МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

Лабораторная работа №12:
«Слежение и компенсация»
по дисциплине Теория автоматического управления

Выполнил: Студент группы R33362 Осинина Т. С
Преподаватель: Перегудин А.А.

Санкт-Петербург, 2023

Задание №1. Компенсирующий регулятор по состоянию

Придумайте объект управления вид $\dot{x} = A_1x + B_1u + B_2\omega$ а и генератор внешнего возмущения вида $\dot{\omega} = A_2\omega$. Размерности векторов x и w должны быть различными, каждая – не менее 3.
Должны быть выполнены условия: $\sigma(A_1) \not\subset \mathbb{C}_-, \sigma(A_2) \subset \overline{\mathbb{C}_+}$, пара (A_1, B_1) стабилизируема. Задайтесь целевой переменной $z = C_2x$ и найдите регулятор вида $u = K_1x + K_2\omega$, который обеспечит выполнение целевого условия

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = 0.$$

Рассмотрите уравнения объединённой системы с вектором состояния (x, ω) и выходом z в двух вариантах: разомкнутую (при $u \equiv 0$) и замкнутую (при $u = K_1x + K_2\omega$). В обоих случаях найдите матрицу наблюдаемости объединённой системы и определите её ранг.

Решение:

Сначала придумаем объект управления.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Далее проверим выполнены ли все условия. Найдем собственные числа матрицы A_1

$$\det(A_1 - \lambda I) = \begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$D(\lambda) = (-1-\lambda)^2(-3-\lambda) - (-1-\lambda) \Rightarrow$$
$$\lambda_1 = -3.4142, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -0.5858$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2i, \lambda_{3,4} = \pm 3i$$

Следовательно, условия $\sigma(A_1) \not\subset \mathbb{C}_-, \sigma(A_2) \subset \overline{\mathbb{C}_+}$ выполнены. Осталось проверить пару (A_1, B_1) на стабилизируемость. Для этого строим матрицу управляемости:

$$U = [B_1 \quad A_1 \cdot B_1 \quad A_1 \cdot A_1 \cdot B_1] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Ранг матрицы U равен $3 = n$, следовательно все собственные числа управляемы, а значит, и стабилизируемы.

Далее задались целевой переменной $z = C_2 x$, в данном случае для нас важно, чтобы компонента x_1 сводилось к 0 при $t \to \infty$.

$$z = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

После находим регулятор $u = K_1 x + K_2 \omega$.
Вычисляем матрицу K_1, для этого синтезируем модальный регулятор.
Сначала выберем матрицы Y и Γ такую, что $\sigma(\Gamma) = \{\lambda_{1,2,3} = -3\}$:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad Y = [1 \quad 1 \quad 1]$$

Решая уравнение Сильвестра, находим матрицу K_1.

$$\begin{cases} AP - P\Gamma = BY \\ K = -YP^{-1} \end{cases}$$

$$K_1 = [-8 \quad -12 \quad -29]$$

Далее вычисляем K_2, решаем следующее уравнение регулятора.

$$\begin{cases} PA_2 - A_1 P = B_1 Y + B_2 \\ C_2 P + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$Y = [1.2 \quad -0.2667 \quad 1.8207 \quad 1.0483]$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.0667 & 0.1333 & -0.4966 & 0.4414 \\ 0.2 & -0.2667 & 0.8207 & 0.0483 \\ -0.0667 & -0.1333 & 0.4966 & -0.4414 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = Y - K_1 P = [2.2 \quad -6.2667 \quad 22.0966 \quad -7.6414]$$

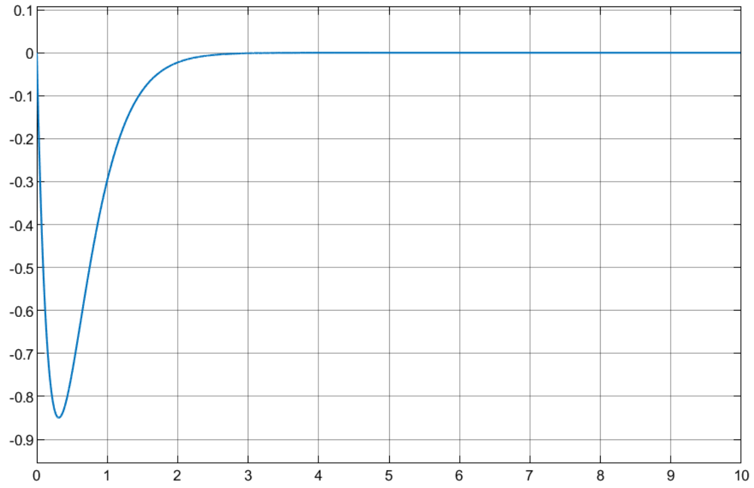

Рисунок 1. Цель управления z(t)

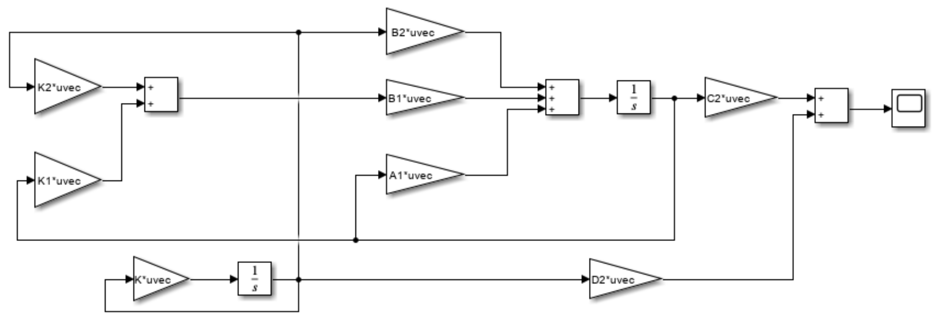

Рисунок 2. Схема моделирования

Далее рассмотрим разомкнутую систему при $u \equiv 0$.

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_2 \omega \\ \dot{\omega} = A_2 \omega \\ z = C_2 x \end{cases}$$

Рассмотрим систему в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \omega \end{bmatrix} \qquad z = \begin{bmatrix} C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \omega \end{bmatrix}$$

$$A_V = \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \qquad C_V = \begin{bmatrix} C_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Матрица наблюдаемости:

$$V = \begin{bmatrix} C_V \\ C_V A_V \\ C_V A_V^2 \\ C_V A_V^3 \\ C_V A_V^4 \\ C_V A_V^5 \\ C_V A_V^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & -1 & 2 & -4 & -4 \\ -1 & 10 & -6 & -3 & -2 & -10 & -18 \\ 1 & -48 & 20 & 3 & -6 & 48 & -8 \\ -1 & 164 & -68 & 13 & 6 & 44 & 68 \\ 1 & -560 & 232 & -13 & 26 & -272 & 392 \end{bmatrix}$$

Ранг данной матрицы равен 7.

Далее рассмотрим замкнутую систему при $u = K_1 x + K_2 \omega$

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 u + B_2 \omega \\ \dot{\omega} = A_2 \omega \\ z = C_2 x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 (K_1 x + K_2 \omega) + B_2 \omega \\ \dot{\omega} = A_2 \omega \\ z = C_2 x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 K_1 x + B_1 K_2 \omega + B_2 \omega \\ \dot{\omega} = A_2 \omega \\ z = C_2 x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = (A_1 + B_1 K_1) x + (B_1 K_2 + B_2) \omega \\ \dot{\omega} = A_2 \omega \\ z = C_2 x \end{cases}$$

Рассмотрим систему в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A_1 + B_1 K_1 & B_1 K_2 + B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \omega \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \omega \end{bmatrix}$$

$$A_V = \begin{bmatrix} (A_1 + B_1 K_1 & B_1 K_2 + B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \qquad C_V = \begin{bmatrix} C_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Матрица наблюдаемости:

$$V = \begin{bmatrix} C_V \\ C_V A_V \\ C_V A_V^2 \\ C_V A_V^3 \\ C_V A_V^4 \\ C_V A_V^5 \\ C_V A_V^6 \end{bmatrix} =$$

$$10^4 \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & 0.0001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.007 & 0.0013 & 0.0028 & -0.0001 & 0.0006 & -0.0021 & 0.0009 \\ -0.0055 & -0.0083 & -0.0189 & 0.0008 & -0.004 & 0.0135 & -0.0055 \\ 0.0279 & 0.0396 & 0.0918 & -0.0037 & 0.0191 & -0.0642 & 0.0263 \\ -0.1215 & 0.1674 & -0.3915 & 0.0155 & -0.0806 & 0.2715 & -0.1111 \\ 0.4887 & 0.6615 & 1.5552 & -0.0612 & 0.3186 & -1.0725 & 0.4388 \\ -1.8711 & -2.5029 & -5.9049 & 0.2317 & -1.2053 & 4.0571 & -1.6596 \end{bmatrix}$$

Ранг данной матрицы равен 3.

Вывод: в данном задании мы вычислили компенсирующий регулятор по состоянию, по графику *Рисунок 1. Цель управления z(t)* видим, что цель выполнена, так как график сходится к 0. Однако при построении матрицы наблюдаемости замкнутой и разомкнутой, вычислив ранг данных матриц, заметили, что замкнутая матрица не наблюдаема, таким образом мы свели влияние внешних возмущений к нулю, однако потеряли наблюдаемость системы.

Задание №2. Следящий регулятор по состоянию

Придумайте объект управления вида $\dot{x} = A_1 x + B_1 u$ и генератор задающего воздействия вида $\dot{\omega} = A_2 \omega$. Размерности векторов x и ω должны быть различными, каждая – не менее 3.
Должны быть выполнены условия $\sigma(A_1) \not\subset \mathbb{C}_-, \sigma(A_2) \subset \overline{\mathbb{C}_+}$,
пара (A_1, B_1) стабилизируема.

Задайтесь целевой переменной $z = C_2 x + D_2 \omega$ и найдите регулятор вида $u = K_1 x + K_2 \omega$, который обеспечит выполнение целевого условия

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = 0.$$

Рассмотрите уравнения объединённой системы с вектором состояния (x, ω) и выходом zв двух вариантах: разомкнутую (при u ≡ 0) и замкнутую (при $u = K_1 x + K_2 \omega$). В обоих случаях найдите матрицу наблюдаемости объединённой системы и определите её ранг.

Решение:

Сначала придумаем объект управления.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Далее проверим выполнены ли все условия. Найдем собственные числа матрицы A_1

$$\det(A_1 - \lambda I) = \begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$D(\lambda) = (-1-\lambda)^2(-3-\lambda) - (-1-\lambda) \Rightarrow$$
$$\lambda_1 = -3.4142, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -0.5858$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2i, \lambda_{3,4} = \pm 3i$$

Следовательно, условия $\sigma(A_1) \not\subset \mathbb{C}_-, \sigma(A_2) \subset \overline{\mathbb{C}_+}$ выполнены. Осталось проверить пару (A_1, B_1) на стабилизируемость. Для этого строим матрицу управляемости:

$$U = [B_1 \quad A_1 \cdot B_1 \quad A_1 \cdot A_1 \cdot B_1] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Ранг матрицы U равен $3 = n$, следовательно все собственные числа управляемы, а значит, и стабилизируемы.

Далее задались целевой переменной $z = C_2 x + D_2 \omega$, в данном случае для нас важно, чтобы компонента x_1 сводилось к 0 при $t \to \infty$.

$$z = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [1 \quad -1 \quad 0 \quad 2] \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix}$$

После находим регулятор $u = K_1 x + K_2 \omega$.
Вычисляем матрицу K_1, для этого синтезируем модальный регулятор.
Сначала выберем матрицы Y и Γ такую, что $\sigma(\Gamma) = \{\lambda_{1,2,3} = -3\}$:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad Y = [1 \quad 1 \quad 1]$$

Решая уравнение Сильвестра, находим матрицу K_1.

$$\begin{cases} AP - P\Gamma = BY \\ K = -YP^{-1} \end{cases}$$

$$K_1 = [-8 \quad -12 \quad -29]$$

Далее вычисляем K_2, решаем следующее уравнение регулятора.

$$\begin{cases} PA_2 - A_1 P = B_1 Y + B_2 \\ C_2 P + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$Y = [1.2 \quad -0.2667 \quad 1.8207 \quad 1.0483]$$

$$P = \begin{bmatrix} -0.8667 & 1.6000 & -0.9517 & -1.8207 \\ 1.0667 & -0.8667 & 0.4897 & 1.6759 \\ -0.1333 & -0.6000 & 0.9517 & -0.1793 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = Y - K_1 P = [7.0667 \quad -14.8667 \quad 21.3517 \quad 5.0207]$$

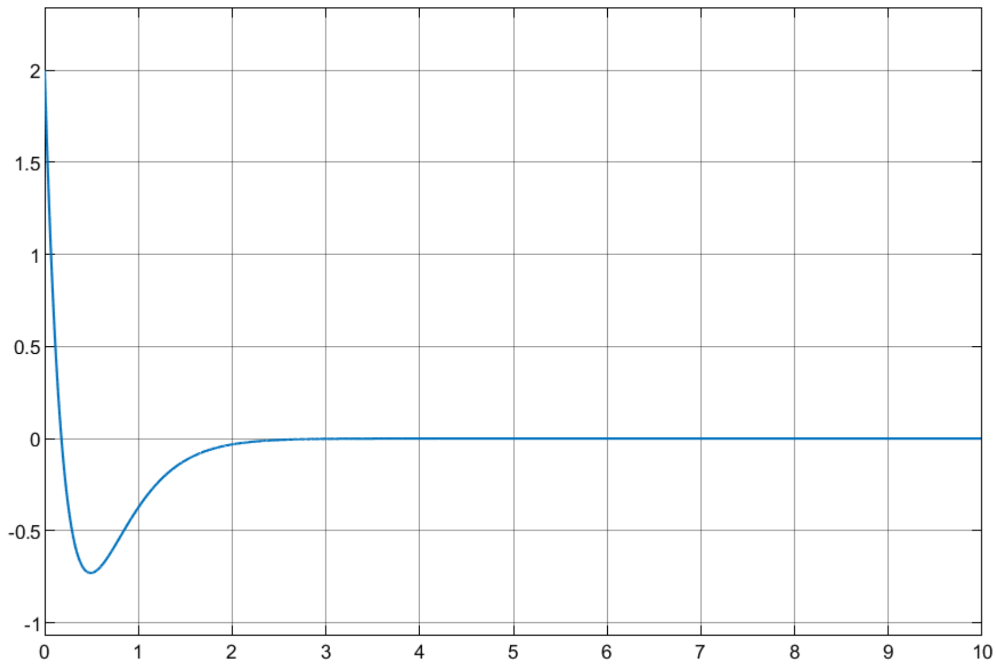

Рисунок 3. Цель управления z(t)

Далее рассмотрим разомкнутую систему при $u \equiv 0$.

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_2 \omega \\ \dot{\omega} = A_2 \omega \\ z = C_2 x + D_2 \omega \end{cases}$$

Рассмотрим систему в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \omega \end{bmatrix} \qquad z = \begin{bmatrix} C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \omega \end{bmatrix}$$

$$A_V = \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \qquad C_V = \begin{bmatrix} C_2 & D_2 \end{bmatrix}$$

Матрица наблюдаемости:

$$V = \begin{bmatrix} C_V \\ C_V A_V \\ C_V A_V^2 \\ C_V A_V^3 \\ C_V A_V^4 \\ C_V A_V^5 \\ C_V A_V^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & 2 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & -5 & 6 & -4 & -14 \\ -1 & 10 & -6 & -11 & -10 & -44 & -18 \\ 1 & -48 & 20 & 19 & -22 & 48 & 154 \\ -1 & 164 & -68 & 45 & 38 & -442 & 68 \\ 1 & -560 & 232 & -77 & 90 & -272 & -1066 \end{bmatrix}$$

Ранг данной матрицы равен 7.

Далее рассмотрим замкнутую систему при $u = K_1 x + K_2 \omega$

$$\begin{cases} \dot{x} = (A_1 + B_1K_1)x \ + \ (B_1K_2 + B_2)\omega \\ \dot{\omega} = \ \mathrm{A}_2\omega \\ z \ = \ C_2x + D_2\omega \end{cases}$$

Рассмотрим систему в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A_1 + B_1K_1 & B_1K_2 + B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \omega \end{bmatrix} \qquad z \ = \ [C_2 \quad D_2] \begin{bmatrix} x \\ \omega \end{bmatrix}$$

$$A_V = \begin{bmatrix} (A_1 + B_1K_1 & B_1K_2 + B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \qquad C_V = [C_2 \quad D_2]$$

Матрица наблюдаемости:

$$V = \begin{bmatrix} C_V \\ C_VA_V \\ C_VA_V^2 \\ C_VA_V^3 \\ C_VA_V^4 \\ C_VA_V^5 \\ C_VA_V^6 \end{bmatrix} =$$

$$10^4 \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & 0.0001 & 0.0001 & -0.0001 & 0 & 0.0002 \\ 0.007 & 0.0013 & 0.0028 & -0.0004 & 0.00017 & -0.0026 & -0.0009 \\ -0.0055 & -0.0083 & -0.0189 & 0.00016 & -0.0097 & 0.0168 & 0.0005 \\ 0.0279 & 0.0396 & 0.0918 & -0.0058 & 0.0448 & -0.0802 & 0.0009 \\ -0.1215 & 0.1674 & -0.3915 & 0.0211 & -0.1856 & 0.3389 & -0.0109 \\ 0.4887 & 0.6615 & 1.5552 & -0.0747 & 0.7245 & -1.3389 & 0.0601 \\ -1.8711 & -2.5029 & -5.9049 & 0.2608 & -2.7184 & 5.0646 & -0.2710 \end{bmatrix}$$

Ранг данной матрицы равен 3.

Вывод: в данном задании сделали такие же выводы, как и в прошлом задании.

Задание №3. Регулятор по выходу при различных y и z

Самостоятельно придумайте матрицы для уравнений

$\dot{x} = A_1x + B_1u + B_2\omega,\ \dot{\omega} = A_2\omega,\ y = C_1x + D_1\omega,\ z = C_2x + D_2\omega,$
где измеряемой величиной является y(t), а регулируемой – z(t).

Размерность каждого из векторов x и ω должна быть не менее 3, при этом они могут быть одинаковыми. Выберите матрицы так, чтобы переменные y и z были различными.

Постройте регулятор по выходу, который формирует управляющее воздействие u(t) на основе измеряемой величины y(t) и достигает цели управления

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = 0.$$

Представьте уравнения регулятора в форме вход-состояние-выход, найдите его собственные числа, сравните их с собственными числами матрицы A_2.

Решение:
Сначала придумаем объект управления.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\quad B_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}\quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\quad D_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Построим регулятор по выходу, который формирует управляющее воздействие u(t) на основе измеряемой величины y(t) и достигает цели управления. Для этого найдем K_1, L_1, L_2.

Вычисляем матрицу K_1, для этого синтезируем модальный регулятор. Сначала выберем матрицы Y и Γ такую, что $\sigma(\Gamma) = \{\lambda_{1,2,3} = -3\}$:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}\quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Решая уравнение Сильвестра, находим матрицу K_1.

$$\begin{cases} AP - P\Gamma = BY \\ K = -YP^{-1} \end{cases}$$

$$K_1 = [-8 \quad -12 \quad -29]$$

Далее вычисляем L_1, L_2. Выберем матрицу Γ.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 \end{bmatrix}$$

$$C_V = [C_1 \quad D_1] = [2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

$$A_V = \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Проверим пару ($[C_1 \quad D_1] \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$) на обнаруживаемость.

$$V = \begin{bmatrix} C_V \\ C_V A_V \\ C_V A_V^2 \\ C_V A_V^3 \\ C_V A_V^4 \\ C_V A_V^5 \\ C_V A_V^6 \end{bmatrix} \qquad rank(V) = 7$$

Следовательно, пара ($[C_1 \quad D_1] \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$) на обнаруживаема.

Вычислим L_1, L_2.

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1.6168 \\ -3.5187 \\ -2.1361 \end{bmatrix} \qquad L_2 = \begin{bmatrix} 6.8635 \\ -0.6461 \\ -7.0148 \\ -4.6547 \end{bmatrix}$$

Находим K_2.

$$K_2 = [7.0667 \quad -14.8667 \quad 21.3517 \quad 5.0207]$$

Найдем уравнения регулятора в форме вход-состояние-выход, найдем его собственные числа, сравним их с собственными числами матрицы A_2.

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A_1\hat{x} + B_1u + B_2\hat{\omega} + L_1(\hat{y} - \mathrm{y}) \\ \dot{\hat{\omega}} = \mathrm{A}_2\hat{\omega} + L_2(\hat{y} - \mathrm{y}) \\ \hat{y} = C_1\hat{x} + D_1\hat{\omega} \\ u = K_1\hat{x} + K_2\hat{\omega} \end{cases}$$

Представим уравнения в матричной форме.

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{\omega}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1K_1 + L_1C_1 & B_1K_2 + B_2 + L_1D_1 \\ L_2C_1 & A_2 + L_2D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -L_1 \\ -L_2 \end{bmatrix} y$$

Находим собственные числа матрицы $\begin{bmatrix} A_1 + B_1K_1 + L_1C_1 & B_1K_2 + B_2 + L_1D_1 \\ L_2C_1 & A_2 + L_2D_2 \end{bmatrix}$

$$\lambda_1 = -11.6627$$
$$\lambda_{2,3} = 0.8978 \pm 5.6345i$$
$$\lambda_4 = -5.4788$$
$$\lambda_5 = -0.5498$$
$$\lambda_{6,7} = -0.2022 \pm 2.3837i$$

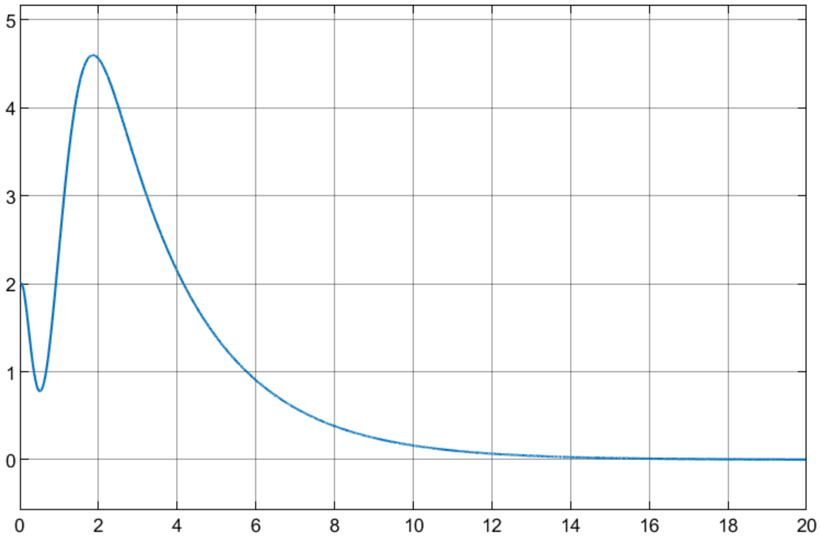

Рисунок 4. Цель управления z(t)

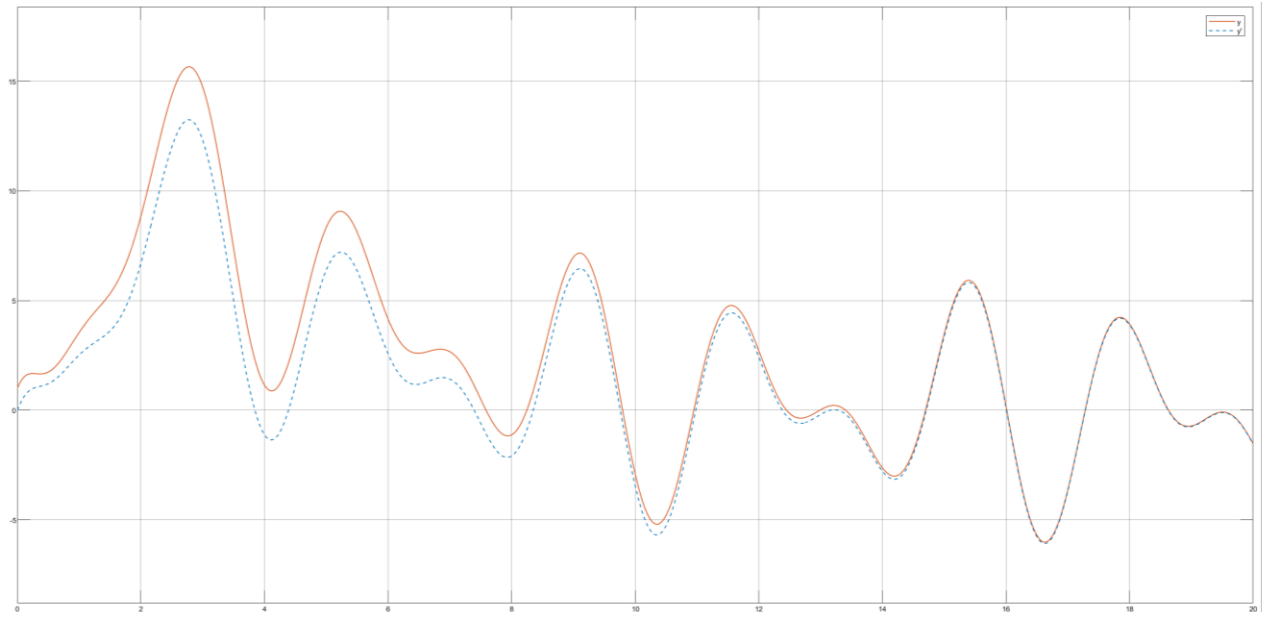

Рисунок 5. Графики y(t) и y'(t)

Вывод: в данном задание был смоделирован регулятор по выходу при различных y и z. Сравнивая собственные числа матрицы A_2 и $\begin{bmatrix} A_1 + B_1K_1 + L_1C_1 & B_1K_2 + B_2 + L_1D_1 \\ L_2C_1 & A_2 + L_2D_2 \end{bmatrix}$ можно заметить, что одинаковых числе нет, но есть близкие по значению.

Задание №4. Регулятор по выходу при одинаковых y и z

Самостоятельно придумайте матрицы для уравнений
$\dot{x} = A_1x + B_1u + B_2\omega,\ \dot{\omega} = A_2\omega,\ y = z = Cx + D\omega,$
где измеряемая величина y(t) и регулируемая величина z(t) совпадают.

Размерность каждого из векторов x и w должна быть не менее 3, при этом они могут быть одинаковыми.

Постройте регулятор по выходу, который формирует управляющее воздействие u(t) на основе измеряемой величины y(t) и достигает цели управления

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$

Представьте уравнения регулятора в форме вход-состояние-выход, найдите его собственные числа, сравните их с собственными числами матрицы A_2.

Решение:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Аналогичным способом (как и в предыдущем задании) вычислим матрицы регулятора.

$$K_1 = \begin{bmatrix} -8 & -12 & -29 \end{bmatrix}$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1.6168 \\ -3.5187 \\ -2.1361 \end{bmatrix} \qquad L_2 = \begin{bmatrix} 6.8635 \\ -0.6461 \\ -7.0148 \\ -4.6547 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 3.4897 & -6.1241 & 23.4000 & -2.8000 \end{bmatrix}$$

Представим уравнения в матричной форме.

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{\omega}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1K_1 + L_1C & B_1K_2 + B_2 + L_1D \\ L_2C & A_2 + L_2D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -L_1 \\ -L_2 \end{bmatrix} y$$

Определим собственные числа матрицы $\begin{bmatrix} A_1 + B_1K_1 + L_1C & B_1K_2 + B_2 + L_1D \\ L_2C & A_2 + L_2D \end{bmatrix}$.

$$\lambda_1 = -10.2343$$
$$\lambda_{2,3} = 0 \pm 3i$$
$$\lambda_4 = -5.5193$$
$$\lambda_5 = -0.5464$$
$$\lambda_{6,7} = 0 \pm 2i$$

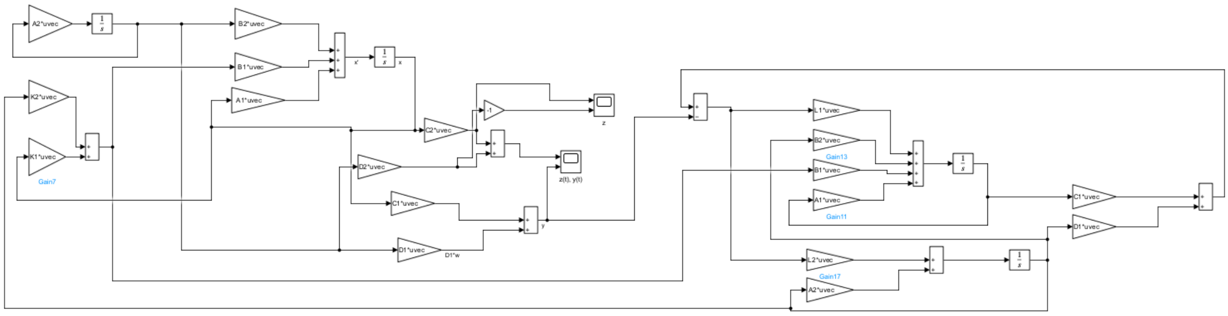

Рисунок 6. Схема моделирования

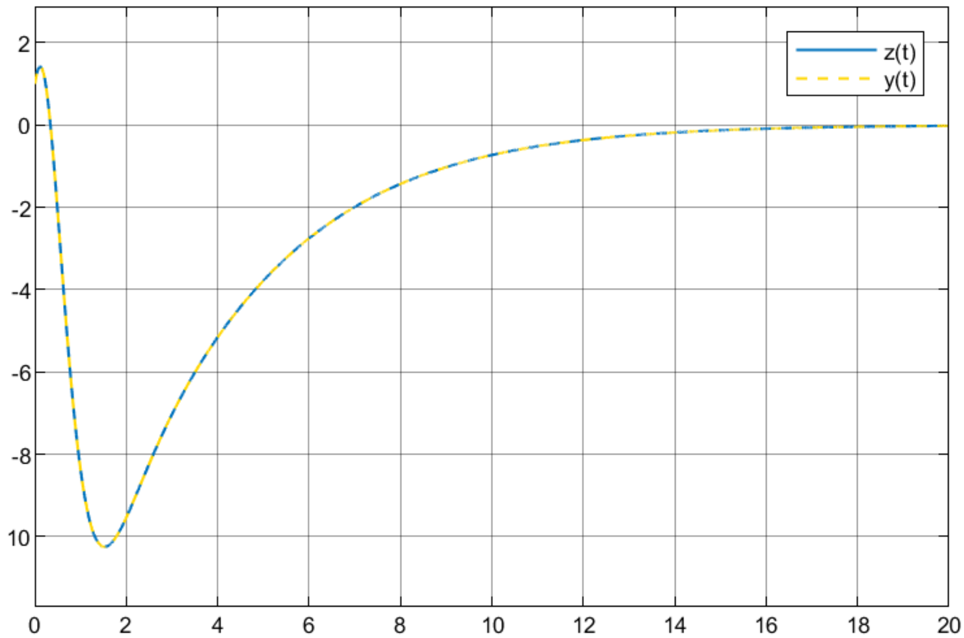

Рисунок 7. Графики цели управления y(t) = z(t)

Вывод: в данном задание был смоделирован регулятор по выходу при одинаковых y и z. Сравнивая собственные числа матрицы A_2 и $\begin{bmatrix} A_1 + B_1K_1 + L_1C & B_1K_2 + B_2 + L_1D \\ L_2C & A_2 + L_2D \end{bmatrix}$ можно заметить, что собственные числа A_2 соответствуют данной матрице. Следовательно, мы подтвердили принцип внутренней модели. Также график y(t) сходится к 0, значит, регулятор был рассчитан верно.

Задание №5. Тележка и меандр

Постройте математическую модель простого тела (тележки), в которой измеряемым выходом y(t) является её координата.

Задайте сигнал $g_{ideal}(t)$ в виде меандра (англ. square wave) с произвольной амплитудой и периодом. Разложите сигнал $g_{ideal}(t)$в ряд Фурье, возьмите конечное число гармоник и получите соответствующий приближённый сигнал g(t), который и будет являться эталонным сигналом для вашего тела (тележки). Сформируйте конечномерный линейный генератор (систему вида $\dot{\omega} = \Gamma\omega$), которая способна порождать сигнал g(t).

Постройте регулятор, который принимает на вход разность g(t) − y(t) и формирует управляющее воздействие u(t), которое обеспечивает выполнение целевого условия

$$\lim_{t\to\infty}\left(g(t) - y(t)\right) = 0.$$

Сделайте выводы о достоинствах и недостатках такого регулятора.

Решение:

Сначала построим математическую модель тележки:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 u + B_2\omega \\ y = C_1 x + D_1\omega \\ z = C_2 x + D_2\omega \end{cases}$$

$$u = K_1 x + K_2\omega$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad B_2 = 0 (\text{так как выполняем задачу слежения})$$

$$C_1 = [1 \quad 0] \quad C_2 = [-1 \quad 0] \quad D_1 = [1 \quad 1 \quad 2 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

$$D_2 = \left[1 \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad \frac{1}{5} \quad 0 \quad \frac{1}{7} \quad 0\right]$$

Зададим сигнал $g_{ideal}(t)$ в виде меандра с произвольной амплитудой и периодом ($\omega = 2\pi f$):

$$g_{ideal}(t) = \frac{4A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi(2k-1)ft)}{2k-1} = \frac{4A}{\pi}\left(\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + \frac{1}{7}\sin(7\omega t) + \cdots\right)$$

Для упрощения формулы выберем $A = \frac{1}{4}, f = \frac{1}{2\pi}$

$$g_{ideal}(t) = \sin(t) + \frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{5}\sin(5t) + \frac{1}{7}\sin(7t) + \cdots$$

Сформируем конечномерный линейный генератор (систему вида $\dot{\omega} = \Gamma\omega$), которая способна порождать сигнал g(t).

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$w(t) = [\sin(t) \quad \cos(t) \quad \sin(3t) \quad \cos(3t) \quad \sin(5t) \quad \cos(5t) \quad \sin(7t) \quad \cos(7t)]^T$$

Синтезируем регулятор, который принимает на вход разность g(t) − y(t) и формирует управляющее воздействие u(t), которое обеспечивает выполнение целевого условия: $\lim\limits_{t\to\infty}\left(g(t) - y(t)\right) = 0$.

$$K_1 = [-8 \quad -4]$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} -0.012 \\ -0.0011 \end{bmatrix} \qquad L_2 = \begin{bmatrix} -0.0114 \\ 0.0356 \\ 1.0223 \\ -0.0039 \\ 0.3614 \\ 8.2473 \\ 16.7665 \\ -19.3796 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = [\,7.0000 \quad 4.0000 \quad -0.3333 \quad 4.0000 \quad -3.4000 \quad 4.0000 \quad -5.8571 \quad 4.0000]$$

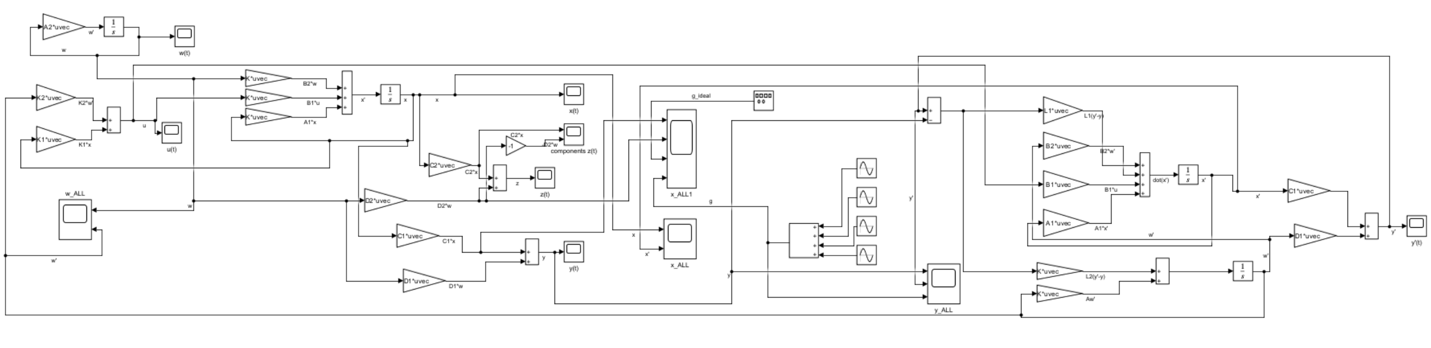

Рисунок 8. Схема моделирования

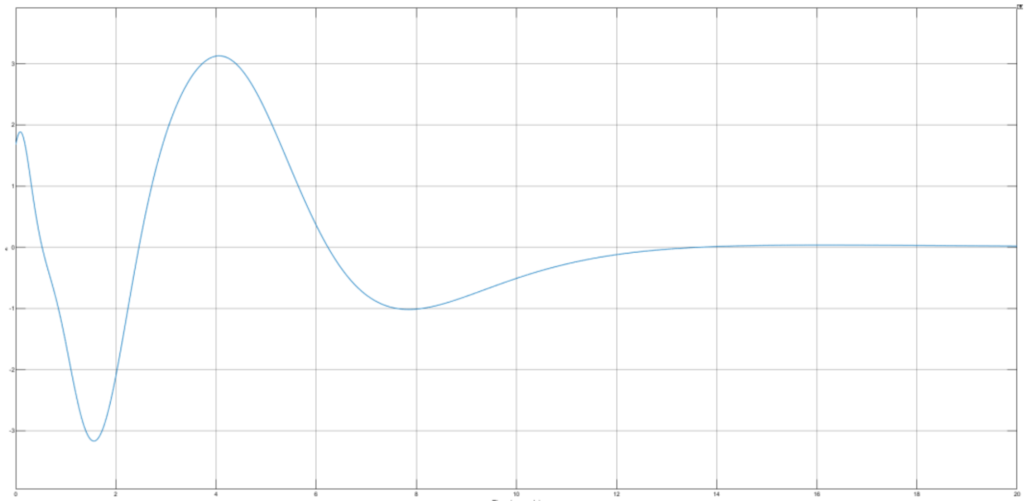

Рисунок 9. График z(t)

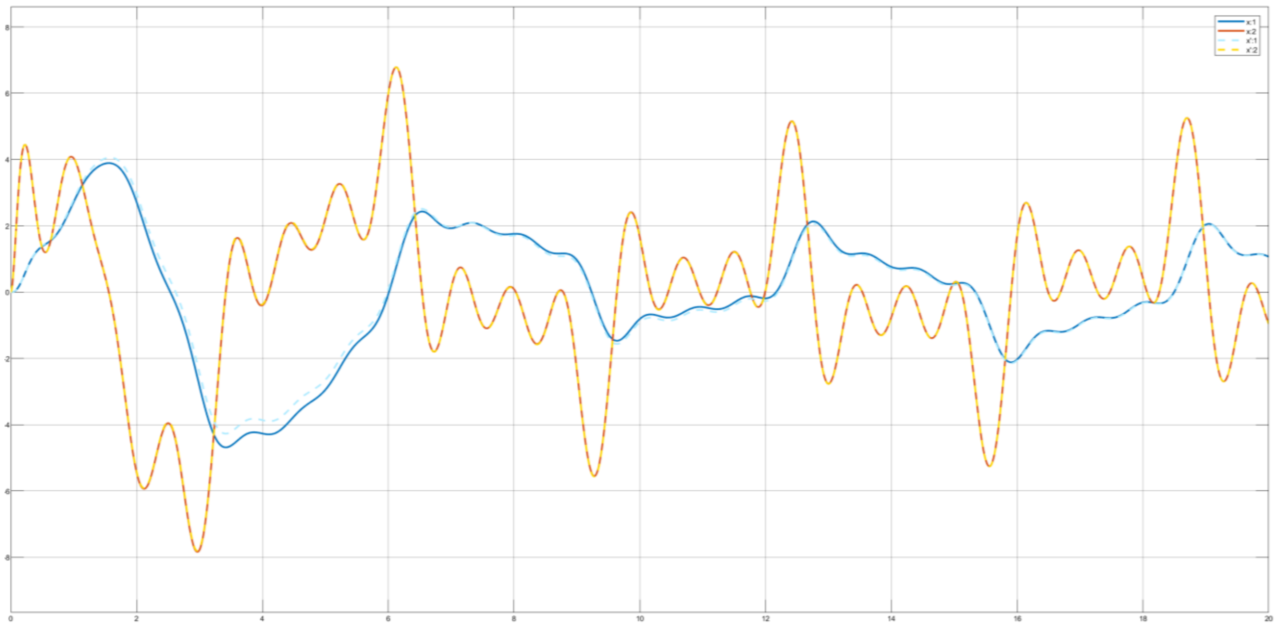

Рисунок 10. Графики компонент x(t) и $\hat{x}(t)$

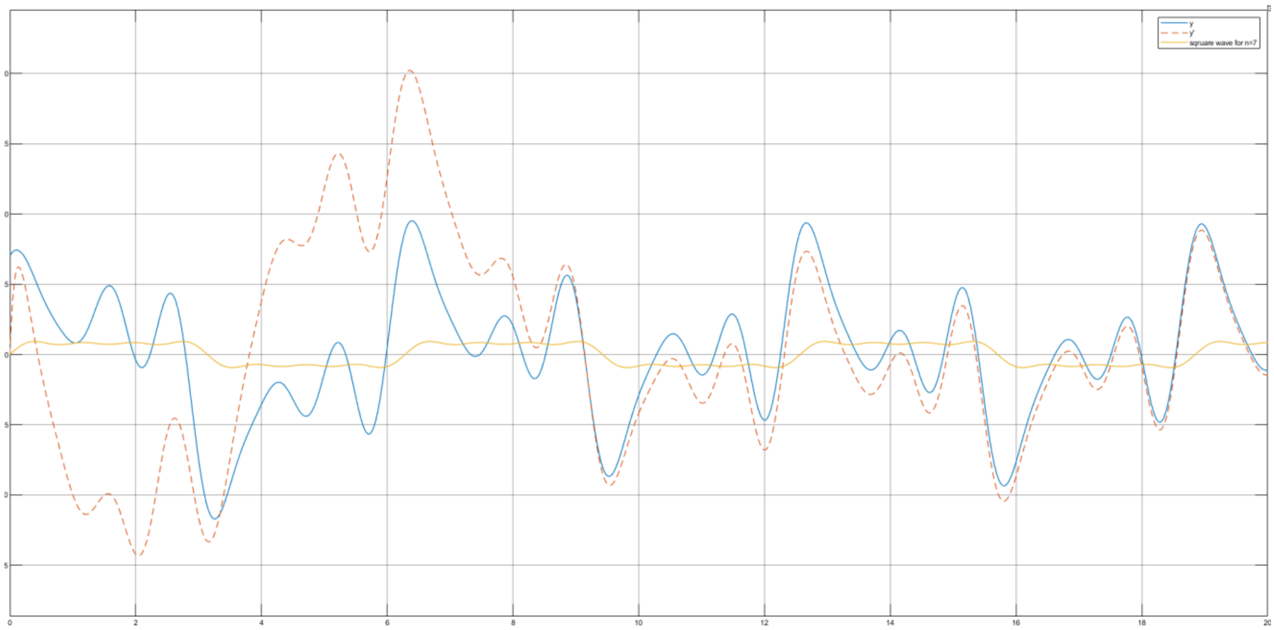

Рисунок 11. Графики компонент y(t) и $\hat{y}(t)$

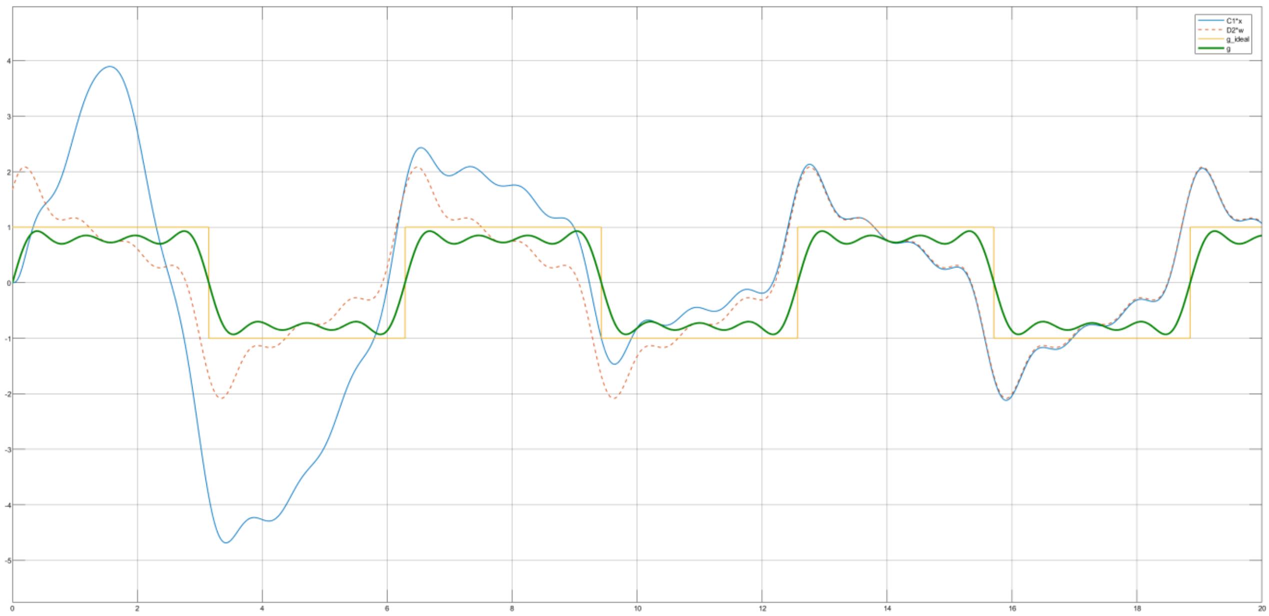

Рисунок 12. График сигналов

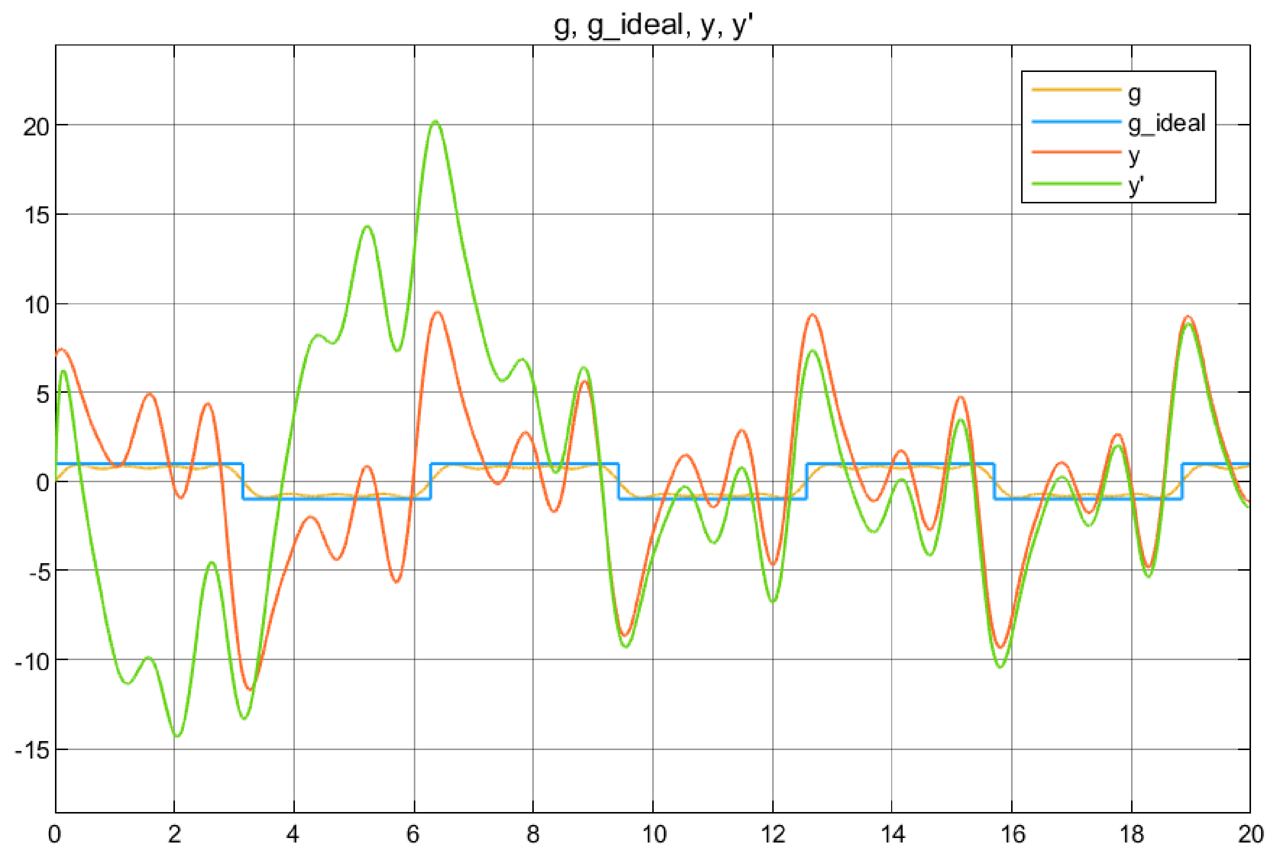

Рисунок 13. График сигналов g(t) и y(t)

Вывод: для тележки был создан регулятор, который выполняет задачу слежения по выходу. График z(t) сходится к 0, не зашумленный выход сходится к меандру.