

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

Лабораторная работа №12:
«Слежение и компенсация»
по дисциплине Теория автоматического управления

Выполнил: Студент группы
R33362 Осинина Т. С
Преподаватель: Перегудин А.А.

Санкт-Петербург, 2023

Задание №1. Компенсирующий регулятор по состоянию

Придумайте объект управления вида $\dot{x} = A_1x + B_1u + B_2\omega$ а и генератор внешнего возмущения вида $\dot{\omega} = A_2\omega$. Размерности векторов x и ω должны быть различными, каждая – не менее 3.

Должны быть выполнены условия: $\sigma(A_1) \not\subset \mathbb{C}_-$, $\sigma(A_2) \subset \overline{\mathbb{C}_+}$, пара (A_1, B_1) стабилизируема. Задайтесь целевой переменной $z = C_2x$ и найдите регулятор вида $u = K_1x + K_2\omega$, который обеспечит выполнение целевого условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0.$$

Рассмотрите уравнения объединённой системы с вектором состояния (x, ω) и выходом z в двух вариантах: разомкнутую (при $u \equiv 0$) и замкнутую (при $u = K_1x + K_2\omega$). В обоих случаях найдите матрицу наблюдаемости объединённой системы и определите её ранг.

Решение:

Сначала придумаем объект управления.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad C_2 = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Далее проверим выполнены ли все условия. Найдём собственные числа матрицы A_1

$$\det(A_1 - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$D(\lambda) = (-1-\lambda)^2(-3-\lambda) - (-1-\lambda) \Rightarrow$$
$$\lambda_1 = -3.4142, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -0.5858$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2i, \lambda_{3,4} = \pm 3i$$

Следовательно, условия $\sigma(A_1) \not\subset \mathbb{C}_-$, $\sigma(A_2) \subset \overline{\mathbb{C}_+}$ выполнены. Осталось проверить пару (A_1, B_1) на стабилизируемость. Для этого строим матрицу управляемости:

$$U = [B_1 \quad A_1 \cdot B_1 \quad A_1 \cdot A_1 \cdot B_1] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Ранг матрицы U равен $3 = n$, следовательно все собственные числа управляемы, а значит, и стабилизируемы.

Далее задались целевой переменной $z = C_2 x$, в данном случае для нас важно, чтобы компонента x_1 сводилось к 0 при $t \rightarrow \infty$.

$$z = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

После находим регулятор $u = K_1 x + K_2 \omega$.

Вычисляем матрицу K_1 , для этого синтезируем модальный регулятор.

Сначала выберем матрицы Y и Γ такую, что $\sigma(\Gamma) = \{\lambda_{1,2,3} = -3\}$:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad Y = [1 \quad 1 \quad 1]$$

Решая уравнение Сильвестра, находим матрицу K_1 .

$$\begin{cases} AP - P\Gamma = BY \\ K = -YP^{-1} \end{cases}$$

$$K_1 = [-8 \quad -12 \quad -29]$$

Далее вычисляем K_2 , решаем следующее уравнение регулятора.

$$\begin{cases} PA_2 - A_1 P = B_1 Y + B_2 \\ C_2 P + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$Y = [1.2 \quad -0.2667 \quad 1.8207 \quad 1.0483]$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.0667 & 0.1333 & -0.4966 & 0.4414 \\ 0.2 & -0.2667 & 0.8207 & 0.0483 \\ -0.0667 & -0.1333 & 0.4966 & -0.4414 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = Y - K_1 P = [2.2 \quad -6.2667 \quad 22.0966 \quad -7.6414]$$

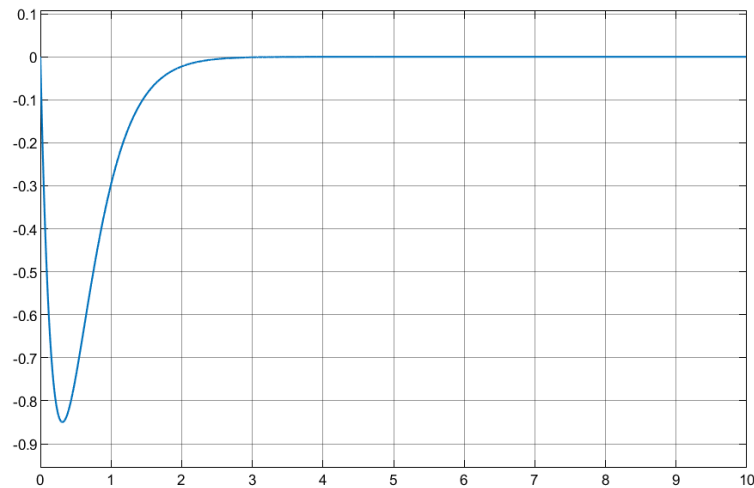


Рисунок 1. Цель управления $z(t)$

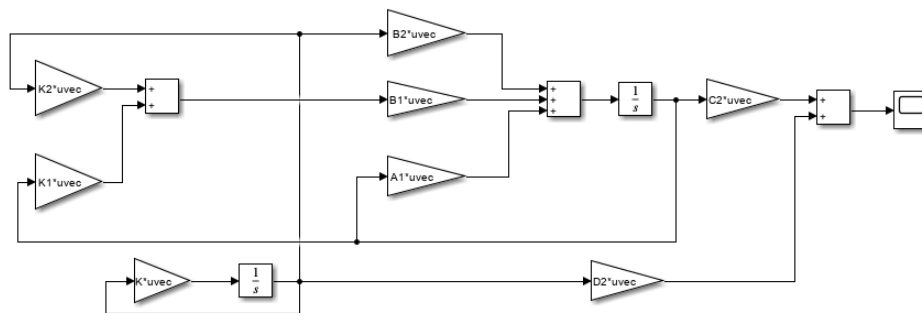


Рисунок 2. Схема моделирования

Далее рассмотрим разомкнутую систему при $u \equiv 0$.

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_2 \omega \\ \dot{\omega} = A_2 \omega \\ z = C_2 x \end{cases}$$

Рассмотрим систему в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \omega \end{bmatrix} \quad z = [C_2 \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ \omega \end{bmatrix}$$

$$A_V = \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \quad C_V = [C_2 \quad 0]$$

Матрица наблюдаемости:

$$V = \begin{bmatrix} C_V \\ C_V A_V \\ C_V A_V^2 \\ C_V A_V^3 \\ C_V A_V^4 \\ C_V A_V^5 \\ C_V A_V^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & -1 & 2 & -4 & -4 \\ -1 & 10 & -6 & -3 & -2 & -10 & -18 \\ 1 & -48 & 20 & 3 & -6 & 48 & -8 \\ -1 & 164 & -68 & 13 & 6 & 44 & 68 \\ 1 & -560 & 232 & -13 & 26 & -272 & 392 \end{bmatrix}$$

Ранг данной матрицы равен 7.

Далее рассмотрим замкнутую систему при $u = K_1x + K_2\omega$

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1x + B_1u + B_2\omega \\ \dot{\omega} = A_2\omega \\ z = C_2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = A_1x + B_1(K_1x + K_2\omega) + B_2\omega \\ \dot{\omega} = A_2\omega \\ z = C_2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1x + B_1K_1x + B_1K_2\omega + B_2\omega \\ \dot{\omega} = A_2\omega \\ z = C_2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = (A_1 + B_1K_1)x + (B_1K_2 + B_2)\omega \\ \dot{\omega} = A_2\omega \\ z = C_2x \end{cases}$$

Рассмотрим систему в матричной форме:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (A_1 + B_1K_1) & B_1K_2 + B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \omega \end{bmatrix} & z &= [C_2 \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ \omega \end{bmatrix} \\ A_V &= \begin{bmatrix} (A_1 + B_1K_1) & B_1K_2 + B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} & C_V &= [C_2 \quad 0] \end{aligned}$$

Матрица наблюдаемости:

$$V = \begin{bmatrix} C_V \\ C_V A_V \\ C_V A_V^2 \\ C_V A_V^3 \\ C_V A_V^4 \\ C_V A_V^5 \\ C_V A_V^6 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & 0.0001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.007 & 0.0013 & 0.0028 & -0.0001 & 0.0006 & -0.0021 & 0.0009 \\ -0.0055 & -0.0083 & -0.0189 & 0.0008 & -0.004 & 0.0135 & -0.0055 \\ 0.0279 & 0.0396 & 0.0918 & -0.0037 & 0.0191 & -0.0642 & 0.0263 \\ -0.1215 & 0.1674 & -0.3915 & 0.0155 & -0.0806 & 0.2715 & -0.1111 \\ 0.4887 & 0.6615 & 1.5552 & -0.0612 & 0.3186 & -1.0725 & 0.4388 \\ -1.8711 & -2.5029 & -5.9049 & 0.2317 & -1.2053 & 4.0571 & -1.6596 \end{bmatrix}$$

Ранг данной матрицы равен 3.

Вывод: в данном задании мы вычислили компенсирующий регулятор по состоянию, по графику *Рисунок 1. Цель управления $z(t)$* видим, что цель выполнена, так как график сходится к 0. Однако при построении матрицы наблюдаемости замкнутой и разомкнутой, вычислив ранг данных матриц, заметили, что замкнутая матрица не наблюдаема, таким образом мы свели влияние внешних возмущений к нулю, однако потеряли наблюдаемость системы.

Задание №2. Следящий регулятор по состоянию

Придумайте объект управления вида $\dot{x} = A_1x + B_1u$ и генератор задающего воздействия вида $\dot{\omega} = A_2\omega$. Размерности векторов x и ω должны быть различными, каждая – не менее 3.

Должны быть выполнены условия $\sigma(A_1) \not\subset \mathbb{C}_-$, $\sigma(A_2) \subset \overline{\mathbb{C}_+}$, пара (A_1, B_1) стабилизируема.

Задайтесь целевой переменной $z = C_2x + D_2\omega$ и найдите регулятор вида $u = K_1x + K_2\omega$, который обеспечит выполнение целевого условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0.$$

Рассмотрите уравнения объединённой системы с вектором состояния (x, ω) и выходом z в двух вариантах: разомкнутую (при $u \equiv 0$) и замкнутую (при $u = K_1x + K_2\omega$). В обоих случаях найдите матрицу наблюдаемости объединённой системы и определите её ранг.

Решение:

Сначала придумаем объект управления.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad C_2 = [1 \quad 0 \quad 0] \quad D_2 = [1 \quad -1 \quad 0 \quad 2]$$

Далее проверим выполнены ли все условия. Найдём собственные числа матрицы A_1

$$\det(A_1 - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$D(\lambda) = (-1-\lambda)^2(-3-\lambda) - (-1-\lambda) \Rightarrow \lambda_1 = -3.4142, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -0.5858$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2i, \lambda_{3,4} = \pm 3i$$

Следовательно, условия $\sigma(A_1) \not\subset \mathbb{C}_-$, $\sigma(A_2) \subset \overline{\mathbb{C}_+}$ выполнены. Осталось

проверить пару (A_1, B_1) на стабилизируемость. Для этого строим матрицу управляемости:

$$U = [B_1 \quad A_1 \cdot B_1 \quad A_1 \cdot A_1 \cdot B_1] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Ранг матрицы U равен $3 = n$, следовательно все собственные числа управляемы, а значит, и стабилизируемы.

Далее задались целевой переменной $z = C_2 x + D_2 \omega$, в данном случае для нас важно, чтобы компонента x_1 сводилось к 0 при $t \rightarrow \infty$.

$$z = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [1 \quad -1 \quad 0 \quad 2] \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix}$$

После находим регулятор $u = K_1 x + K_2 \omega$.

Вычисляем матрицу K_1 , для этого синтезируем модальный регулятор.

Сначала выберем матрицы Y и Γ такую, что $\sigma(\Gamma) = \{\lambda_{1,2,3} = -3\}$:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad Y = [1 \quad 1 \quad 1]$$

Решая уравнение Сильвестра, находим матрицу K_1 .

$$\begin{cases} AP - P\Gamma = BY \\ K = -Y P^{-1} \end{cases}$$

$$K_1 = [-8 \quad -12 \quad -29]$$

Далее вычисляем K_2 , решаем следующее уравнение регулятора.

$$\begin{cases} PA_2 - A_1 P = B_1 Y + B_2 \\ C_2 P + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$Y = [1.2 \quad -0.2667 \quad 1.8207 \quad 1.0483]$$

$$P = \begin{bmatrix} -0.8667 & 1.6000 & -0.9517 & -1.8207 \\ 1.0667 & -0.8667 & 0.4897 & 1.6759 \\ -0.1333 & -0.6000 & 0.9517 & -0.1793 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = Y - K_1 P = [7.0667 \quad -14.8667 \quad 21.3517 \quad 5.0207]$$

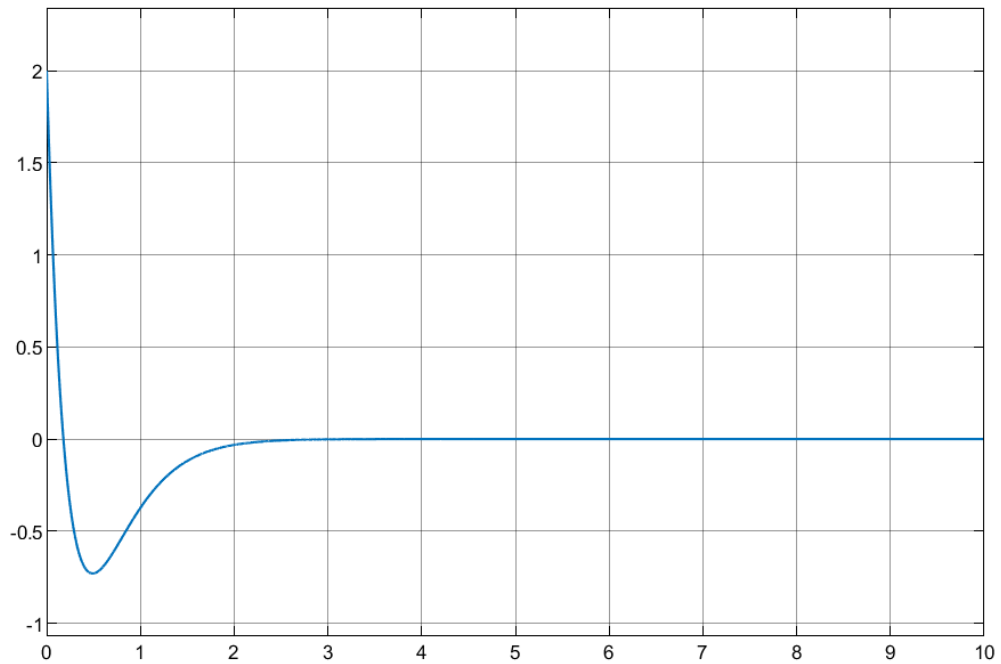


Рисунок 3. Цель управления $z(t)$

Далее рассмотрим разомкнутую систему при $u \equiv 0$.

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_2 \omega \\ \dot{\omega} = A_2 \omega \\ z = C_2 x + D_2 \omega \end{cases}$$

Рассмотрим систему в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \omega \end{bmatrix} \quad z = [C_2 \quad D_2] \begin{bmatrix} x \\ \omega \end{bmatrix}$$

$$A_V = \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \quad C_V = [C_2 \quad D_2]$$

Матрица наблюдаемости:

$$V = \begin{bmatrix} C_V \\ C_V A_V \\ C_V A_V^2 \\ C_V A_V^3 \\ C_V A_V^4 \\ C_V A_V^5 \\ C_V A_V^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & 2 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & -5 & 6 & -4 & -14 \\ -1 & 10 & -6 & -11 & -10 & -44 & -18 \\ 1 & -48 & 20 & 19 & -22 & 48 & 154 \\ -1 & 164 & -68 & 45 & 38 & -442 & 68 \\ 1 & -560 & 232 & -77 & 90 & -272 & -1066 \end{bmatrix}$$

Ранг данной матрицы равен 7.

Далее рассмотрим замкнутую систему при $u = K_1 x + K_2 \omega$

$$\begin{cases} \dot{x} = (A_1 + B_1 K_1)x + (B_1 K_2 + B_2)\omega \\ \dot{\omega} = A_2 \omega \\ z = C_2 x + D_2 \omega \end{cases}$$

Рассмотрим систему в матричной форме:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (A_1 + B_1 K_1) & B_1 K_2 + B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \omega \end{bmatrix} & z &= [C_2 \quad D_2] \begin{bmatrix} x \\ \omega \end{bmatrix} \\ A_V &= \begin{bmatrix} (A_1 + B_1 K_1) & B_1 K_2 + B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} & C_V &= [C_2 \quad D_2] \end{aligned}$$

Матрица наблюдаемости:

$$V = \begin{bmatrix} C_V \\ C_V A_V \\ C_V A_V^2 \\ C_V A_V^3 \\ C_V A_V^4 \\ C_V A_V^5 \\ C_V A_V^6 \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & 0.0001 & 0.0001 & -0.0001 & 0 & 0.0002 \\ 0.007 & 0.0013 & 0.0028 & -0.0004 & 0.00017 & -0.0026 & -0.0009 \\ -0.0055 & -0.0083 & -0.0189 & 0.00016 & -0.0097 & 0.0168 & 0.0005 \\ 0.0279 & 0.0396 & 0.0918 & -0.0058 & 0.0448 & -0.0802 & 0.0009 \\ -0.1215 & 0.1674 & -0.3915 & 0.0211 & -0.1856 & 0.3389 & -0.0109 \\ 0.4887 & 0.6615 & 1.5552 & -0.0747 & 0.7245 & -1.3389 & 0.0601 \\ -1.8711 & -2.5029 & -5.9049 & 0.2608 & -2.7184 & 5.0646 & -0.2710 \end{bmatrix}$$

Ранг данной матрицы равен 3.

Вывод: в данном задании сделали такие же выводы, как и в прошлом задании.

Задание №3. Регулятор по выходу при различных u и z

Самостоятельно придумайте матрицы для уравнений

$$\dot{x} = A_1 x + B_1 u + B_2 \omega, \dot{\omega} = A_2 \omega, y = C_1 x + D_1 \omega, z = C_2 x + D_2 \omega,$$

где измеряемой величиной является $y(t)$, а регулируемой – $z(t)$.

Размерность каждого из векторов x и ω должна быть не менее 3, при этом они могут быть одинаковыми. Выберите матрицы так, чтобы переменные y и z были различными.

Постройте регулятор по выходу, который формирует управляющее воздействие $u(t)$ на основе измеряемой величины $y(t)$ и достигает цели управления

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0.$$

Представьте уравнения регулятора в форме вход-состояние-выход, найдите его собственные числа, сравните их с собственными числами матрицы A_2 .

Решение:

Сначала придумаем объект управления.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = [2 \quad 1 \quad 0] \quad D_1 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad C_2 = [1 \quad 0 \quad 0] \quad D_2 = [1 \quad -1 \quad 0 \quad 2]$$

Построим регулятор по выходу, который формирует управляющее воздействие $u(t)$ на основе измеряемой величины $y(t)$ и достигает цели управления. Для этого найдем K_1, L_1, L_2 .

Вычисляем матрицу K_1 , для этого синтезируем модальный регулятор. Сначала выберем матрицы Y и Γ такую, что $\sigma(\Gamma) = \{\lambda_{1,2,3} = -3\}$:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad Y = [1 \quad 1 \quad 1]$$

Решая уравнение Сильвестра, находим матрицу K_1 .

$$\begin{cases} AP - P\Gamma = BY \\ K = -YP^{-1} \end{cases}$$

$$K_1 = [-8 \quad -12 \quad -29]$$

Далее вычисляем L_1, L_2 . Выберем матрицу Γ .

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 \end{bmatrix}$$

$$C_V = [C_1 \quad D_1] = [2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

$$A_V = \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Проверим пару $([C_1 \quad D_1] \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix})$ на обнаруживаемость.

$$V = \begin{bmatrix} C_V \\ C_V A_V \\ C_V A_V^2 \\ C_V A_V^3 \\ C_V A_V^4 \\ C_V A_V^5 \\ C_V A_V^6 \end{bmatrix} \quad \text{rank}(V) = 7$$

Следовательно, пара $([C_1 \quad D_1] \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix})$ на обнаруживаема.

Вычислим L_1, L_2 .

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1.6168 \\ -3.5187 \\ -2.1361 \end{bmatrix} \quad L_2 = \begin{bmatrix} 6.8635 \\ -0.6461 \\ -7.0148 \\ -4.6547 \end{bmatrix}$$

Находим K_2 .

$$K_2 = [7.0667 \quad -14.8667 \quad 21.3517 \quad 5.0207]$$

Найдем уравнения регулятора в форме вход-состояние-выход, найдем его собственные числа, сравним их с собственными числами матрицы A_2 .

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A_1 \hat{x} + B_1 u + B_2 \hat{\omega} + L_1(\hat{y} - y) \\ \dot{\hat{\omega}} = A_2 \hat{\omega} + L_2(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C_1 \hat{x} + D_1 \hat{\omega} \\ u = K_1 \hat{x} + K_2 \hat{\omega} \end{cases}$$

Представим уравнения в матричной форме.

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{\omega}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 K_1 + L_1 C_1 & B_1 K_2 + B_2 + L_1 D_1 \\ L_2 C_1 & A_2 + L_2 D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -L_1 \\ -L_2 \end{bmatrix} y$$

Находим собственные числа матрицы $\begin{bmatrix} A_1 + B_1 K_1 + L_1 C_1 & B_1 K_2 + B_2 + L_1 D_1 \\ L_2 C_1 & A_2 + L_2 D_2 \end{bmatrix}$

$$\lambda_1 = -11.6627$$

$$\lambda_{2,3} = 0.8978 \pm 5.6345i$$

$$\lambda_4 = -5.4788$$

$$\lambda_5 = -0.5498$$

$$\lambda_{6,7} = -0.2022 \pm 2.3837i$$

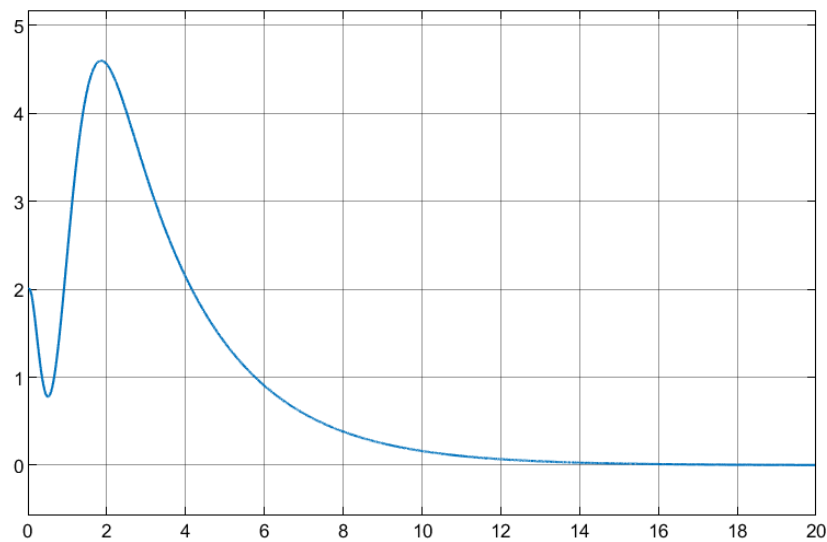


Рисунок 4. Цель управления $z(t)$

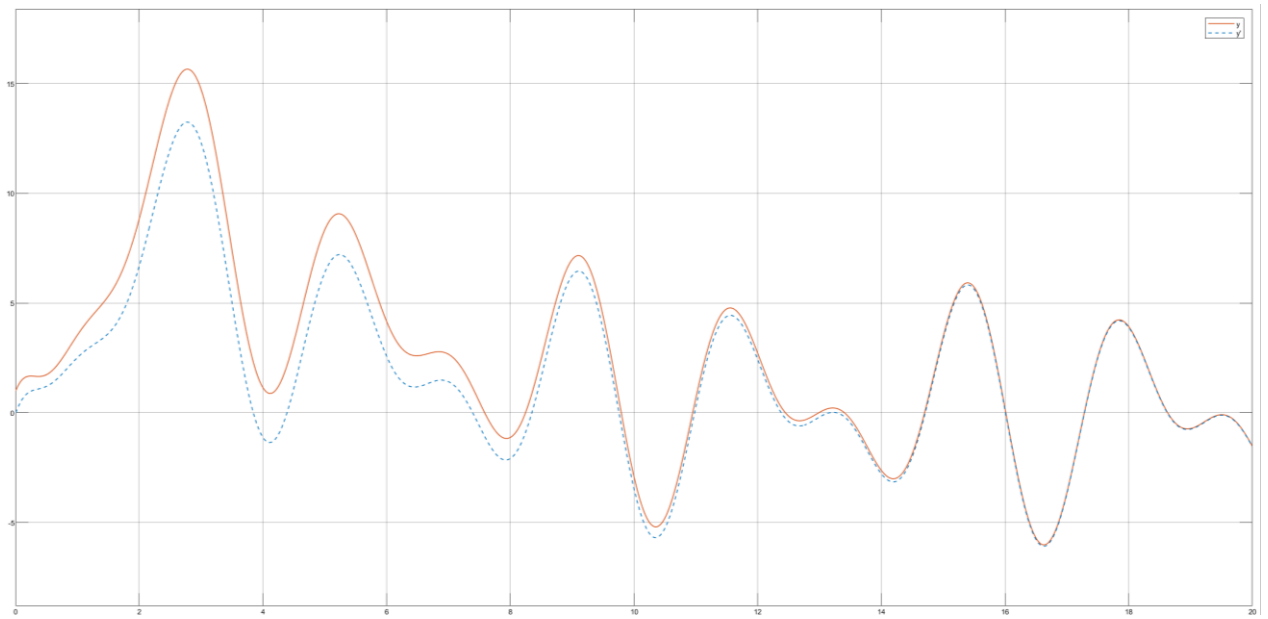


Рисунок 5. Графики $y(t)$ и $y'(t)$

Вывод: в данном задании был смоделирован регулятор по выходу при различных u и z . Сравнивая собственные числа матрицы A_2 и $\begin{bmatrix} A_1 + B_1K_1 + L_1C_1 & B_1K_2 + B_2 + L_1D_1 \\ L_2C_1 & A_2 + L_2D_2 \end{bmatrix}$ можно заметить, что одинаковых чисел нет, но есть близкие по значению.

Задание №4. Регулятор по выходу при одинаковых y и z

Самостоятельно придумайте матрицы для уравнений

$$\dot{x} = A_1 x + B_1 u + B_2 \omega, \dot{\omega} = A_2 \omega, y = z = Cx + D\omega,$$

где измеряемая величина $y(t)$ и регулируемая величина $z(t)$ совпадают.

Размерность каждого из векторов x и ω должна быть не менее 3, при этом они могут быть одинаковыми.

Постройте регулятор по выходу, который формирует управляющее воздействие $u(t)$ на основе измеряемой величины $y(t)$ и достигает цели управления

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

Представьте уравнения регулятора в форме вход-состояние-выход, найдите его собственные числа, сравните их с собственными числами матрицы A_2 .

Решение:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [2 \quad 1 \quad 0] \quad D = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Аналогичным способом (как и в предыдущем задании) вычислим матрицы регулятора.

$$K_1 = [-8 \quad -12 \quad -29]$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1.6168 \\ -3.5187 \\ -2.1361 \end{bmatrix} \quad L_2 = \begin{bmatrix} 6.8635 \\ -0.6461 \\ -7.0148 \\ -4.6547 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = [3.4897 \quad -6.1241 \quad 23.4000 \quad -2.8000]$$

Представим уравнения в матричной форме.

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{\omega}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 K_1 + L_1 C & B_1 K_2 + B_2 + L_1 D \\ L_2 C & A_2 + L_2 D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -L_1 \\ -L_2 \end{bmatrix} y$$

Определим собственные числа матрицы $\begin{bmatrix} A_1 + B_1 K_1 + L_1 C & B_1 K_2 + B_2 + L_1 D \\ L_2 C & A_2 + L_2 D \end{bmatrix}$.

$$\lambda_1 = -10.2343$$

$$\lambda_{2,3} = 0 \pm 3i$$

$$\lambda_4 = -5.5193$$

$$\lambda_5 = -0.5464$$

$$\lambda_{6,7} = 0 \pm 2i$$

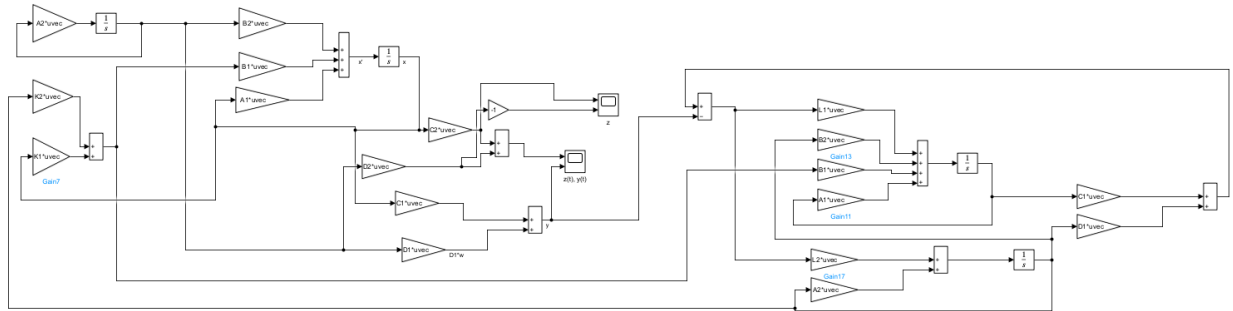


Рисунок 6. Схема моделирования

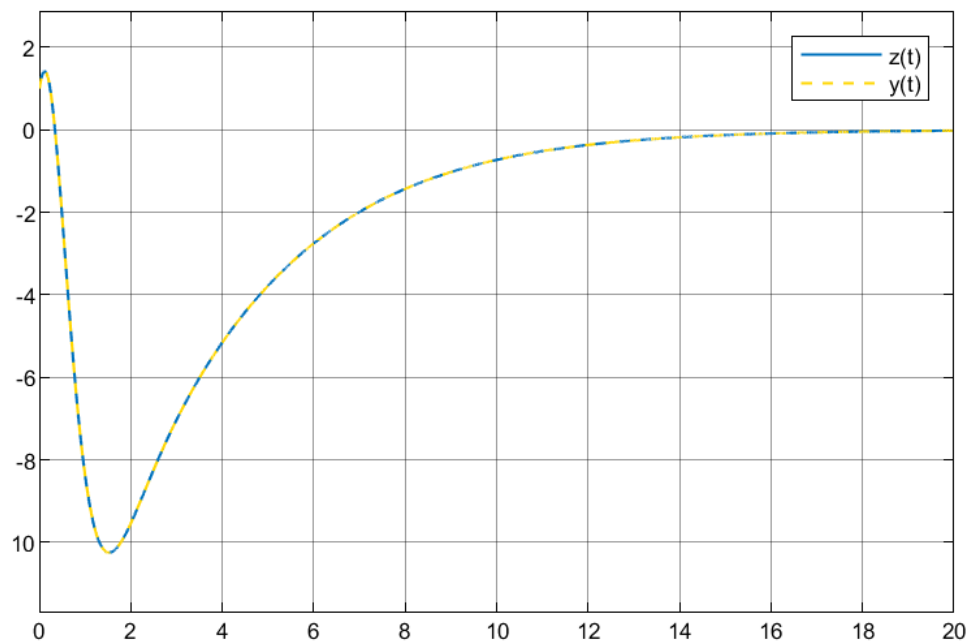


Рисунок 7. Графики цели управления $y(t) = z(t)$

Вывод: в данном задании был смоделирован регулятор по выходу при одинаковых y и z . Сравнивая собственные числа матрицы A_2 и $\begin{bmatrix} A_1 + B_1 K_1 + L_1 C & B_1 K_2 + B_2 + L_1 D \\ L_2 C & A_2 + L_2 D \end{bmatrix}$ можно заметить, что собственные числа A_2 соответствуют данной матрице. Следовательно, мы подтвердили принцип внутренней модели. Также график $y(t)$ сходится к 0, значит, регулятор был рассчитан верно.

Задание №5. Тележка и меандр

Постройте математическую модель простого тела (тележки), в которой измеряемым выходом $y(t)$ является её координата.

Задайте сигнал $g_{ideal}(t)$ в виде меандра (англ. square wave) с произвольной амплитудой и периодом. Разложите сигнал $g_{ideal}(t)$ в ряд Фурье, возьмите конечное число гармоник и получите соответствующий приближённый сигнал $g(t)$, который и будет являться эталонным сигналом для вашего тела (тележки). Сформируйте конечномерный линейный генератор (систему вида $\dot{\omega} = \Gamma\omega$), которая способна порождать сигнал $g(t)$.

Постройте регулятор, который принимает на вход разность $g(t) - y(t)$ и формирует управляющее воздействие $u(t)$, которое обеспечивает выполнение целевого условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (g(t) - y(t)) = 0.$$

Сделайте выводы о достоинствах и недостатках такого регулятора.

Решение:

Сначала построим математическую модель тележки:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 u + B_2 \omega \\ y = C_1 x + D_1 \omega \\ z = C_2 x + D_2 \omega \end{cases}$$

$$u = K_1 x + K_2 \omega$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad B_2 = 0 \text{ (так как выполняем задачу слежения)}$$

$$C_1 = [1 \quad 0] \quad C_2 = [-1 \quad 0] \quad D_1 = [1 \quad 1 \quad 2 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{7} & 0 \end{bmatrix}$$

Зададим сигнал $g_{ideal}(t)$ в виде меандра с произвольной амплитудой и периодом ($\omega = 2\pi f$):

$$\begin{aligned} g_{ideal}(t) &= \frac{4A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi(2k-1)ft)}{2k-1} \\ &= \frac{4A}{\pi} \left(\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \frac{1}{7} \sin(7\omega t) + \dots \right) \end{aligned}$$

Для упрощения формулы выберем $A = \frac{1}{4}, f = \frac{1}{2\pi}$

$$g_{ideal}(t) = \sin(t) + \frac{1}{3} \sin(3t) + \frac{1}{5} \sin(5t) + \frac{1}{7} \sin(7t) + \dots$$

Сформируем конечномерный линейный генератор (систему вида $\dot{\omega} = \Gamma \omega$), которая способна порождать сигнал $g(t)$.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$w(t) = [\sin(t) \quad \cos(t) \quad \sin(3t) \quad \cos(3t) \quad \sin(5t) \quad \cos(5t) \quad \sin(7t) \quad \cos(7t)]^T$$

Синтезируем регулятор, который принимает на вход разность $g(t) - y(t)$ и формирует управляющее воздействие $u(t)$, которое обеспечивает выполнение целевого условия: $\lim_{t \rightarrow \infty} (g(t) - y(t)) = 0$.

$$K_1 = [-8 \quad -4]$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} -0.012 \\ -0.0011 \end{bmatrix} \quad L_2 = \begin{bmatrix} -0.0114 \\ 0.0356 \\ 1.0223 \\ -0.0039 \\ 0.3614 \\ 8.2473 \\ 16.7665 \\ -19.3796 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = [7.0000 \quad 4.0000 \quad -0.3333 \quad 4.0000 \quad -3.4000 \quad 4.0000 \quad -5.8571 \quad 4.0000]$$

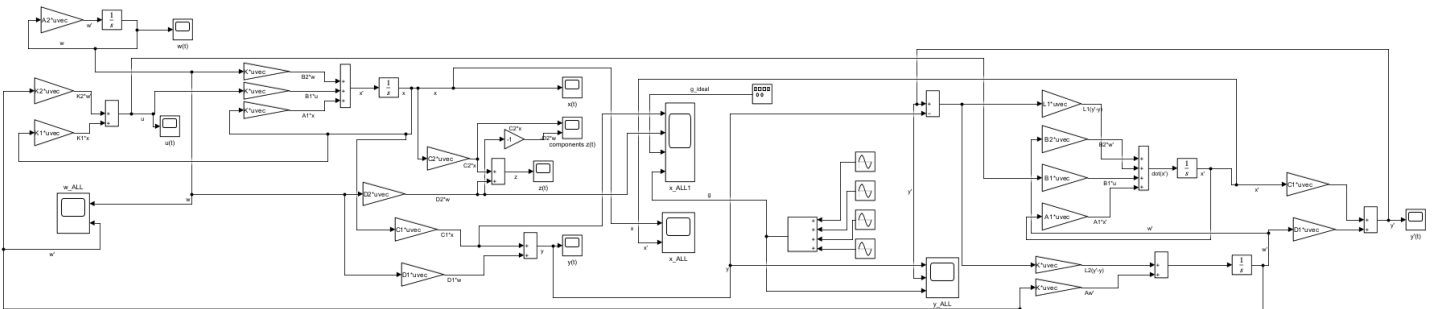


Рисунок 8. Схема моделирования

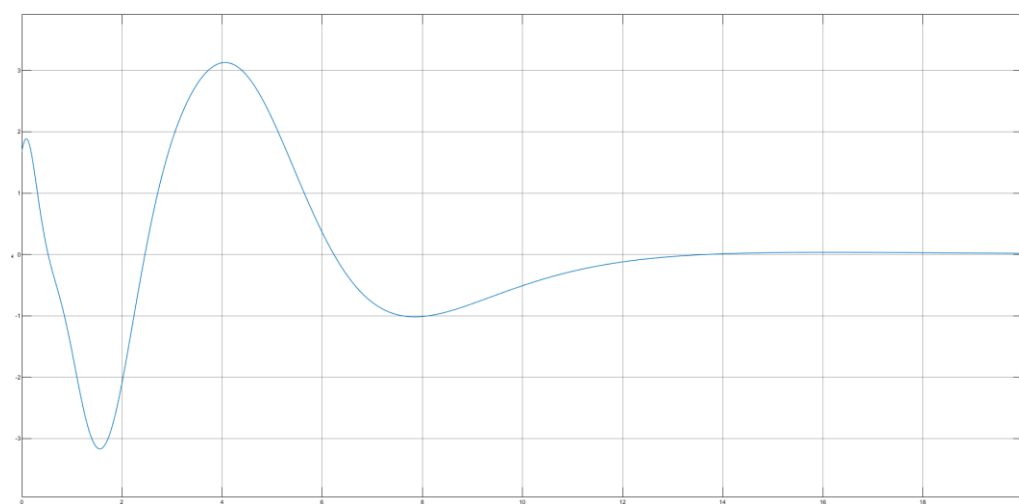


Рисунок 9. График $z(t)$

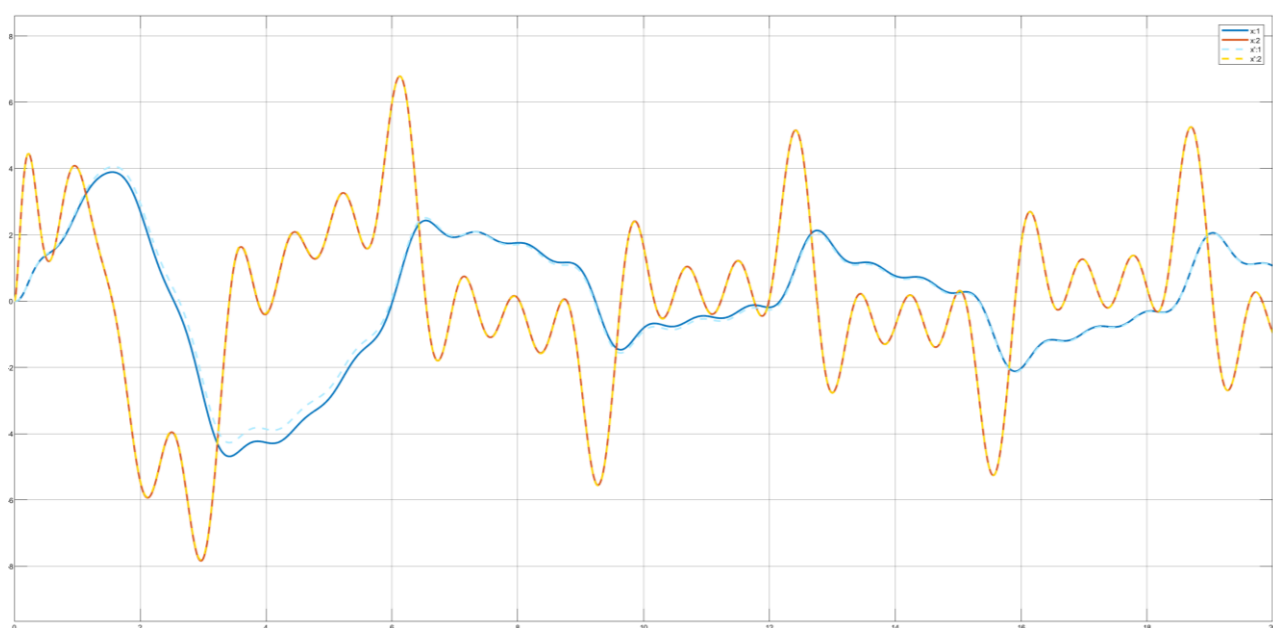


Рисунок 10. Графики компонент $x(t)$ и $\hat{x}(t)$

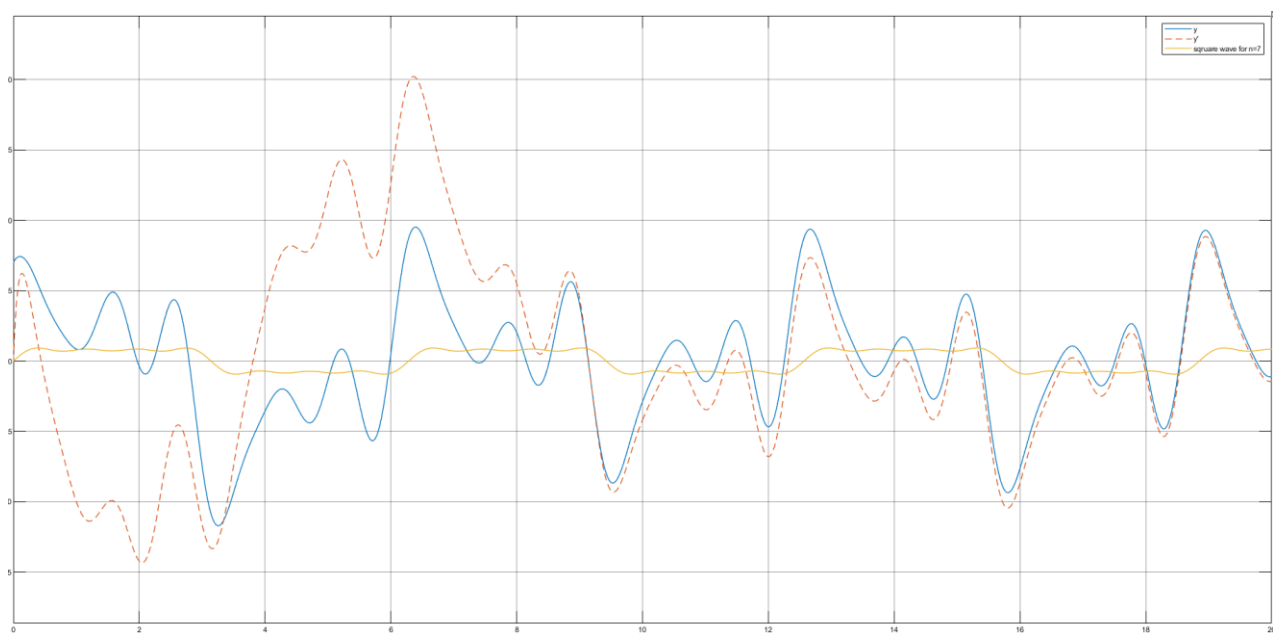


Рисунок 11. Графики компонент $y(t)$ и $\hat{y}(t)$

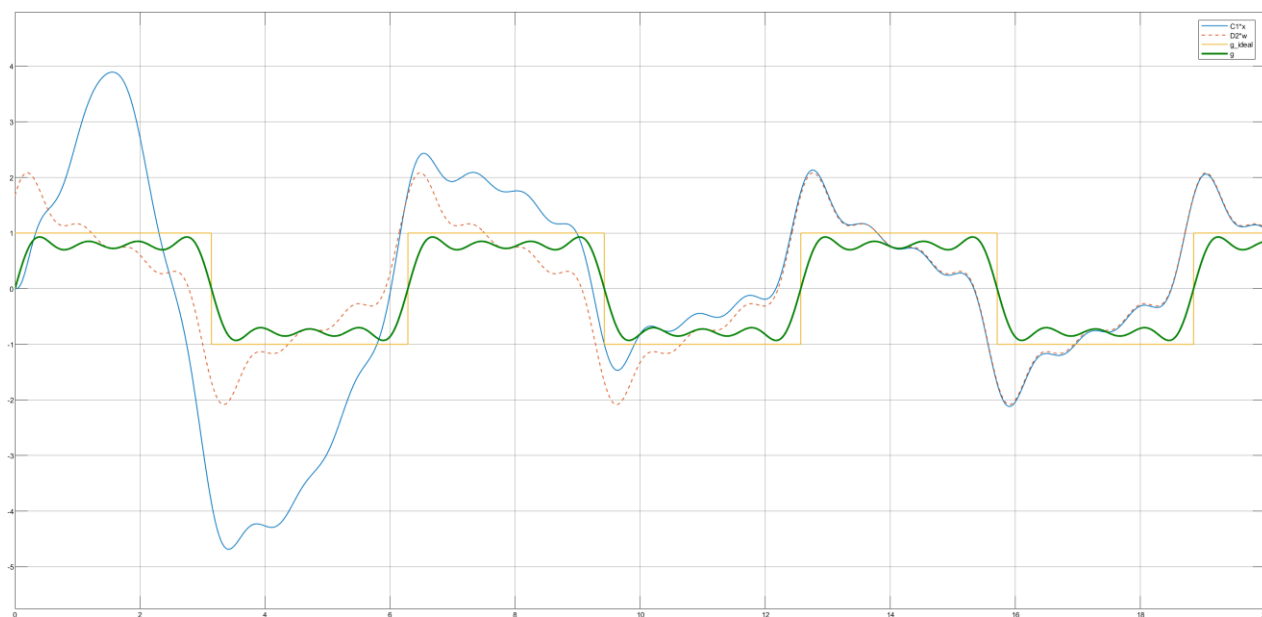


Рисунок 12. График сигналов

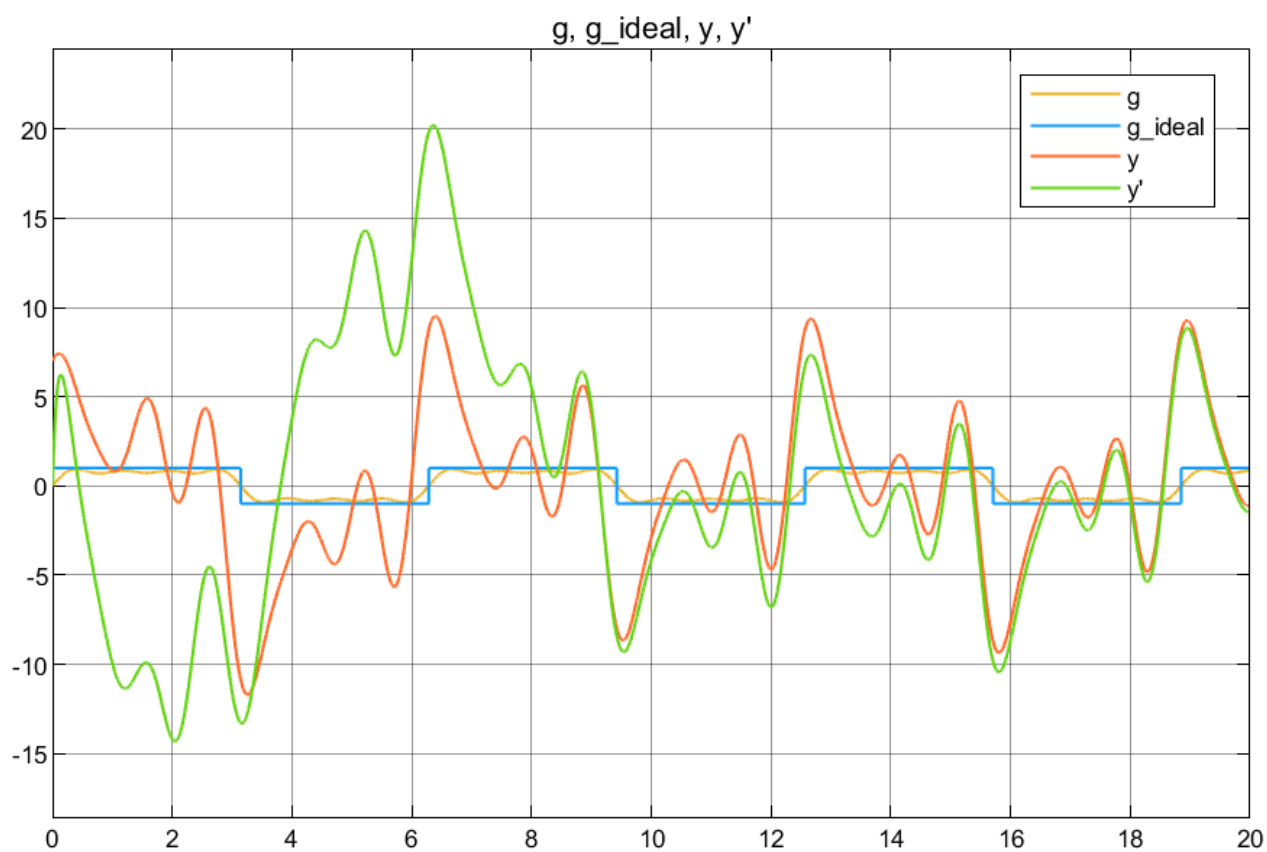


Рисунок 13. График сигналов $g(t)$ и $y(t)$

Вывод: для тележки был создан регулятор, который выполняет задачу слежения по выходу. График $z(t)$ сходится к 0, не зашумленный выход сходится к меандру.

Код по лабораторной работе №12

Содержание

Задание №1.....	1
Задание №2.....	4
Задание №3.....	7
Задание №4.....	11
Задание №5.....	14

Задание №1

Сначала придумываем объект управления

```
A1 = [-1 0 0; 0 -3 1; 0 1 -1]
```

```
A1 = 3x3
    -1     0     0
     0    -3     1
     0     1    -1
```

```
B1 = [-1; 1; 0]
```

```
B1 = 3x1
    -1
     1
     0
```

```
B2 = [1 0 0 0; 0 0 0 2; 0 0 1 1]
```

```
B2 = 3x4
     1     0     0     0
     0     0     0     2
     0     0     1     1
```

```
A2 = [0 2 0 0; -2 0 0 0; 0 0 0 3; 0 0 -3 0]
```

```
A2 = 4x4
     0     2     0     0
    -2     0     0     0
     0     0     0     3
     0     0    -3     0
```

```
C2 = [1 0 1]
```

```
C2 = 1x3
     1     0     1
```

```
D2 = [0 0 0 0]
```

```
D2 = 1x4
     0     0     0     0
```

Далее проверяем выполнения условий

```
eig(A1)
```

```
ans = 3x1
    -3.4142
```

```
-1.0000  
-0.5858
```

```
eig(A2)
```

```
ans = 4x1 complex  
 0.0000 + 2.0000i  
 0.0000 - 2.0000i  
 0.0000 + 3.0000i  
 0.0000 - 3.0000i
```

```
[B1 A1*B1 A1*A1*B1]
```

```
ans = 3x3  
 -1     1     -1  
  1    -3    10  
  0     1     -4
```

```
rank([B1 A1*B1 A1*A1*B1])
```

```
ans = 3
```

Синтезируем регулятор

```
G = [-3 1 0; 0 -3 1; 0 0 -3]
```

```
G = 3x3  
 -3     1     0  
  0    -3     1  
  0     0    -3
```

```
Y1 = [1 1 1]
```

```
Y1 = 1x3  
  1     1     1
```

```
V = [Y1; Y1*G; Y1*G*G]
```

```
V = 3x3  
  1     1     1  
 -3    -2    -2  
  9     3     4
```

```
r=rank(V)%проверяем ранг
```

```
r = 3
```

```
cvx_begin sdp  
variable P1(3,3)  
A1*P1 - P1*G == B1*Y1;  
cvx_end
```

```
Homogeneous problem detected; solution determined analytically.  
Status: Solved  
Optimal value (cvx_optval): +0
```

```
K1 = -Y1*inv(P1)
```

```
K1 = 1×3
    -8.0000  -12.0000  -29.0000
```

Находим K2

```
cvx_begin sdp
variable P2(3,4)
variable Y2(1,4)
P2*A2 - A1*P2 == B1*Y2 + B2;
C2*P2 + D2 == 0;
cvx_end
```

```
Homogeneous problem detected; solution determined analytically.
Status: Solved
Optimal value (cvx_optval): +0
```

Y2

```
Y2 = 1×4
    1.2000  -0.2667    1.8207    1.0483
```

P2

```
P2 = 3×4
    0.0667    0.1333   -0.4966    0.4414
    0.2000   -0.2667    0.8207    0.0483
   -0.0667   -0.1333    0.4966   -0.4414
```

K2 = Y2 - K1*P2

```
K2 = 1×4
    2.2000  -6.2667   22.0966  -7.6414
```

Строим матрицы наблюдаемости и находим их ранги

```
AV = [A1 B2;
      zeros(4,3) A2];
CV = [C2 0 0 0 0];
V1 = [CV;
      CV*AV;
      CV*AV^2;
      CV*AV^3;
      CV*AV^4;
      CV*AV^5;
      CV*AV^6];
rank(V1)
```

```
ans = 7
```

```
AV= [A1+B1*K1 B2+B1*K2;
     zeros(4,3) A2];
CV = [C2 0 0 0 0];
V1 = [CV;
      CV*AV;
```

```
CV*AV^2
CV*AV^3;
CV*AV^4;
CV*AV^5;
CV*AV^6];
rank(V1)
```

```
ans = 3
```

Задание №2

```
A1 = [-1 0 0; 0 -3 1; 0 1 -1]
```

```
A1 = 3×3
    -1     0     0
     0    -3     1
     0     1    -1
```

```
B1 = [-1; 1; 0]
```

```
B1 = 3×1
    -1
     1
     0
```

```
B2 = [1 0 0 0; 0 0 0 2; 0 0 1 1]
```

```
B2 = 3×4
     1     0     0     0
     0     0     0     2
     0     0     1     1
```

```
A2 = [0 2 0 0; -2 0 0 0; 0 0 0 3; 0 0 -3 0]
```

```
A2 = 4×4
     0     2     0     0
    -2     0     0     0
     0     0     0     3
     0     0    -3     0
```

```
C2 = [1 0 1]
```

```
C2 = 1×3
     1     0     1
```

```
D2 = [1 -1 0 2]
```

```
D2 = 1×4
     1    -1     0     2
```

```
eig(A1)
```

```
ans = 3×1
   -3.4142
   -1.0000
   -0.5858
```

```
eig(A2)
```

```
ans = 4×1 complex
    0.0000 + 2.0000i
    0.0000 - 2.0000i
    0.0000 + 3.0000i
    0.0000 - 3.0000i
```

```
[B1 A1*B1 A1*A1*B1]
```

```
ans = 3×3
    -1     1     -1
     1    -3    10
     0     1     -4
```

```
rank([B1 A1*B1 A1*A1*B1])
```

```
ans = 3
```

```
G = [-3 1 0; 0 -3 1; 0 0 -3]
```

```
G = 3×3
    -3     1     0
     0    -3     1
     0     0    -3
```

```
Y1 = [1 1 1]
```

```
Y1 = 1×3
     1     1     1
```

```
V = [Y1; Y1*G; Y1*G*G]
```

```
V = 3×3
     1     1     1
    -3    -2    -2
     9     3     4
```

```
cvx_begin sdp
variable P1(3,3)
A1*P1 - P1*G == B1*Y1;
cvx_end
```

Homogeneous problem detected; solution determined analytically.
 Status: Solved
 Optimal value (cvx_optval): +0

```
K1 = -Y1*inv(P1)
```

```
K1 = 1×3
   -8.0000  -12.0000  -29.0000
```

```
cvx_begin sdp
variable P2(3,4)
variable Y2(1,4)
P2*A2 - A1*P2 == B1*Y2 + B2;
C2*P2 + D2 == 0;
cvx_end
```


Homogeneous problem detected; solution determined analytically.
 Status: Solved
 Optimal value (cvx_optval): +0

Y2

Y2 = 1×4
 5.0667 0.1333 -4.5103 4.6759

P2

P2 = 3×4
 -0.8667 1.6000 -0.9517 -1.8207
 1.0667 -0.8667 0.4897 1.6759
 -0.1333 -0.6000 0.9517 -0.1793

K2 = Y2 - K1*P2

K2 = 1×4
 7.0667 -14.8667 21.3517 5.0207

AV = [A1 B2;
 zeros(4,3) A2]

AV = 7×7
 -1 0 0 1 0 0 0
 0 -3 1 0 0 0 2
 0 1 -1 0 0 1 1
 0 0 0 0 2 0 0
 0 0 0 -2 0 0 0
 0 0 0 0 0 0 3
 0 0 0 0 0 -3 0

CV = [C2 D2];

V1 = [CV;
 CV*AV;
 CV*AV^2
 CV*AV^3;
 CV*AV^4;
 CV*AV^5;
 CV*AV^6];

rank(V1)

ans = 7

AV= [A1+B1*K1 B2+B1*K2;
 zeros(4,3) A2];

CV = [C2 D2];

V1 = [CV;
 CV*AV;
 CV*AV^2
 CV*AV^3;
 CV*AV^4;
 CV*AV^5;
 CV*AV^6];

```
rank(V1)
```

```
ans = 3
```

Задание №3

Матрицы для уравнений

```
A1 = [-1 0 0; 0 -3 1; 0 1 -1]
```

A1 = 3×3

-1	0	0
0	-3	1
0	1	-1

```
B1 = [-1; 1; 0]
```

B1 = 3×1

-1
1
0

```
B2 = [1 0 0 0; 0 0 0 2; 0 0 1 1]
```

B2 = 3×4

1	0	0	0
0	0	0	2
0	0	1	1

```
A2 = [0 2 0 0; -2 0 0 0; 0 0 0 3; 0 0 -3 0]
```

A2 = 4×4

0	2	0	0
-2	0	0	0
0	0	0	3
0	0	-3	0

```
C2 = [1 0 1]
```

C2 = 1×3

1	0	1
---	---	---

```
D2 = [1 -1 0 2]
```

D2 = 1×4

1	-1	0	2
---	----	---	---

```
C1 = [2 1 0]
```

C1 = 1×3

2	1	0
---	---	---

```
D1 = [0 0 1 0]
```

D1 = 1×4

0	0	1	0
---	---	---	---

Определяем собственные числа матриц A1, A2

```
eig(A1)
```

```
ans = 3×1
-3.4142
-1.0000
-0.5858
```

```
eig(A2)
```

```
ans = 4×1 complex
0.0000 + 2.0000i
0.0000 - 2.0000i
0.0000 + 3.0000i
0.0000 - 3.0000i
```

Определяем стабилизируемость системы

```
u=[B1 A1*B1 A1*A1*B1 A1*A1*A1*B1]
```

```
u = 3×4
-1    1    -1    1
 1   -3   10  -34
 0    1   -4   14
```

```
rank(u)
```

```
ans = 3
```

Проверим пару (CV, AV) на обнаруживаемость

```
CV=[C1 D1]
```

```
CV = 1×7
 2    1    0    0    0    1    0
```

```
AV = [A1 B2;
zeros(4,3) A2]
```

```
AV = 7×7
-1    0    0    1    0    0    0
 0   -3    1    0    0    0    2
 0    1   -1    0    0    1    1
 0    0    0    0    2    0    0
 0    0    0   -2    0    0    0
 0    0    0    0    0    0    3
 0    0    0    0    0   -3    0
```

```
V1 =[CV;
CV*AV;
CV*AV^2
CV*AV^3;
CV*AV^4;
CV*AV^5;
CV*AV^6]
```

```
V1 = 7×7
 2    1    0    0    0    1 ...
-2   -3    1    2    0    0
 2   10   -4   -2    4   -14
-2  -34   14   -6   -4   11
 2   116  -48    6  -12   92
```

-2	-396	164	26	12	15
2	1352	-560	-26	52	-1216

```
rank(V1)
```

```
ans = 7
```

Синтезируем регулятор

```
G = [-3 1 0; 0 -3 1; 0 0 -3]
```

```
G = 3x3
    -3     1     0
     0    -3     1
     0     0    -3
```

```
Y1 = [1 1 1]
```

```
Y1 = 1x3
     1     1     1
```

```
V = [Y1; Y1*G; Y1*G*G]
```

```
V = 3x3
     1     1     1
    -3    -2    -2
     9     3     4
```

```
if rank(V) == 3
    cvx_begin sdp
        variable P1(3,3)
        variable Q1(3,3)
        A1*P1 - P1*G == B1*Y1;

        cvx_end
        K1 = -Y1*inv(P1);
end
```

Homogeneous problem detected; solution determined analytically.
Status: Solved
Optimal value (cvx_optval): +0

```
K1
```

```
K1 = 1x3
    -8.0000  -12.0000  -29.0000
```

Задаем матрицу G

```
G = [-3 1 0 0 0 0 0;
     0 -3 1 0 0 0 0;
     0 0 -3 0 0 0 0;
     0 0 0 -0.5 0 0 0;
     0 0 0 0 -2 0 0;
     0 0 0 0 0 -0.4 1;
     0 0 0 0 0 0 -0.4];
```

```
C = [C1 D1]
```

```
C = 1×7
    2     1     0     0     0     1     0
```

```
A = [A1 B2; zeros(4,3) A2]
```

```
A = 7×7
   -1     0     0     1     0     0     0
     0    -3     1     0     0     0     2
     0     1    -1     0     0     1     1
     0     0     0     0     2     0     0
     0     0     0    -2     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     3
     0     0     0     0     0    -3     0
```

```
eig(A)
```

```
ans = 7×1
   -1.0000
   -3.4142
   -0.5858
    0.0000
    0.0000
    0.0000
    0.0000
```

```
y = [1; 1; 1; 1; 1; 1; 1];
```

Проверяем управляемость

```
u = rank([y G*y (G^2)*y (G^3)*y (G^4)*y (G^5)*y (G^6)*y])
```

```
u = 7
```

Вычисляем матрицы L1, L2

```
cvx_begin sdp
    variable p(7,7)
    G*p - p*A == y*C;
cvx_end
```

```
Homogeneous problem detected; solution determined analytically.
Status: Solved
Optimal value (cvx_optval): +0
```

```
l = inv(p)*y;
L1 = l(1:3)
```

```
L1 = 3×1
    1.6168
   -3.5187
   -2.1361
```

```
L2 = l(4:7)
```

```
L2 = 4×1
    6.8635
```

-0.6461
-7.0148
-4.6547

Находим K2

```
cvx_begin sdp
    variable P(3,4)
    variable Y(1,4)
    P*A2 - A1*P == B1*Y + B2;
    C2*P + D2 == 0;
cvx_end
```

Homogeneous problem detected; solution determined analytically.
Status: Solved
Optimal value (cvx_optval): +0

$K2 = Y - K1 \cdot P$

$K2 = 1 \times 4$
7.0667 -14.8667 21.3517 5.0207

Определяем собственные числа уравнения регулятора

```
eig([A1+B1*K1+L1*C1 B2+B1*K2+L1*D1; L2*C1 A2+L2*D1])
```

ans = 7x1
-11.6627
0.8978
0.8978
-5.4788
-0.5498
-0.2022
-0.2022

Задание №4

$A1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$A1 = 3 \times 3$
-1 0 0
0 -3 1
0 1 -1

$B1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$B1 = 3 \times 1$
-1
1
0

$B2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$B2 = 3 \times 4$
1 0 0 0
0 0 0 2
0 0 1 1

```
A2 = [0 2 0 0; -2 0 0 0; 0 0 0 3; 0 0 -3 0]
```

A2 = 4x4

```
0    2    0    0
-2   0    0    0
0    0    0    3
0    0   -3    0
```

```
C = [2 1 0]
```

C = 1x3

```
2    1    0
```

```
D = [0 0 1 0]
```

D = 1x4

```
0    0    1    0
```

```
C1=C
```

C1 = 1x3

```
2    1    0
```

```
C2=C
```

C2 = 1x3

```
2    1    0
```

```
D1=D
```

D1 = 1x4

```
0    0    1    0
```

```
D2=D
```

D2 = 1x4

```
0    0    1    0
```

```
G = [-3 1 0; 0 -3 1; 0 0 -3]
```

G = 3x3

```
-3    1    0
0   -3    1
0    0   -3
```

```
Y1 = [1 1 1]
```

Y1 = 1x3

```
1    1    1
```

```
V = [Y1; Y1*G; Y1*G*G]
```

V = 3x3

```
1    1    1
-3   -2   -2
9     3     4
```

```
if rank(V) == 3
    cvx_begin sdp
        variable P1(3,3)
```

```

    variable Q1(3,3)
    A1*P1 - P1*G == B1*Y1;

    cvx_end
    K1 = -Y1*inv(P1);
end

```

Homogeneous problem detected; solution determined analytically.
 Status: Solved
 Optimal value (cvx_optval): +0

K1

```

K1 = 1x3
    -8.0000  -12.0000  -29.0000

```

```

G = [-3 1 0 0 0 0 0;
      0 -3 1 0 0 0 0;
      0 0 -3 0 0 0 0;
      0 0 0 -0.5 0 0 0;
      0 0 0 0 -2 0 0;
      0 0 0 0 0 -0.4 1;
      0 0 0 0 0 0 -0.4];
C = [C1 D1]

```

```

C = 1x7
      2      1      0      0      0      1      0

```

```

A = [A1 B2; zeros(4,3) A2]

```

```

A = 7x7
    -1      0      0      1      0      0      0
      0     -3      1      0      0      0      2
      0      1     -1      0      0      1      1
      0      0      0      0      2      0      0
      0      0      0     -2      0      0      0
      0      0      0      0      0      0      3
      0      0      0      0      0     -3      0

```

eig(A)

```

ans = 7x1
    -1.0000
    -3.4142
    -0.5858
     0.0000
     0.0000
     0.0000
     0.0000

```

```

y = [1; 1; 1; 1; 1; 1; 1];
u = rank([y G*y (G^2)*y (G^3)*y (G^4)*y (G^5)*y (G^6)*y])

```

u = 7

```

cvx_begin sdp

```



```

    variable p(7,7)
    G*p - p*A == y*C;
cvx_end

```

Homogeneous problem detected; solution determined analytically.
 Status: Solved
 Optimal value (cvx_optval): +0

```

l = inv(p)*y;
L1 = l(1:3)

```

```

L1 = 3x1
    1.6168
   -3.5187
   -2.1361

```

```

L2 = l(4:7)

```

```

L2 = 4x1
    6.8635
   -0.6461
   -7.0148
   -4.6547

```

```

cvx_begin sdp
    variable P(3,4)
    variable Y(1,4)
    P*A2 - A1*P == B1*Y + B2;
    C2*P + D2 == 0;
cvx_end

```

Homogeneous problem detected; solution determined analytically.
 Status: Solved
 Optimal value (cvx_optval): +0

```

K2 = Y - K1*P

```

```

K2 = 1x4
    3.4897   -6.1241   23.4000   -2.8000

```

```

eig([A1+B1*K1+L1*C1 B2+B1*K2+L1*D1; L2*C1 A2+L2*D1])

```

```

ans = 7x1
   -10.2343
    -5.5193
     0.0000
     0.0000
    -0.0000
    -0.0000
    -0.5464

```

Задание №5

```

A1 = [0 1; 0 0]

```

```

A1 = 2x2
     0     1

```

0 0

B2 = [0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0]

B2 = 2×8

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

A2 = [0 1 0 0 0 0 0 0; -1 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 3 0 0 0 0; 0 0 -3 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 5 0 0; 0 0 0 0 -5 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 7; 0 0 0 0 0 0 -7 0;]

A2 = 8×8

0	1	0	0	0	0	0	0
-1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	3	0	0	0	0
0	0	-3	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	5	0	0
0	0	0	0	-5	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	7
0	0	0	0	0	0	-7	0

B1 = [0; 1]

B1 = 2×1

0
1

C1 = [1 0]

C1 = 1×2

1 0

C2 = -C1

C2 = 1×2

-1 0

D1 = [1 1 2 0 2 0 0 1]

D1 = 1×8

1 1 2 0 2 0 0 1

D2 = [1 0 1/3 0 1/5 0 1/7 0];

Находим K1

```
G = [-2 2; -2 -2];
y = [1 1];
V = [y; y*G];
if rank(V) == 2
    cvx_begin sdp
        variable p(2,2)
        A1*p - p*G == B1*y;
    cvx_end
    K1 = -y*inv(p)
end
```

Homogeneous problem detected; solution determined analytically.
 Status: Solved
 Optimal value (cvx_optval): +0

K1 = 1×2
 -8 -4

```
G = [-3 1 0 0 0 0 0 0 0 0;
      0 -3 1 0 0 0 0 0 0 0;
      0 0 -3 0 0 0 0 0 0 0;
      0 0 0 -0.5 0 0 0 0 0 0;
      0 0 0 0 -2 0 0 0 0 0;
      0 0 0 0 0 -0.4 1 0 0 0;
      0 0 0 0 0 0 -0.4 0 0 0;
      0 0 0 0 0 0 0 -1.5 0 0;
      0 0 0 0 0 0 0 0 -1.2 0;
      0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1.6]
```

```
G = 10×10
-3.0000    1.0000         0         0         0         0         0         0 ...
         0   -3.0000    1.0000         0         0         0         0         0
         0         0   -3.0000         0         0         0         0         0
         0         0         0   -0.5000         0         0         0         0
         0         0         0         0   -2.0000         0         0         0
         0         0         0         0         0   -0.4000    1.0000         0
         0         0         0         0         0         0   -0.4000         0
         0         0         0         0         0         0         0   -1.5000
         0         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0         0
```

```
C = [C1 D1];
A = [A1 B2; zeros(8,2) A2];
y = [1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1];
u = rank([y G*y (G^2)*y (G^3)*y (G^4)*y (G^5)*y (G^6)*y (G^7)*y (G^8)*y (G^9)*y]);
cvx_begin sdp
    variable p(10,10)
    G*p - p*A == y*C;
cvx_end
```

Homogeneous problem detected; solution determined analytically.
 Status: Solved
 Optimal value (cvx_optval): +0

```
l = inv(p)*y;
L1 = l(1:2)
```

L1 = 2×1
 -0.0120
 -0.0011

```
L2 = l(3:10)
```

L2 = 8×1
 -0.0114

```
0.0356
1.0223
-0.0039
0.3614
8.2473
16.7665
-19.3796
```

```
cvx_begin sdp
    variable P(2,8)
    variable Y(1,8)
    P*A2 - A1*P == B1*Y + B2;
    C2*P + D2 == 0;
cvx_end
```

Homogeneous problem detected; solution determined analytically.
Status: Solved
Optimal value (cvx_optval): +0

```
K2 = Y - K1*P
```

```
K2 = 1x8
    7.0000    4.0000   -0.3333    4.0000   -3.4000    4.0000   -5.8571    4.0000
```