МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

Лабораторная работа №8:
«Модальные регуляторы и наблюдатели»
по дисциплине Теория автоматического управления

Вариант №9

Выполнил: Студент группы R33362 Осинина Т. С
Преподаватель: Перегудин А.А.

Санкт-Петербург, 2023

Задание №1

Возьмите матрицы A и B из таблицы 1 в соответствии с вашим вариантом и рассмотрите систему:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Выполните следующие шаги и приведите в отчёте результаты всех вычислений, схемы моделирования, графики и выводы:

- Найдите собственные числа матрицы A и определите управляемость каждого из них. Сделайте вывод об управляемости и стабилизируемости системы.

- Постройте схему моделирования системы $\dot{x} = Ax + Bu$ с регулятором $u = Kx$.

- Для каждого желаемого спектра матрицы $A + BK$ из таблицы 1:
  - Найдите соответствующую матрицу регулятора K.
  - Выполните компьютерное моделирование и постройте графики $x(t)$ и $u(t)$ замкнутой системы при начальных условиях $x(0) = [1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1]^T$.

- Сделайте выводы.

Матрицы A и B, желаемые спектры $\sigma(A + BK)$:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \{-2, -2, -2, -2\} \\ \{-2, -20, -200, -200\} \\ \{-2, -20, 3i, -3i\} \\ \{-2, -20, -4 + 3i; \ -4 - 3i\} \end{matrix}$$

Решение:

Собственные числа матрицы A:

$$\lambda_{1,2} = 4 \pm 3i$$
$$\lambda_3 = -2$$
$$\lambda_4 = 1$$

Далее проверяем управляемость каждого собственного числа:

$$rank([A - \lambda_1 I \quad B]) = 4$$
$$rank([A - \lambda_2 I \quad B]) = 4$$
$$rank([A - \lambda_3 I \quad B]) = 3 \ \neq 4 \Rightarrow \text{число неуправляемо}$$
$$rank([A - \lambda_4 I \quad B]) = 4$$

Следовательно, система неуправляема, но стабилизируема, так как неуправляемое собственное число $\lambda_3 = -2 < 0$, т. е. устойчиво.

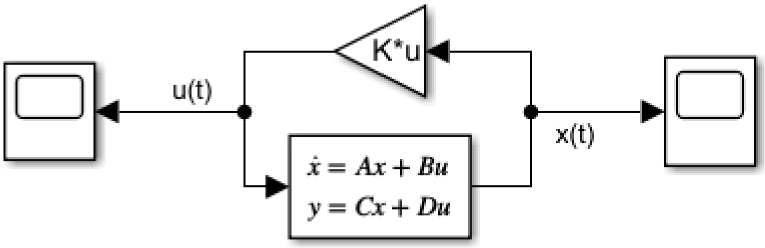

Рисунок 1. Схема моделирования

Для желаемого спектра $\{-2, -2, -2, -2\}$ найдем матрицу регулятора K:

Сначала построим матрицу с желаемыми собственными числами:

$$G = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Далее через решение уравнения Сильвестра определяем матрицу Y:

$$AP - PG = BY$$
$$Y = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

После находим матрицу регулятора K:

$$K = -YP^{+} = [0 \quad -0{,}75 \quad -3{,}9 \quad -2{,}7]$$

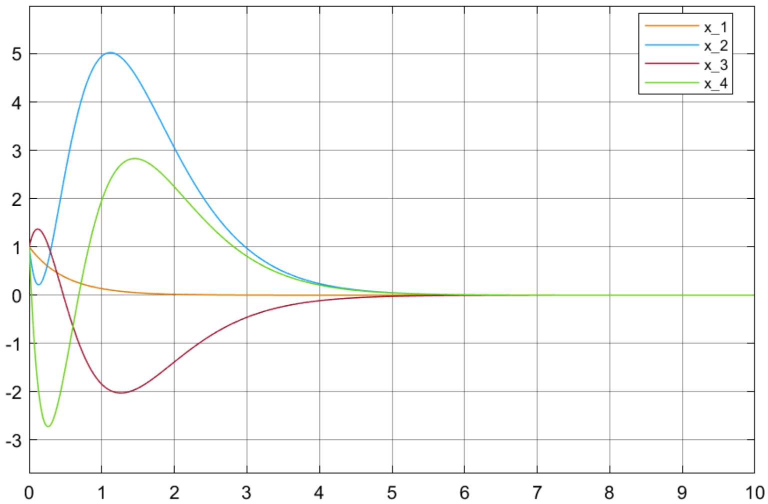

Рисунок 2. Графики x(t) замкнутой системы при начальных условиях $x(0) = [1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1]^T$

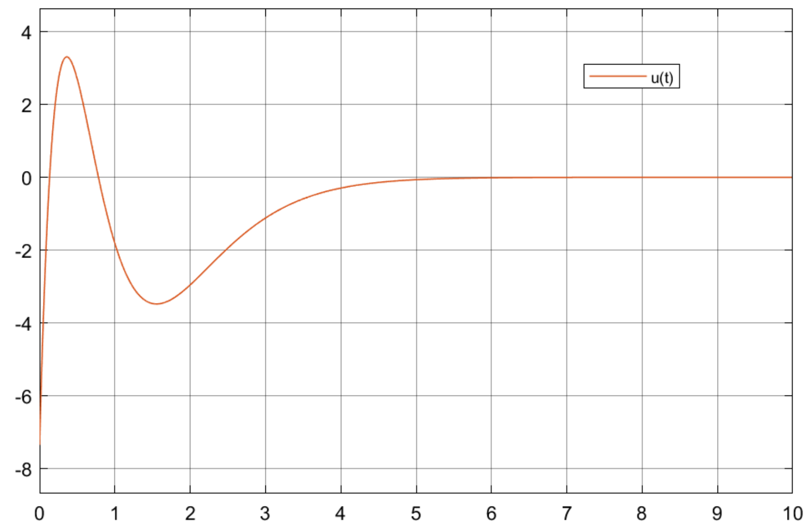

Рисунок 3. График u(t) замкнутой системы

Далее выполним аналогичные действия для нахождения матрицы K для остальных желаемых спектров.

Спектр $\{-2, -20, -200, -200\}$

$$G = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -200 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -200 \end{bmatrix}$$

$$AP - PG = BY$$
$$Y = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

$$K = -YP^{+} = [0 \quad -0{,}75 \quad -3{,}9 \quad -2{,}7]$$

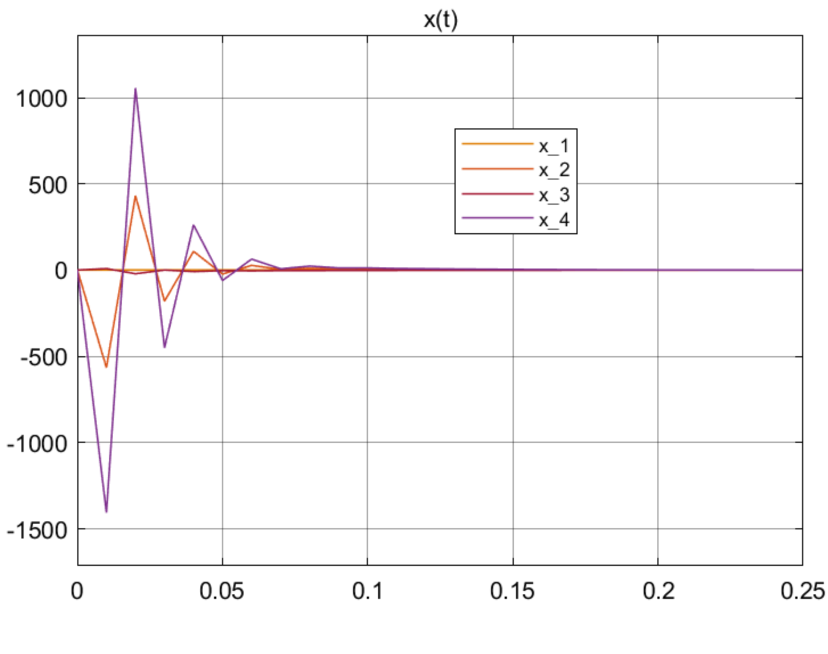

Рисунок 4. Графики x(t) замкнутой системы при начальных условиях $x(0) = [1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1]^T$

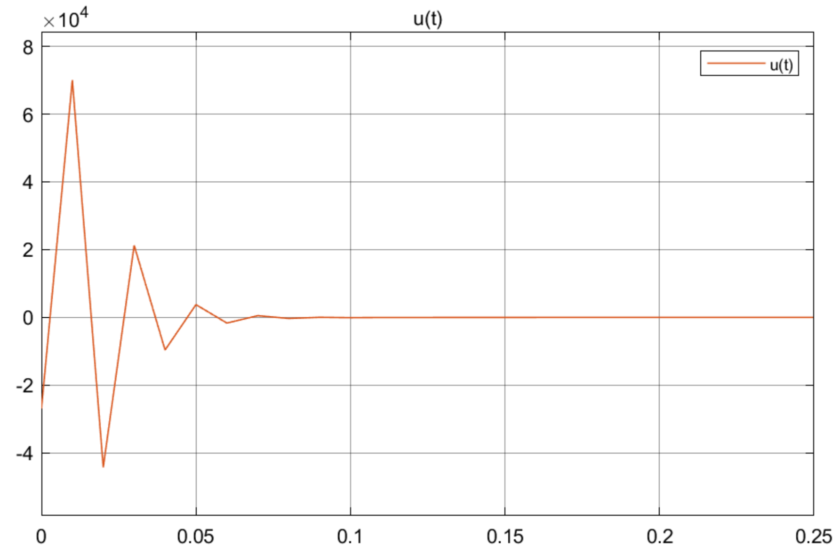

Рисунок 5. График u(t) замкнутой системы

Спектр $\{-2, -20, 3i, -3i\}$

$$G = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AP - PG = BY$$
$$Y = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

$$K = -YP^{+} = [0 \quad -0{,}75 \quad -3{,}9 \quad -2{,}7]$$

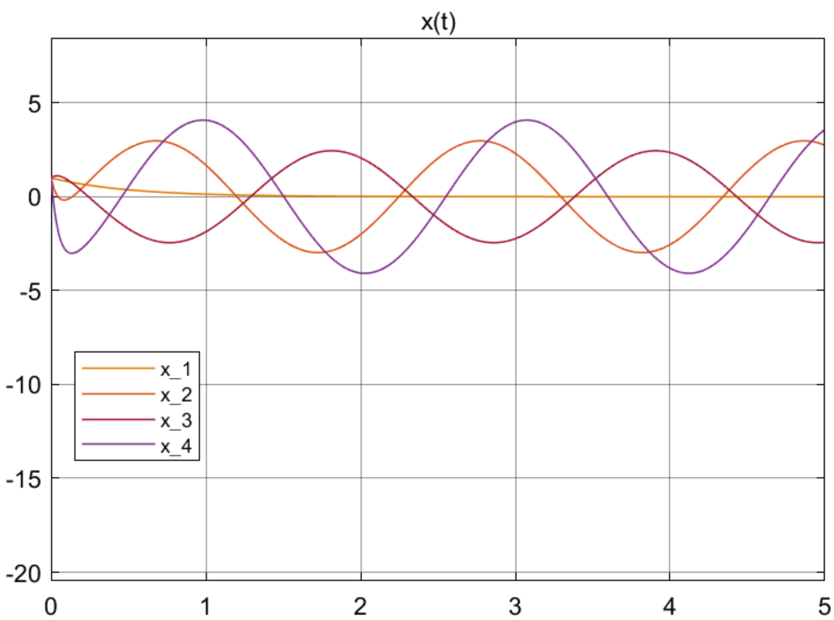

Рисунок 6. Графики x(t) замкнутой системы при начальных условиях $x(0) = [1 \; 1 \; 1 \; 1]^T$

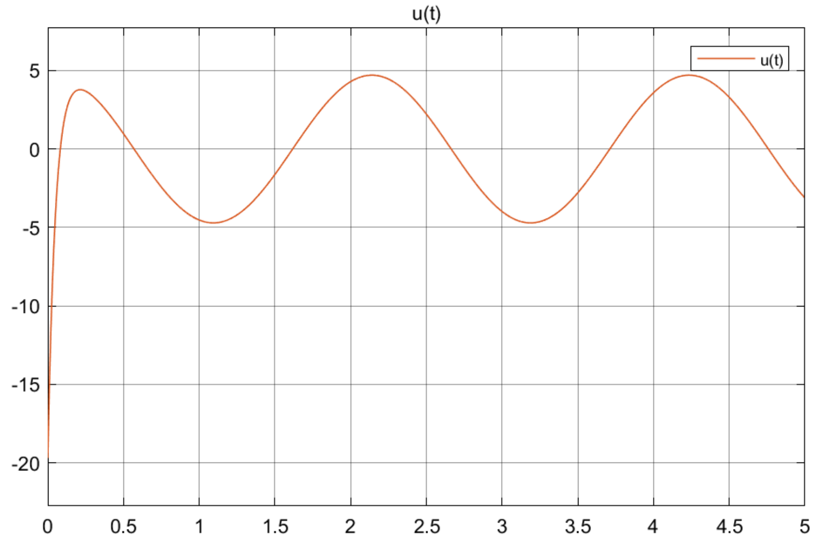

Рисунок 7. График u(t) замкнутой системы

Спектр $\{-2, -20, -4 + 3i;\ -4 - 3i\}$

$$G = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$AP - PG = BY$$
$$Y = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

$$K = -YP^{+} = [0 \quad -0{,}75 \quad -3{,}9 \quad -2{,}7]$$

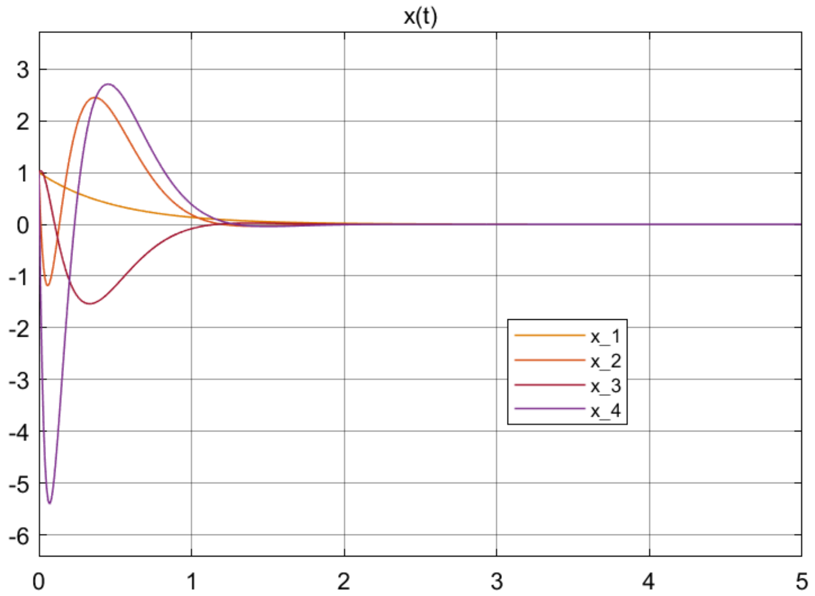

Рисунок 8. Графики x(t) замкнутой системы при начальных условиях $x(0) = [1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1]^T$

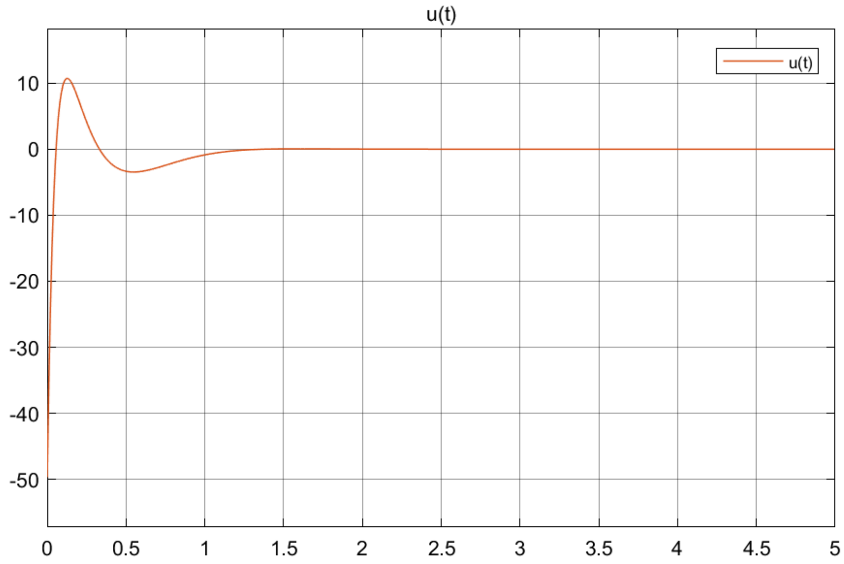

Рисунок 9. График u(t) замкнутой системы

Вывод: при больших собственных значениях необходимо большое воздействие на системы, в таких случаях очень сложно избежать перерегулирование, например, как вышло со вторым спектром.

Задание №2

Возьмите матрицы A и C из таблицы 2 в соответствии с вашим вариантом и рассмотрите систему:

$$\dot{x} = Ax \qquad y = Cx.$$

Выполните следующие шаги и приведите в отчёте результаты всех вычислений, схемы моделирования, графики и выводы:

- Найдите собственные числа матрицы A и определите наблюдаемость каждого из них. Сделайте вывод о наблюдаемости и обнаруживаемости системы.
- Постройте схему моделирования системы $\dot{x} = Ax,\ \ y = Cx$ с наблюдателем состояния $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x} - y)$.

- Для каждого желаемого спектра матрицы A + LC из таблицы 2:

  – Найдите соответствующую матрицу наблюдателя L.
  – Выполните моделирование с начальными условиями $x(0) = [1\ \ 1\ \ 1\ \ 1]^T$ и $\hat{x}(0) = [2\ \ 0\ \ 0\ \ -1]^T$.
  Постройте сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}$(t), а также график ошибки наблюдателя $e(t) \ = \ x(t) \ - \ \hat{x}(t)$.

- Сделайте выводы.

Матрицы A, C и желаемые спектры $\sigma(A + LC)$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad C^T = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \{-2, -2, -2, -2\} \\ \{-2, -20, -200, -200\} \\ \{-2, -20, 3i, -3i\} \\ \{-2, -20, -4 + 3i;\ -4 - 3i\} \end{matrix}$$

Решение:

Собственные числа матрицы A:

$$\lambda_{1,2} = \pm 4i$$
$$\lambda_{3,4} = \pm 2i$$

Далее проверяем наблюдаемость каждого собственного числа:

$$rank\left(\begin{bmatrix} A - \lambda_1 I \\ C \end{bmatrix}\right) = 4$$
$$rank\left(\begin{bmatrix} A - \lambda_2 I \\ C \end{bmatrix}\right) = 4$$

$$rank\left(\begin{bmatrix} A-\lambda_3 I \\ C \end{bmatrix}\right) = 4$$
$$rank\left(\begin{bmatrix} A-\lambda_4 I \\ C \end{bmatrix}\right) = 4$$

Все собственные числа наблюдаемы, а значит и система полностью наблюдаема. Следовательно, и обнаруживаема.

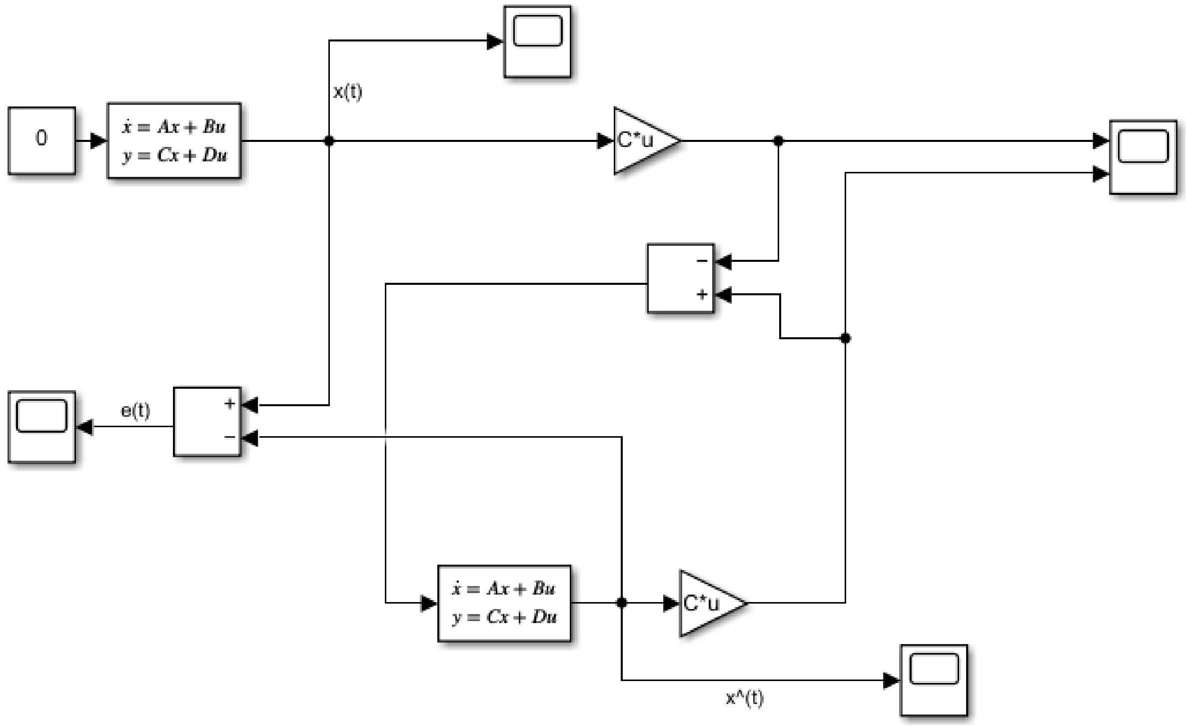

Рисунок 10. Схема моделирования

Для желаемого спектра $\{-2,-2,-2,-2\}$ найдем матрицу наблюдателя L:

Сначала построим матрицу с желаемыми собственными числами:

$$G = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Далее через решение уравнения Сильвестра определяем матрицу Q:

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$GQ - QA = YC$$

После находим матрицу наблюдателя L:

$$L = Q^{-1}Y = \begin{bmatrix} -2{,}667 \\ -0{,}778 \\ -1{,}333 \\ 0 \end{bmatrix}$$

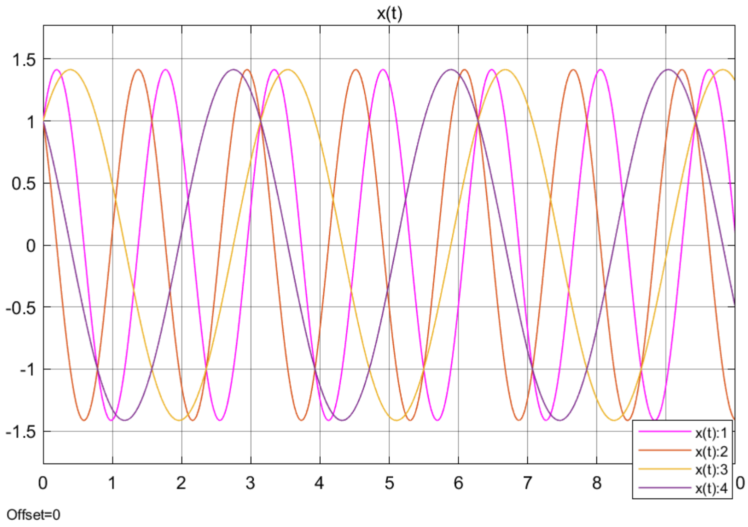

Рисунок 11. Графики x(t) при $x(0) = [1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1]^T$

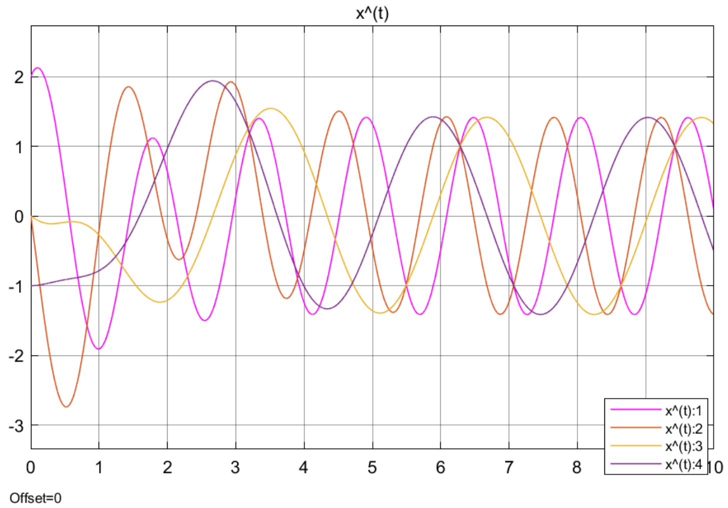

Рисунок 12. Графики $\hat{x}$(t) при $\hat{x}(0) = [2 \;\; 0 \;\; 0 \;\; -1]^T$

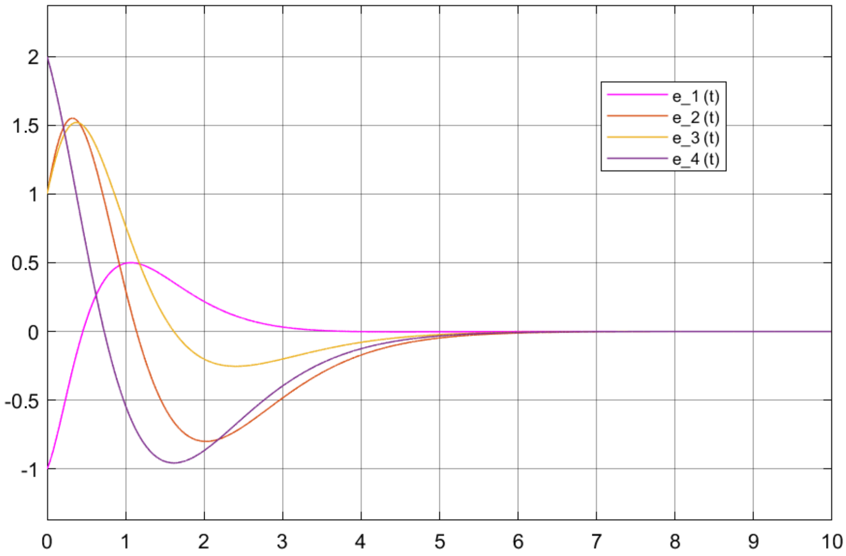

Рисунок 13. Графики ошибки наблюдателя e(t)

$$
\begin{aligned}
e_1(t) &= x_1(t) - \hat{x}_1(t), \\
e_2(t) &= x_2(t) - \hat{x}_2(t). \\
e_3(t) &= x_3(t) - \hat{x}_3(t). \\
e_4(t) &= x_4(t) - \hat{x}_4(t).
\end{aligned}
$$

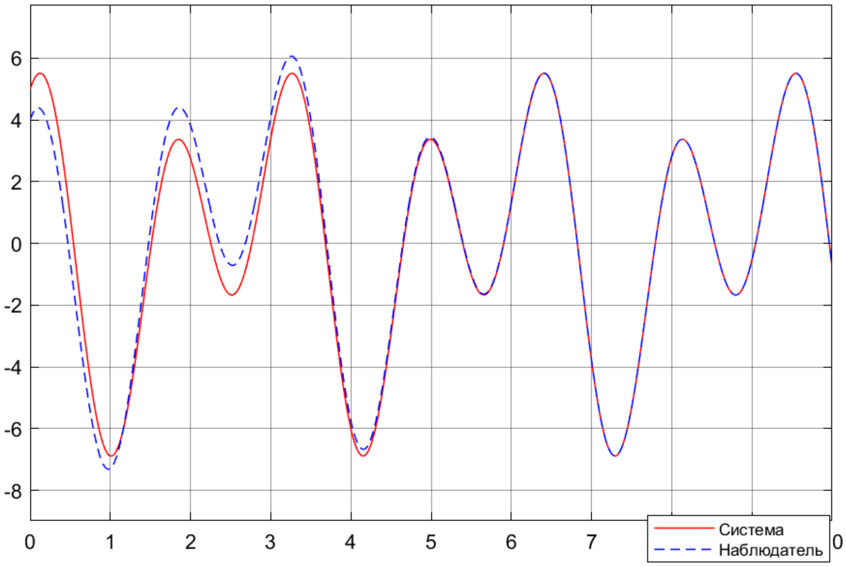

Рисунок 14. График выхода системы и наблюдателя

Далее выполним аналогичные с целью определения наблюдателя для других желаемых спектров.

Спектр$\{-2, -20, -200, -200\}$

$$
G = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -200 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -200 \end{bmatrix}
$$

$$Y = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$
$$GQ - QA = YC$$

$$L = Q^{-1}Y = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 2{,}4701 \\ 0{,}5686 \\ 2{,}9264 \\ -3{,}7263 \end{bmatrix}$$

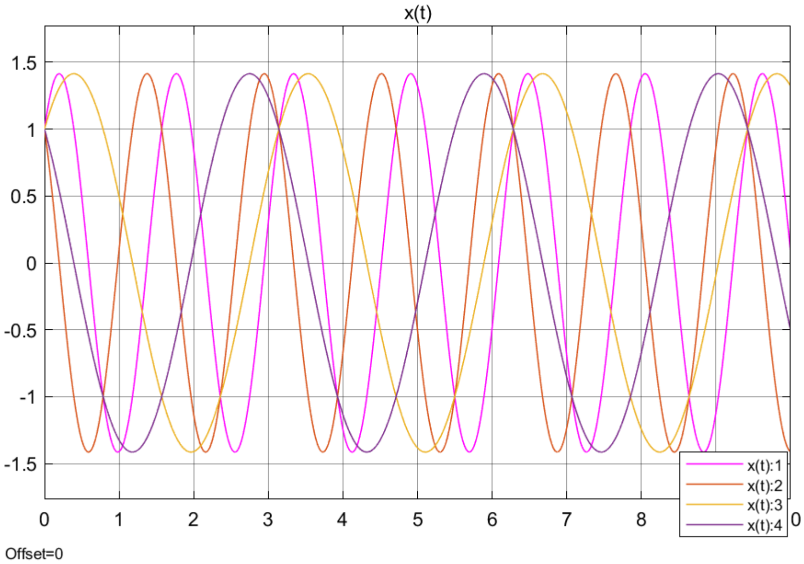

Рисунок 15. Графики x(t) при $x(0) = [1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1]^T$

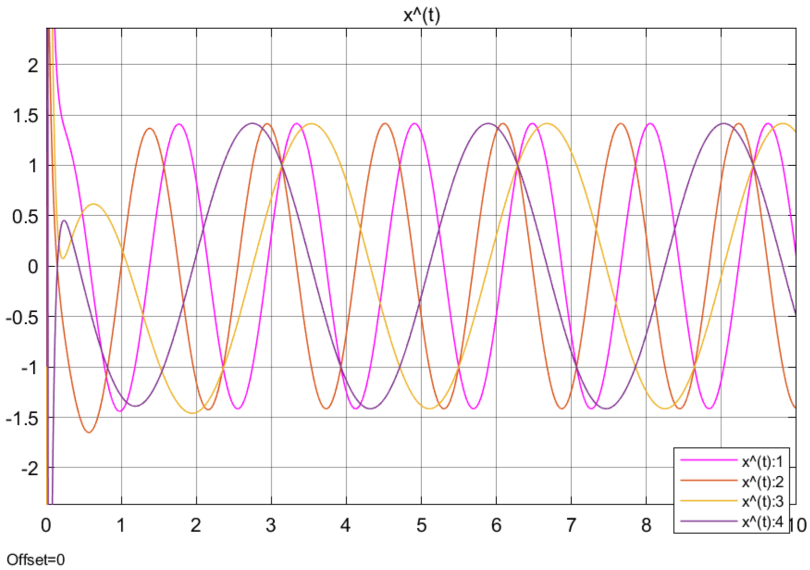

Рисунок 16. Графики $\hat{x}$(t) при $\hat{x}(0) = [2 \ \ 0 \ \ 0 \ -1]^T$

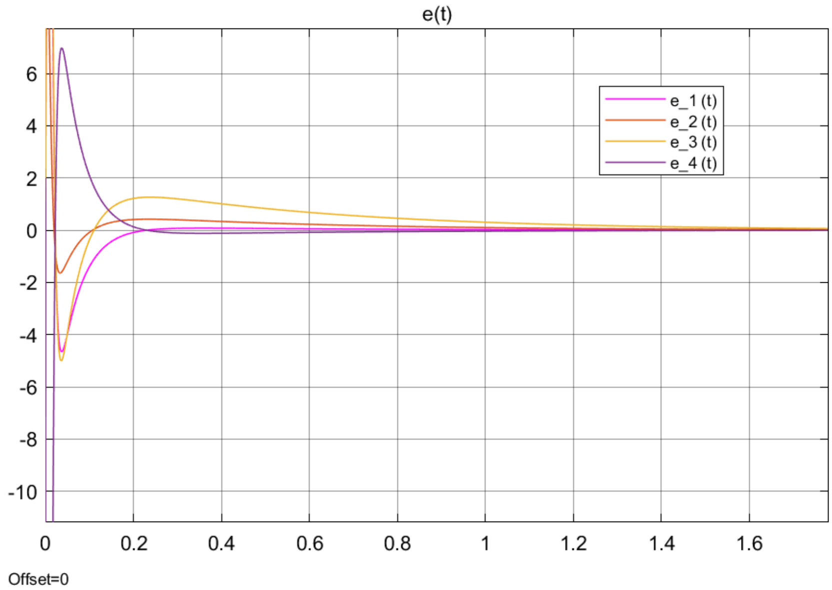

Рисунок 17. Графики ошибки наблюдателя e(t)

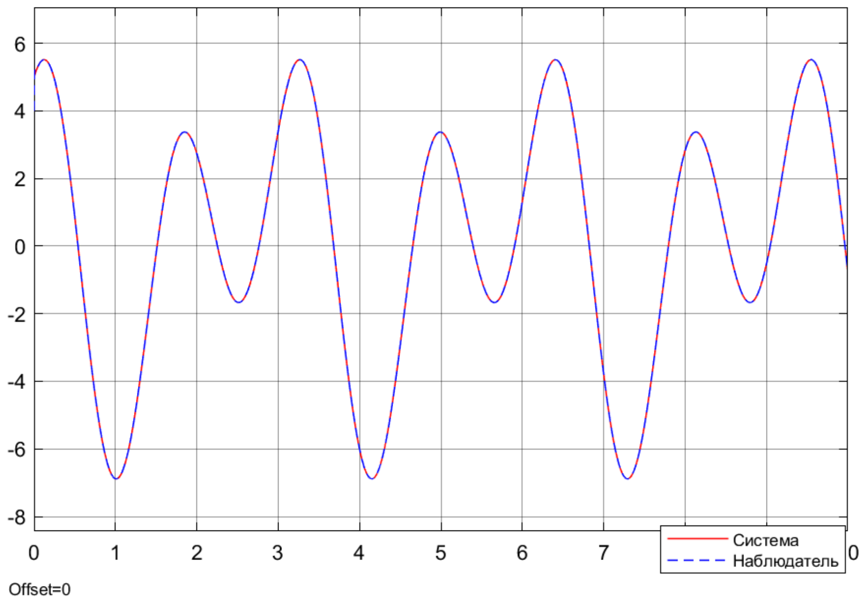

Рисунок 18. График выхода системы и наблюдателя

Спектр $\{-2, -20, 3i, -3i\}$

$$G = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Y = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$
$$GQ - QA = YC$$

$$L = Q^{-1}Y = \begin{bmatrix} -4{,}2778 \\ -1{,}1667 \\ 3{,}75 \\ -4{,}5833 \end{bmatrix}$$

Рисунок 19. Графики x(t) при $x(0) = [1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1]^T$

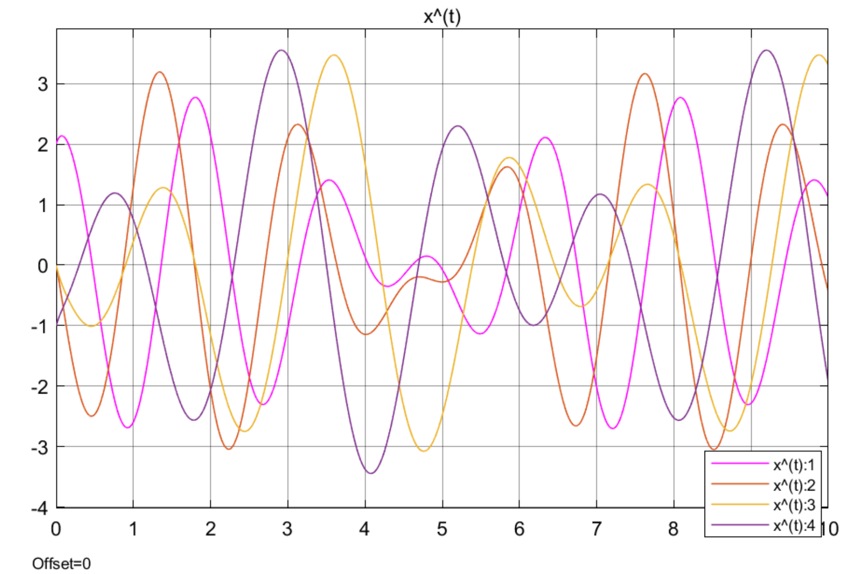

Рисунок 20. Графики $\hat{x}$(t) при $\hat{x}(0) = [2 \;\; 0 \;\; 0 \;\; -1]^T$

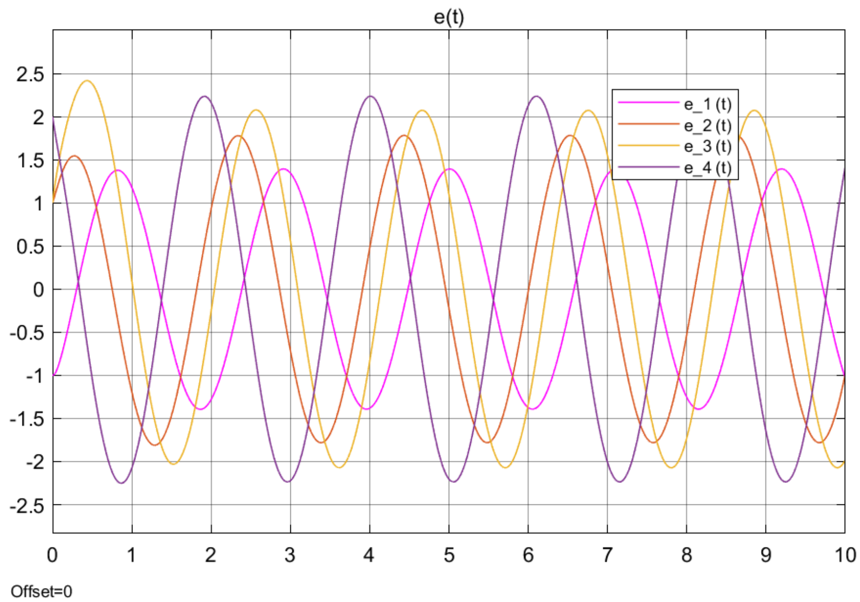

Рисунок 21. Графики ошибки наблюдателя e(t)

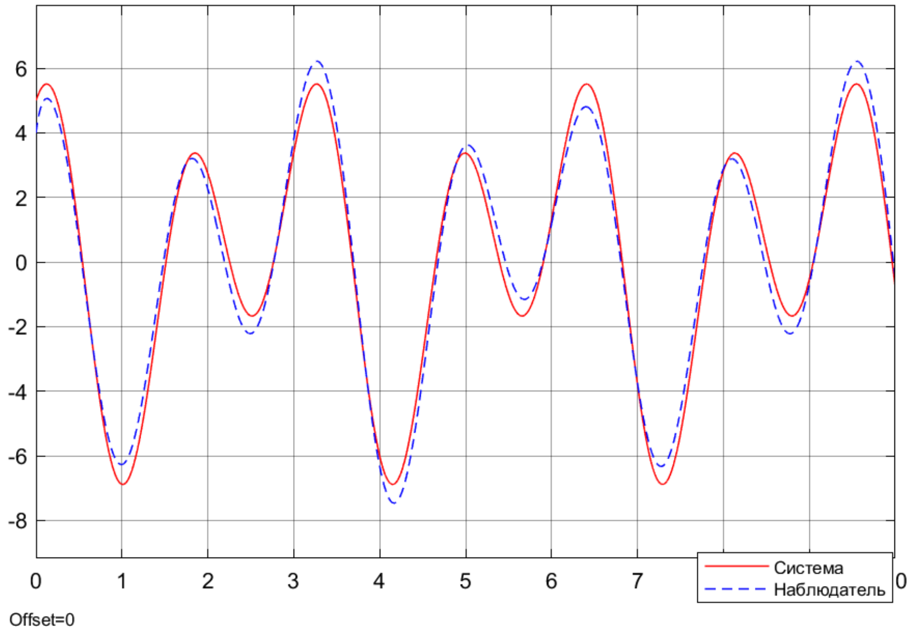

Рисунок 22. График выхода системы и наблюдателя

Спектр $\{-2, -20, -4+3i;\ -4-3i\}$

$$G = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$Y = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$
$$GQ - QA = YC$$

$$L = Q^{-1}Y = \begin{bmatrix} 10{,}8333 \\ -18{,}0556 \\ 1{,}0833 \\ -31{,}25 \end{bmatrix}$$

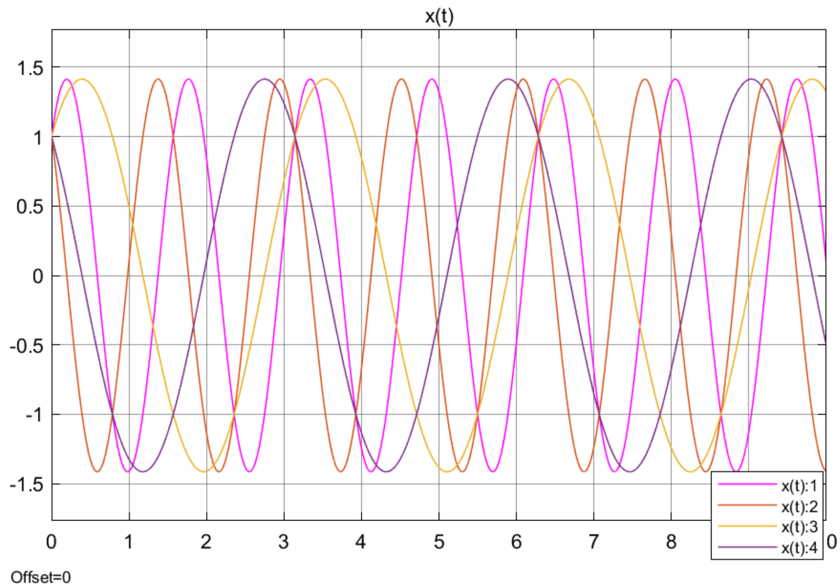

Рисунок 23. Графики x(t) при $x(0) = [1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1]^T$

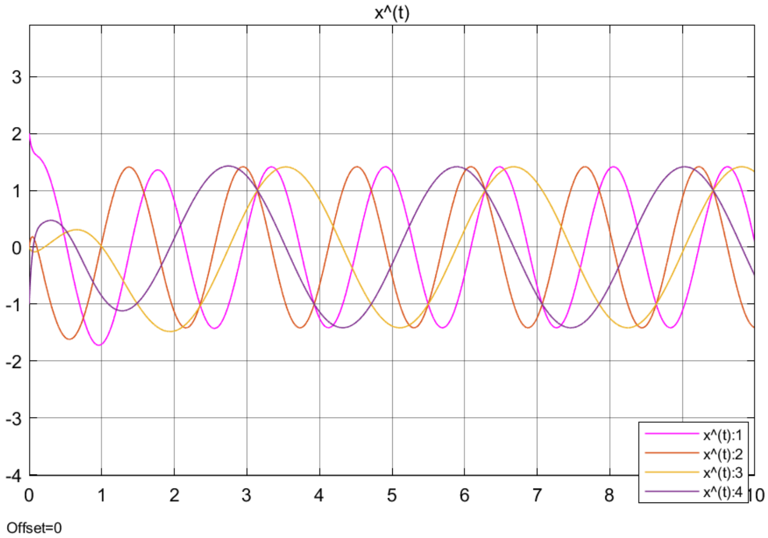

Рисунок 24. Графики $\hat{x}(t)$ при $\hat{x}(0) = [2\ \ 0\ \ 0\ \ -1]^T$

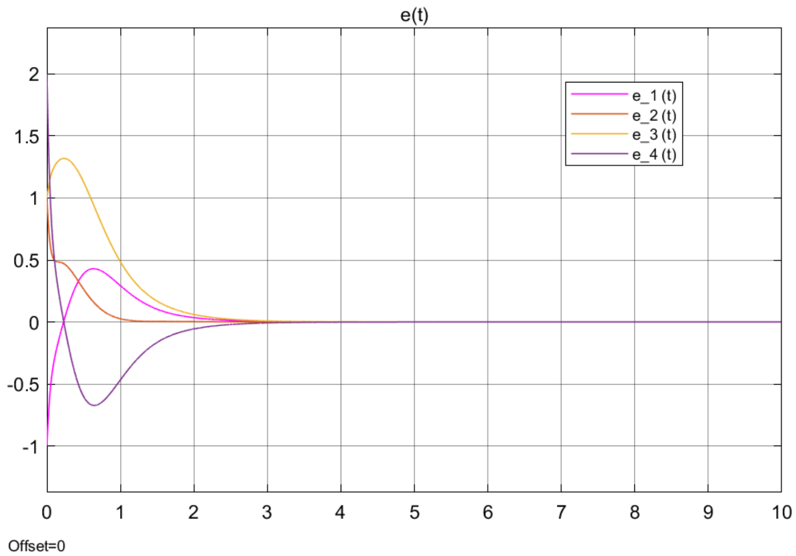

Рисунок 25. Графики ошибки наблюдателя e(t)

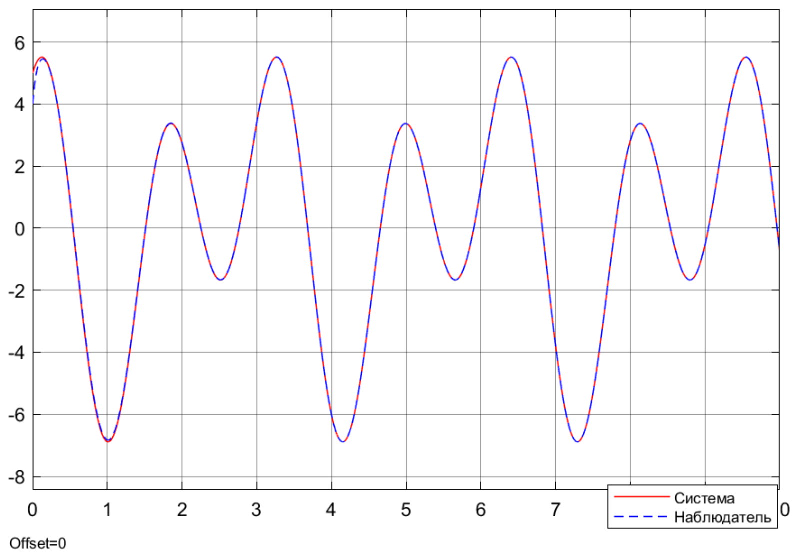

Рисунок 26. График выхода системы и наблюдателя

Вывод: при большом воздействии на систему наблюдатель практически сразу «догоняет» систему.

Задание №3

Возьмите матрицы A, B и C из таблицы 3 в соответствии с вашим вариантом и рассмотрите систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx. \end{cases}$$

Выполните следующие шаги и приведите в отчёте результаты всех вычислений, схемы моделирования, графики и выводы:

- Найдите собственные числа матрицы A.
  Определите управляемость и наблюдаемость каждого из них.
  Сделайте вывод об управляемости, наблюдаемости, стабилизируемости и обнаруживаемости системы.

- Постройте схему моделирования приведённой системы с регулятором, состоящим из наблюдателя состояния $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y)$. и закона управления $u = K\hat{x}$.

- Задайтесь желаемыми спектрами матриц $A + BK$ и $A + LC$ такими, чтобы замкнутая система была устойчива. Найдите соответствующие матрицы K и L.

- Задайтесь начальными условиями и выполните моделирование. Постройте графики $x(t), x\hat{}(t), y(t), y\hat{}(t) = Cx\hat{}(t), u(t)$, $e(t) = x(t) - x\hat{}(t)$.

- Сделайте выводы.

Матрицы A, B и C:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -7 & -5 & 1 \\ -7 & 5 & -1 & 5 \\ -5 & -1 & 5 & 7 \\ 1 & 5 & 7 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 14 \\ 10 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Решение:

Сначала определяем собственные числа матрицы A:

$$\lambda_1 = -8$$
$$\lambda_2 = 8$$
$$\lambda_3 = 4$$
$$\lambda_4 = 16$$

Далее проверяем управляемость каждого собственного числа:

$$rank([A - \lambda_1 I \quad B]) = 4$$
$$rank([A - \lambda_2 I \quad B]) = 4$$
$$rank([A - \lambda_3 I \quad B]) = 4$$
$$rank([A - \lambda_4 I \quad B]) = 4$$

Все собственные числа управляемы, следовательно система наблюдаема стабилизируема.

Далее проверяем наблюдаемость каждого собственного числа:

$$rank\left(\begin{bmatrix} A - \lambda_1 I \\ C \end{bmatrix}\right) = 3 \Rightarrow \text{собственное число ненаблюдаемо}$$

$$rank\left(\begin{bmatrix} A - \lambda_2 I \\ C \end{bmatrix}\right) = 4$$
$$rank\left(\begin{bmatrix} A - \lambda_3 I \\ C \end{bmatrix}\right) = 4$$
$$rank\left(\begin{bmatrix} A - \lambda_4 I \\ C \end{bmatrix}\right) = 4$$

Так как λ_1 – ненаблюдаемое устойчивое собственное число, то система ненаблюдаемая полностью, но обнаруживаема.

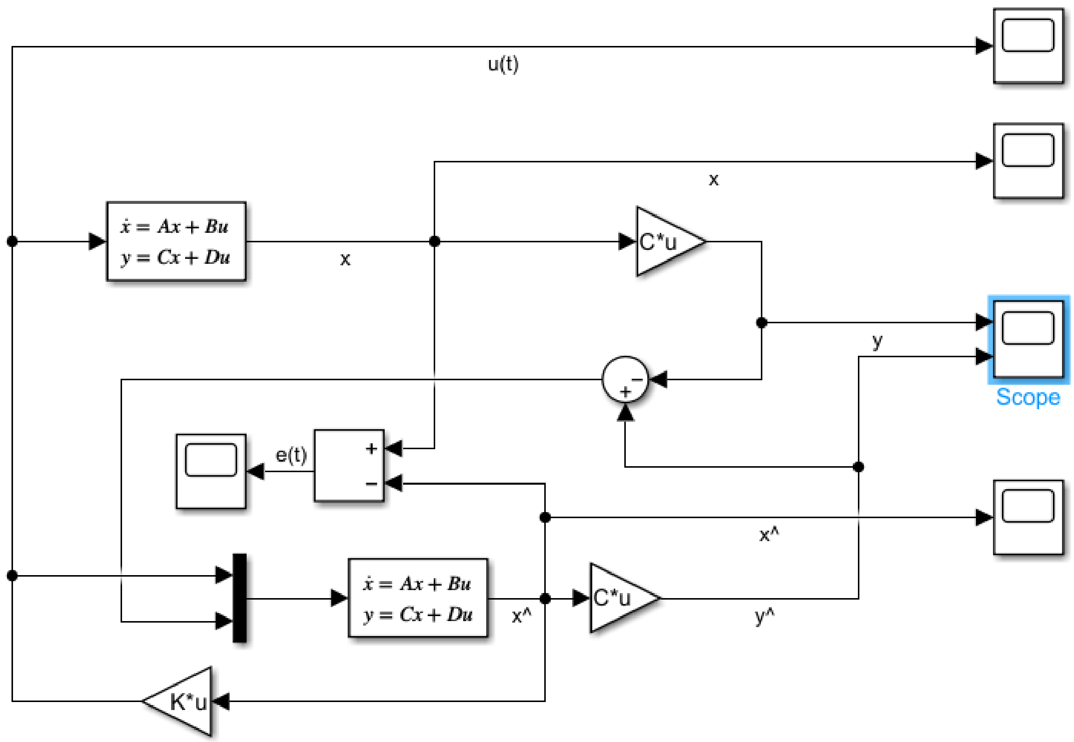

Рисунок 27. Схема моделирование

Желаемый спектр матриц: $\{-8, -3, -2, -1\}$
Значит, матрица G равна:

$$G = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

С помощью уравнения Сильвестра определим матрицы P и Q:

$$A * P \; - \; P * G \; = \; B * Y1$$
$$G * Q \; - \; Q * A \; = \; Y * C$$

Далее вычислим матриц регулятора K и наблюдателя L:

$$L \; = \; Q^{-1}\, Y = \begin{bmatrix} 18.4609 & 18.4609 \\ -19.5547 & -19.5547 \\ -10.7266 & -10.7266 \\ -11.8203 & -11.8203 \end{bmatrix}$$

$$K \; = \; -Y1 * P^{-1} = [17.5000 \; \; -17.9375 \; \; -12.3438 \; \; -12.7813]$$

Постройте графики $x(t), x\hat{}(t), y(t), y\hat{}(t) \; = \; Cx\hat{}(t), u(t),$
$e(t) \; = \; x(t) \; - \; x\hat{}(t).$

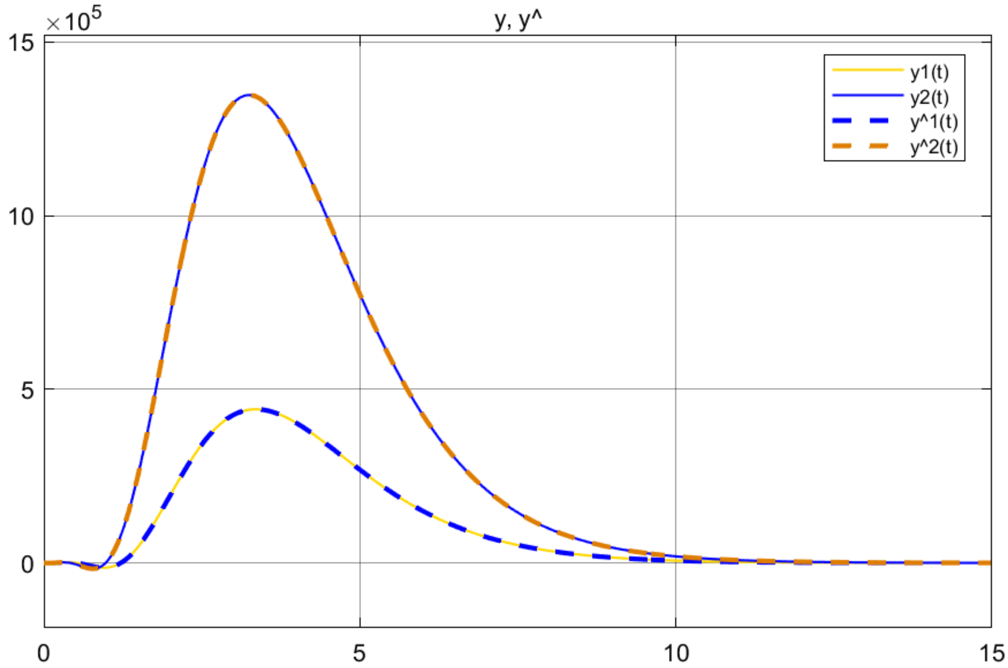

Рисунок 28. Графики выхода системы y(t) и наблюдателя $\hat{y}$(t)

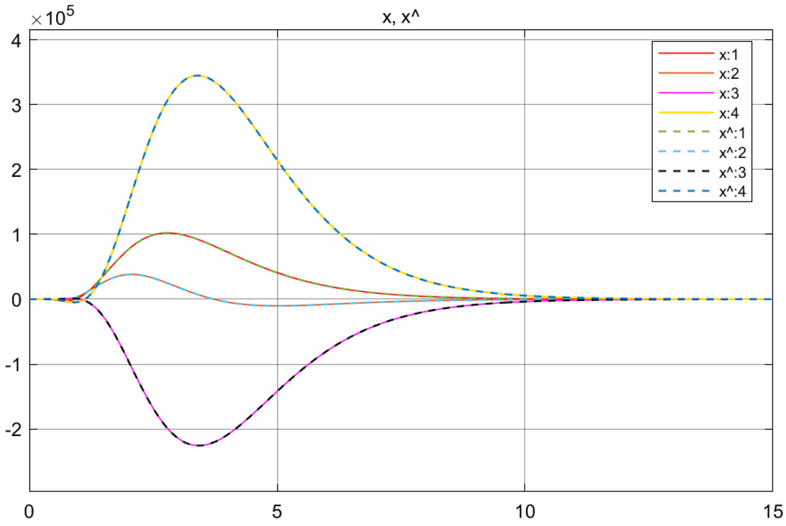

Рисунок 29. Графики x(t) и $\hat{x}(t)$

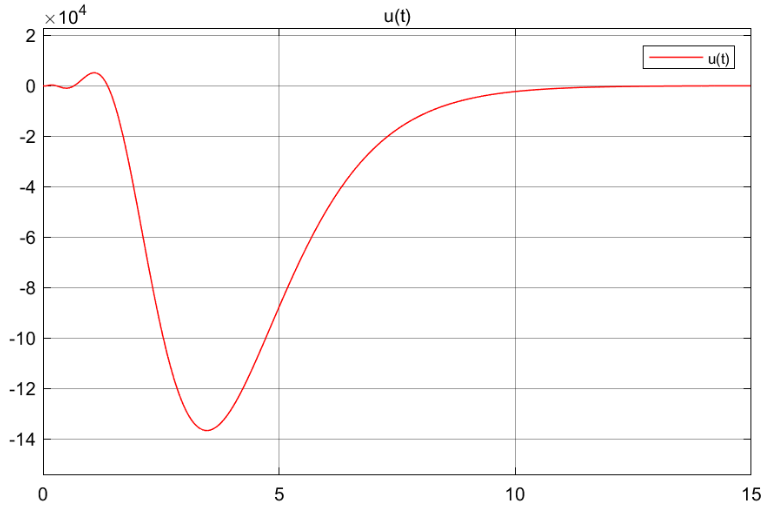

Рисунок 30. График u(t)

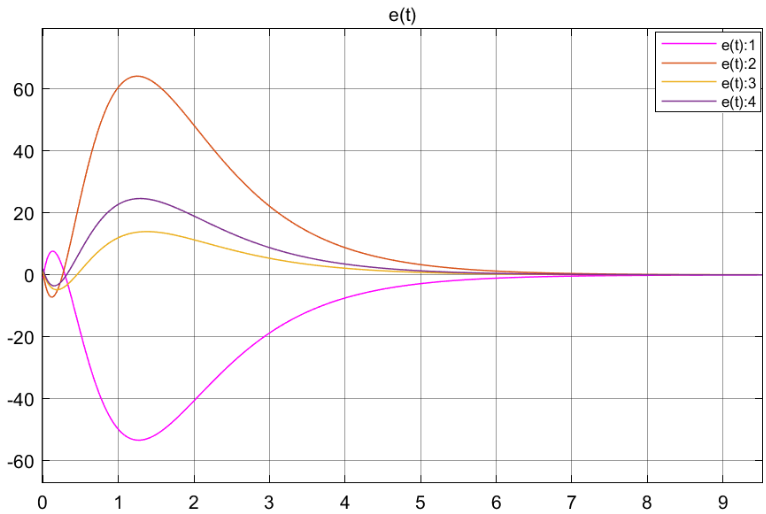

Рисунок 31. График ошибки e(t)

Вывод: графики ошибок сходятся к 0, а графики выходов, x(t) и $\hat{x}(t)$ сходятся, следовательно, работа выполнена верно.