МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ “САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО”

ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

Лабораторная работа №7: «Управляемость и наблюдаемость»

по дисциплине Теория автоматического управления

Вариант №2

Выполнил: Студент группы R33362 Осинина Т. С

Преподаватель: Перегудин А.А.

Санкт-Петербург, 2023

Задание №1

Возьмите матрицы A и B из таблицы 1 в соответствии с вашим вариантом и рассмотрите систему:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Выполните следующие шаги и приведите в отчёте результаты всех вычислений, схемы моделирования, графики и выводы:

- Найдите матрицу управляемости системы, определите её ранг, сделайте вывод об управляемости системы.
- Найдите собственные числа матрицы A и жорданову форму системы. Определите управляемость каждого собственного числа двумя способами: на основе жордановой формы и с помощью рангового критерия.
- Принадлежит ли точка x_1 из таблицы 1 управляемому подпространству системы?
- Найдите Грамиан управляемости системы относительно времени t_1 = 3, вычислите его собственные числа.
- Найдите управление, переводящее систему из x(0) = 0 в x(t_1) = x_1 за время t_1= 3.
- Выполните моделирование системы с рассчитанным управлением, постройте графики компонент вектора x(t) до времени t_1 = 3, а также график сигнала управления u(t)

Матрицы A и B, точка x_1:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 6 \\ 4 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad x_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Решение:

Матрица управляемости: $U = [B \;\; AB \;\; A^2B] = \begin{bmatrix} 5 & 67 & -167 \\ -3 & 49 & -83 \\ 5 & -51 & 85 \end{bmatrix}$

По критерию Калмана система управляема, если $rank\, U = n$:

$$rank\, U = 3 = n \Rightarrow \text{система управляема}$$

Далее находим собственные числа:

$$det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_{2,3} = -1 \pm 2i \\ \lambda_1 = -1 \end{matrix}$$

Находим Жорданову форму матрицы:

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1-2i & 0 \\ 0 & 0 & -1+2i \end{bmatrix}$$

Жорданова форма матрицы (вещественная):

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}, \; P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{23\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{23\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Все жордановы клетки соответствуют разным собственным числам, значит, первое условие управляемости системы выполнено. Анализируем матрицу $\hat{B}$: нет нулей, следовательно все собственные числа управляемы.

Проверим управляемость собственных чисел с помощью рангового критерия.

$$\lambda_1 = -1$$

$$rank[A - \lambda I \quad B] = rank \begin{bmatrix} 6 & -4 & 6 & 5 \\ 4 & -2 & 4 & -3 \\ -4 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix} = 3$$

$$\Rightarrow \; \lambda_1 - \text{управляемое, так как } [A - \lambda I \quad B] = n = 3$$

$$\lambda_2 = -1 + 2i$$

$$rank[A - \lambda I \quad B] = rank \begin{bmatrix} 6-2i & -4 & 6 & 5 \\ 4 & -2-2i & 4 & -3 \\ -4 & 2 & -4-2i & 5 \end{bmatrix} = 3$$

$$\Rightarrow \; \lambda_1 - \text{управляемое, так как } [A - \lambda I \quad B] = n = 3$$

$\lambda_2 = -1 - 2i$

$$rank[A - \lambda I \quad B] = rank \begin{bmatrix} 6+2i & -4 & 6 & 5 \\ 4 & -2+2i & 4 & -3 \\ -4 & 2 & -4+2i & 5 \end{bmatrix} = 3$$

$$\Rightarrow \; \lambda_1 - \text{управляемое, так как } [A - \lambda I \quad B] = n = 3$$

Далее проверим принадлежит ли точка x_1 управляемому подпространству системы:

Если $rank(U) = rank(U\ \ x_1)$,
тогда x_1 принадлежит управляемому подпространству

$$rank\begin{bmatrix} 5 & 67 & -167 & 3 \\ -3 & 49 & -83 & 2 \\ 5 & -51 & 85 & -2 \end{bmatrix} = 3 \Rightarrow x_1 \in \text{управляемому подпространству}$$

После находим Грамиан управляемости системы относительно времени t_1 = 3:

$$P(t_1) = \int_0^{t_1} e^{At} B B^T e^{A^T t}\, dt = \begin{bmatrix} 282{,}76822 & 154{,}3089 & -134{,}845 \\ 154{,}3089 & 94{,}5098 & -84{,}5246 \\ -134{,}845 & -84{,}5246 & 76{,}5345 \end{bmatrix}$$

Собственные числа Грамиана:

$$\lambda_1 = 0{,}2864,$$
$$\lambda_2 = 14{,}4196,$$
$$\lambda_3 = 439{,}1095$$

Управление, переводящее систему из x(0) = 0 в x(t_1) = x_1 за время t_1= 3:

$$u(t) = -\frac{46244016308271407\, \mathrm{e}^{t-3}}{72057594037927936} + \mathrm{e}^{t\,(1-2\,\mathrm{i})-3+6\,\mathrm{i}} \left(\frac{14978921272061253}{288230376151711744} - \frac{42467825850971693}{72057594037927936}\,\mathrm{i}\right) + \mathrm{e}^{t\,(1+2\,\mathrm{i})-3-6\,\mathrm{i}} \left(\frac{14978921272061253}{288230376151711744} + \frac{42467825850971693}{72057594037927936}\,\mathrm{i}\right)$$

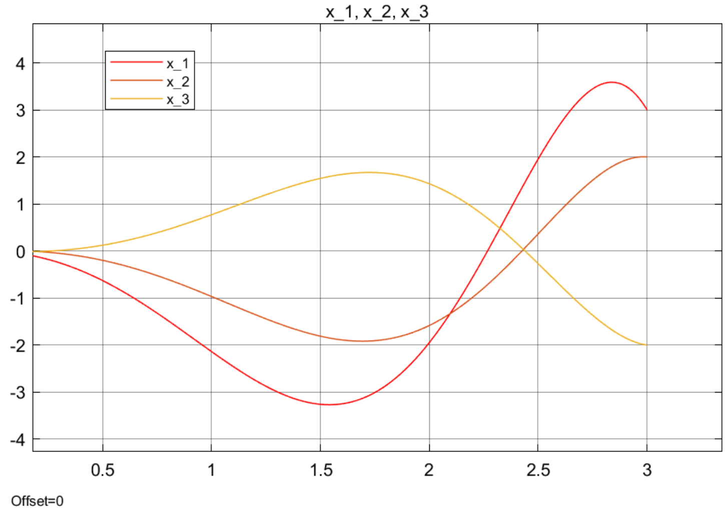

Рисунок 1. Графики компонент вектора x(t)

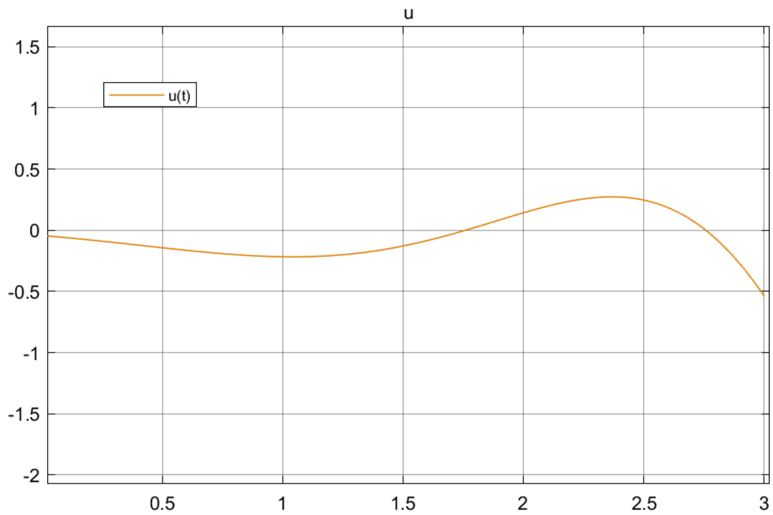

Рисунок 2. График сигнала управления u(t)

Задание №2

Возьмите матрицы A и B из таблицы 2. Проверьте обе точки $x_1{}'$ и x_1'' из таблицы 2 на принадлежность управляемому подпространству системы. В качестве целевой точки x_1 возьмите ту из них, которая принадлежит управляемому подпространству системы. Выполните все шаги задания 1 для этих матриц A, B и точки x_1, включая поиск соответствующего управляющего воздействия и моделирование.

Матрицы A и B, $x_1{}'$ и x_1'':

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 6 \\ 4 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x_1{}' = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad x_1'' = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Решение:

Проверяем какие точки принадлежат управляемому подпространству, для этого находим матрицу управляемости U и матрицу $[U\ x_1{}'\ ]$:

$$U = [B\ \ AB\ \ A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 15 & -35 \\ -1 & 11 & -17 \\ 1 & -11 & 17 \end{bmatrix}$$

$$[U\ x_1{}'\ ] = \begin{bmatrix} 1 & 15 & -35 & 2 \\ -1 & 11 & -17 & 2 \\ 1 & -11 & 17 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[U\ x_1''] = \begin{bmatrix} 1 & 15 & -35 & 3 \\ -1 & 11 & -17 & 2 \\ 1 & -11 & 17 & -2 \end{bmatrix}$$

$$rank[U\ x_1{}'\ ] = 3 \neq rank[U] = 2$$
$$rank[U\ x_1''\ ] = 2 \neq rank[U] = 2$$

Следовательно, x_1'' ∈ управляемому подпространству системы, дальше будем работать с этой точкой.

По критерию Калмана система неуправляема полностью, так как

$$rank\,U \neq n:$$

Далее находим собственные числа:

$$det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_{2,3} = -1 \pm 2i \\ \lambda_1 = -1 \end{matrix}$$

Находим Жорданову форму матрицы:

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1-2i & 0 \\ 0 & 0 & -1+2i \end{bmatrix}$$

Жорданова форма матрицы (вещественная):

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix},\ P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{5\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_1\\ \dot{\hat{x}}_2\\ \dot{\hat{x}}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ \hat{x}_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{5\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

Анализируем матрицу $\hat{B}$: так как в первой строке матрицы $\hat{B}$ стоит ноль, собственное число -1 неуправляемо.

Проверим управляемость собственных чисел с помощью рангового критерия.

$$\lambda_1 = -1$$

$$rank[A - \lambda I \quad B] = rank\begin{bmatrix}6 & -4 & 6 & 1\\ 4 & -2 & 4 & -1\\ -4 & 2 & -4 & 1\end{bmatrix} = 2$$

$$\Rightarrow \ \lambda_1 - \text{неуправляемое, так как } [A - \lambda I \quad B] = 2 \neq n$$

$$\lambda_2 = -1 + 2i$$

$$rank[A - \lambda I \quad B] = rank\begin{bmatrix}6 - 2i & -4 & 6 & 1\\ 4 & -2 - 2i & 4 & -1\\ -4 & 2 & -4 - 2i & 1\end{bmatrix} = 3$$

$$\Rightarrow \ \lambda_1 - \text{управляемое, так как } [A - \lambda I \quad B] = n = 3$$

$$\lambda_2 = -1 - 2i$$

$$rank[A - \lambda I \quad B] = rank\begin{bmatrix}6 + 2i & -4 & 6 & 1\\ 4 & -2 + 2i & 4 & -1\\ -4 & 2 & -4 + 2i & 1\end{bmatrix} = 3$$

$$\Rightarrow \ \lambda_1 - \text{управляемое, так как } [A - \lambda I \quad B] = n = 3$$

После находим Грамиан управляемости системы относительно времени t_1 = 3:

$$P(t_1) = \int_0^{t_1} e^{At} B B^T e^{A^T t}\, dt = \begin{bmatrix}14{,}6724 & 7{,}386 & -7{,}386\\ 7{,}386 & 4{,}291 & -4{,}291\\ -7{,}386 & -4{,}291 & 4{,}291\end{bmatrix}$$

Собственные числа Грамиана:

$$\lambda_1 = 0,$$
$$\lambda_2 = 0{,}747,$$
$$\lambda_3 = 22{,}5074$$

Управление, переводящее систему из x(0) = 0 в x(t_1) = x_1'' за время t_1= 3:

$$u(t) = \mathrm{e}^{t\,(1-2\,\mathrm{i})-3+6\,\mathrm{i}}\left(-\frac{4909285184969475}{9007199254740992}-\frac{707579894004101}{562949953421312}\,\mathrm{i}\right) + \mathrm{e}^{t\,(1+2\,\mathrm{i})-3-6\,\mathrm{i}}\left(-\frac{4909285184969475}{9007199254740992}+\frac{707579894004101}{562949953421312}\,\mathrm{i}\right)$$

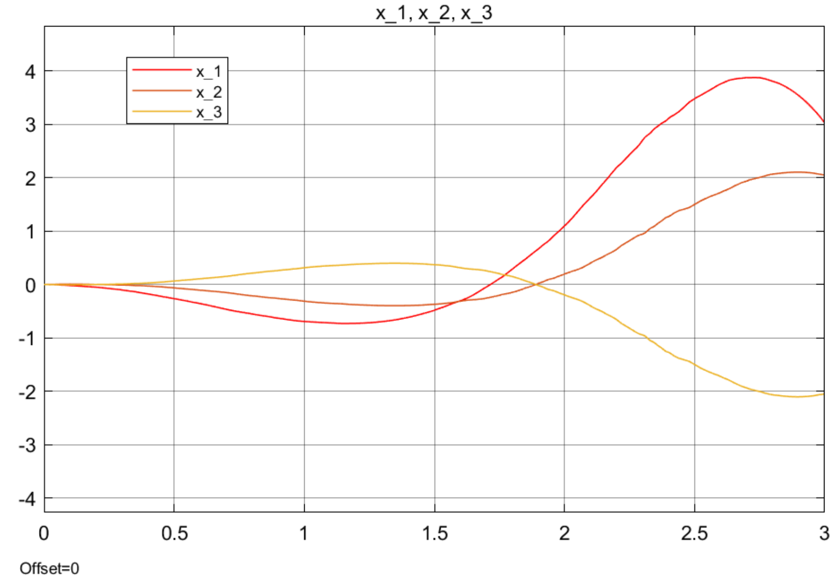

Рисунок 3. Графики компонент вектора x_1''(t)

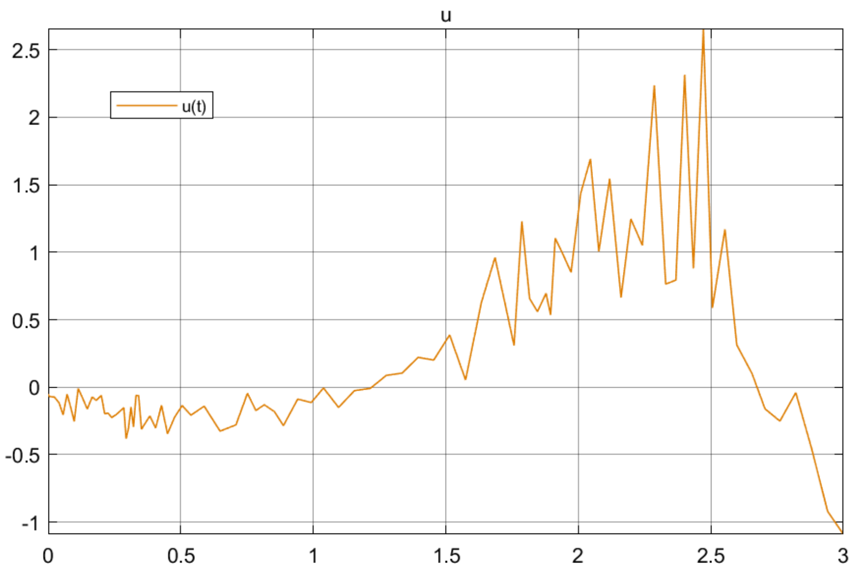

Рисунок 4. График сигнала управления u(t)

Такой график получился, так как Грамиан управляемости не имеет обратной функции (определитель равен 0), проведем повторные расчеты, используя псевдообратную матрицу Мура-Пенроуза и построим график u(t):

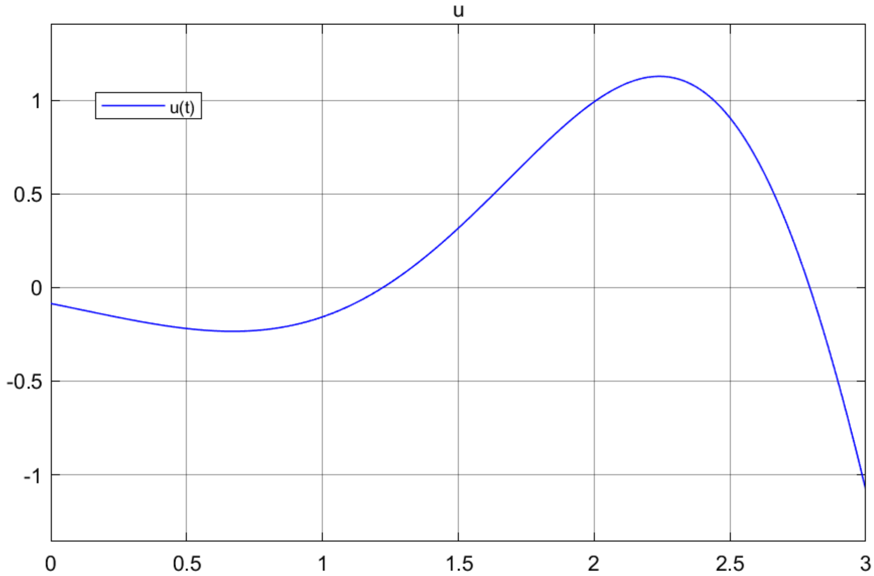

Рисунок 5. График сигнала управления u(t)

Задание №3

Возьмите матрицы A и C из таблицы 3 в соответствии с вашим вариантом и рассмотрите систему:

$$\dot{x} = Ax \qquad y = Cx$$

Выполните следующие шаги и приведите в отчёте результаты всех вычислений, схемы моделирования, графики и выводы:

- Найдите матрицу наблюдаемости системы, определите её ранг, сделайте вывод о наблюдаемости системы
- Найдите собственные числа матрицы A и жорданову форму системы. Определите наблюдаемость каждого собственного числа двумя способами: на основе жордановой формы и с помощью рангового критерия.
- Найдите Грамиан наблюдаемости системы относительно времени t_1 = 3, вычислите его собственные числа.
- Представьте, что вам известна следующая информация: выход y системы в течение времени t ∈ [0, t1] подчинялся закону y(t), приведенному в таблице 3. Найдите какой-нибудь вектор x(0) начальных условий, которые могла иметь система.
- Могла ли система иметь какие-то другие начальные условия кроме тех, которые вы нашли? Обоснуйте свой ответ.
- Выполните моделирование системы с найденными начальными условиями, постройте графики компонент вектора x(t) до времени t_1 = 3, а также график сигнала выхода $y(t)$.

Матрицы А и С, сигнал $y(t)$:

$$A=\begin{bmatrix}-8 & -3 & -12\\ -3 & -2 & -6\\ 6 & 0 & 7\end{bmatrix} \quad C=[1\ \ 0\ \ 2] \quad y(t)=2e^{-2t}\,cos(3t)+e^{-2t}\,sin(3t)$$

Решение:

Сначала находим матрицу наблюдаемости системы и ее ранг:

$$V=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 4 & -3 & 2\\ -11 & -6 & -16\end{bmatrix}$$

$$rank\,V=3=n$$

По критерию Калмана система полностью наблюдаема.

Далее находим собственные числа:

$$det(\lambda I-A)=0\Rightarrow \begin{matrix}\lambda_{2,3}=-2\pm 3i\\ \lambda_1=1\end{matrix}$$

Находим Жорданову форму матрицы:

$$J=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2-3 & 0\\ 0 & 0 & -2+3i\end{bmatrix}$$

Жорданова форма матрицы (вещественная):

$$J=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -3\\ 0 & 3 & -2\end{bmatrix}, \quad P=\begin{bmatrix}-1 & -\frac{3\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 1 & \sqrt{2} & 0\end{bmatrix}, \ P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$$\hat{C}=CP=[1\ \ 0\ \ 2]\begin{bmatrix}-1 & -\frac{3\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 1 & \sqrt{2} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_1\\ \dot{\hat{x}}_2\\ \dot{\hat{x}}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -3\\ 0 & 3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ \hat{x}_3\end{bmatrix}$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ \hat{x}_3\end{bmatrix}$$

Анализируем матрицу $\hat{C}$: так как в матрице нет нулей, все собственные числа наблюдаемы.

Проверим наблюдаемость собственных чисел с помощью рангового критерия.

$$\lambda_1 = 1$$

$$rank\begin{bmatrix} A-\lambda I \\ C \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} -9 & -3 & -12 \\ -3 & -3 & -6 \\ 6 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 3$$

$$\lambda_2 = -2+3i$$

$$rank\begin{bmatrix} A-\lambda I \\ C \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} -3i-6 & -3 & -12 \\ -3 & -3i & -6 \\ 6 & 0 & 9-3i \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 3$$

$$\lambda_3 = -2-3i$$

$$rank\begin{bmatrix} A-\lambda I \\ C \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} 3i-6 & -3 & -12 \\ -3 & 3i & -6 \\ 6 & 0 & 3i+9 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 3$$

После находим Грамиан наблюдаемости системы относительно времени t_1 = 3:

$$Q(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At}\, dt = \begin{bmatrix} 201{,}9240 & -201{,}3576 & 202{,}0924 \\ -201{,}3576 & 201{,}1565 & -201{,}3048 \\ 202{,}0924 & -201{,}3048 & 202{,}4243 \end{bmatrix}$$

Собственные числа Грамиана:

$$\lambda_1 = 0.0073,$$
$$\lambda_2 = 0{,}4915,$$
$$\lambda_3 = 605{,}006$$

Далее находим вектор x(0) начальных условий, при выходе y системы в течение времени t ∈ [0, t1], который подчинялся закону y(t):

$$x(0) = \left(Q(t_1)\right)^{-1} \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T y(t)\, dt = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Это единственное начальное условие, которое мы могли получить при выходе y(t), так как система полностью наблюдаема. Различным начальным условиям соответствуют различные выходы.

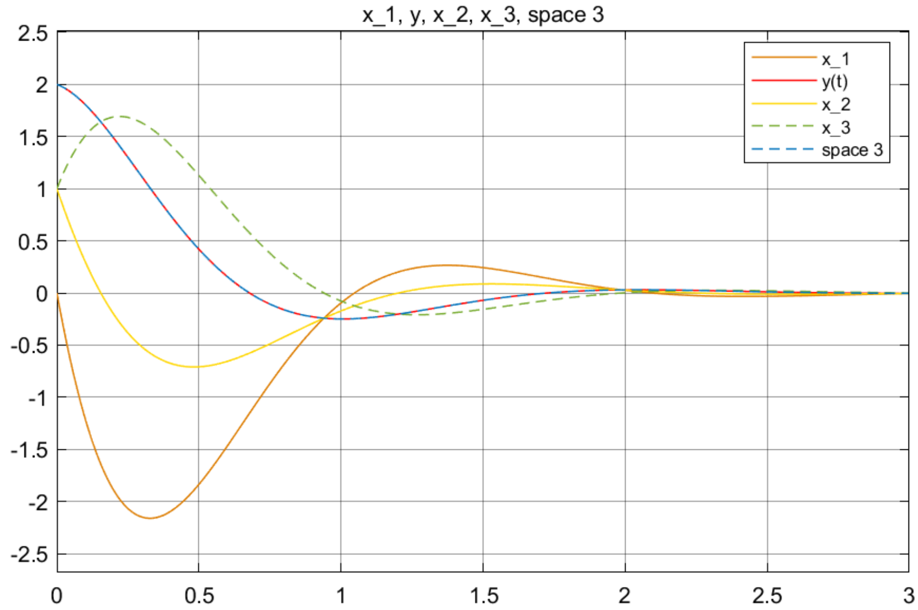

Рисунок 6. Моделирование системы с найденными начальными условиями, графики компонент вектора x(t) до времени t_1 = 3, а также график сигнала выхода y(t)

Задание №4

Возьмите матрицы A и C, а также сигнал y(t) из таблицы 4. Выполните все шаги задания 3. Если сигнал y(t) мог быть порожден различными векторами x(0) начальных условий, то приведите хотя бы три таких вектора и выполните требуемое моделирование для каждого из них.

Матрицы A и C, сигнал $y(t)$:

$$A = \begin{bmatrix} -8 & -3 & -12 \\ -3 & -2 & -6 \\ 6 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad y(t) = 2e^{-2t} cos(3t) + e^{-2t} sin(3t)$$

Решение:

Сначала находим матрицу наблюдаемости системы и ее ранг:

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -12 & -5 & -17 \end{bmatrix}$$

$$rank\, V = 2 = n$$

По критерию Калмана система полностью не наблюдаема.

Далее находим собственные числа:

$$det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_{2,3} = -2 \pm 3i \\ \lambda_1 = 1 \end{matrix}$$

Находим Жорданову форму матрицы:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2-3 & 0 \\ 0 & 0 & -2+3i \end{bmatrix}$$

Жорданова форма матрицы (вещественная):

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{3\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}, \; P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = CP = [1 \;\; 0 \;\; 2] \begin{bmatrix} -1 & -\frac{3\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{y} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix}$$

Анализируем матрицу $\hat{C}$: так как в матрице в первом столбце 0, первое собственное число не наблюдаемо.

Проверим наблюдаемость собственных чисел с помощью рангового критерия.

$$\lambda_1 = 1$$

$$rank \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} -9 & -3 & -12 \\ -3 & -3 & -6 \\ 6 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 \text{ => ненаблюдаемо}$$

$$\lambda_2 = -2 + 3i$$

$$rank\begin{bmatrix} A-\lambda I \\ C \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} -3i-6 & -3 & -12 \\ -3 & -3i & -6 \\ 6 & 0 & 9-3i \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3 \Rightarrow \text{наблюдаемо}$$

$$\lambda_3 = -2-3i$$

$$rank\begin{bmatrix} A-\lambda I \\ C \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} 3i-6 & -3 & -12 \\ -3 & 3i & -6 \\ 6 & 0 & 3i+9 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3 \Rightarrow \text{наблюдаемо}$$

После находим Грамиан наблюдаемости системы относительно времени $t_1 = 3$:

$$Q(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At}\, dt = \begin{bmatrix} 0.0865 & 0.0577 & 0.1442 \\ 0.0577 & 0.1635 & 0.2212 \\ 0.1442 & 0.2212 & 0.3654 \end{bmatrix}$$

Собственные числа Грамиана:

$$\lambda_1 = 0,$$
$$\lambda_2 = 0{,}0582,$$
$$\lambda_3 = 0{,}5571$$

Далее находим вектор x(0) начальных условий, при выходе у системы в течение времени t ∈ [0, t1], который подчинялся закону y(t):

$$x(0) = \left(Q(t_1)\right)^{-1} \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T y(t)\, dt$$

Так как $\left(Q(t_1)\right)^{-1}$ не существует, используем псевдообратную матрицу Мура-Пенроуза:

$$x(0) = \left(Q(t_1)\right)^{+} \int_0^{3} e^{A^T t} C^T y(t)\, dt = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Система неполностью наблюдаема, следовательно, существует несколько начальных условий, соответствующих одному выходу.

Далее найдем три вектора $x(0)$, который будут соответствовать выходу. Для этого определим $null(V)$.

$$v = null(V) = \begin{bmatrix} -0{,}5774 \\ -0{,}5774 \\ 0{,}5774 \end{bmatrix}$$

$$(x_0 - x_{0'}) \in Nullspace\begin{bmatrix} C \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = Nullspace[V]$$

Чтобы найти три вектора x(0), нужно вычислить разность между x(0) и null(V) , причем для нахождения разных векторов необходимо умножить null(V) на скаляр:

$$x(0)_1 = x(0) - null(V) = \begin{bmatrix} 0.5774 \\ 1.5774 \\ 0.4226 \end{bmatrix}$$

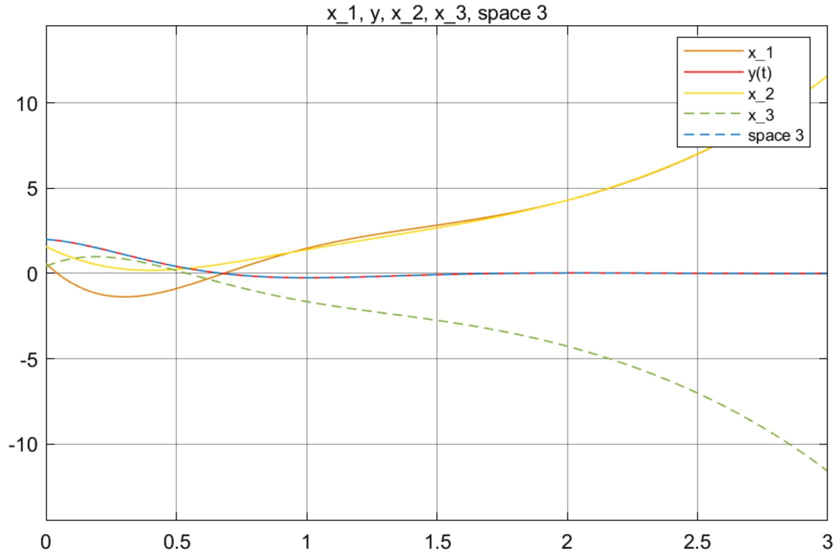

Рисунок 7. Моделирование системы с найденными начальными условиями $x(0)_1$, графики компонент вектора x(t) до времени t_1 = 3, а также график сигнала выхода y(t)

$$x(0)_2 = x(0) - 2 * null(V) = \begin{bmatrix} 1.1547 \\ 2.1547 \\ -0.1547 \end{bmatrix}$$

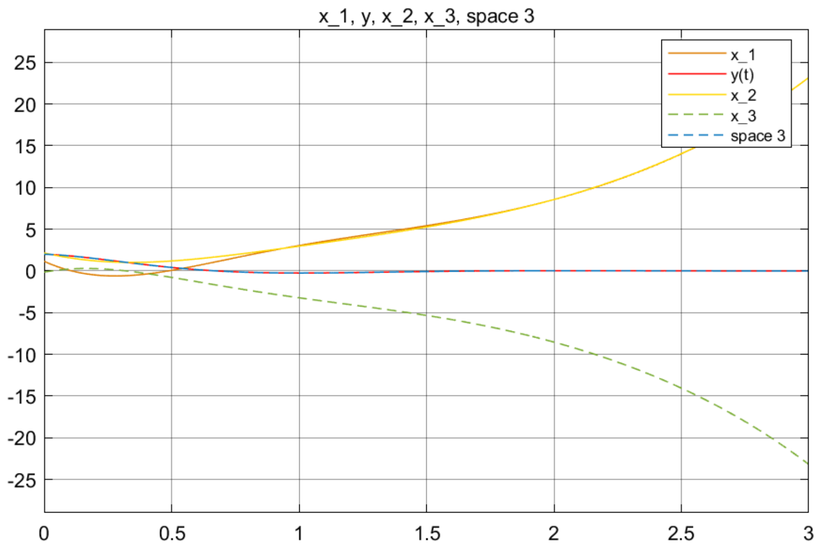

Рисунок 8. Моделирование системы с найденными начальными условиями $x(0)_2$, графики компонент вектора x(t) до времени t_1 = 3, а также график сигнала выхода y(t)

$$x(0)_3 = x(0) - 5 * null(V) = \begin{bmatrix} 2.8868 \\ 3.8868 \\ -1.8868 \end{bmatrix}$$

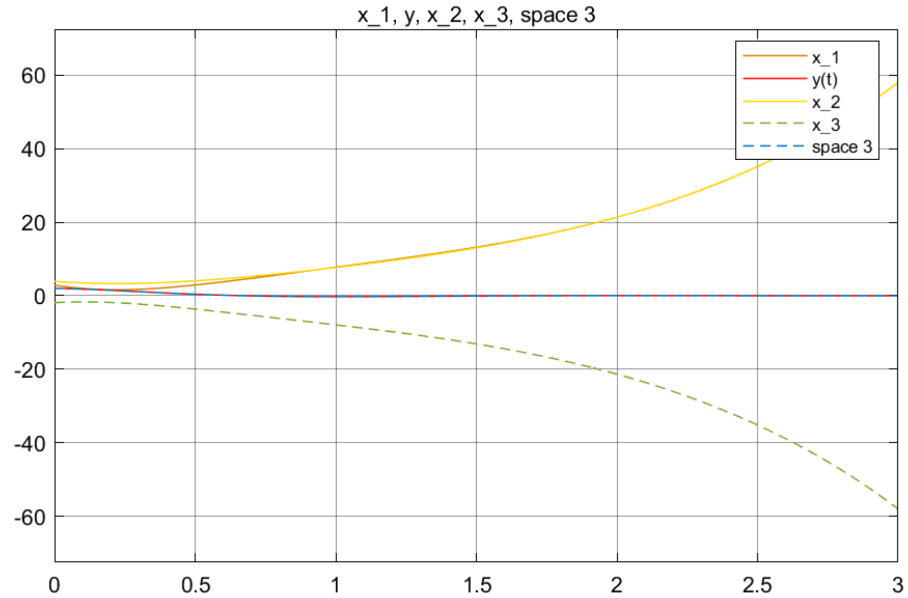

Рисунок 9. Моделирование системы с найденными начальными условиями $x(0)_3$, графики компонент вектора x(t) до времени t_1 = 3, а также график сигнала выхода y(t)

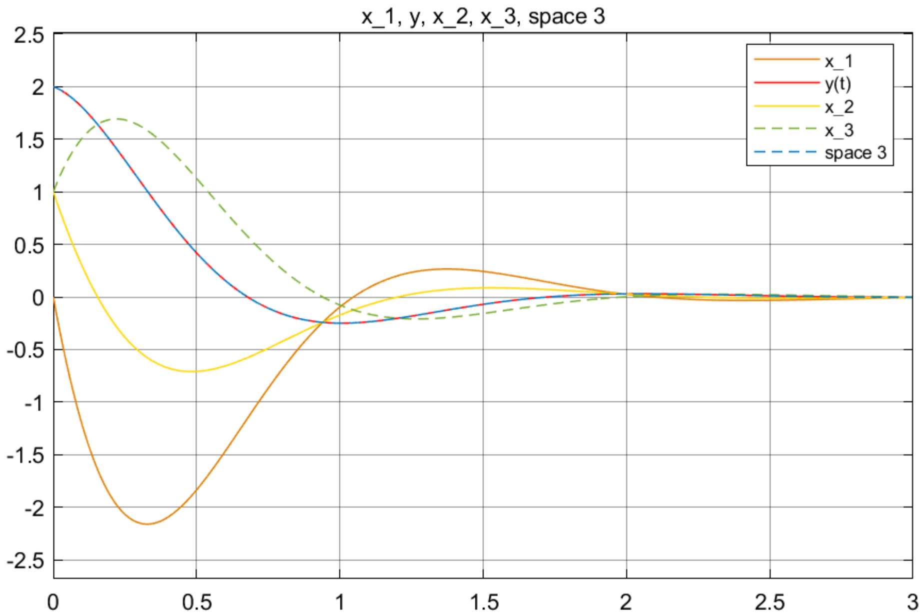

Рисунок 10. Моделирование системы с $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ графики компонент вектора x(t) до времени t_1 = 3, график сигнала выхода y(t)

Вывод

В лабораторной работе мы познакомились со следующими понятиями: наблюдаемость и управляемость.

Для каждой системы нашли матрицу управляемости, с помощью ее ранга определили полностью ли они управляемы. Вспомнили нахождение собственных чисел и преобразование в Жорданову форму, определили управляемость собственных чисел с помощью Жордановой формы и рангового критерия.
Познакомились с управляемым подпространством, определили принадлежат ли заданные точки ему.
Вычислили Грамиан управляемости, вычислили его собственные числа, выполнили устную небольшую проверку: его корни должны быть положительными. Если одно из собственных чисел равно нулю, то Грамиан не имеет обратной матрицы и в расчете следует заменить обратную матрицу на псевдобратную матрицу Мура-Пенроуза.

Вычислили управление, которое переводит систему из начальных условий в заданную точку.

Выполнили похожие действие для анализа наблюдаемости систем. По выходу системы определили начальные условия.
Закрепили правило: если система полностью наблюдаема, то она не имеет разных выходов при одинаковых начальных условиях.

Вспомнили, какие начальные условия дают одинаковый вход:
Если два начальных состояния x_0 и $x_0{}'$ таковы что,

$$(x_0 - x_{0'}) \in \mathrm{N}ullspace \begin{bmatrix} C \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

То выход y(t) при x(0) = 0 будет тождественно равен выходу y(t) при $x_0 = x_{0'}$