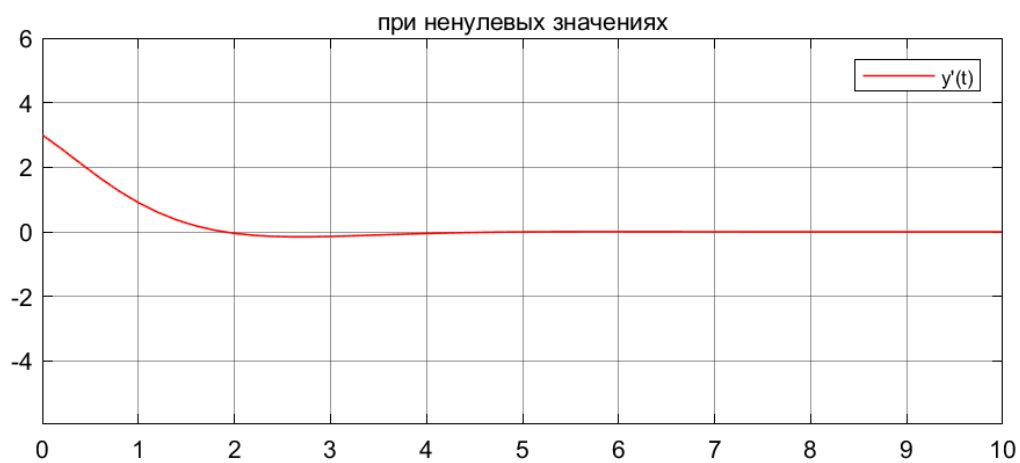


Рисунок 28. График зависимости  $y(t)$  при ненулевых условиях для набора 6

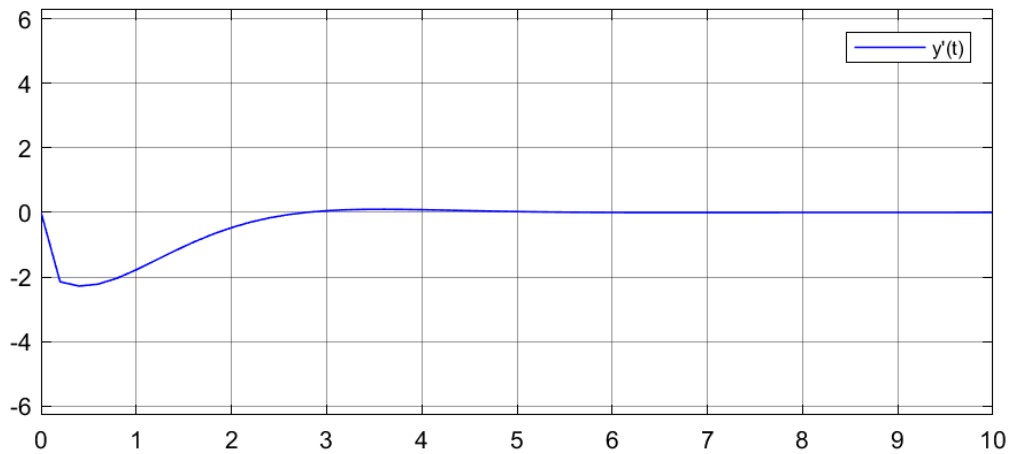


Рисунок 29. График зависимости  $y'(t)$  при ненулевых условиях для набора 6

7. Подберем коэффициенты, корни которых соответствуют паре неустойчивых колебательных мод. Корни уравнения должны соответствовать следующим условиям:

$$\lambda_{1,2} = a \pm \beta i, a > 0$$

Пусть  $a_1 = -2, a_0 = 2$ :

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

$$y(t) = C_1 e^t \cdot \sin(t) + C_2 e^t \cdot \cos(t)$$

При нулевых условиях:  $0 = 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$ , пусть  $C_1 = 3$

$$y(t) = 3e^t \cdot \sin(t)$$

При ненулевых условиях, пусть  $y(0) = 3$

$$y(0) = 1 \cdot e^t \sin(t) + 3 \cdot e^t \cos(t) \Rightarrow 3 = 0 + 3 \Rightarrow C_1 = 1, C_2 = 3$$

$$y(t) = e^t \cdot \sin(t) + 3e^t \cdot \cos(t)$$

Схема моделирования аналогична схеме на Рисунок 25, различие только в параметре Ramp (элемент в Simulink, который выводит линейный сигнал, начиная с указанного времени).

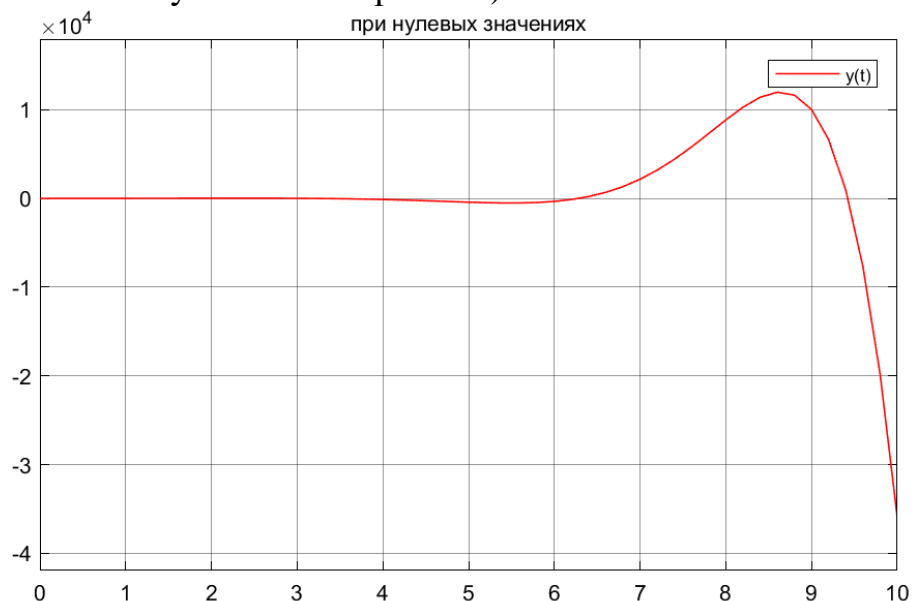


Рисунок 30. График зависимости  $y(t)$  при нулевых условиях для набора 7

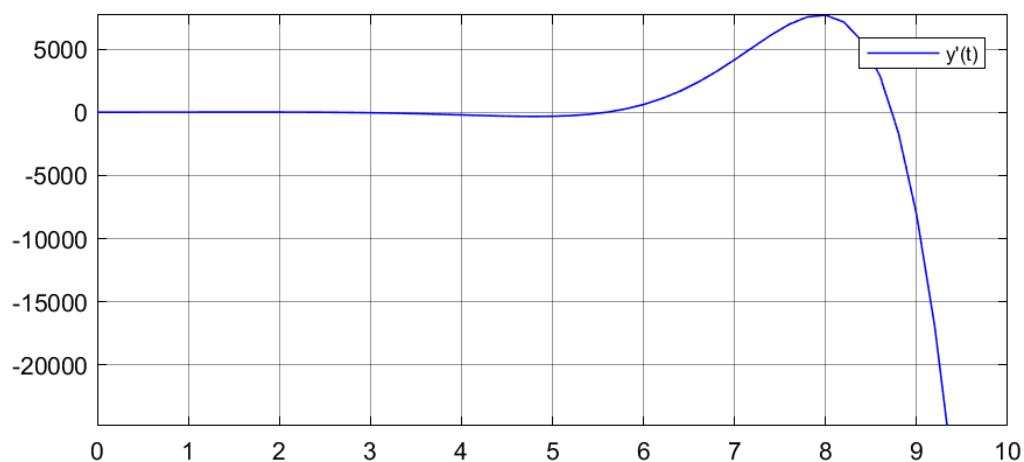


Рисунок 31. График зависимости  $y'(t)$  при нулевых условиях для набора 7

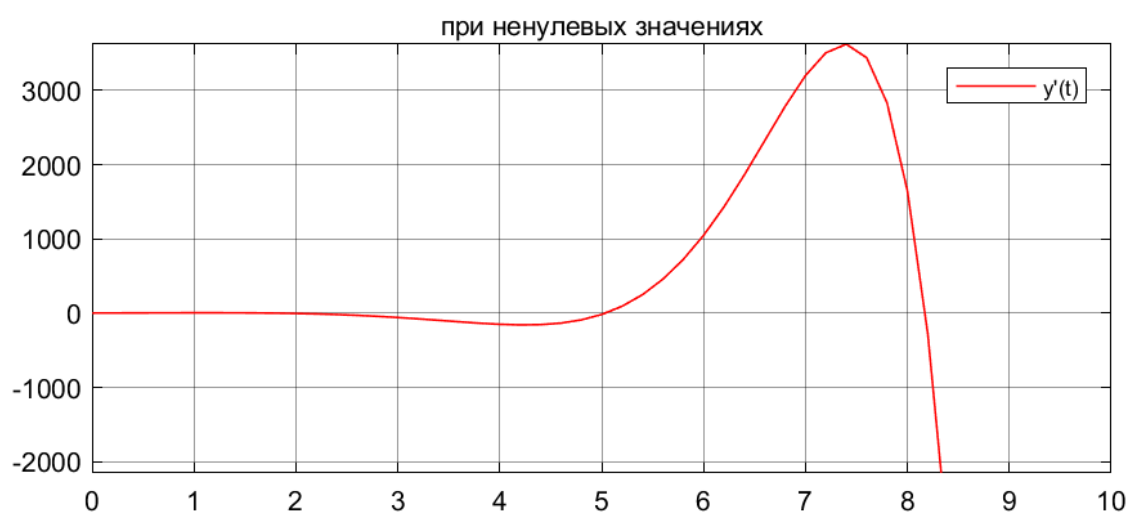


Рисунок 32. График зависимости  $y(t)$  при ненулевых условиях для набора 7

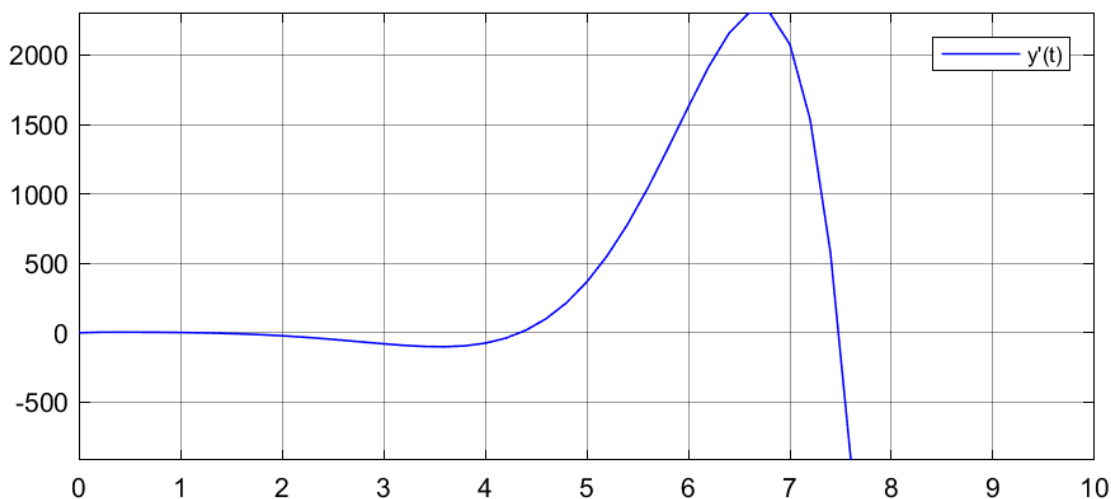


Рисунок 33. График зависимости  $y'(t)$  при ненулевых условиях для набора 7

Вывод: В процессе выполнения задания 1 проделали масштабную работу, а именно выбрали корни характеристического уравнения, соответствующих разным модам, используя корневой критерий устойчивости. Составили схемы моделирования для 7 разных уравнений, построили графики при разных условиях (нулевых и ненулевых). Результаты в более кратком виде приведены в Таблица 1.

№	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$a_1$	$a_0$	уравнение
1	-1	-3	4	3	$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$
2	-1	5	-4	-5	$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$
3	0	-1	1	0	$\lambda^2 + \lambda = 0$
4	0	0	0	0	$\lambda^2 = 0$
5	$2i$	$-2i$	0	4	$\lambda^2 + 4 = 0$
6	$-1 + 1i$	$-1 - 1i$	2	2	$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$
7	$1 + 1i$	$1 - 1i$	-2	2	$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$

Таблица 1



## Задание 2. Фазовые портреты.

Самостоятельно изучите, что такое фазовые портреты системы. Для каждого набора значений корней ( $\lambda_1, \lambda_2$ ) из задания 1 и произвольно выбранных трех наборов ненулевых начальных условий постройте (на одном графике) фазовые портреты (фазовые траектории)  $y'(y)$ . Сделайте выводы о виде фазового портрета в зависимости от типа устойчивости системы.

Решение

$$\begin{aligned} y'' + a_1 y' + a_0 y &= u. \\ y_{\text{CB}}'' + a_1 y_{\text{CB}} + a_0 y_{\text{CB}} &= 0 \\ x &= y_{\text{CB}} \\ x'' + a_1 x' + a_0 x &= 0 \end{aligned}$$

1.

$$\begin{aligned} x'' + 4x' + 3x &= 0 \\ \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -4x_2 - 3x_1 \end{cases} \end{aligned}$$

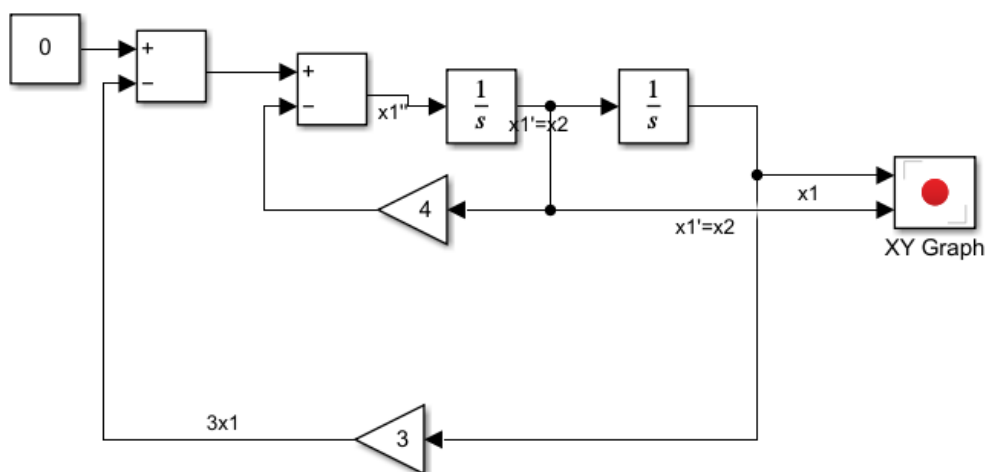
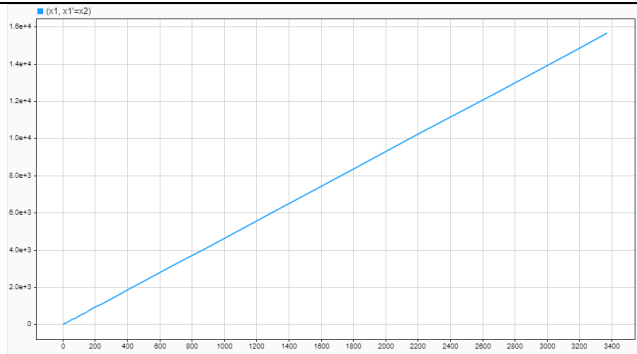
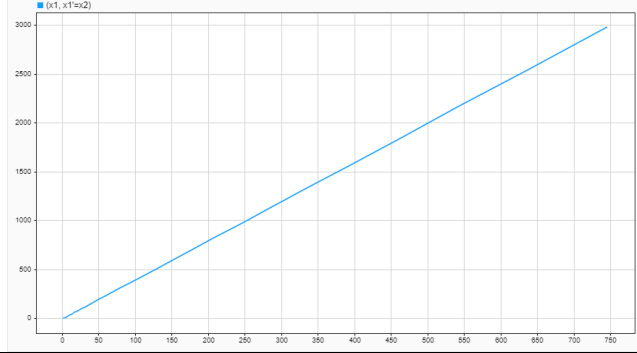
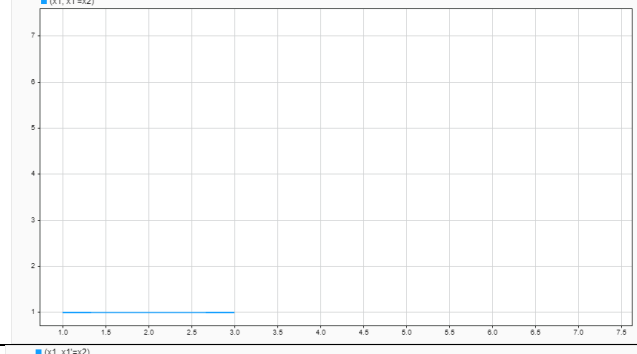
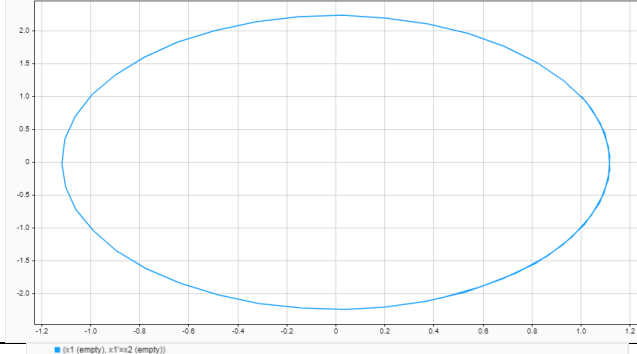
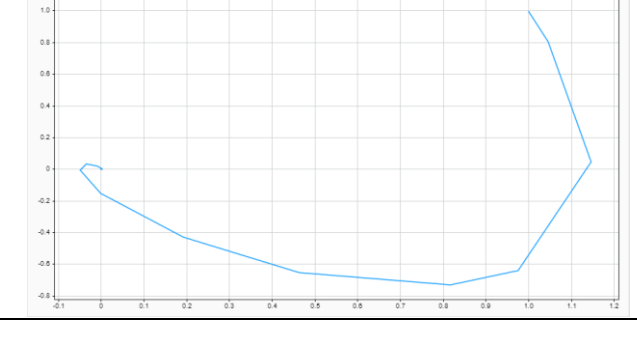


Рисунок 34. Схема моделирования для фазового портрета

Номер набора	Уравнение	Фазовый портрет
1	$\begin{aligned} x'' + 4x' + 3x &= 0 \\ \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -4x_2 - 3x_1 \end{cases} \end{aligned}$	

2	$x'' - 4x' - 5x = 0$ $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2'' = 4x_2' + 5x_1 \end{cases}$	 <p>Phase portrait for problem 2. The trajectory is a straight line in the <math>(x_1, x_1')</math> plane, starting at the origin and extending into the first quadrant. The x-axis ranges from 0 to 3400, and the y-axis ranges from 0 to 1.6e+4.</p>
3	$x'' - 4x' = 0$ $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2'' = 4x_2' \end{cases}$	 <p>Phase portrait for problem 3. The trajectory is a straight line in the <math>(x_1, x_1')</math> plane, starting at the origin and extending into the first quadrant. The x-axis ranges from 0 to 1000, and the y-axis ranges from 0 to 3000.</p>
4	$x'' = 0$ $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2'' = 0 \end{cases}$	 <p>Phase portrait for problem 4. The trajectory is a horizontal line in the <math>(x_1, x_1')</math> plane, indicating constant velocity. The x-axis ranges from 1.0 to 7.5, and the y-axis ranges from 1 to 7.</p>
5	$x'' + 4x = 0$ $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2'' = -4x_1 \end{cases}$	 <p>Phase portrait for problem 5. The trajectory is a closed ellipse in the <math>(x_1, x_1')</math> plane, indicating periodic motion. The x-axis ranges from -1.2 to 1.2, and the y-axis ranges from -2.0 to 2.0.</p>
6	$x'' + 2x' + 2x = 0$ $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2'' = -2x_2' - 2x_1 \end{cases}$	 <p>Phase portrait for problem 6. The trajectory is a curve in the <math>(x_1, x_1')</math> plane that spirals towards the origin, indicating damped oscillatory motion. The x-axis ranges from -0.1 to 1.2, and the y-axis ranges from -0.8 to 1.0.</p>

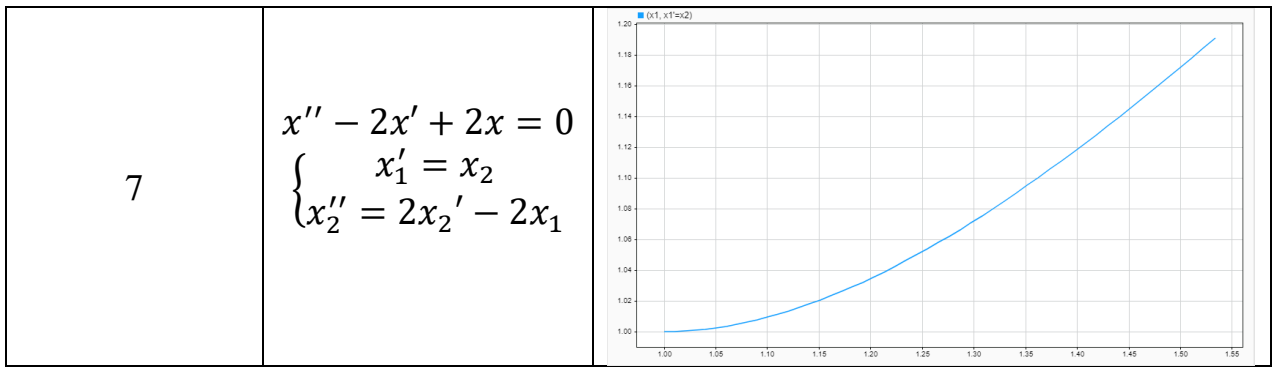


Таблица 2

**Вывод:** выполняя задание 2, были построены фазовые траектории для 7 разных наборов корней. Тип корней влияет на фазовый портрет, например, в наборе 5 по фазовому портрету можно определить, что корни мнимые, так как получили эллипс.

### Используемые источники:

1. Фазовые портреты «на пальцах» или что можно узнать о решениях диффура, не решая его <https://habr.com/ru/post/268507/>
2. [https://studme.org/270193/tehnika/fazovye\\_portrety\\_tipy\\_osobyh\\_tochek](https://studme.org/270193/tehnika/fazovye_portrety_tipy_osobyh_tochek)

### Задание 3. Вынужденное движение.

Выберите три системы из задания 1 с разными типами устойчивости (асимптотически устойчивую, на границе устойчивости и неустойчивую). Для каждого входного воздействия  $u(t)$  осуществите моделирование вынужденного движения системы при  $t \geq 0$  с начальными условиями  $y(0) = -1$ ;  $0$ ;  $1$  и  $y'(0) = 0$ . Входные сигналы  $u(t)$  возьмите в Табл. 1, в соответствии со своим вариантом. В отчёте приведите графики выходных сигналов  $y(t)$ . Сделайте выводы.

Решение

Тип устойчивости	Уравнение	График
асимптотически устойчивая	$y'' + 4y' + 3y = 1$ $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$ $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}$ $y'(t) = -C_1 e^{-t} - 3C_2 e^{-3t}$ $\begin{cases} C_1 + C_2 = -1 \\ -C_1 - 3C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ $C_1 = -1.5, C_2 = 0.5$ $y(t) = -1.5e^{-t} + 0.5e^{-3t}$ $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}$ $y(0) = 0 = C_1 + C_2 \Rightarrow$ $C_1 = -1, C_2 = 1$ $y(t) = -e^{-t} + e^{-3t}$ $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}$ $y(0) = 1 = C_1 + C_2 \Rightarrow$ $C_1 = 2, C_2 = -1$ $y(t) = 2e^{-t} - e^{-3t}$	
на границе устойчивости	$y'' + y' = 0.5t$ $\lambda^2 + \lambda = 0$ $y(t) = C_1 + C_2 e^{-t}$ $y(0) = C_1 + C_2 = -1$ $C_1 = 0, C_2 = -1$ $y(t) = -e^{-t}$ $y(0) = C_1 + C_2 = 0$ $C_1 = -1, C_2 = 1$ $y(t) = -1 + e^{-t}$ $y(0) = C_1 + C_2 = 1$ $y(t) = e^{-t}$	

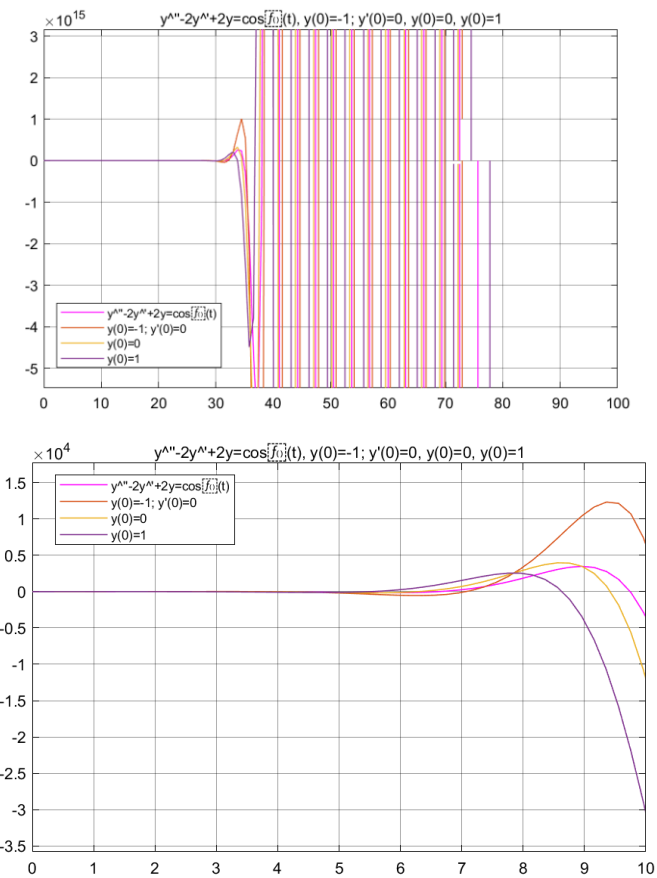
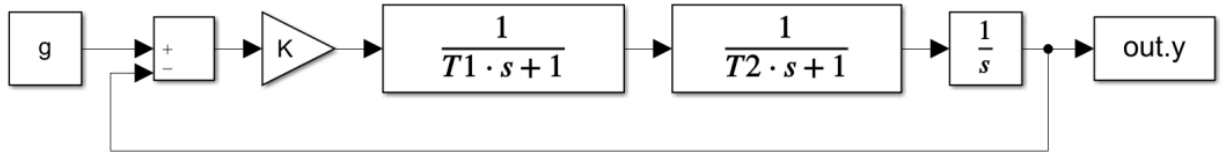
<p>неустойчивая</p>	$y'' - 2y' + 2y = \cos(t)$ $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ $y(t) = C_1 e^t \cdot \sin(t) + C_2 e^t \cos(t)$ $y(0) = 0 + C_2 = -1$ $C_1 = 1, C_2 = -1$ $y(t) = e^t \cdot \sin(t) - e^t \cos(t)$ $y'(0) = 0$ $y(0) = C_1 e^t \cdot \sin(t) + C_2 e^t \cos(t) = 0$ $C_2 = 0, C_1 = 1$ $y(t) = e^t \cdot \sin(t)$ $y(0) = C_1 e^t \cdot \sin(t) + C_2 e^t \cos(t) = 1$ $C_1 = 1, C_2 = 1$ $y(t) = e^t \cdot \sin(t) + e^t \cos(t)$	 <p>The figure contains two plots. The top plot shows the solution of the differential equation <math>y'' - 2y' + 2y = \cos(t)</math> for different initial conditions: <math>y(0) = -1</math> (blue), <math>y'(0) = 0</math> (orange), <math>y(0) = 0</math> (green), and <math>y(0) = 1</math> (red). The solutions diverge rapidly, with the y-axis scaled by <math>10^{15}</math>. The bottom plot shows the solution for the same differential equation but with different initial conditions: <math>y(0) = 1</math> (blue), <math>y'(0) = 0</math> (orange), <math>y(0) = 0</math> (green), and <math>y(0) = 1</math> (red). The solutions converge to a single line, with the y-axis scaled by <math>10^4</math>.</p>
---------------------	---	---

Таблица 3

Вывод: в процессе выполнения задания поработали с разными типами устойчивости, заметим, что в асимптотически устойчивой системе, несмотря на различные начальные условия, функции все равно сходятся в одну линию. Системы на границе устойчивости также почти во всех случаях сходятся в линию. В неустойчивой системе все, наоборот, видим сильные расхождения с увеличением времени.

## Задание 4. Область устойчивости.

Соберите схему моделирования линейной системы третьего порядка, установив значение постоянных времени  $T1$  и  $T2$  таким образом, чтобы полюса соответствующих передаточных функций совпали с первым набором корней  $(\lambda1, \lambda2)$  из задания 1.



Определите аналитически границу устойчивости в пространстве параметров  $K$  и  $T1$  для системы с фиксированным значением  $T2$ , опираясь на критерий Гурвица. Приведите графическое изображение границы устойчивости на плоскости двух параметров  $K(T1)$  и определите область устойчивости системы. Сделайте выводы. Определите аналитически границу устойчивости в пространстве параметров  $K$  и  $T2$  для системы с фиксированным значением  $T1$ , опираясь на критерий Гурвица. Приведите графическое изображение границы устойчивости на плоскости двух параметров  $K(T2)$  и определите область устойчивости системы. Сделайте выводы. Возьмите три набора параметров  $K$ ,  $T1$  и  $T2$  таких, чтобы первый набор соответствовал устойчивой системе, второй – системе на границе устойчивости, а третий – неустойчивой системе. Выполните моделирование при  $g(t) = 1$  и сделайте выводы.

### Решение

Сначала построим передаточную функцию системы:

$$W(s) = k \cdot \frac{1}{T1 \cdot s + 1} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{T2 \cdot s + 1}$$

Находим истинную передаточную функцию системы ( $\tilde{W}$ ), которая действительно при умножении на вход давала бы нам выход системы:

$$\begin{aligned} (G - Y) \cdot W &= Y \\ Y &= \frac{W}{1 + W} \cdot G \\ \tilde{W} &= \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{K}{K + T1 \cdot T2 \cdot s^3 + T1 \cdot s^2 + T2 \cdot s^2 + s} \end{aligned}$$

Вид системы в форме вход-выход:

$$T1 \cdot T2 \cdot y''' + (T1 + T2) \cdot y'' + y' + Ky = Ku$$

При свободном движении:

$$T1 \cdot T2 \cdot y''' + (T1 + T2) \cdot y'' + y' + Ky = 0$$

Составим матрицу Гурвица для оценки устойчивости системы:

$$F = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (T1 + T2) & K \\ T1 \cdot T2 & 1 \\ 0 & (T1 + T2) \end{bmatrix}$$

Чтобы система была асимптотически устойчивой, должны выполняться следующие условия:

$$\begin{aligned} T1 \cdot T2, (T1 + T2), K &> 0 \\ (T1 + T2) \cdot 1 &> K \cdot T1 \cdot T2 \end{aligned}$$

Пусть  $T1=1$ , тогда:

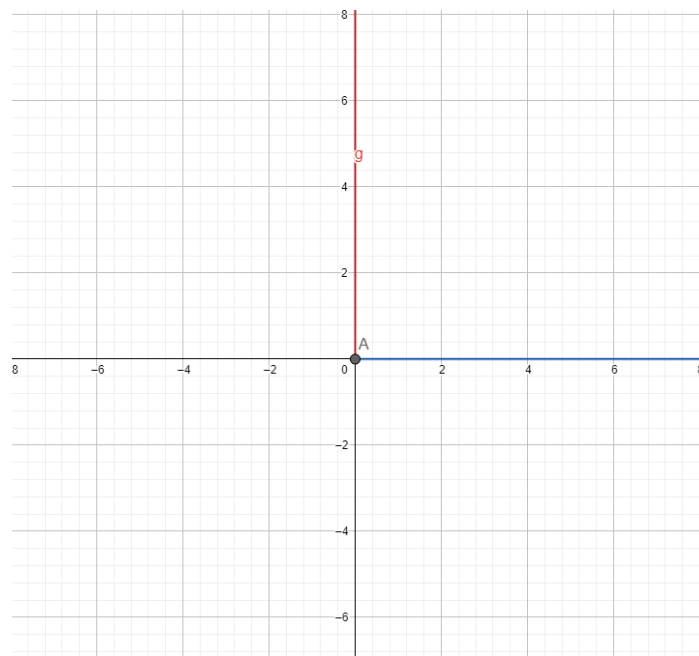


Рисунок 35. Границы области устойчивости на плоскости параметров  $K(T2)$

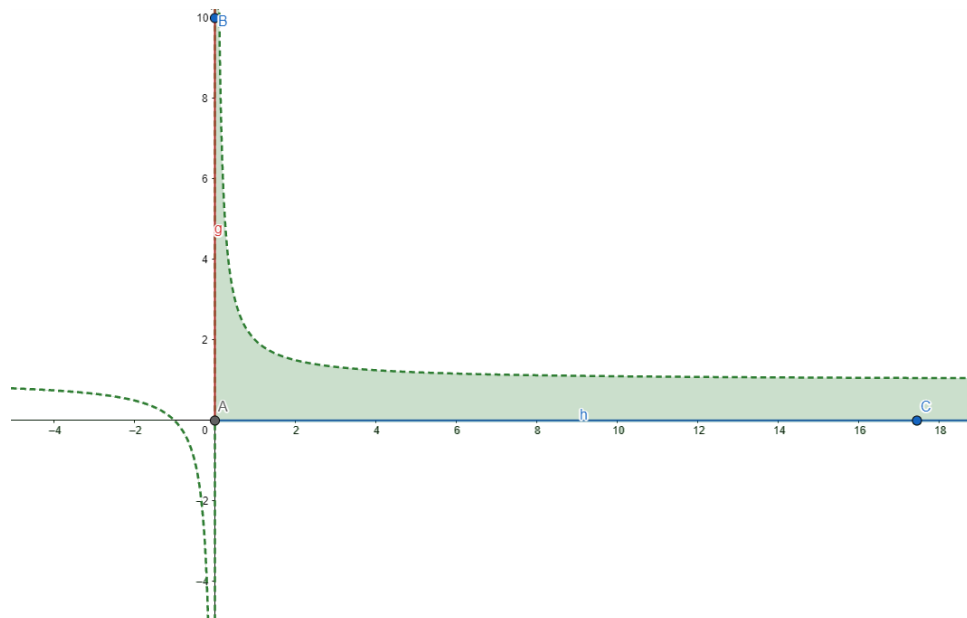


Рисунок 36. Область устойчивости на плоскости параметров  $K(T2)$

Пусть  $T_2=1$ , тогда:

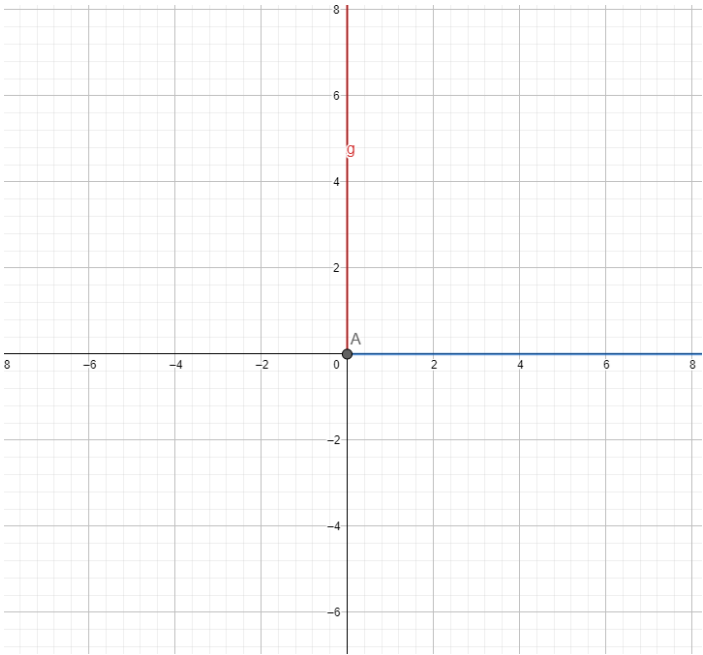


Рисунок 37. Границы области устойчивости на плоскости параметров  $K(T_1)$

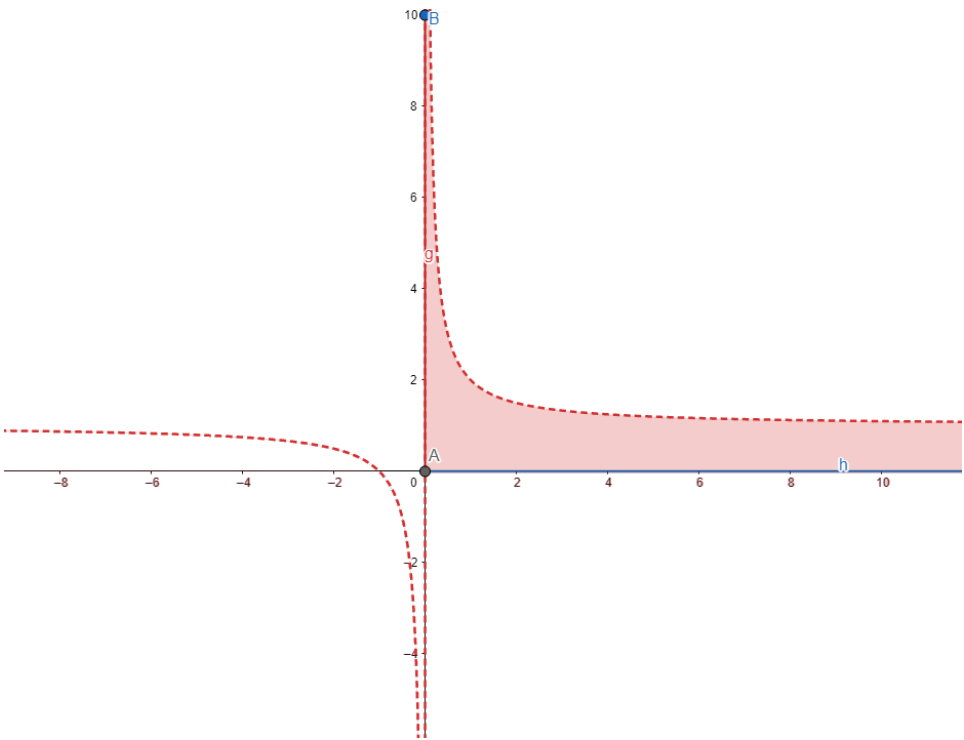


Рисунок 38. Область устойчивости на плоскости параметров  $K(T_1)$

Система	K	T1	T2
устойчивая	1	1	$\frac{2}{9}$
на границе устойчивости	0	0	1
неустойчивая	-2	0	1



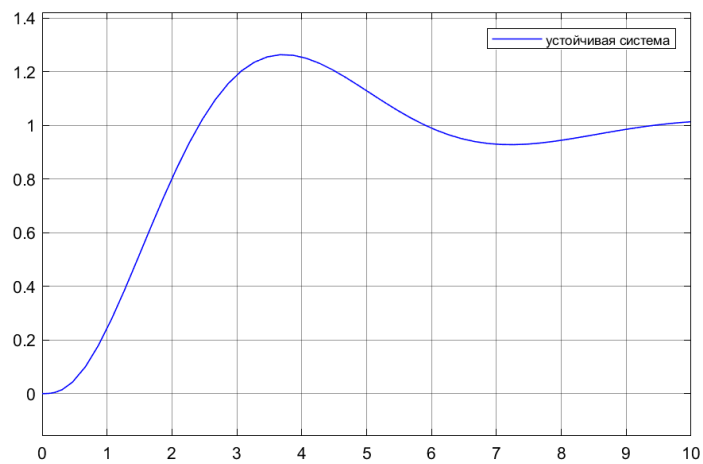


Рисунок 39. Моделирование при  $K=1$ ,  $T1=1$ ,  $T2=2/9$

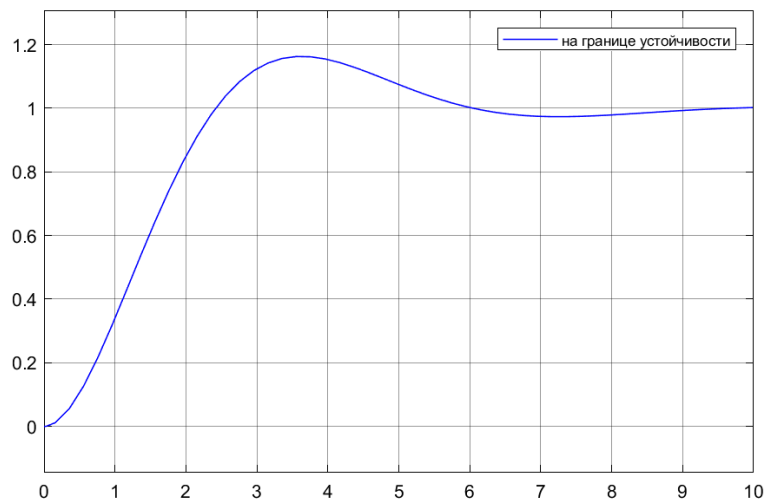


Рисунок 40. Моделирование при  $K=0$ ,  $T1=0$ ,  $T2=1$

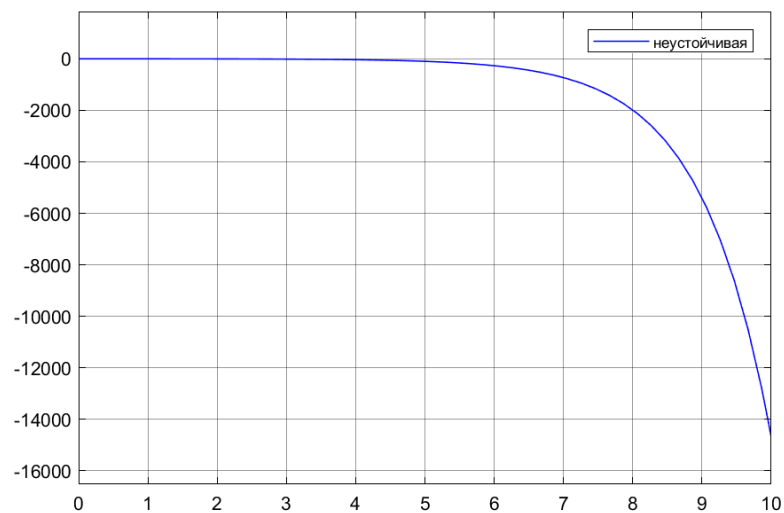


Рисунок 41. Моделирование при  $K=-2$ ,  $T1=0$ ,  $T2=1$

Вывод: в задание 4 изучали, находили границы и области устойчивости. Анализируя графики, заметили, что графики устойчивой и на границе устойчивости системы схожи, в отличие от графика моделирования неустойчивой системы.

## Задание 5. Вновь свободное движение.

Придумайте такую систему вида:

$$\begin{cases} x' = Ax \\ y = Cx \end{cases}$$

с ненулевыми начальными условиями  $x(0)$ , чтобы выход системы при свободном движении совпадал с желаемым выходом:

$$y(t) = \cos(6t) + e^{-2t} \cos(3t)$$

В отчёте приведите матрицы  $A$  и  $C$  полученной системы, схему моделирования и результаты моделирования свободного движения системы с заданными начальными условиями. Выполните сравнение полученного выхода с желаемым. Сделайте выводы.

Решение:

Так как  $y(t)$  содержит  $e^{-2t} \cos(3t)$ , предположим, что корни уравнения были равны:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-4 \pm 6i}{2} \Rightarrow \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} \Rightarrow \lambda_1^2 + 4\lambda_2 + 13$$

Аналогично находит корни  $\cos(6t)$ :  $\lambda_1, \lambda_2 = \pm 6i \Rightarrow \lambda^2 + 36 = 0$

Тогда соберем все вместе:

$$\begin{aligned} (\lambda_1^2 + 4\lambda_2 + 13)(\lambda^2 + 36) &= 0 \\ \lambda^3 + 4\lambda^2 + 13\lambda + 36\lambda^2 + 144\lambda + 468 &= 0 \\ \lambda^3 + 40\lambda^2 + 157\lambda + 468 &= 0 \\ y''' + 40y'' + 157y' + 468y &= 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -468 & -157 & -40 \end{bmatrix}$$

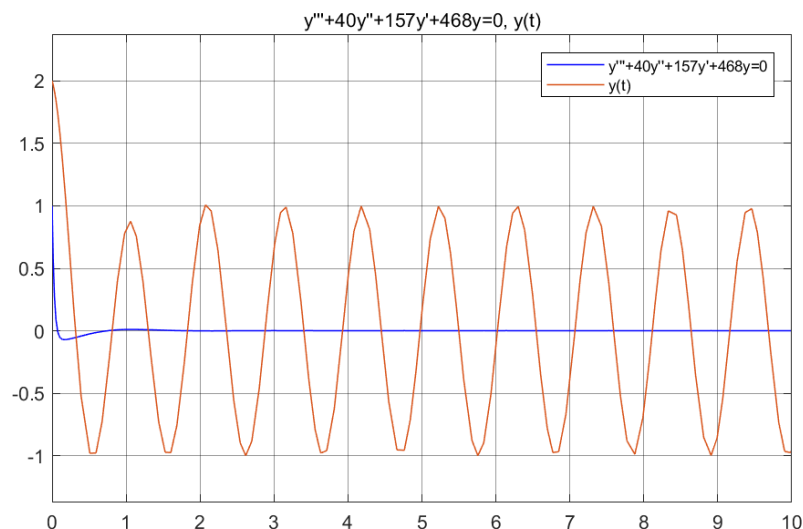


Рисунок 42. Результаты моделирования

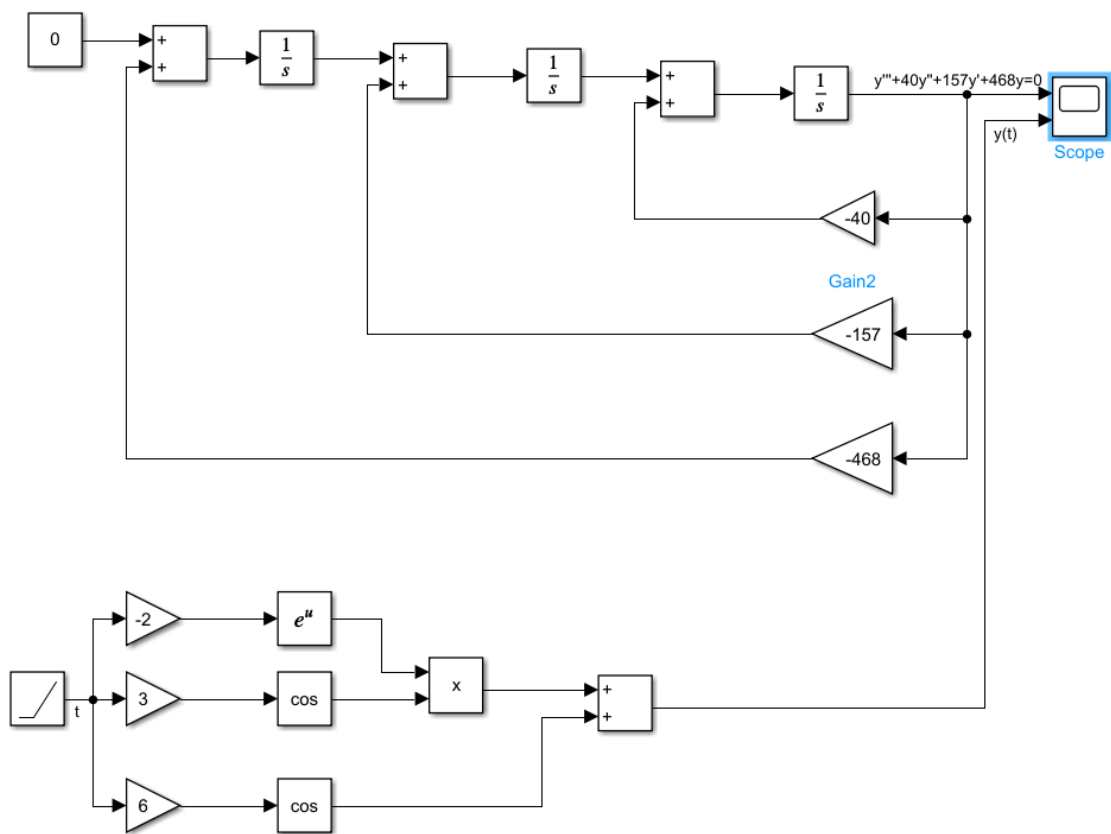


Рисунок 43. Схема моделирования

Вывод: в процессе выполнения задания 5 построили схему моделирования для систем найденной и желаемой. Анализируя, графики, видны сильные различия, несмотря на разные фазы, амплитуда, линии графика похожи.