МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

Лабораторная работа №9:
«Регуляторы с заданной степенью устойчивости»
по дисциплине Теория автоматического управления

Вариант №9

Выполнил: Студент группы R33362 Осинина Т. С
Преподаватель: Перегудин А.А.

Санкт-Петербург, 2023

Задание №1

Возьмите матрицы A и B из таблицы 1 лабораторной работы №8 в соответствии с вашим вариантом и рассмотрите систему:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Выполните следующие шаги и приведите в отчёте результаты всех вычислений, схемы моделирования, графики и выводы:

- Постройте схему моделирования системы $\dot{x} = Ax + Bu$ с регулятором $u = Kx$.
- Задайтесь несколькими различными значениями желаемой степени устойчивости α замкнутой системы.
- Для каждой из заданных степеней устойчивости α найдите какой-нибудь регулятор, её гарантирующий. Для поиска регулятора воспользуйтесь математическим аппаратом линейных матричных неравенств, не выбирайте собственные числа самостоятельно.
- Найдите собственные числа матрицы $A + BK$ для каждой из найденных K.
- Выберите какие-нибудь начальные условия и выполните моделирование работы найденных вами регуляторов.
- Постройте сравнительные графики $x(t)$ при различных выбранных значениях α, а также сравнительные графики $u(t)$.
- Сделайте выводы.

Матрицы A и B:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Решение:

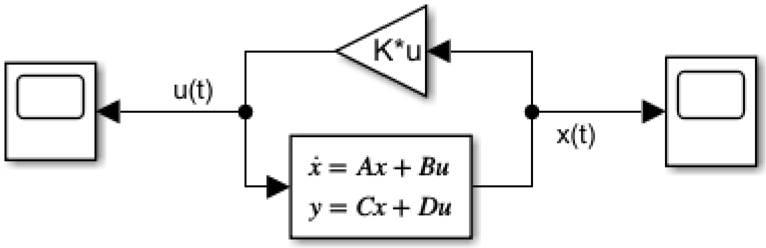

Рисунок 1. Схема моделирования

Выберем различные значения желаемой степени устойчивости α замкнутой системы:

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 2$$
$$a_3 = 0.5$$

Далее с помощью неравенств Ляпунова определяем матрицу Y и P, с помощью которых определим матрицу регулятора K.

$$\begin{cases} P > 0 \\ PA^T + AP + 2a_1P + Y^TB^T + BY <= 0 \end{cases}$$

$$K = YP^{-1}$$

При $a_1 = 1$:

K = [0   -10.1307   -17.7863   -0.169]

Далее определим собственные числа матрицы $A + BK$:

$$\lambda_1 = -1.9138$$
$$\lambda_2 = -5.0963$$
$$\lambda_3 = -5.0963$$
$$\lambda_4 = -2$$

Выполним моделирование при начальных условиях $x(0) = [1\ 1\ 1\ 1]^T$.

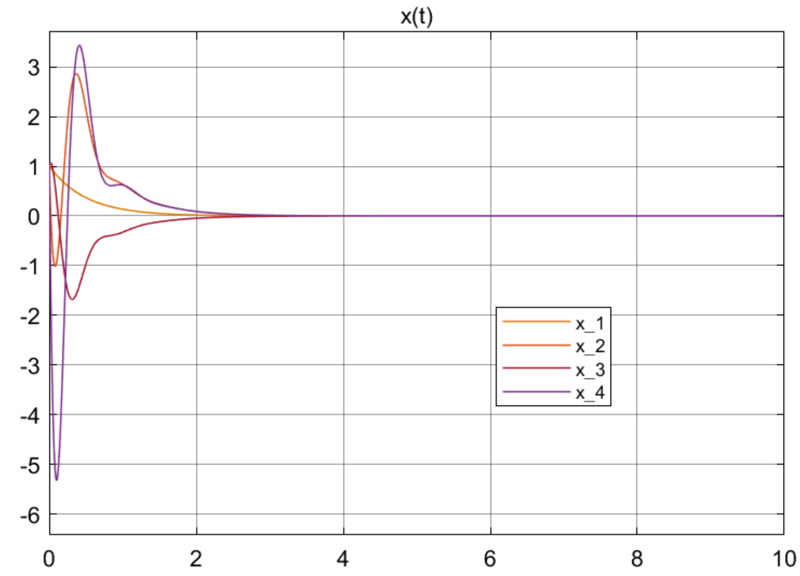

Рисунок 2. Графики x(t) при начальных условиях при α =1

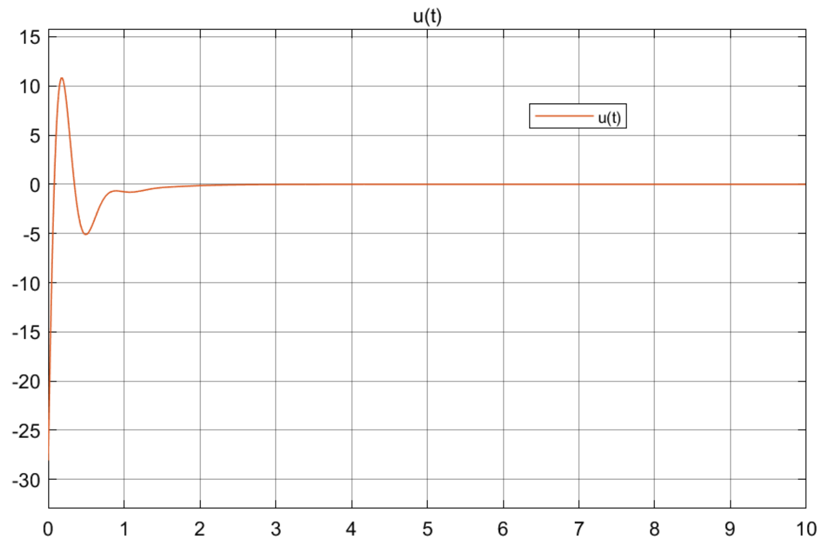

Рисунок 3. График u(t)

При $a_1 = 2$:

К = [0   -23.7033   -32.3427   4.0209]

Далее определим собственные числа матрицы $A + BK$:

$$\lambda_1 = -7.6059 + 11.5994\text{i}$$
$$\lambda_2 = -7.6059 - 11.5994\text{i}$$
$$\lambda_3 = -3.0905$$
$$\lambda_4 = -2$$

Выполним моделирование при начальных условиях $x(0) = [1\ 1\ 1\ 1]^T$.

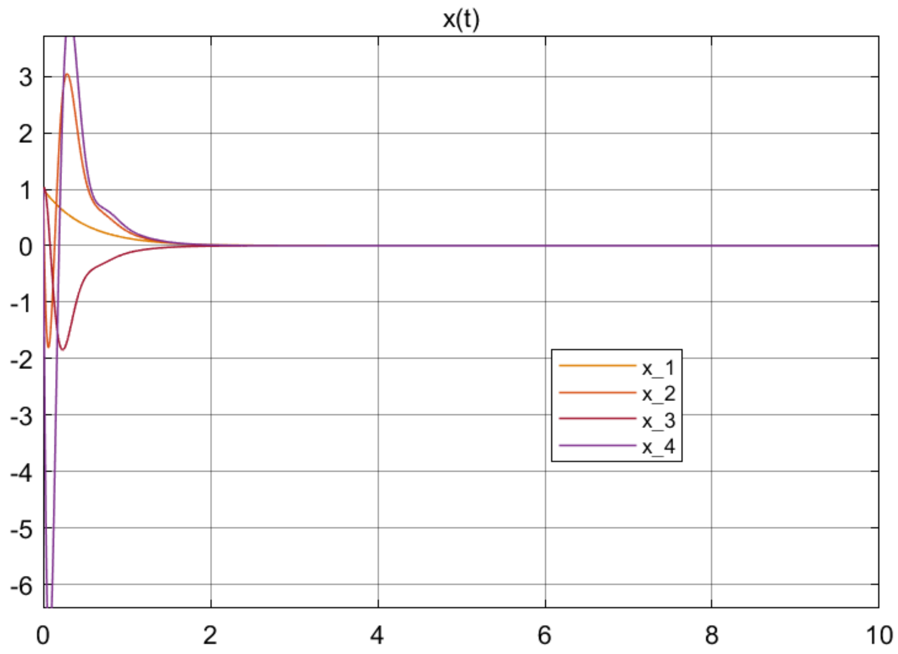

Рисунок 4. Графики x(t) при начальных условиях при α =1

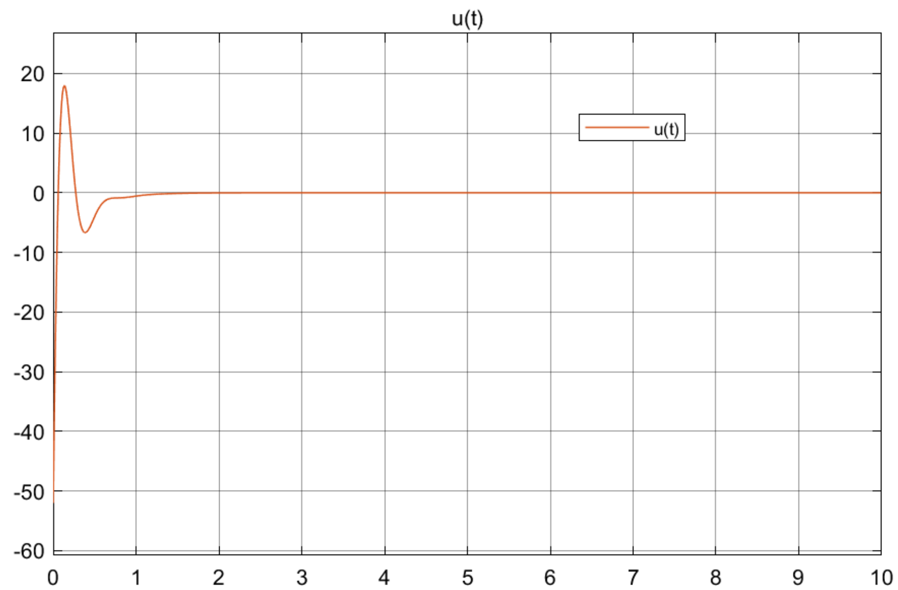

Рисунок 5. График u(t)

При $a_1 = 0.5$:

K = [0 -6.8858 -14.0371 -1.1207]

Далее определим собственные числа матрицы $A + BK$:

$$\lambda_1 = -4.4800 + 8.5216i$$
$$\lambda_2 = -4.4800 - 8.5216i$$
$$\lambda_3 = -1.4149$$
$$\lambda_4 = -2$$

Выполним моделирование при начальных условиях $x(0) = [1\ 1\ 1\ 1]^T$.

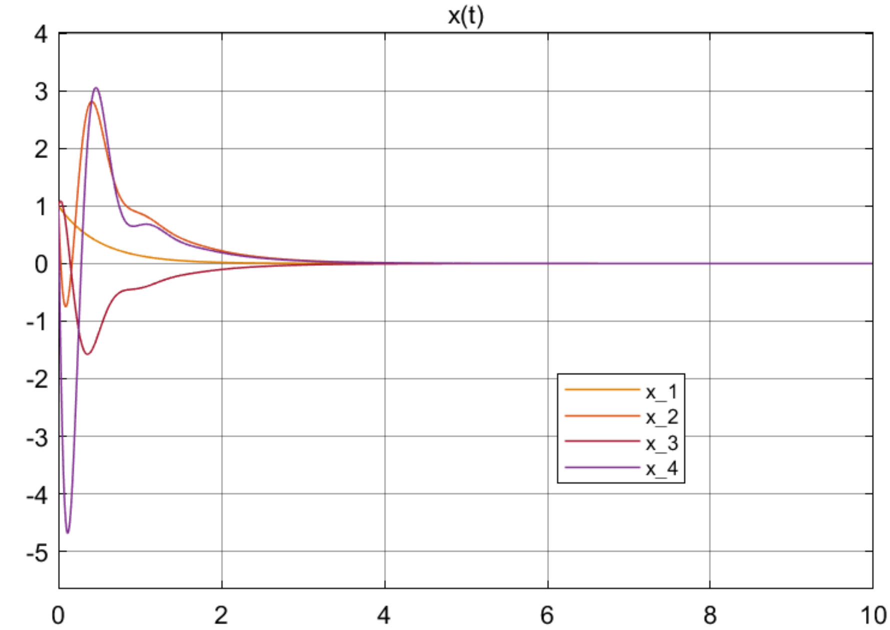

Рисунок 6. Графики x(t) при начальных условиях при α =1

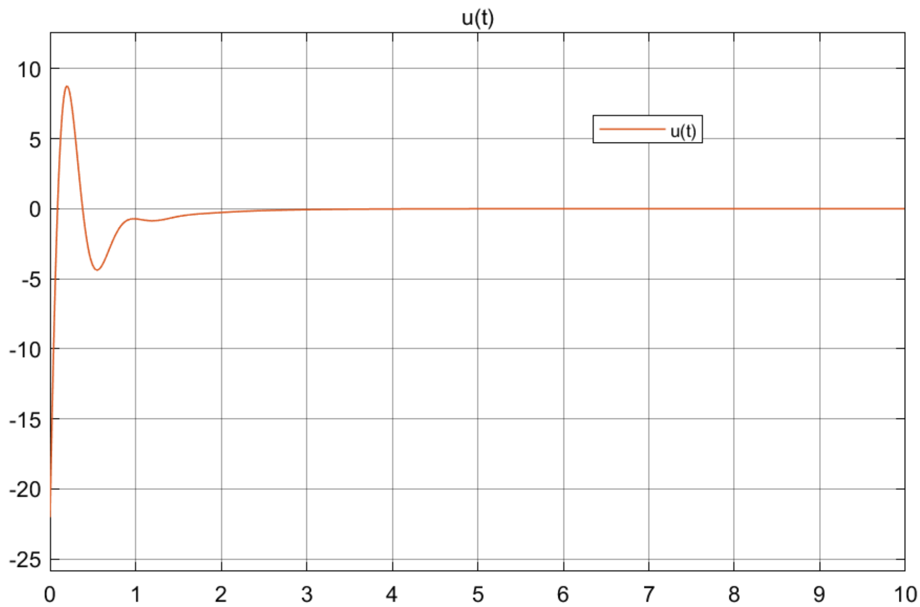

Рисунок 7. График u(t)

Вывод: в этом задании мной впервые был вычислен регулятор с помощью неравенств Ляпунова, работа выполнена верно, так как собственные числа матрицы $A + BK$ для любого значения желаемой степени устойчивости α, не превышает его, более того, корни замкнутой системы намного меньше (устойчивее) желаемой степени устойчивости. Посмотрев на графики, можно заметить, что чем больше значение α, тем сильнее воздействие u(t) на систему необходимо.

Задание №2

Частично повторите то, что вы сделали в предыдущем задании, добавив в этот раз ограничение на управление:

- Зафиксируйте параметр α на каком-нибудь одном из выбранных ранее значений. Добавьте в процесс синтеза регулятора ограничение на величину управляющего воздействия. Проведите исследование зависимости влияния величины этого ограничения на собственные числа матрицы A+BK, а также на графики переходных процессов x(t) и u(t).

- Для каждого из выбранных в задании 1 значений параметра α решите задачу минимизации величины управляющего воздействия. Найдите соответствующие собственные числа матрицы A + BK и приведите графики переходных процессов.

- Сделайте выводы.

Решение:

Выберем $a = 0.5$, а также добавим ограничение на управление $\mu = 100$, вычислим матрицу регулятора K и построим графики:

Чтобы добавить ограничение на управление необходимо к неравенству Ляпунова добавить следующие условия:

$$\begin{bmatrix} P & x(0) \\ x^T(0) & 1 \end{bmatrix} > 0, \qquad \begin{bmatrix} P & Y^T \\ Y & \mu^2 I \end{bmatrix} > 0$$

K = [0   -0.8622   -2.9545   -1.7945]

Далее определим собственные числа матрицы $A + BK$:

$$\lambda_1 = -0.5801 + 4.2073\mathrm{i}$$
$$\lambda_2 = -0.5801 + 4.2073\mathrm{i}$$
$$\lambda_3 = -0.5368$$
$$\lambda_4 = -2$$

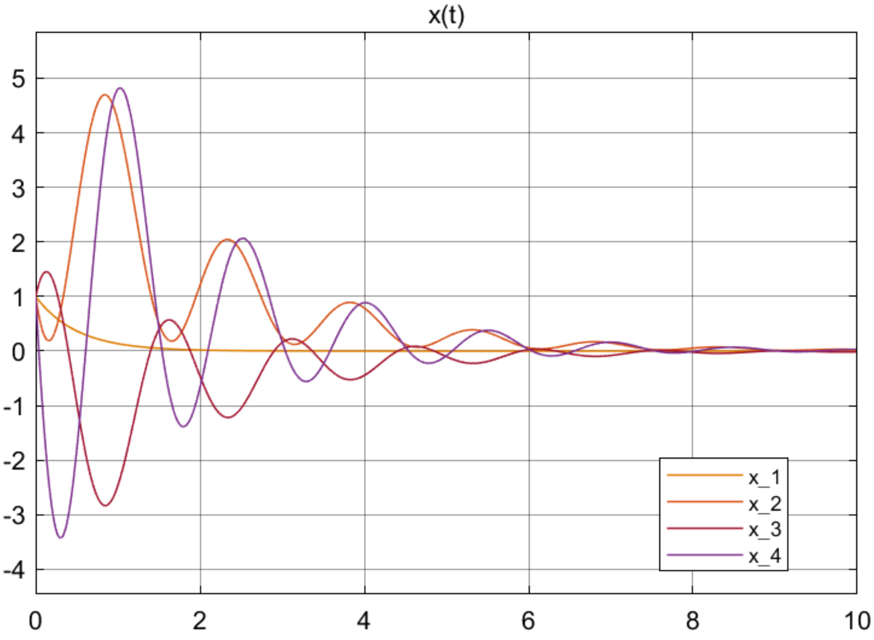

Рисунок 8. Графики x(t) при α = 0.5 и $\mu\ =\ 100$

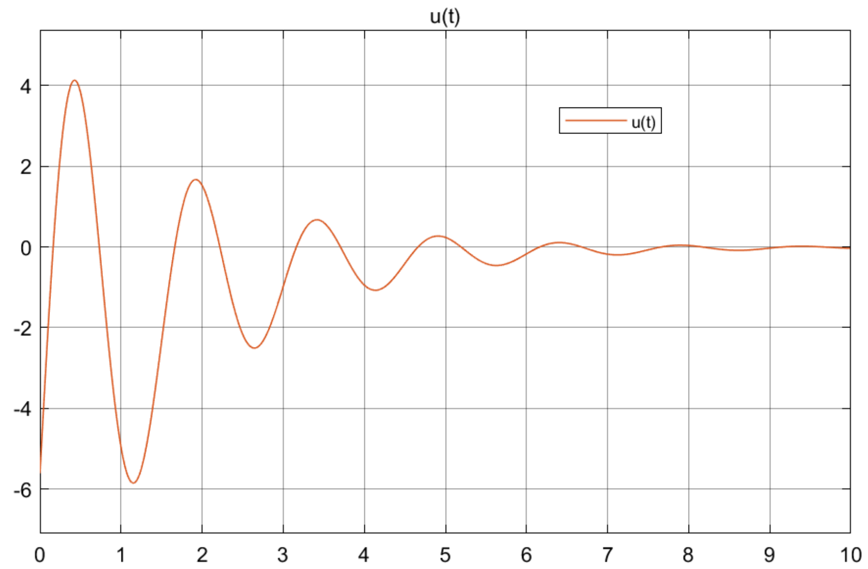

Рисунок 9. Графики u(t) при α =0.5 и μ = 100

Проведем аналогичные расчеты для $\mu\ =\ 500$

K = [0   -0.8206   -2.8585   -1.7936]

Далее определим собственные числа матрицы $A + BK$:

$$\lambda_1 = -0.5444\ +\ 4.1284\mathrm{i}$$
$$\lambda_2 = -0.5444\ +\ 4.1284\mathrm{i}$$
$$\lambda_3 = -0.5205$$
$$\lambda_4 = -2$$

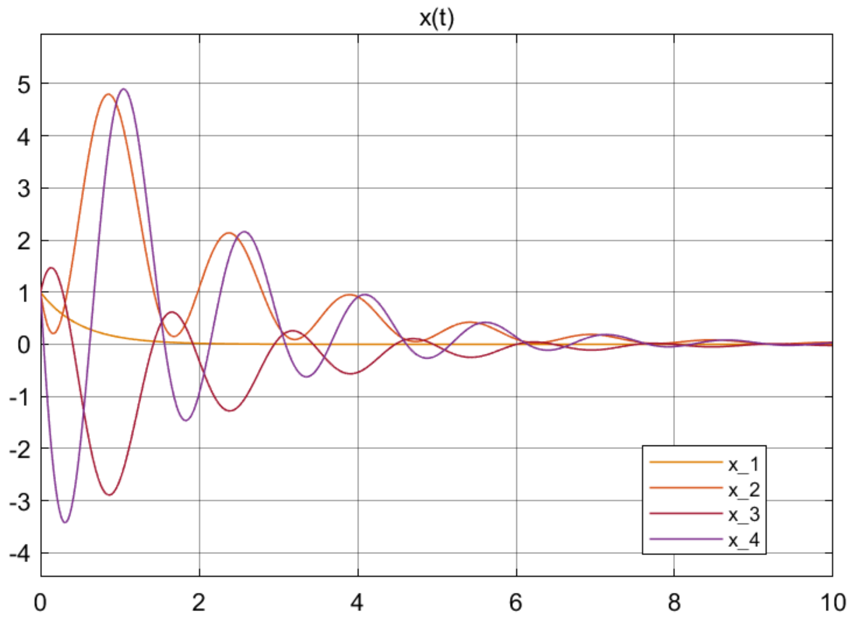

Рисунок 10. Графики x(t) при α =0.5 и $\mu\ =\ 500$

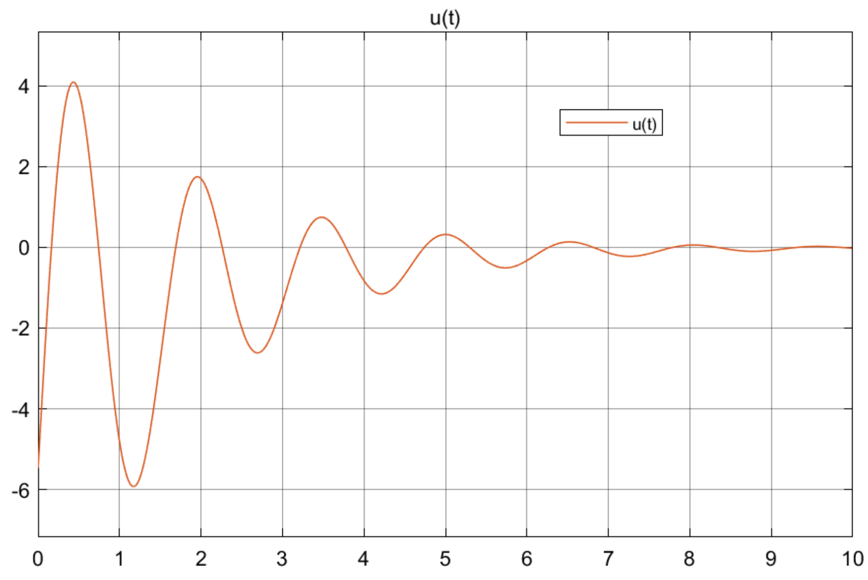

Рисунок 11. Графики u(t) при α =0.5 и μ = 500

Проведем аналогичные расчеты для $\mu\ =\ 2500$

K = [0   -2.0971   -5.5191   -1.7612]

Далее определим собственные числа матрицы $A + BK$:

$$\lambda_1 = -1.5438\ +\ 5.7446i$$
$$\lambda_2 = -1.5438\ +\ 5.7446i$$
$$\lambda_3 = -0.9127$$
$$\lambda_4 = -2$$

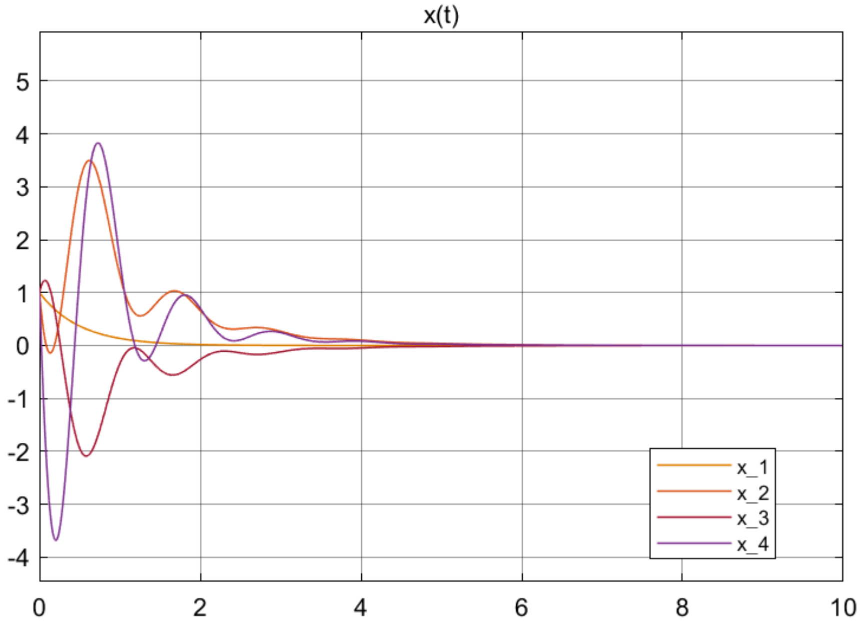

Рисунок 12. Графики x(t) при α =0.5 и $\mu = 2500$

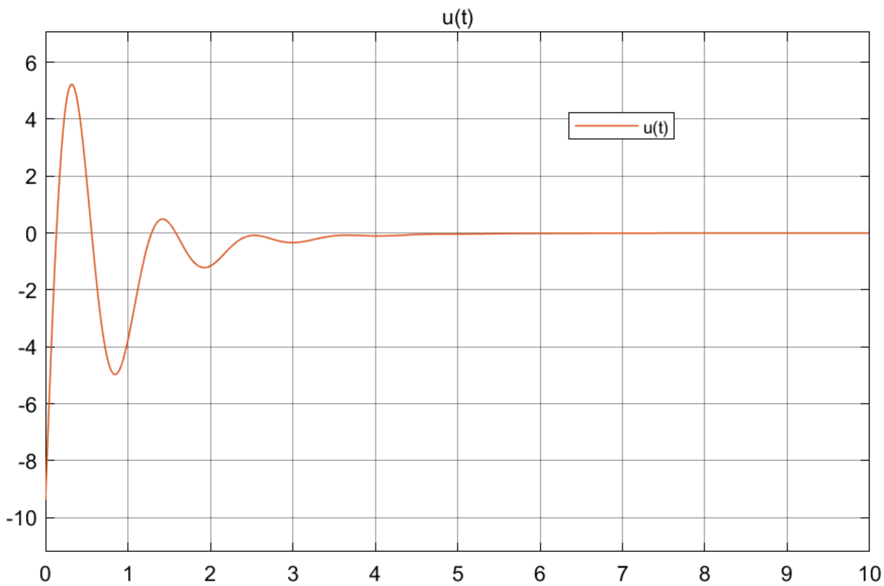

Рисунок 13. Графики u(t) при α =0.5 и μ = 2500

Далее проведем минимизации величины управляющего воздействия для всех значений параметра α.

Минимизируем величину μ при $\alpha = 1$

Чтобы провести минимизацию μ, необходимо, чтобы выполнились условия:

$$\begin{bmatrix} P & x(0) \\ x^T(0) & 1 \end{bmatrix} > 0, \qquad \begin{bmatrix} P & Y^T \\ Y & \mu \end{bmatrix} > 0$$

$$\mu = 212.7613$$

K = [0.0010   -2.0138   -4.9551   -1.5946]

Далее определим собственные числа матрицы $A + BK$:

$$\lambda_1 = -1.0000 \ + \ 5.6781\mathrm{i}$$
$$\lambda_2 = -1.0000 - \ 5.6781\mathrm{i}$$
$$\lambda_3 = -1.0004$$
$$\lambda_4 = -2$$

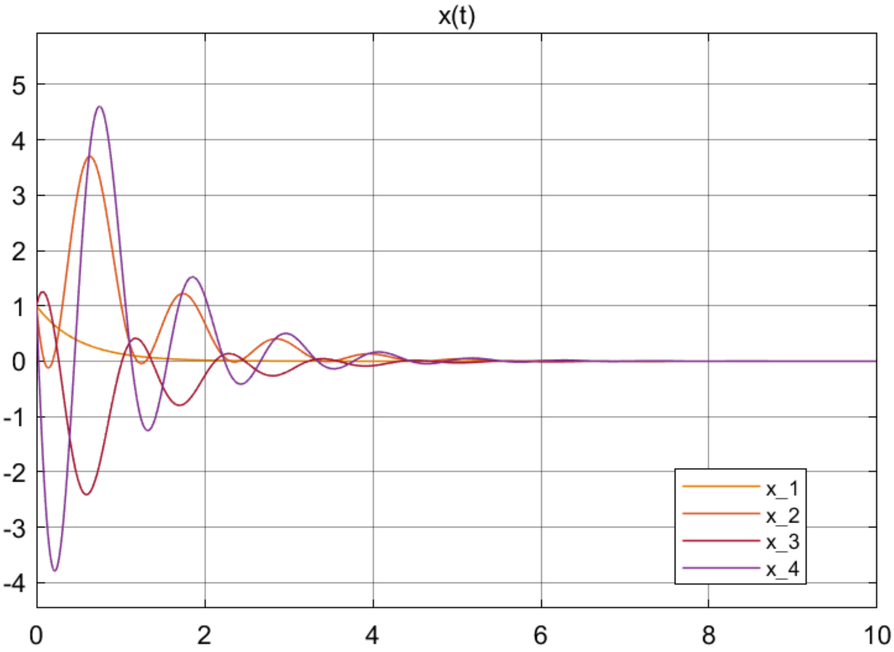

Рисунок 14. Графики x(t) при α = 1 и $\mu \ = 212.7613$

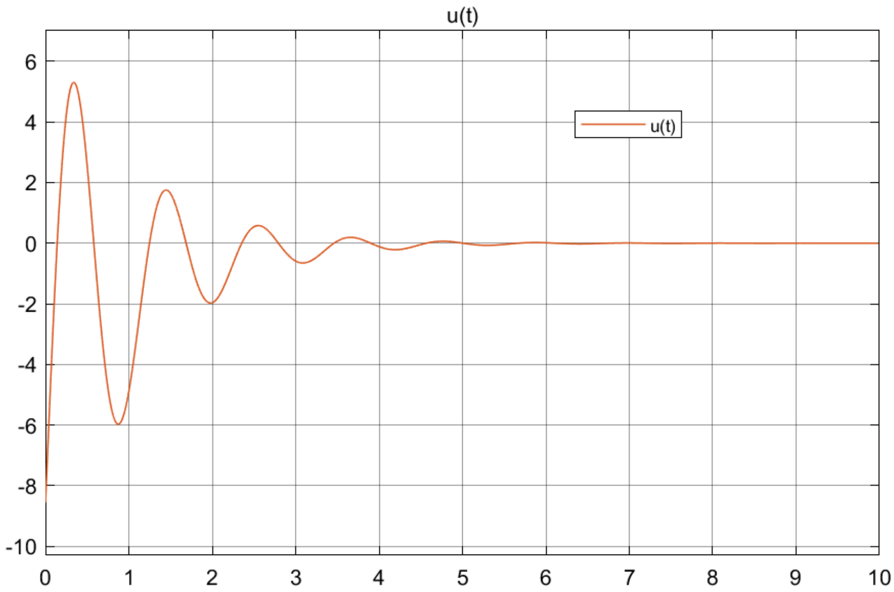

Рисунок 15. Графики u(t) при α = 1 $и \, \mu = 212.7613$

Минимизируем величину μ при $\alpha \ = \ 0.5$

Чтобы провести минимизацию μ, необходимо, чтобы выполнились условия:

$$\begin{bmatrix} P & x(0) \\ x^T(0) & 1 \end{bmatrix} > 0, \qquad \begin{bmatrix} P & Y^T \\ Y & \mu \end{bmatrix} > 0$$

$$\mu = 109.1577$$

K = [0.0003   -1.2017   -3.6034   -1.6193]

Далее определим собственные числа матрицы $A + BK$:

$$\lambda_1 = -0.5000 \ + \ 5.1565\mathrm{i}$$
$$\lambda_2 - 0.5000 - \ 5.1565\mathrm{i}$$
$$\lambda_3 = -0.5001$$
$$\lambda_4 = -2$$

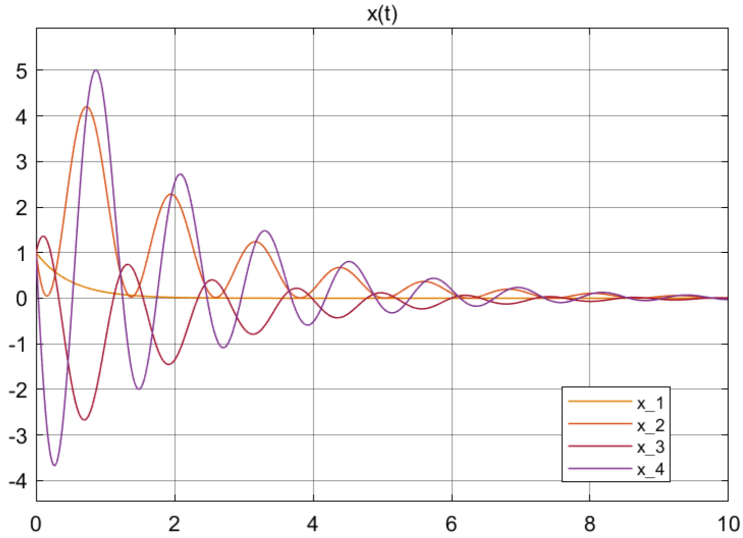

Рисунок 16. Графики x(t) при α =0.5 и $\mu = 109.1577$

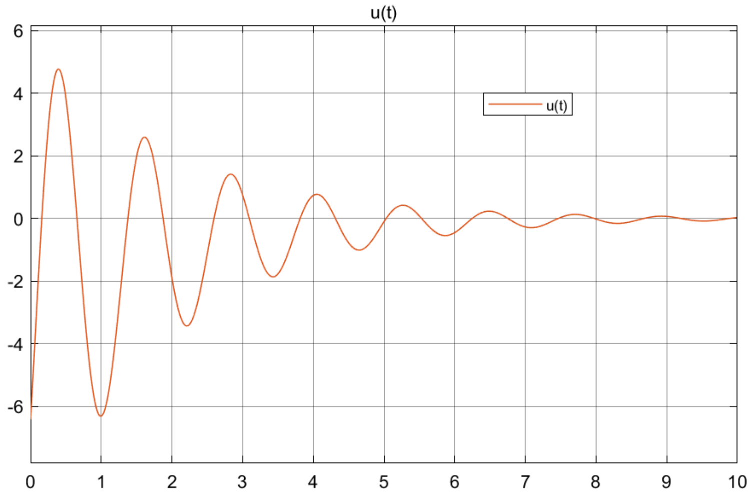

Рисунок 17. Графики u(t) при α =0.5 и μ = 109.1577

Минимизируем величину μ при $\alpha \ = \ 2$

Чтобы провести минимизацию μ, необходимо, чтобы выполнились условия:

$$\begin{bmatrix} P & x(0) \\ x^T(0) & 1 \end{bmatrix} > 0, \qquad \begin{bmatrix} P & Y^T \\ Y & \mu \end{bmatrix} > 0$$

$$\mu = 676.8464$$

$$K = [0.0000 \quad -4.5474 \quad -8.4569 \quad -1.1810]$$

Далее определим собственные числа матрицы $A + BK$:

$$\lambda_1 = -2.0000 + 6.7505i$$
$$\lambda_2 = -2.0000 - 6.7505i$$
$$\lambda_3 = -2$$
$$\lambda_4 = -2$$

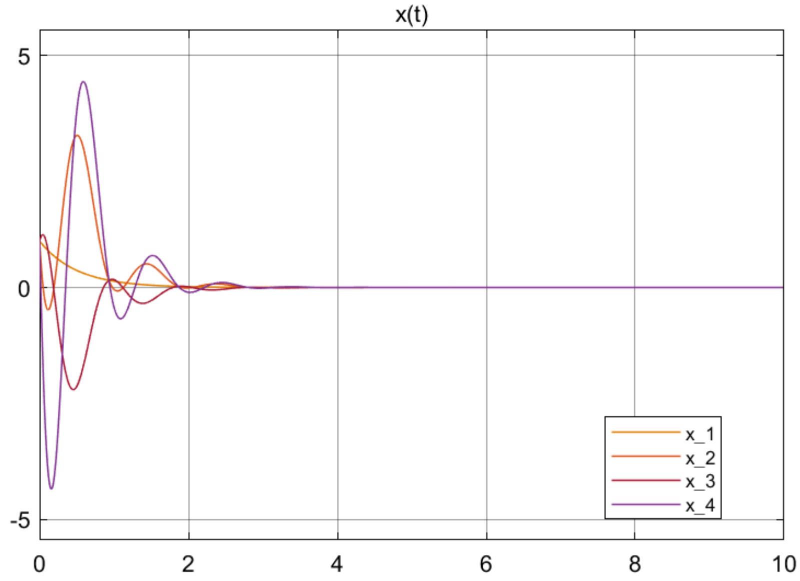

Рисунок 18. Графики x(t) при α = 2 и μ = 676.8464

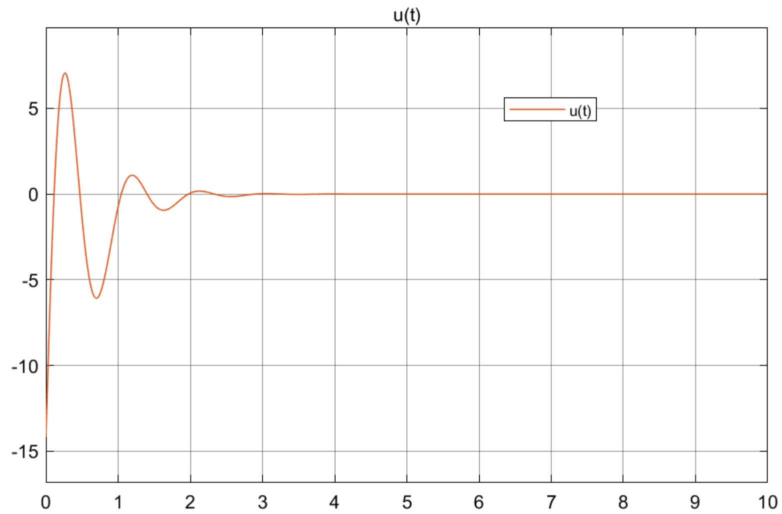

Рисунок 19. Графики u(t) при α = 2 и μ = 676.8464

Вывод: при добавлении ограничения на u, системе нужно больше времени для того, чтобы прийти к результаты. Однако, такие регулятора реальнее, так как в жизни у нас ресурсы небезграничны. В идеале нужно минимизировать ограничение на u, так получается самый качественный, быстрый регулятор при ограничениях.

Задание №3

Возьмите матрицы A и C из таблицы 2 лабораторной работы №8 в соответствии с вашим вариантом и рассмотрите систему:

$$\dot{x} = Ax \qquad y = Cx.$$

Выполните следующие шаги и приведите в отчёте результаты всех вычислений, схемы моделирования, графики и выводы:

- Постройте схему моделирования системы $\dot{x} = Ax, y = Cx$ с наблюдателем состояния $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x} - y)$.
- Задайтесь несколькими различными значениями желаемой степени устойчивости α динамики ошибки наблюдателя.
- Для каждой из заданных степеней устойчивости α найдите какой-нибудь наблюдатель, её гарантирующий. Для поиска наблюдателя воспользуйтесь математическим аппаратом линейных матричных неравенств, не выбирайте собственные числа самостоятельно.
- Найдите собственные числа матрицы A + LC для каждой из найденных L.
- Выберите какие-нибудь начальные условия и выполните моделирование работы найденных вами наблюдателей.
- Постройте сравнительные графики x(t) и $\hat{x}$(t), а также сравнительные графики ошибки наблюдателя при различных выбранных значениях α.
- Сделайте выводы.

Матрицы A, C:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad C^T = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Решение:

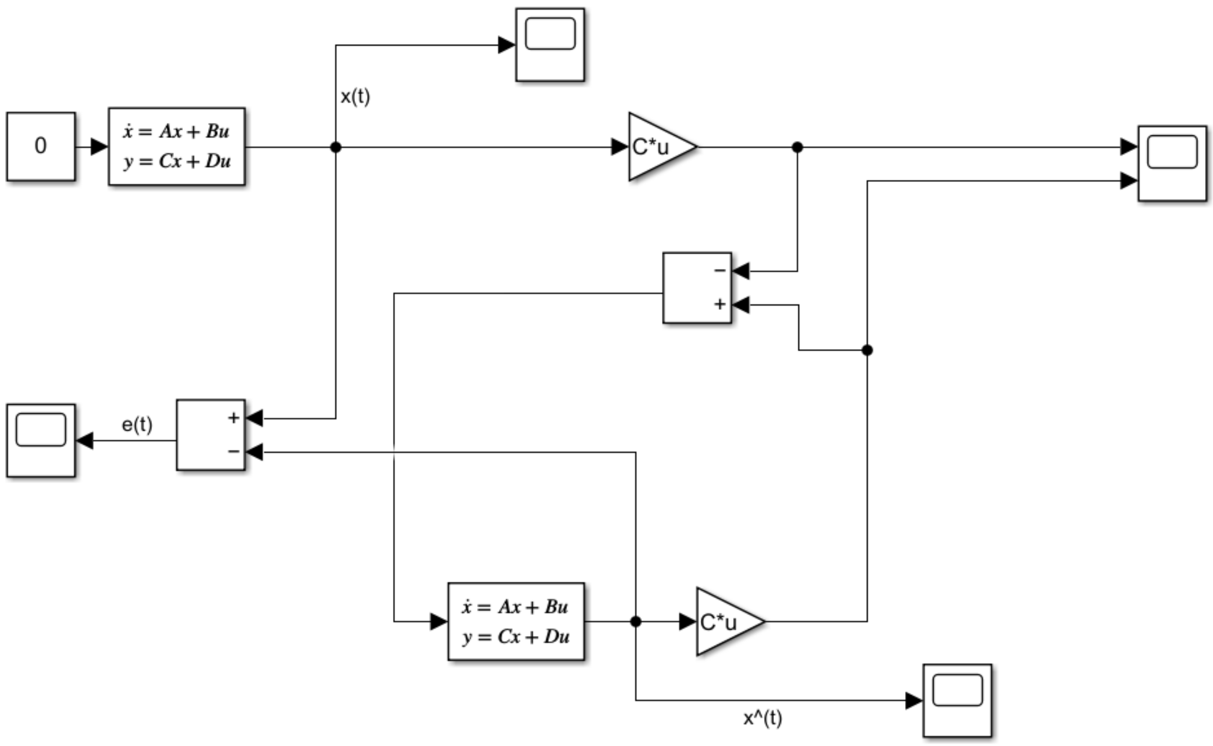

Рисунок 20. Схема моделирования

Выберем различные значения желаемой степени устойчивости α замкнутой системы:

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 10$$
$$a_3 = 0.05$$

С помощь неравенства Ляпунова определим матрицы Q, Y и вычислим матрицу наблюдателя L:

$$\begin{cases} Q > 0 \\ A^T Q + QA + 2aQ + C^T Y^T + YC \leq 0 \end{cases}$$

Для $a_1 = 1$ матрица L равна:

$$L = \begin{bmatrix} 2.2546 \\ -5.1419 \\ 1.8123 \\ -8.8759 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -3.6537 + 6.3897\mathrm{i}$$
$$\lambda_2 = -3.6537 - 6.3897\mathrm{i}$$
$$\lambda_3 = -1.8403 + 2.1192\mathrm{i}$$
$$\lambda_4 = -1.8403 - 2.1192\mathrm{i}$$

Пусть начальные условия для системы равны $x(0) = [1\ 1\ 1\ 1]^T$, а начальные условия наблюдателя $x(0) = [2\ 0\ 0 - 1]^T$.

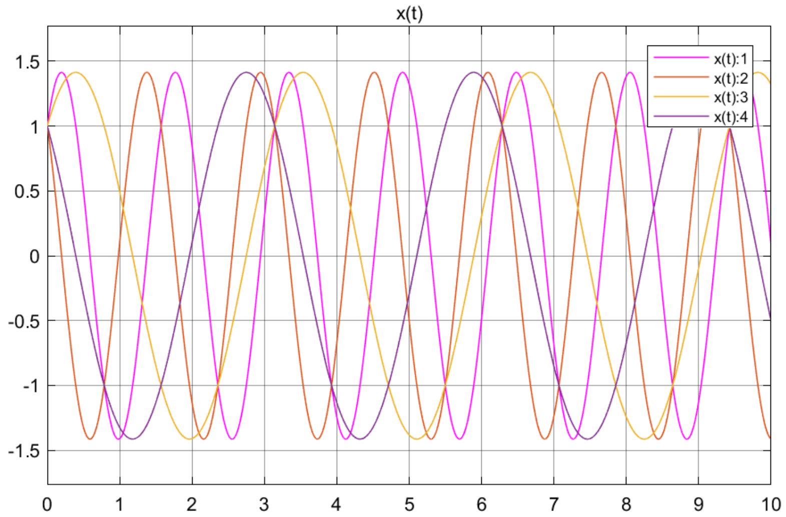

Рисунок 21. Графики x(t) при α = 1

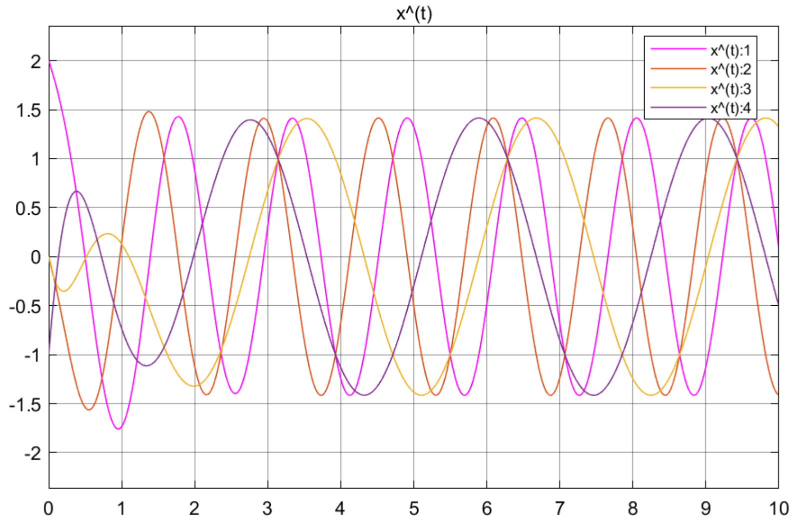

Рисунок 22. Графики $\hat{x}$(t) при α = 1

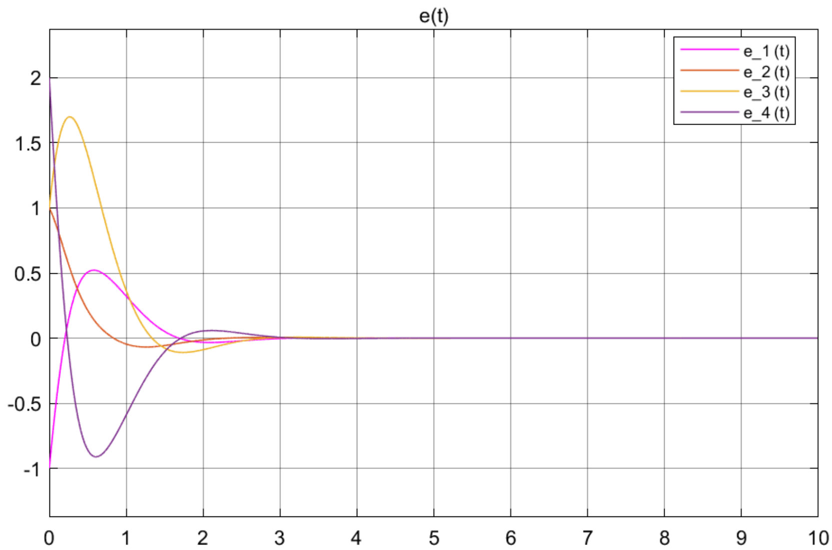

Рисунок 23. Графики ошибки $e(x) = x(t) - \hat{x}(t)$ при α = 1

Для $a_1 = 10$ проведем аналогичные расчеты:

$$L = 10^3 * \begin{bmatrix} 1.4125 \\ 1.7521 \\ 6.0655 \\ -2.1594 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -28.0247 + 29.5177i$$
$$\lambda_2 = -28.0247 - 29.5177i$$
$$\lambda_3 = -12.6338 + 4.8968i$$
$$\lambda_4 = -12.6338 - 4.8968i$$

Пусть начальные условия для системы равны $x(0) = [1\ 1\ 1\ 1]^T$, а начальные условия наблюдателя $x(0) = [2\ 0\ 0 - 1]^T$.

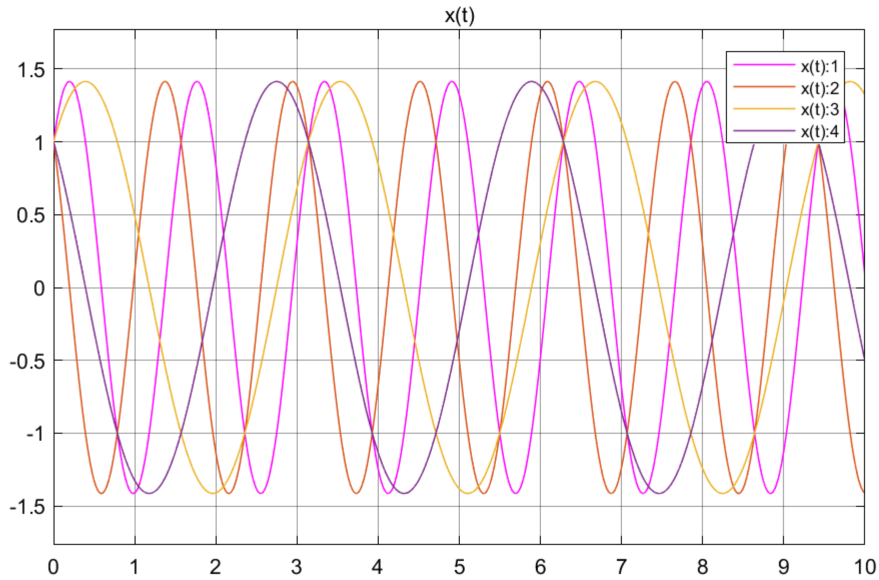

Рисунок 24. Графики x(t) при α = 10

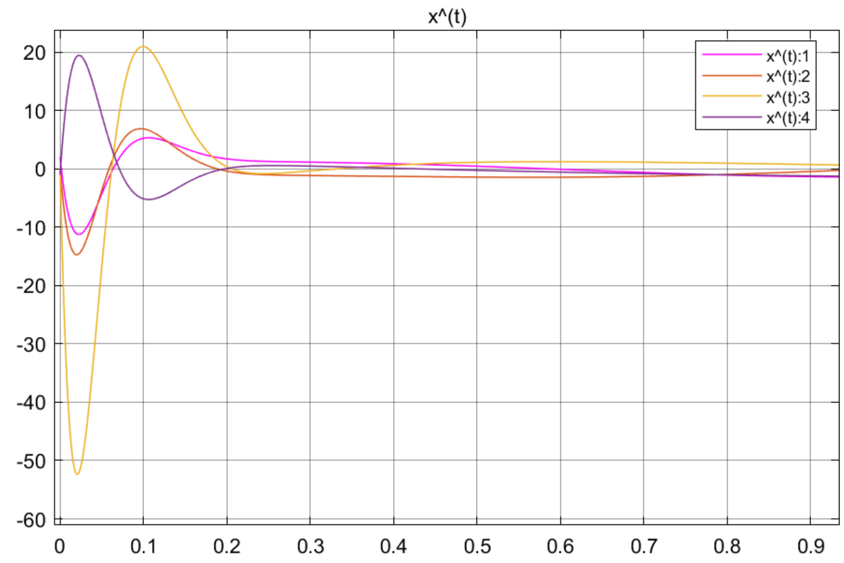

Рисунок 25. Графики $\hat{x}(t)$ при α = 10

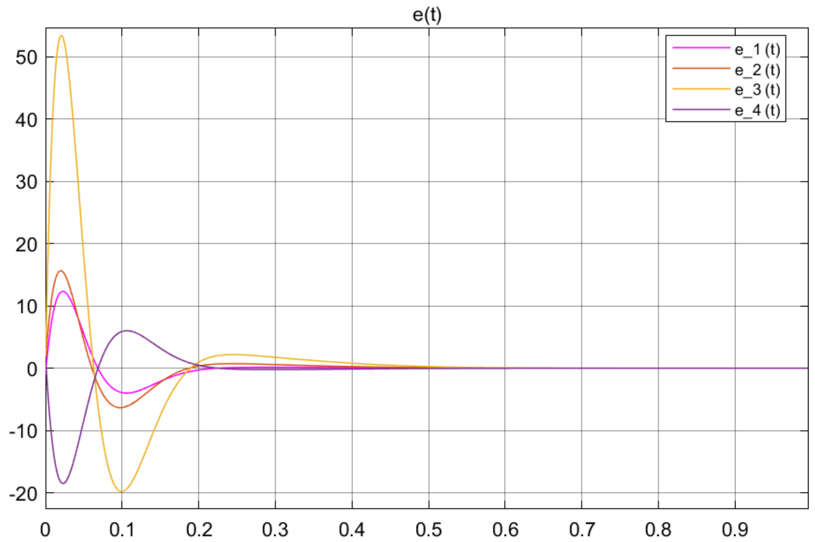

Рисунок 26. Графики ошибки $e(x) = x(t) - \hat{x}(t)$ при α = 10

Для $a_1 = 0.05$ проведем аналогичные расчеты:

$$L = \begin{bmatrix} -0.3199 \\ -0.2501 \\ -0.0123 \\ -0.4958 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -0.5533 + 4.1812i$$
$$\lambda_2 - 0.5533 - 4.1812i$$
$$\lambda_3 = -0.4223 + 2.0125i$$
$$\lambda_4 = -0.4223 - 2.0125i$$

Пусть начальные условия для системы равны $x(0) = [1\ 1\ 1\ 1]^T$, а начальные условия наблюдателя $x(0) = [2\ 0\ 0 - 1]^T$.

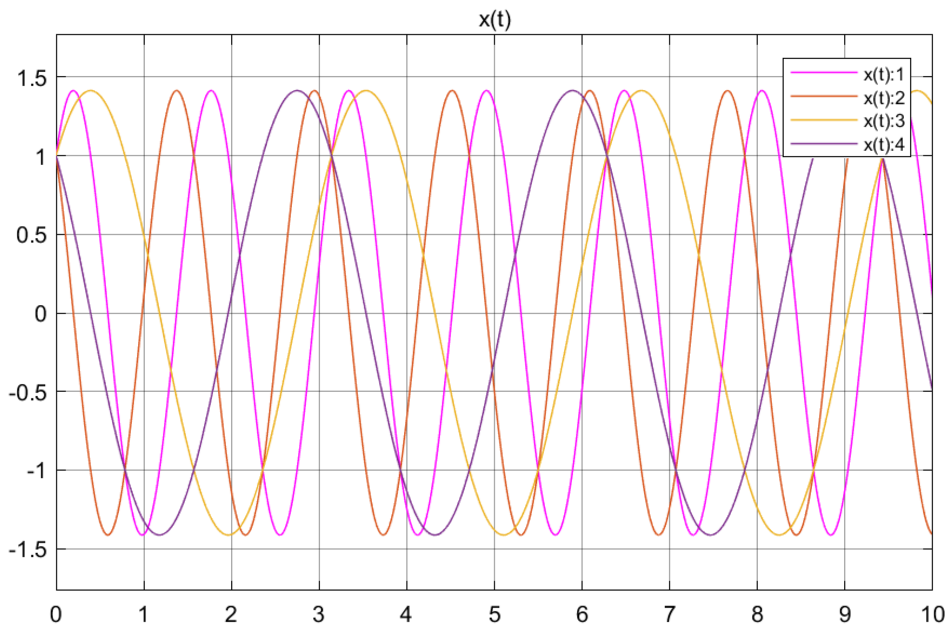

Рисунок 27. Графики x(t) при α = 0.05

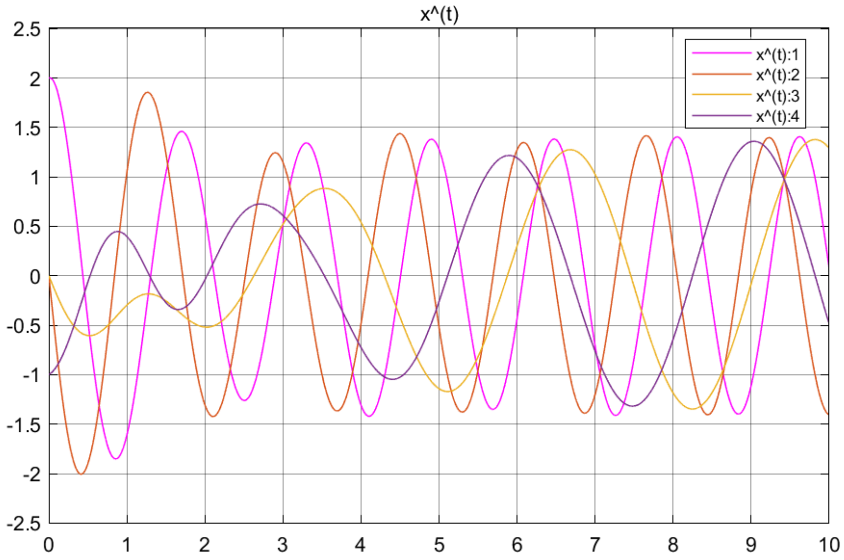

Рисунок 28. Графики $\hat{x}$(t) при $\alpha = 0.05$

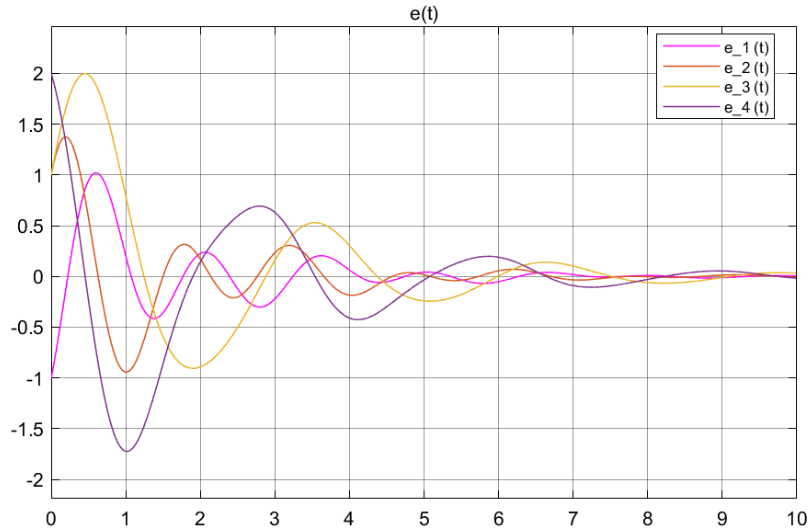

Рисунок 29. Графики ошибки $e(x) = x(t) - \hat{x}(t)$ при $\alpha = 0.05$

Вывод: при большим значениях желаемой степени устойчивости (в данном примере $a = 10$ видны скачки, это ожидаемо, так как матрица L имеет огромные числа. Если бы мы в жизни применяли такой наблюдатель, это могло привести к неоправданным затратам, зато к быстрому схождение системы и наблюдателя.

Задание №4

Возьмите матрицы A, B и C из таблицы 3 лабораторной работы №8 в соответствии с вашим вариантом и рассмотрите систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx. \end{cases}$$

С помощью линейных матричных неравенств синтезируйте для этой системы наблюдатель и основанный на нём регулятор, которые будут гарантировать выбранную вами степень устойчивости системы. Исследуйте совместную работу регулятора и наблюдателя в зависимости от выбранных степеней устойчивости.

Матрицы A, B и C:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -7 & -5 & 1 \\ -7 & 5 & -1 & 5 \\ -5 & -1 & 5 & 7 \\ 1 & 5 & 7 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 14 \\ 10 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Решение:

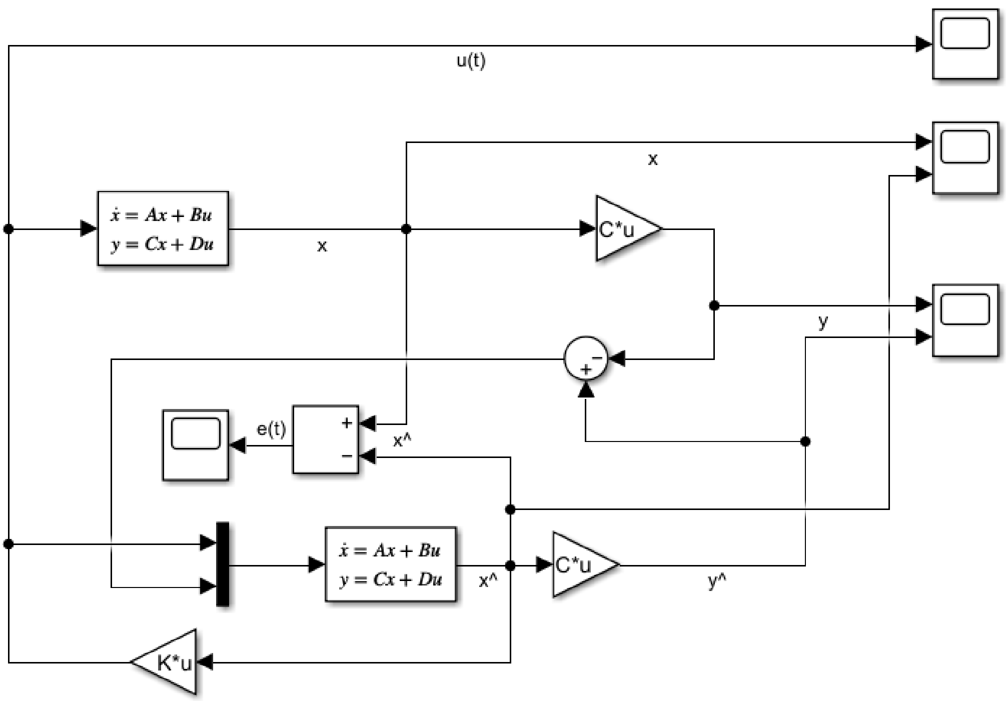

Рисунок 30. Схема моделирования

Сначала найдем собственные числа матрицы A:

$$\lambda_1 = -8$$
$$\lambda_2 = 4$$
$$\lambda_3 = 16$$
$$\lambda_4 = 8$$

Выберем различные значения желаемой степени устойчивости α замкнутой системы:

$$a_1 = 8$$
$$a_2 = 2$$
$$a_3 = 0.5$$

Пусть начальные условия для системы равны $x(0) = [1\ 1\ 1\ 1]^T$,
а начальные условия наблюдателя $x(0) = [2\ 0\ 0 - 1]^T$.

Далее для каждого значения желаемой степени устойчивости найдем с помощью неравенств Ляпунова матрицы регулятора K и наблюдателя L.

Для $a_1 = 8$:

$$L = \begin{bmatrix} 135.1423 & -1.9973 \\ -135.1423 & -1.9973 \\ -60.1379 & 1.9973 \\ -60.1378 & -1.9973 \end{bmatrix}$$

$$K = [473.4342\ -598.0605\ \ -62.2539\ -188.4224]$$

Собственные числа матрицы A + BK:

$$\lambda_1 = -31.3192\ + 46.1852\text{i}$$
$$\lambda_2 = -31.3192 - 46.1852\text{i}$$
$$\lambda_3 = -10.1283\ +\ 3.7486\text{i}$$
$$\lambda_4 = -10.1283\ +\ 3.7486\text{i}$$

Собственные числа матрицы A + LC:

$$\lambda_1 = -33.2713\ + 26.3973\text{i}$$
$$\lambda_2 = -33.2713\ + 26.3973\text{i}$$
$$\lambda_3 = -11.9771$$
$$\lambda_4 = -8$$

Далее выполним моделирование и построим графики.

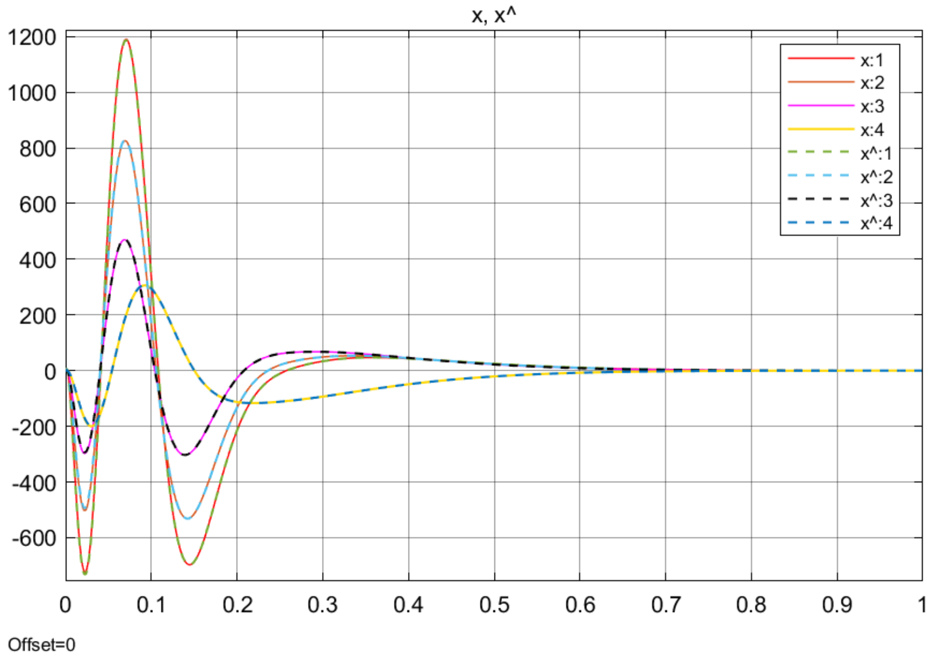

Рисунок 31. Графики $\hat{x}(t)$ и x(t) при α = 8

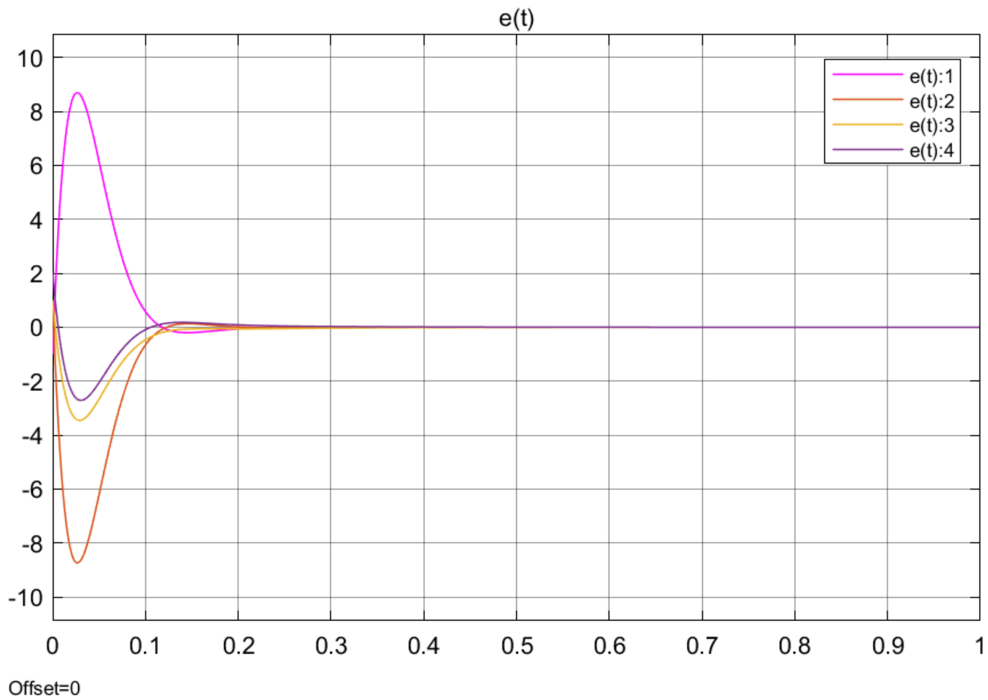

Рисунок 32. Графики ошибки $e(x) = x(t) - \hat{x}(t)$ при α =8

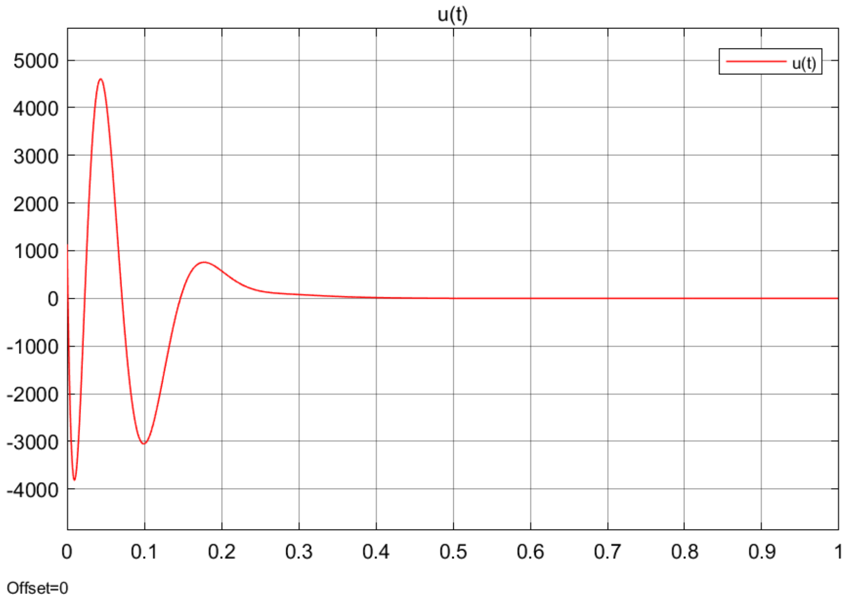

Рисунок 33. График u(t) при $\alpha = 8$

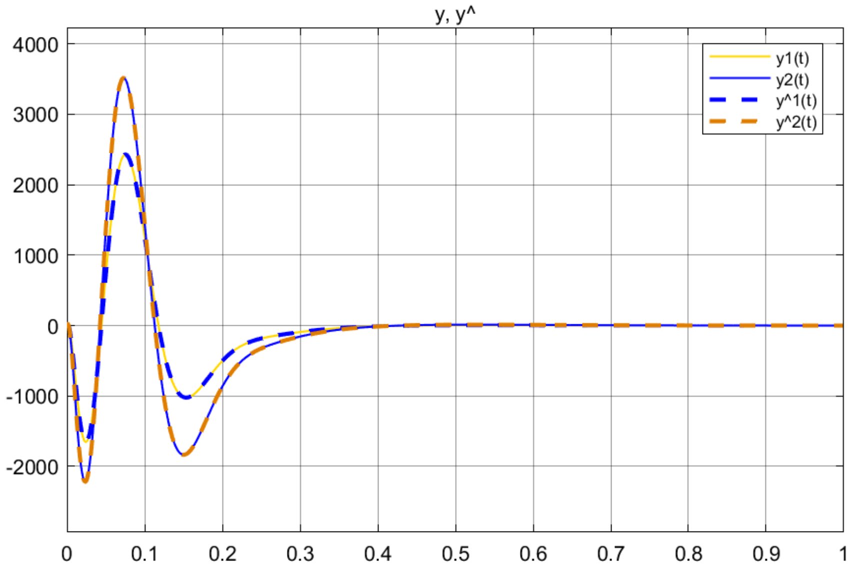

Рисунок 34. График выхода системы и наблюдателя при $\alpha = 8$

Для $a_2 = 2$:

$$L = \begin{bmatrix} 55.8230 & -1.1528 \\ -55.8230 & -1.1528 \\ -28.0574 & 1.1528 \\ -28.0574 & -1.1528 \end{bmatrix}$$

$$K = [151.8195 \ -176.6825 \ -46.0639 \ -71.9960]$$

Собственные числа матрицы A + BK:

$$\lambda_1 = -16.4156 + 36.6402i$$
$$\lambda_2 = -16.4156 - 36.6402i$$
$$\lambda_3 = -4.4480 + 3.4327i$$
$$\lambda_4 = -4.4480 - 3.4327i$$

Собственные числа матрицы A + LC:

$$\lambda_1 = -16.3492\ + 17.1935\text{i}$$
$$\lambda_2 = -16.3492 - 17.1935\text{i}$$
$$\lambda_3 = -5.2223$$
$$\lambda_4 = -8$$

Далее выполним моделирование и построим графики.

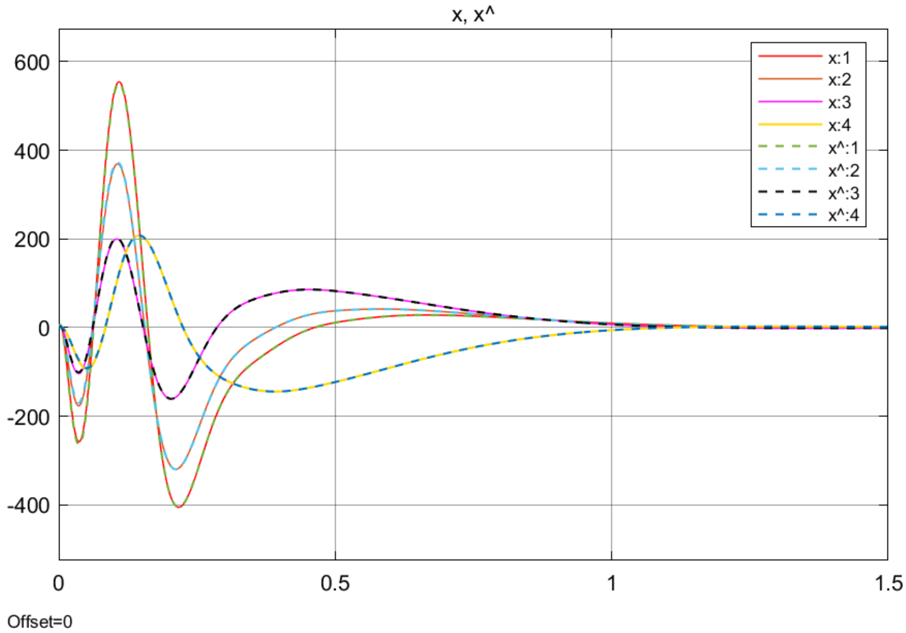

Рисунок 35. Графики $\hat{x}(t)$ и x(t) при α = 2

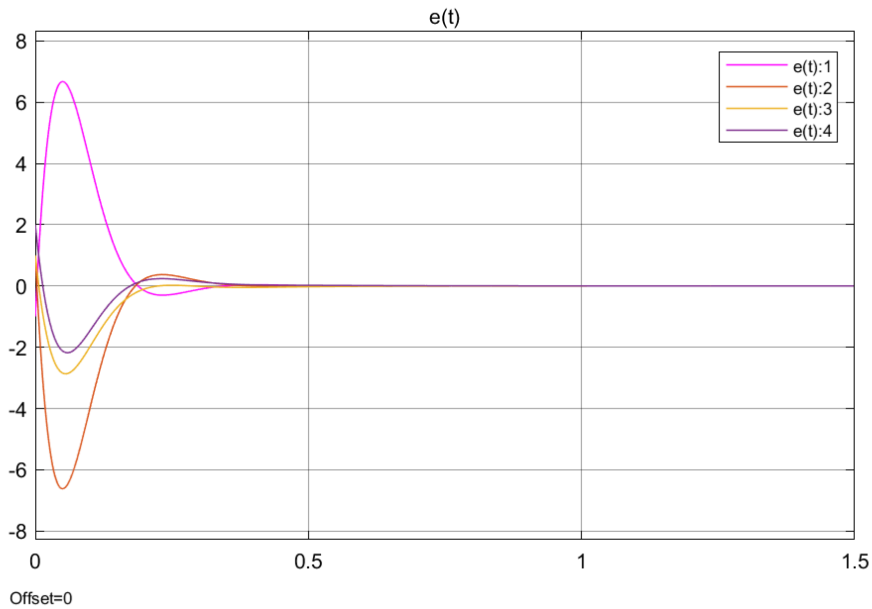

Рисунок 36. Графики ошибки $e(x) = x(t) - \hat{x}(t)$ при α = 2

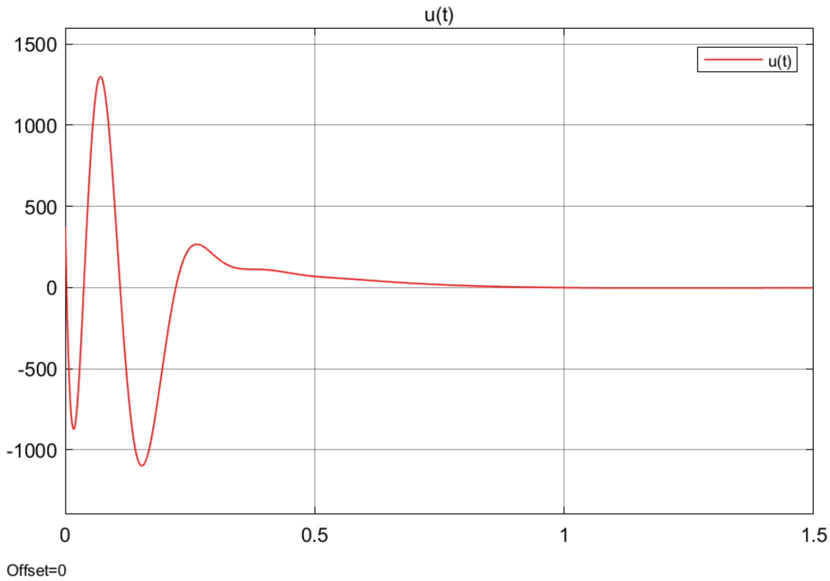

Рисунок 37. График u(t) при α =2

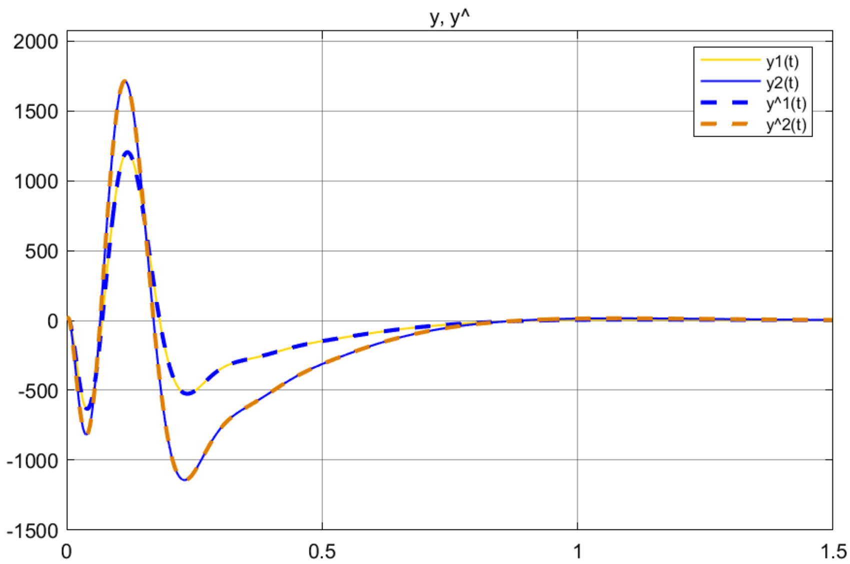

Рисунок 38. График выхода системы и наблюдателя при α =2

Для $a_3 = 0.5$:

$$L = \begin{bmatrix} 43.0928 & -0.7514 \\ -43.0928 & -0.7514 \\ -22.4343 & 0.7514 \\ -22.4343 & -0.75143 \end{bmatrix}$$

$$K = [96.4233 \ -106.1894 \ -40.4969 \ -51.6225]$$

Собственные числа матрицы A + BK:

$$\lambda_1 = -17.0671 + 30.8753i$$
$$\lambda_2 = -17.0671 - 30.8753i$$
$$\lambda_3 = -2.0298 + 2.5900i$$
$$\lambda_4 = -2.0298 - 2.5900i$$

Собственные числа матрицы A + LC:

$$\lambda_1 = -12.2102 \ + 15.8939\mathrm{i}$$
$$\lambda_2 = -12.2102 \ - 15.8939\mathrm{i}$$
$$\lambda_3 = -2.0110$$
$$\lambda_4 = -8$$

Далее выполним моделирование и построим графики.

Рисунок 39. Графики $\hat{x}(t)$ и x(t) при α = 0.5:

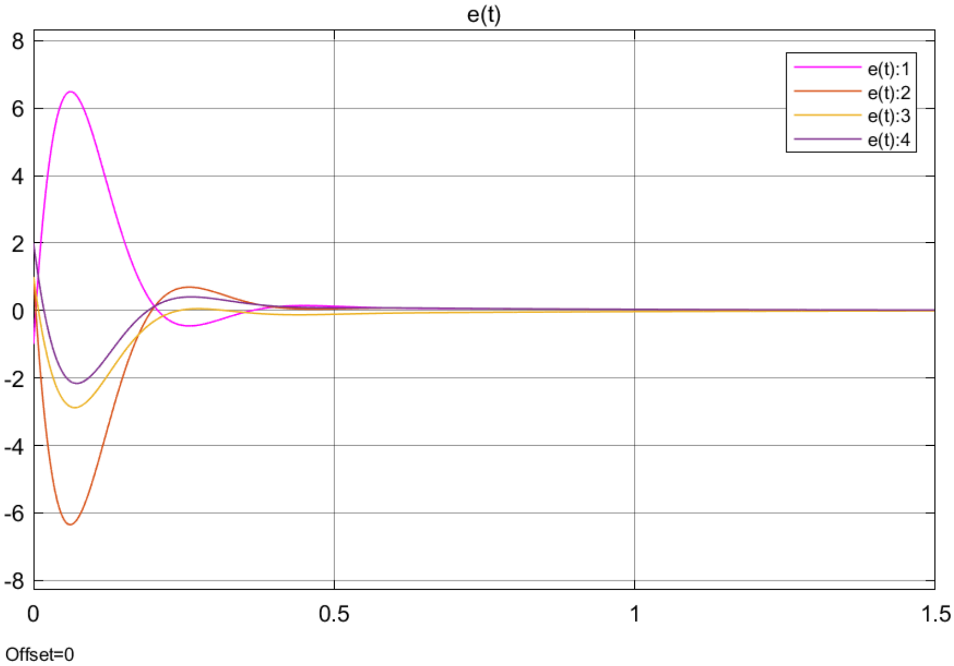

Рисунок 40. Графики ошибки $e(x) \ = \ x(t) \ - \ \hat{x}(t)$ при α $=$0.5

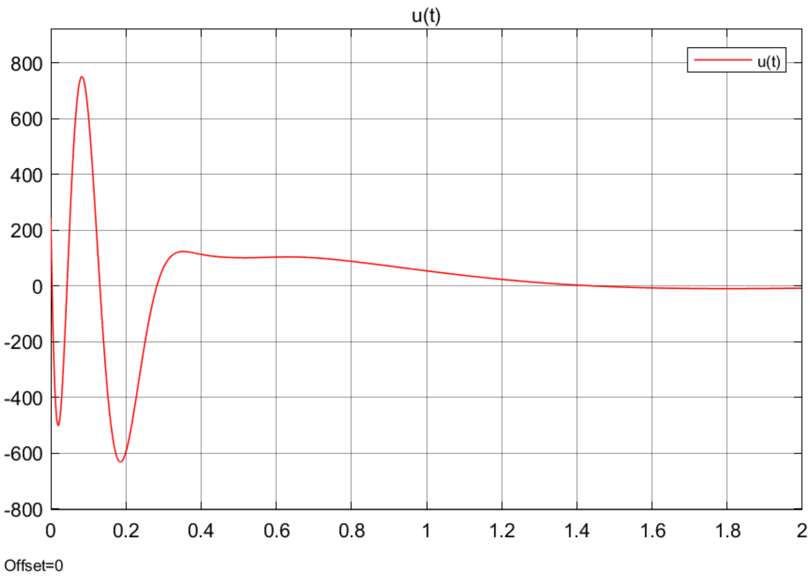

Рисунок 41. График u(t) при α $=$0.5

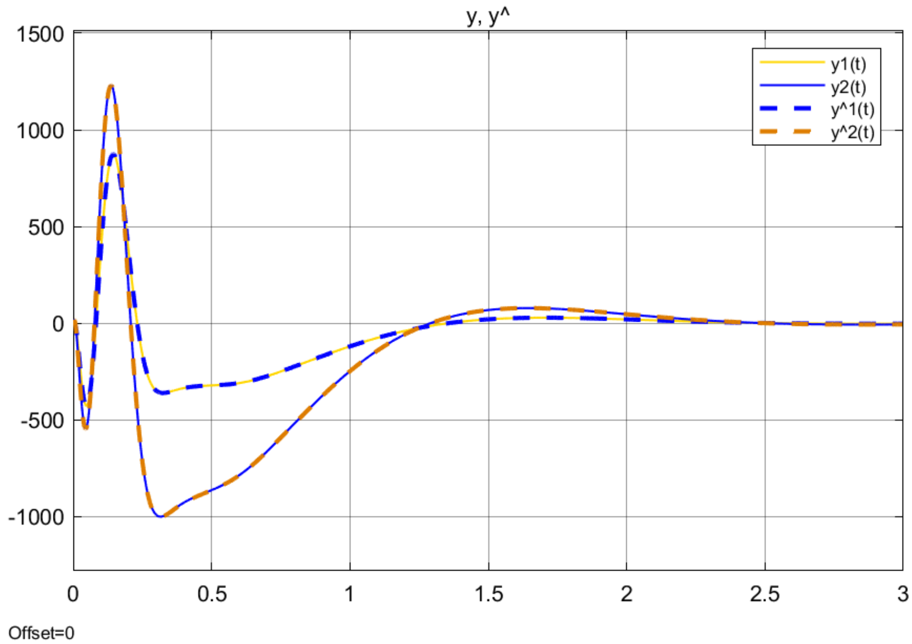

Рисунок 42. График выхода системы и наблюдателя при $\alpha = 0.5$

Вывод: в данном задании синтезировали для системы наблюдатель и основанный на нём регулятор. Чем меньше a, тем более реальный результат мы получаем. Так как нет огромных выбросов. Иногда лучше пожертвовать устойчивостью (взять не такое «сильно устойчивое» a), чтобы наблюдатель и регулятор были реализуемы.