МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ “САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО”

ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

Лабораторная работа №2:
«Переходные процессы,
свободное движение, устойчивость»
по дисциплине Теория автоматического управления

Вариант №17

Выполнил: Студент группы R33362 Осинина Т. С
Преподаватель: Перегудин А.А.

Санкт-Петербург, 2022

Задание №1. ***Свободное движение.***

Дана система 2-го порядка, представленная в форме Вход-Выход

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = u.$$

Самостоятельно придумайте семь наборов (λ_1, λ_2) корней характеристического уравнения, соответствующих:
1. двум устойчивыми апериодическим модам;
2. устойчивой и неустойчивой апериодическим модам;
3. нейтральной и апериодической модам;
4. нейтральной и линейной модам;*
5. паре консервативных мод;
6. паре устойчивых колебательных мод;
7. паре неустойчивых колебательных мод.

Вычислите коэффициенты a_1, a_0 системы и найдите аналитическое выражение для свободной составляющей её движения $y_{св}(t)$. В отчёте приведите все вычисления и полученные результаты. Проанализируйте устойчивость каждой из систем на основании корневого критерия, сделайте соответствующие выводы. Для каждой системы выберите ненулевые начальные условия $y(0)$ и $y'(0)$. Составьте схему для моделирования свободного движения и проведите моделирование сначала с нулевыми начальными условиями, а затем с выбранными ненулевыми. В отчёте приведите графики зависимостей $y(t)$ и $y'(t)$. Сделайте выводы.

Решение

$$y''_{св} + a_1 y_{св}{}' + a_0 y_{св} = 0$$
$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$
$$D = a_1^2 - 4a_0$$
$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}$$

1. Сначала найдем коэффициенты двум устойчивыми апериодическим модам. Подберем a_1, a_0 таким образом, чтобы $\lambda_1, \lambda_2 < 0$.
   Так как это условие устойчивой апериодической моды:
   $$\frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} < 0$$
   Пусть a_1=4, a_0 =3, тогда:
   $$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = -1, -3 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 < 0$$
   $$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}$$
   $$y(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0$$
   При нулевых условиях: $0 = C_1 + C_2 \Rightarrow C_1 = -1, C_2 = 1$
   $$y(t) = -e^{-t} + e^{-3t}$$
   При ненулевых условиях, пусть $y(0) = 3$
   $$y(0) = C_1 + C_2 \Rightarrow 3 = 1 + 2$$
   $$y(t) = e^{-t} + 2e^{-3t}$$
   $$y'(0) = -1 - 6 = -7$$

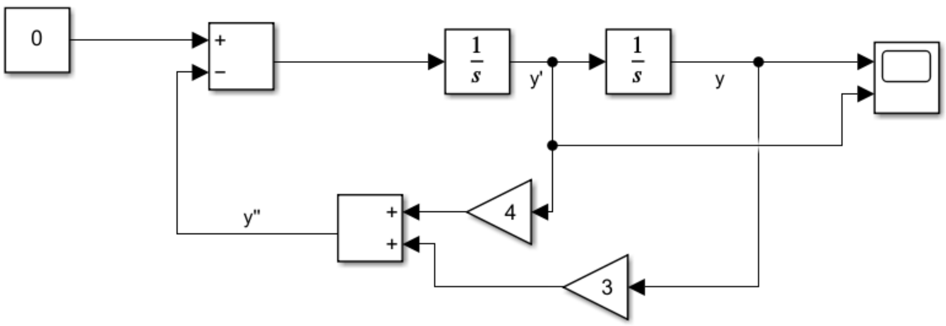


Рисунок 1. Схема моделирования для уравнения 1

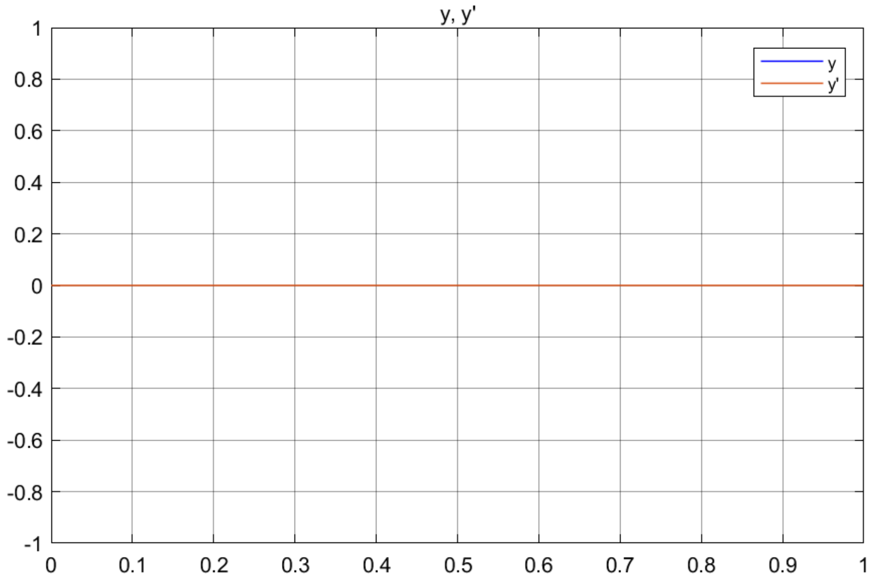


Рисунок 2. График зависимости y(t), y'(t) при нулевых условиях для набора 1

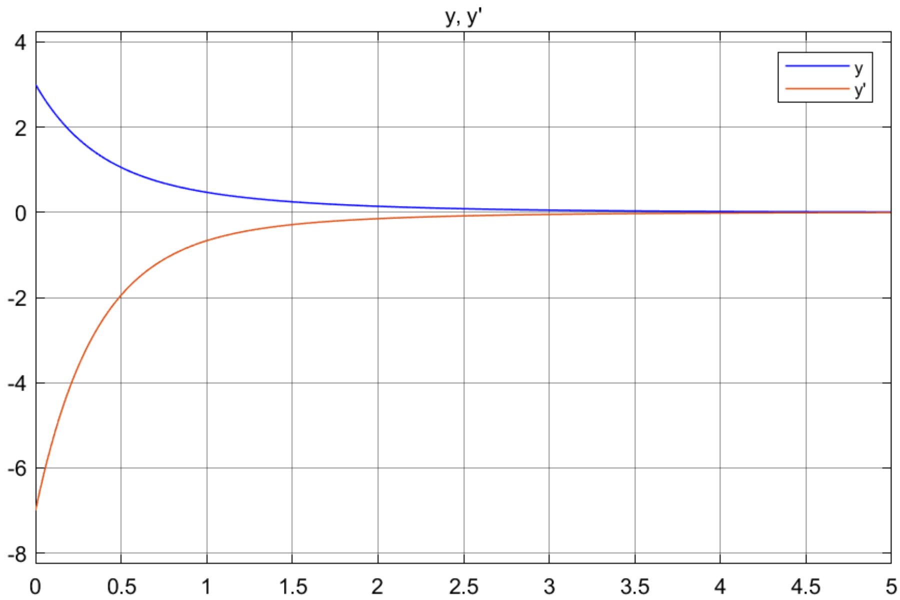


Рисунок 3. График зависимости y(t), y'(t) при ненулевых условиях для набора 1

2. Подберем коэффициенты устойчивой и неустойчивой апериодическим модам. Корни уравнения должны соответствовать следующим условиям:

$$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$$

$$\frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} < 0$$

$$\frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} > 0$$

Пусть a_1= - 4, a_0 = - 5, *тогда:*

$$\lambda_1 = \frac{4 - \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 - 6}{2} = -1 < 0$$

$$\lambda_2 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} = \frac{4 + \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 + 6}{2} = 5 > 0$$

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}$$

$$y(0) = C_1 e^{0} + C_2 e^{0}$$

При нулевых условиях: $0 = C_1 + C_2 \Rightarrow C_1 = -1, C_2 = 1$

$$y(t) = -e^{-t} + e^{5t}$$

При ненулевых условиях, пусть $y(0) = 3$

$$y(0) = C_1 + C_2 \Rightarrow 3 = 1 + 2$$

$$y(t) = e^{-t} + 2e^{5t}$$

$$y'(0) = -1 + 10 = 9$$

Схема моделирования аналогична схеме на Рисунок 1. Схема моделирования для уравнения 1.

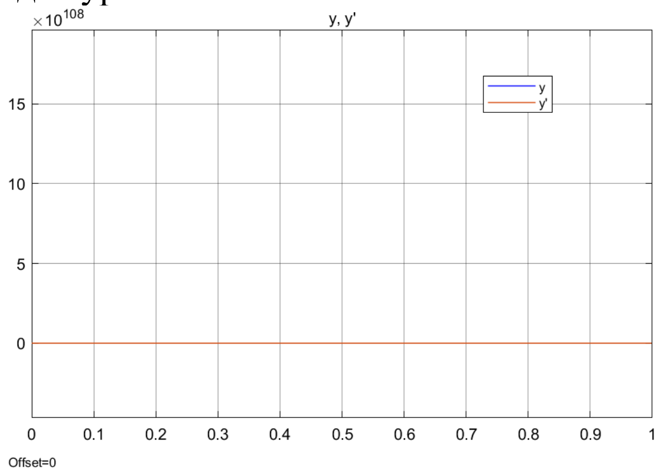


Рисунок 4. График зависимости y(t), y'(t) при нулевых условиях для набора 2

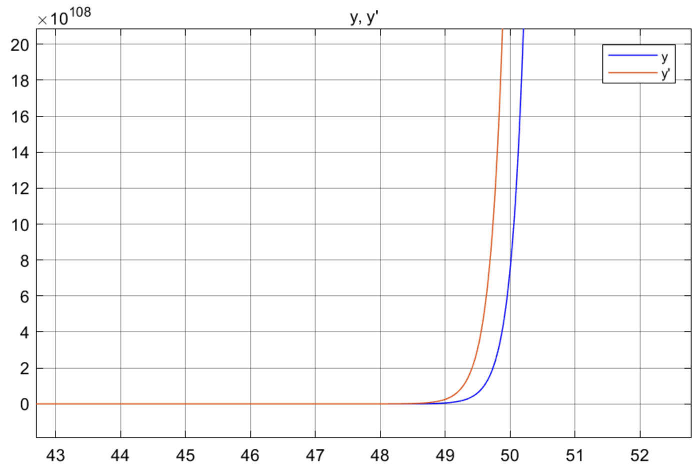


Рисунок 5. График зависимости y(t), y'(t) при ненулевых условиях для набора 2

3. Далее найдем коэффициенты, корни системы которых будут соответствовать нейтральной и апериодической модам.

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Условие нейтральной и апериодической мод:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0 \text{ или } \lambda_2 > 0$$

Пусть $a_1 = 1, a_0 = 0$, *тогда:*

$$\lambda^2 + a_1\lambda = 0$$
$$\lambda(\lambda + a_1) = 0$$
$$\lambda_1 = 0$$
$$\lambda_2 = -a_1 = -1 < 0$$

В этом случае получили корни, которые соответствуют нейтральной и устойчивой апериодической модам.

$$y(t) = 1 + C_1 e^{-t}$$
$$y(0) = 1 + C_1 e^{0}$$

При нулевых условиях: $0 = C_1 + 1 \Rightarrow C_1 = -1$

$$y(t) = 1 - e^{-t}$$

При ненулевых условиях, пусть $y(0) = -2$

$$y(0) = C_1 1 + C_2 \Rightarrow -2 = 1 - 3 \Rightarrow C_1 = 1, C_2 = -3$$
$$y'(0) = 0 + 3 = 3$$
$$y(t) = 1 - 3e^{-t}$$

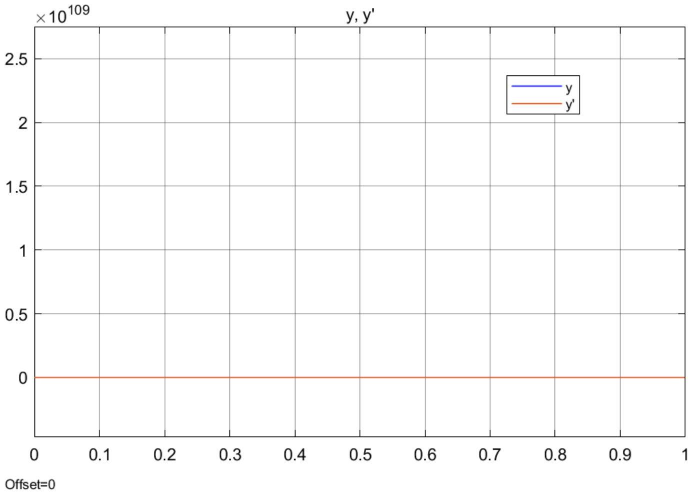


Рисунок 6. График зависимости y(t), y'(t) при нулевых условиях для набора 3

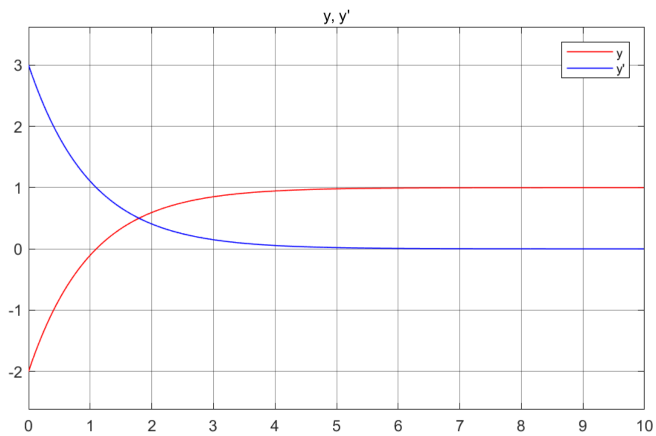


Рисунок 7. График зависимости y(t), y'(t) при ненулевых условиях для набора 3

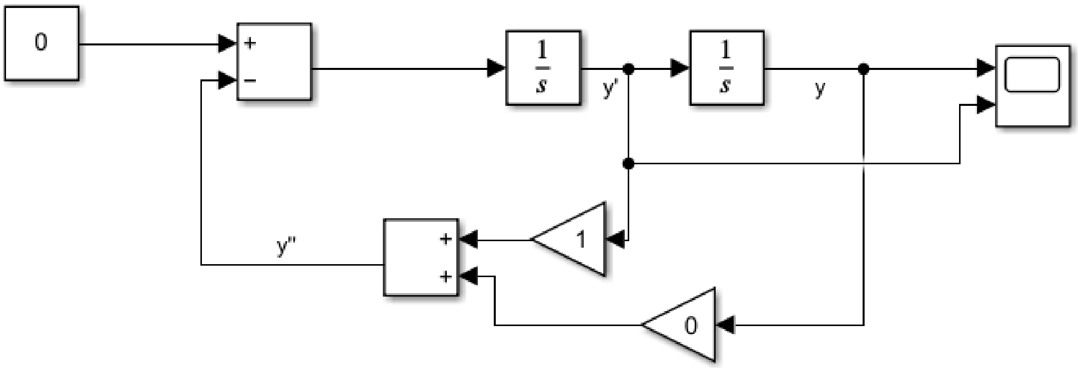


Рисунок 8. Схема моделирования для набора 3

4. Подберем коэффициенты нейтральной и линейной модам. Под «линейной» модой понимают моду, пропорциональную времени t. Так как я думаю, пример линейной моды – при рассмотрении уравнения движения простого тела через координату $x'' = \frac{1}{m}F \Rightarrow x''_{\text{св}} = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 0$, то корни уравнения должны соответствовать данному условию:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Это условие выполняется, когда $a_1 = 0, a_0 = 0$:

$$\lambda^2 = 0$$

$$y(t) = C_1 + C_2 t$$

При нулевых условиях: $0 = 0 + 0 \Rightarrow \; C_1 = 0,$ пусть $C_2 = 2$

$$y(t) = 2t$$

При ненулевых условиях, $y(0) = 1$

$$y(0) = 1 + 0 \Rightarrow C_1 = 1 \text{ пусть } C_2 = 2$$

$$y'(0) = 0 + 2 = 2$$

$$y(t) = 1 + 2t$$

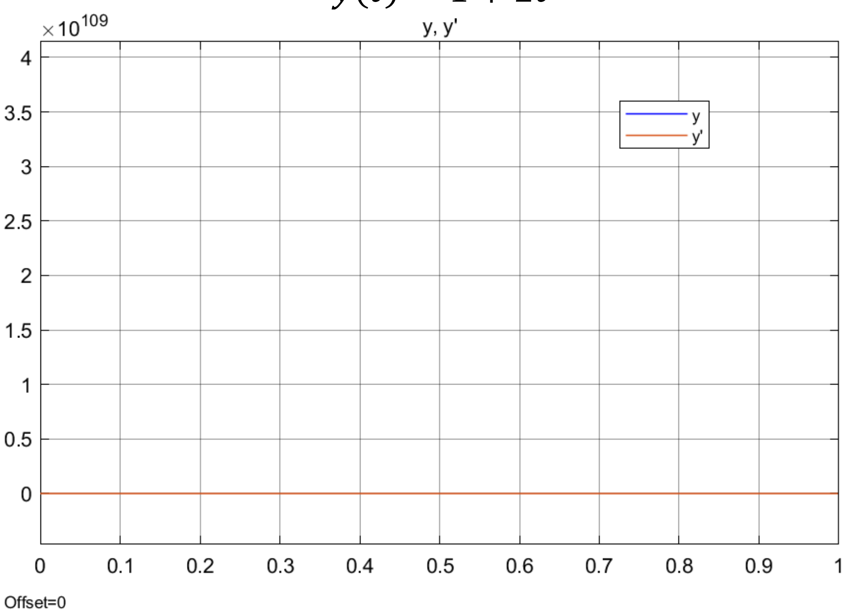


Рисунок 9. График зависимости y(t), y'(t) при нулевых условиях для набора 4

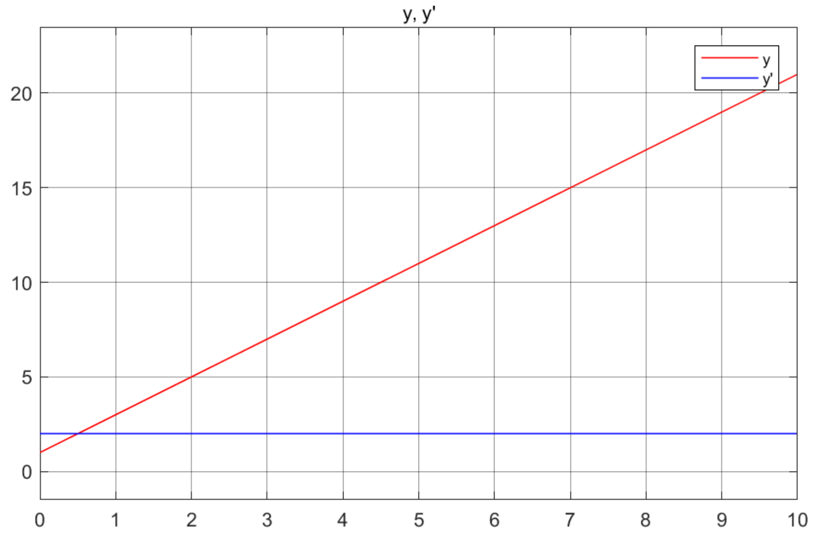


Рисунок 10. График зависимости y(t), y'(t) при ненулевых условиях для набора 4

5. Далее рассмотрим вариант пары консервативных мод, корни должны соответствовать следующим условиям:

$$\lambda_{1,2} = \pm\beta i$$

Пусть a_1=0, a_0=4:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$
$$\lambda^2 + a_0 = 0$$
$$\lambda^2 = -a_0$$
$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{a_0 i} = \pm 2i$$
$$y(t) = C_1 \cdot sin(2t) + C_2 \cdot cos(2t)$$

При нулевых условиях: $0 = 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0,$ пусть $C_1 = 3$

$$y(t) = 3 \cdot sin(2t)$$

При ненулевых условиях, пусть $y(0) = 3$

$$y(0) = 1 \cdot sin(2t) + 3 \cdot cos(2t) \Rightarrow 3 = 0 + 3 \Rightarrow C_1 = 1, C_2 = 3$$
$$y'(0) = 2cos(2t) - 6 \cdot sin(2t) = 2$$
$$y(t) = sin(2t) + 3 \cdot cos(2t)$$

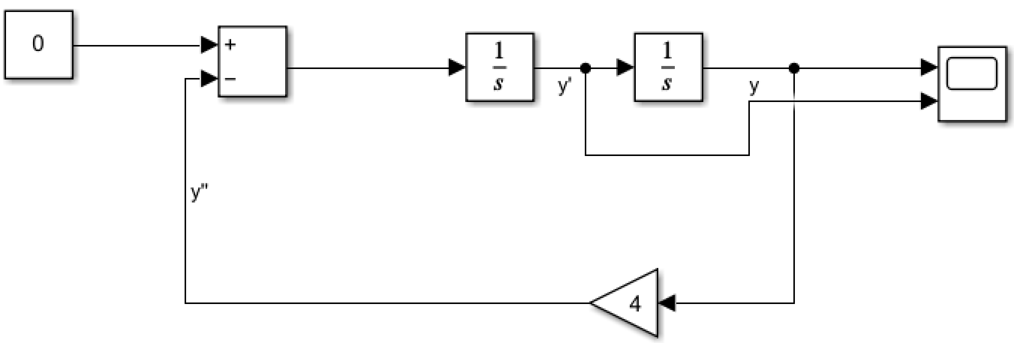


Рисунок 11. Схема моделирования уравнения 5

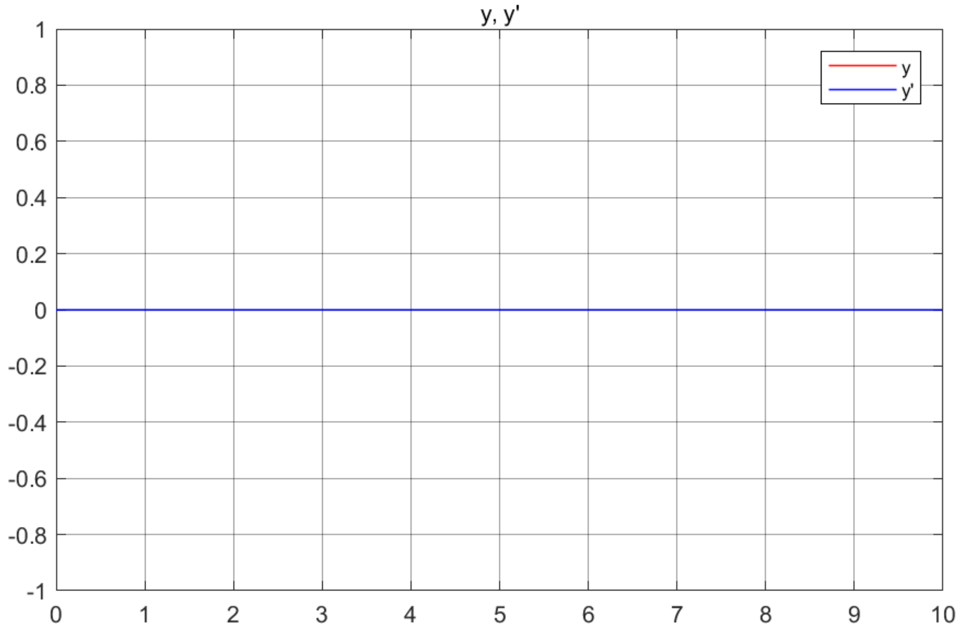


Рисунок 12. График зависимости y(t) при нулевых условиях для набора 5

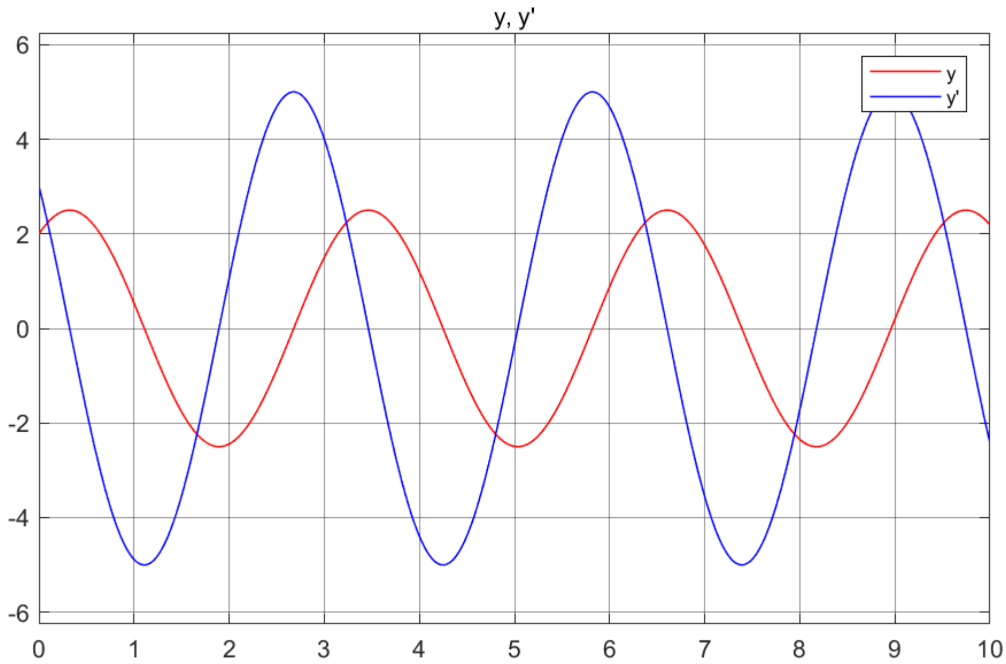


Рисунок 13. График зависимости y'(t) при ненулевых условиях для набора 5

6. Найдем коэффициенты, корни системы которых будут соответствовать паре устойчивых колебательных мод;

$$\lambda_{1,2} = a \pm \beta i, a < 0$$

Пусть a_1=2, a_0=2:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm 1i$$

$$y(t) = C_1 e^{-t} \cdot sin(t) + C_2 e^{-t} \cdot cos(t)$$

При нулевых условиях: $0 = 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0,$ пусть $C_1 = 3$

$$y(t) = 3e^{-t} \cdot sin(t)$$

При ненулевых условиях, пусть $y(0) = 3$

$$y(0) = 1 \cdot e^{-t} sin(t) + 3 \cdot e^{-t} cos(t) \Rightarrow 3 = 0 + 3 \Rightarrow C_1 = 1, C_2 = 3$$

$$y'(0) = 1 \cdot e^{-t} sin(t) + 3 \cdot e^{-t} cos(t)$$

$$y'(0) = (-4) \cdot e^{-t} sin(t) - 2e^{-t} \cdot cos(t) = -2$$

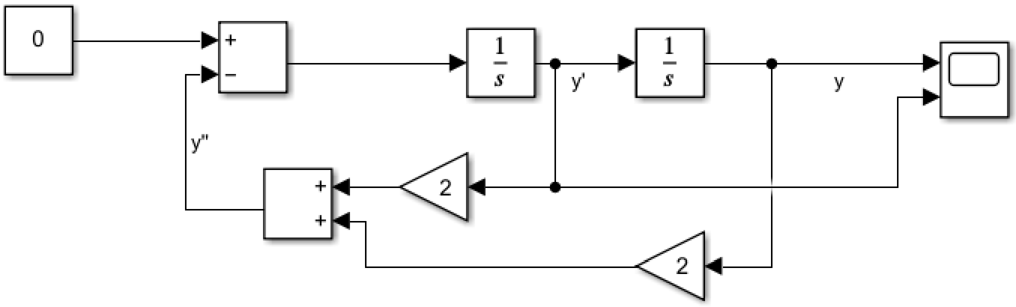


Рисунок 14. Схема моделирования уравнения 6

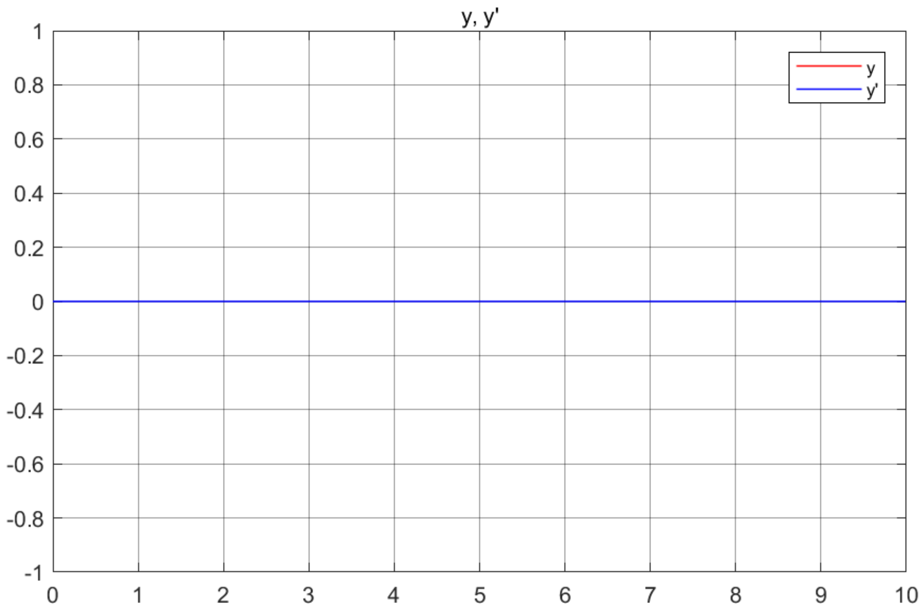


Рисунок 15. График зависимости y(t), y'(t) при нулевых условиях для набора 6

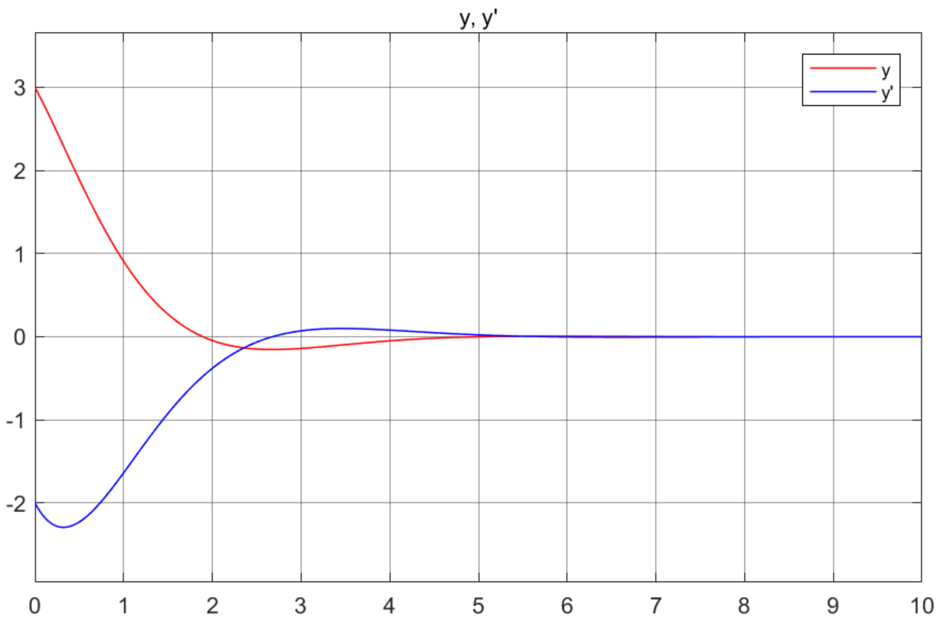


Рисунок 16. График зависимости y(t), y'(t) при ненулевых условиях для набора 6

7. Подберем коэффициенты, корни которых соответствуют паре неустойчивых колебательных модам. Корни уравнения должны соответствовать следующим условиям:

$$\lambda_{1,2} = a \pm \beta i, a > 0$$

Пусть a_1=-2, a_0=2:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm 1i$$

$$y(t) = C_1 e^t \cdot sin(t) + C_2 e^t \cdot cos(t)$$

При нулевых условиях: $0 = 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$, пусть $C_1 = 3$

$$y(t) = 3e^t \cdot sin(t)$$

При ненулевых условиях, пусть $y(0) = 3$

$$y(0) = 1 \cdot e^t sin(t) + 3 \cdot e^t cos(t) \Rightarrow 3 = 0 + 3 \Rightarrow C_1 = 1, C_2 = 3$$

$$y'(0) = -2e^t \cdot sin(t) + 4e^t \cdot cos(t) = 0 + 4 = 4$$

$$y(t) = e^t \cdot sin(t) + 3e^t \cdot cos(t)$$

Схема моделирования аналогична схеме на Рисунок 14, различие только в коэффициентах.

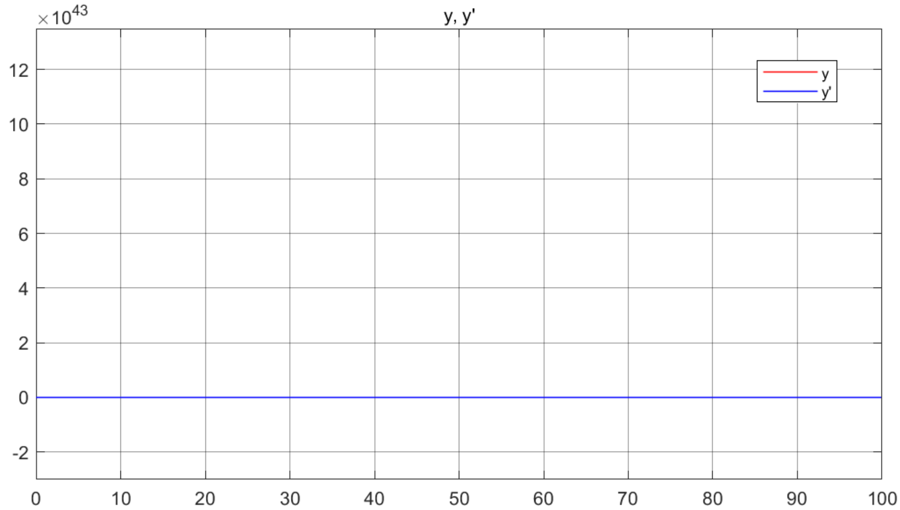


Рисунок 17. График зависимости y(t) y'(t) при нулевых условиях для набора 7

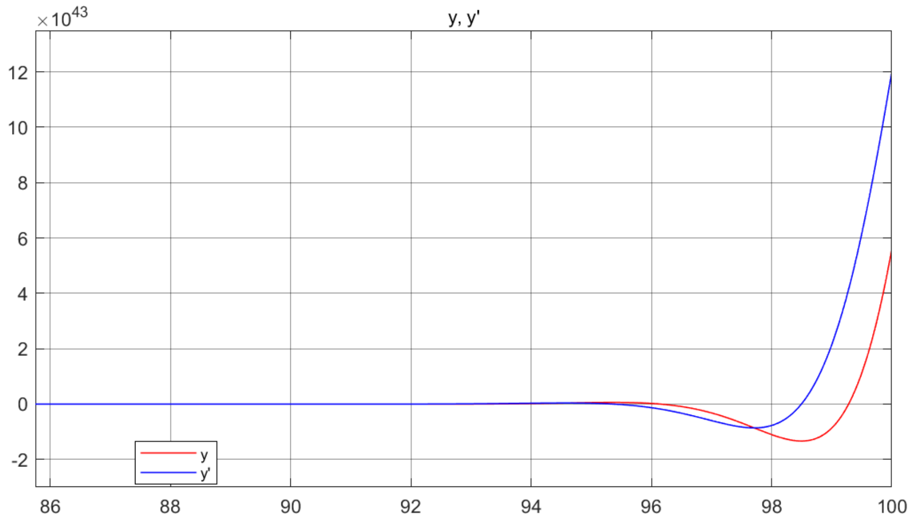


Рисунок 18. График зависимости y'(t), y(t) при ненулевых условиях для набора 7

Вывод: В процессе выполнения задания 1 проделали масштабную работу, а именно подобрали корни характеристического уравнения, соответствующих разным модам, используя корневой критерий устойчивости. Составили схемы моделирования для 7 разных уравнений, построили графики при разных условиях (нулевых и ненулевых). Результаты в более кратком виде приведены в Таблица 1.

№	λ_1	λ_2	a_1	a_0	уравнение
1	-1	-3	4	3	$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$
2	-1	5	-4	-5	$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$
3	0	-1	1	0	$\lambda^2 + \lambda = 0$
4	0	0	0	0	$\lambda^2 = 0$
5	$2i$	-$2i$	0	4	$\lambda^2 + 4 = 0$
6	$-1 + 1i$	$-1 - 1i$	2	2	$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$
7	$1 + 1i$	$1 - 1i$	-2	2	$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$

Таблица 1

Задание 2. Фазовые портреты.

Самостоятельно изучите, что такое фазовые портреты системы. Для каждого набора значений корней (λ1, λ2) из задания 1 и произвольно выбранных трех наборов ненулевых начальных условий постройте (на одном графике) фазовые портреты (фазовые траектории) y’(y). Сделайте выводы о виде фазового портрета в зависимости от типа устойчивости системы.

Решение

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = u.$$
$$y''_{\text{св}} + a_1 y_{\text{св}} + a_0 y_{\text{св}} = 0$$
$$x = y_{\text{св}}$$
$$x'' + a_1 x' + a_0 x = 0$$

1.

$$x'' + 4x' + 3x = 0$$
$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2'' = -4x_2{}' - 3x_1 \end{cases}$$

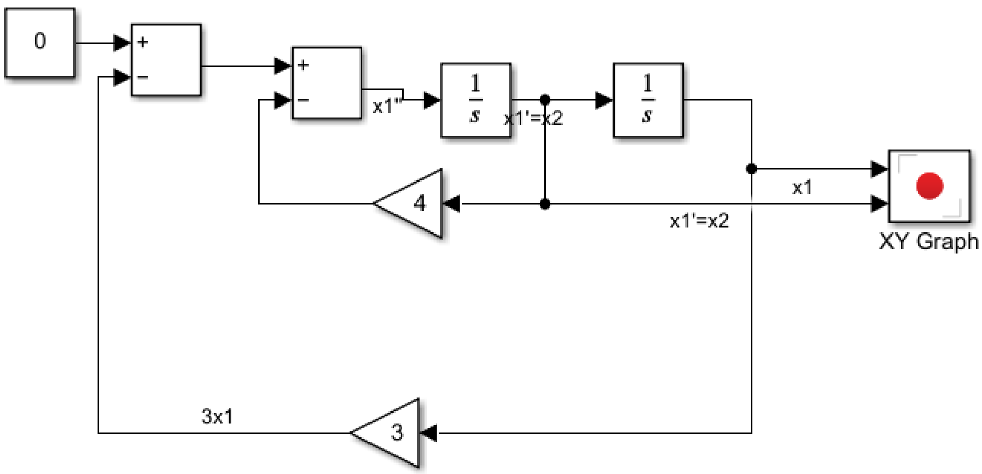
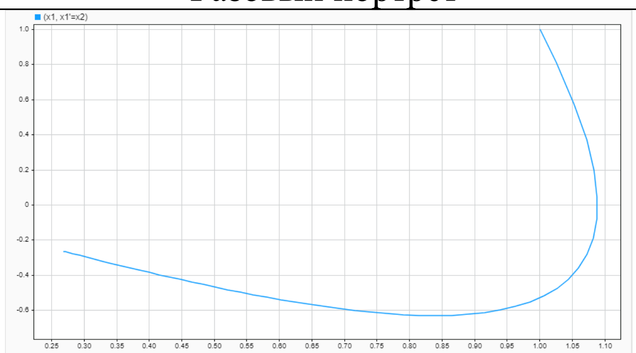
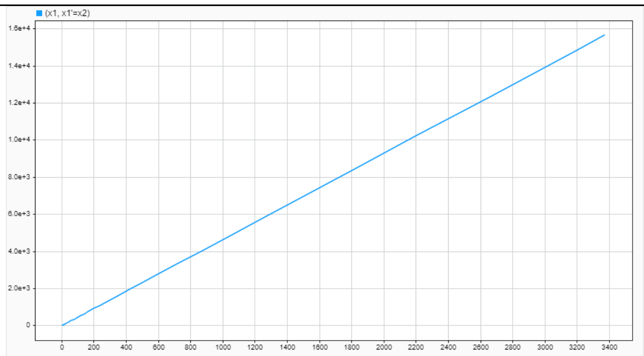
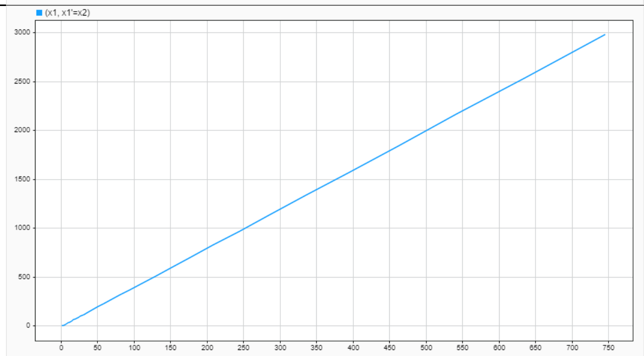
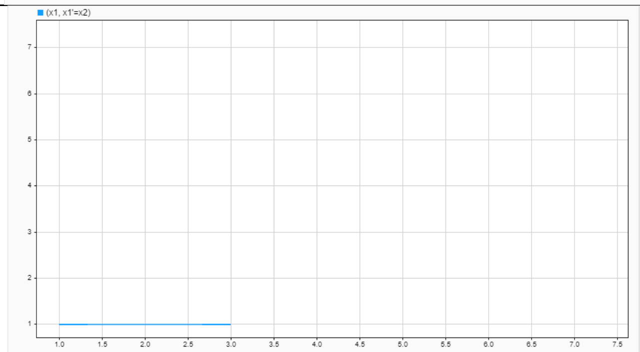
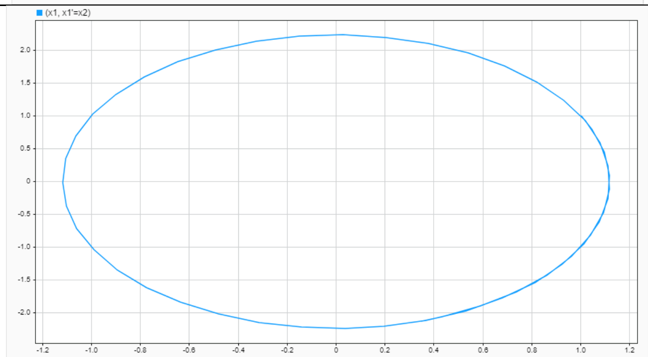
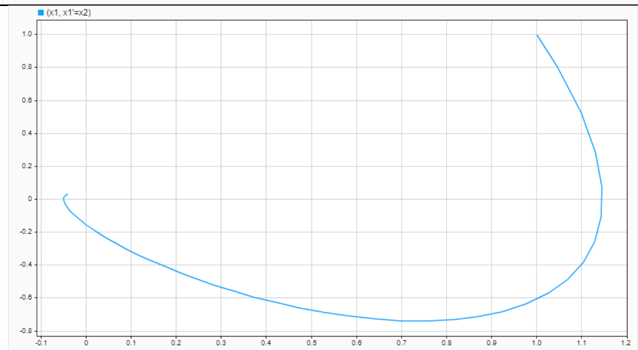


Рисунок 19. Схема моделирования для фазового портрета

Номер набора	Уравнение	Фазовый портрет
1	$x'' + 4x' + 3x = 0$ $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2'' = -4x_2{}' - 3x_1 \end{cases}$	

2	$x'' - 4x' - 5x = 0$ $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2'' = 4x_2' + 5x_1 \end{cases}$	
3	$x'' - 4x' = 0$ $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2'' = 4x_2' \end{cases}$	
4	$x'' = 0$ $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2'' = 0 \end{cases}$	
5	$x'' + 4x = 0$ $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2'' = -4x_1 \end{cases}$	
6	$x'' + 2x' + 2x = 0$ $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2'' = -2x_2' - 2x_1 \end{cases}$	

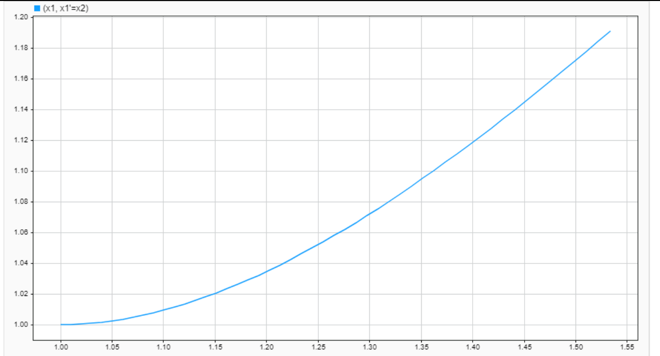
7	$x'' - 2x' + 2x = 0$ $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2'' = 2x_2{}' - 2x_1 \end{cases}$	

Таблица 2

Вывод: выполняя задание 2, были построены фазовые траектории для 7 разных наборов корней. Тип корней влияет на фазовый портрет, например, в наборе 5 по фазовому портрету можно определить, что корни мнимые, так как получили эллипс.

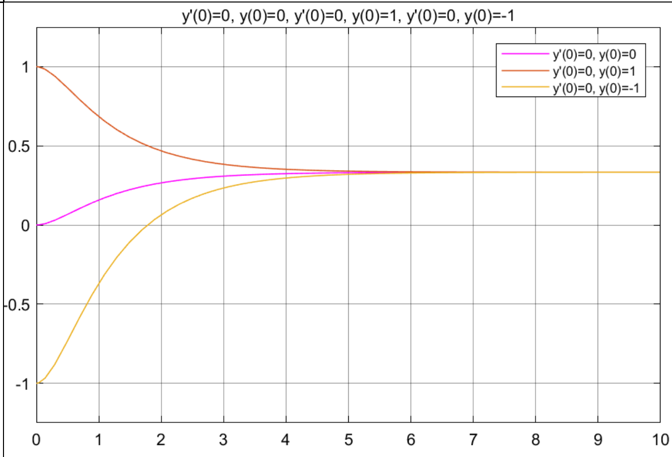
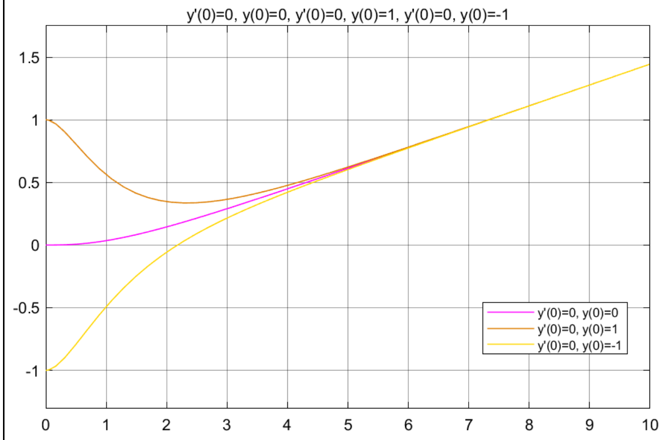
Используемые источники:

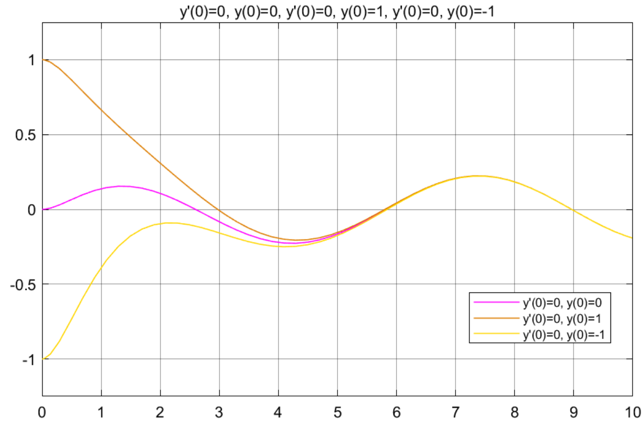
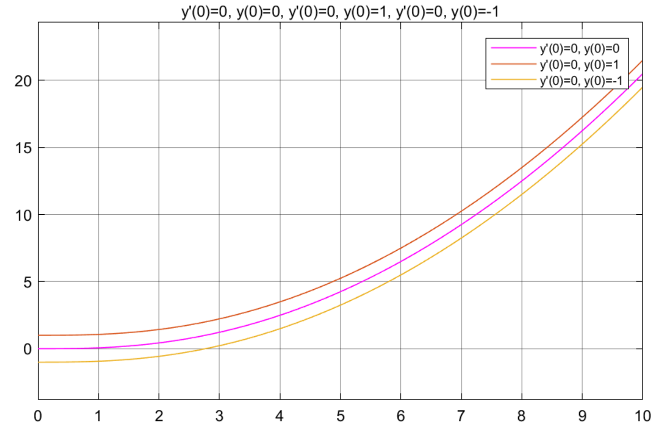
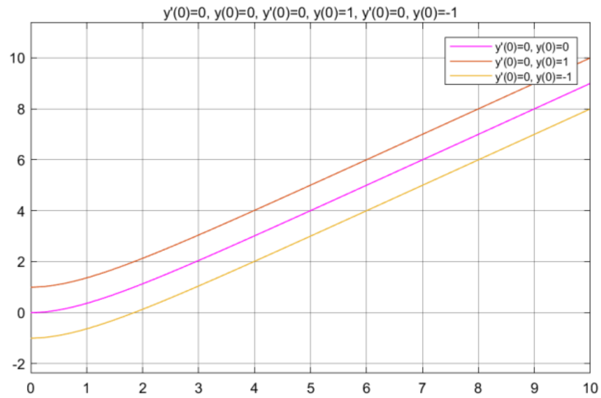
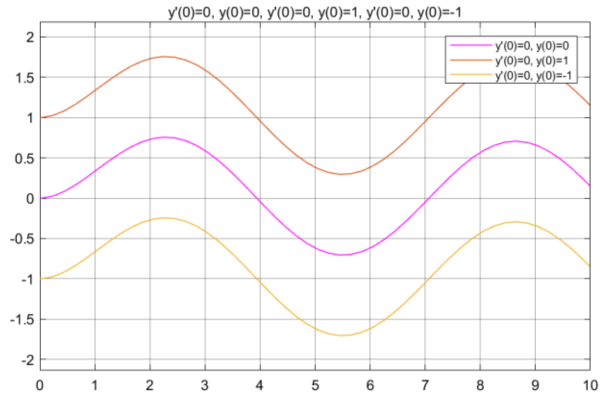
1. Фазовые портреты «на пальцах» или что можно узнать о решениях диффура, не решая его https://habr.com/ru/post/268507/
2. https://studme.org/270193/tehnika/fazovye_portrety_tipy_osobyh_tochek

Задание 3. Вынужденное движение.

Выберите три системы из задания 1 с разными типами устойчивости (асимптотически устойчивую, на границе устойчивости и неустойчивую). Для каждого входного воздействия u(t) осуществите моделирование вынужденного движения системы при t ≥ 0 с начальными условиями y(0) = −1; 0; 1 и y'(0) = 0. Входные сигналы u(t) возьмите в Табл. 1. в соответствии со своим вариантом. В отчёте приведите графики выходных сигналов y(t). Сделайте выводы.

Решение

Тип устойчивости	Уравнение	График
асимптотически устойчивая	$y'' + 4y' + 3y = 1$ $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$ $y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-3t}$ $y'^{(t)} = -C_1e^{-t} - 3C_2e^{-3t}$ $\begin{cases} C_1 + C_2 = -1 \\ -C_1 - 3C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ $C_1 = -1.5, C_2 = 0.5$ $y(t) = -1.5e^{-t} + 0.5\,e^{-3t}$ $y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-3t}$ $y(0) = 0 = C_1 + C_2 \Rightarrow$ $C_1 = -1,$ $C_2 = 1$ $y(t) = -e^{-t} + e^{-3t}$ $y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-3t}$ $y(0) = 1 = C_1 + C_2 \Rightarrow$ $C_1 = 2, C_2 = -1$ $y(t) = 2e^{-t} - e^{-3t}$	 *Рисунок 20. График моделирования u(t) =1*  *Рисунок 21. График моделирования u(t) =0.5t*

		 *Рисунок 22. График моделирования u(t) =cos(t)*
на границе устойчивости	$y'' + y' = 0.5t$ $\lambda^2 + \lambda = 0$ $y(t) = C_1 + C_2 e^{-t}$ $y(0) = C_1 + C_2 = -1$ $C_1 = 0, C_2 = -1$ $y(t) = -e^{-t}$ $y(0) = C_1 + C_2 = 0$ $C_1 = -1, C_2 = 1$ $y(t) = -1 + e^{-t}$ $y(0) = C_1 + C_2 = 1$ $y(t) = e^{-t}$	 *Рисунок 23. График моделирования u(t) =0.5t*  *Рисунок 24. График моделирования u(t) =1*  *Рисунок 25. График моделирования u(t) =cos(t)*

<table>
<tr>
<td>неустойчивая</td>
<td>$y'' - 2y' + 2y = \cos(t)$
$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$
$y(t) = C_1 e^t \cdot sin(t) + C_2 e^t cos(t)$
$y(0) = 0 + C_2 = -1$
$C_1 = 1, C_2 = -1$
$y(t) = e^t \cdot sin(t) - e^t cos(t)$
$y'(0) = 0$

$y(0) = C_1 e^t \cdot sin(t) + C_2 e^t cos(t) = 0$
$C_2 = 0, C_1 = 1$
$y(t) = e^t \cdot sin(t)$

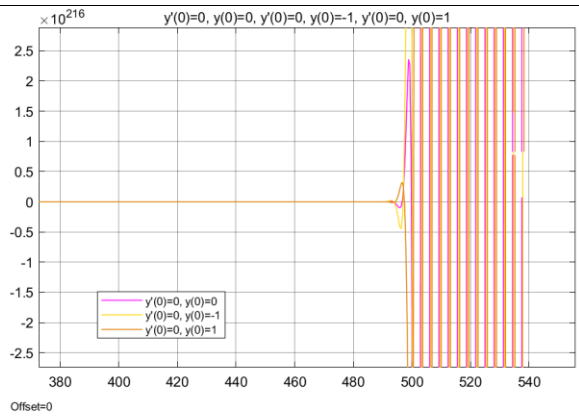
$y(0) = C_1 e^t \cdot sin(t) + C_2 e^t cos(t) = 1$
$C_1 = 1, C_2 = 1$
$y(t) = e^t \cdot sin(t) + e^t cos(t)$</td>
<td>

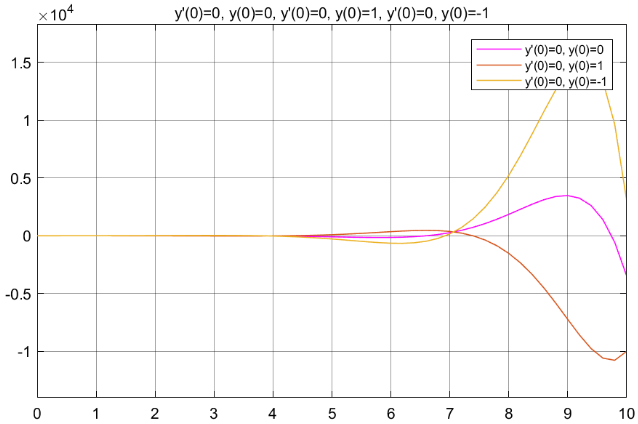
Рисунок 26. График моделирования u(t)=cos(t)


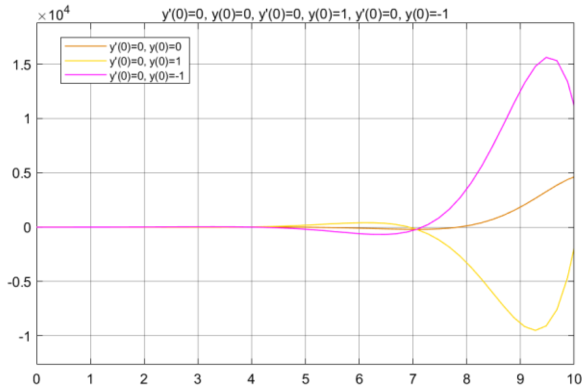
Рисунок 27.График моделирования u(t)=cos(t)


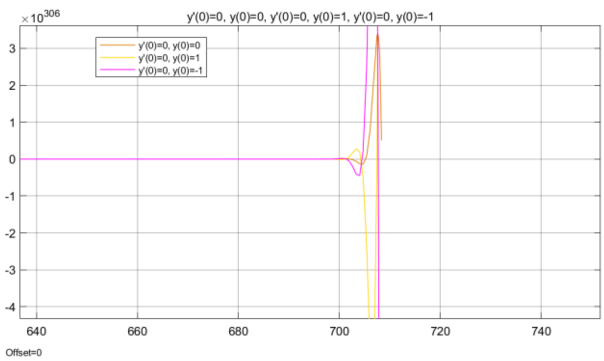
Рисунок 28. График моделирования u(t)=0.5t


Рисунок 29.График моделирования u(t)=0.5t</td>
</tr>
</table>

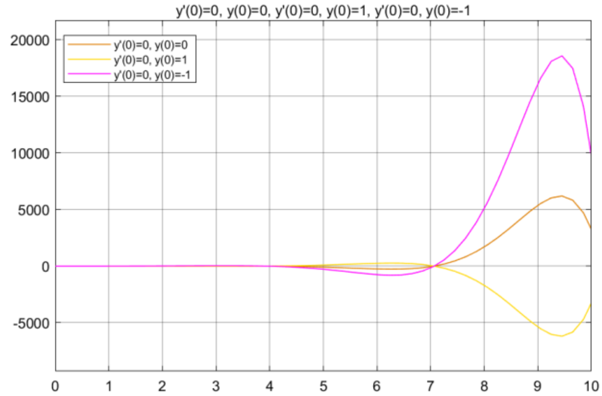
<table>
<tr><td></td><td></td><td>


Рисунок 30. График моделирования при u(t)=1

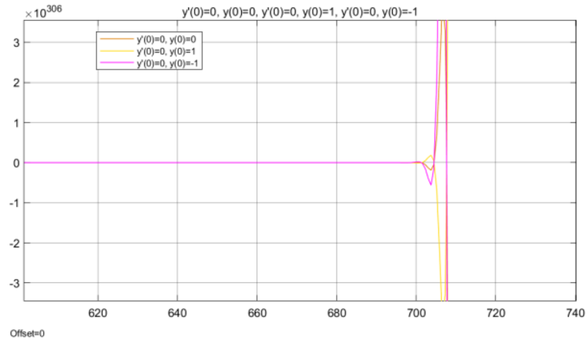


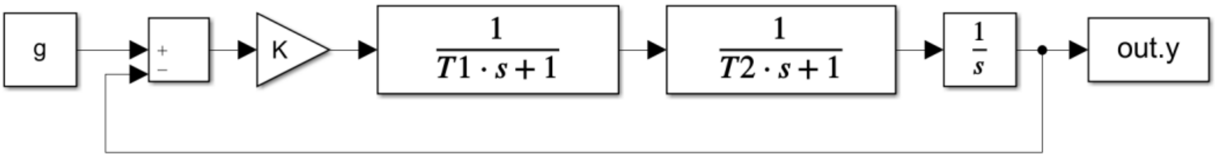
Рисунок 31. График моделирования при u(t)=1
</td></tr>
</table>

Таблица 3

Вывод: в процессе выполнения задания поработали с разными типами устойчивости, заметим, что в асимптотически устойчивой системе, несмотря на различные начальные условия, функции все равно сходятся в одну линию, независимо от начальных условий. Системы на границе устойчивости не сходятся в одну линию, но линии графика параллельны друг к другу. В неустойчивой системе все, наоборот, видим сильные расхождения с увеличением времени.

Задание 4. Область устойчивости.

Соберите схему моделирования линейной системы третьего порядка, установив значение постоянных времени T1 и T2 таким образом, чтобы полюса соответствующих передаточных функций совпали с первым набором корней (λ1, λ2) из задания 1.



Определите аналитически границу устойчивости в пространстве параметров K и T1 для системы с фиксированным значением T2, опираясь на критерий Гурвица. Приведите графическое изображение границы устойчивости на плоскости двух параметров K(T1) и определите область устойчивости системы. Сделайте выводы. Определите аналитически границу устойчивости в пространстве параметров K и T2 для системы с фиксированным значением T1, опираясь на критерий Гурвица. Приведите графическое изображение границы устойчивости на плоскости двух параметров K(T2) и определите область устойчивости системы. Сделайте выводы. Возьмите три набора параметров K, T1 и T2 таких, чтобы первый набор соответствовал устойчивой системе, второй – системе на границе устойчивости, а третий – неустойчивой системе. Выполните моделирование при g(t) = 1 и сделайте выводы.

Решение

Сначала построим передаточную функцию системы:

$$W(s) = k \cdot \frac{1}{T1 \cdot s + 1} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{T2 \cdot s + 1}$$

Находим истинную передаточную функцию системы ($\widetilde{W}$), которая действительно при умножении на вход давала бы нам выход системы:

$$(G - Y) \cdot W = Y$$

$$Y = \frac{W}{1 + W} \cdot G$$

$$\widetilde{W} = \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{K}{K + T1 \cdot T2 \cdot s^3 + T1 \cdot s^2 + T2 \cdot s^2 + s}$$

Вид системы в форме вход-выход:

$$T1 \cdot T2 \cdot y''' + (T1 + T2) \cdot y'' + y' + Ky = Ku$$

При свободном движении:

$$T1 \cdot T2 \cdot y''' + (T1 + T2) \cdot y'' + y' + Ky = 0$$

Составим матрицу Гурвица для оценки устойчивости системы:

$$a_3 \cdot y''' + a_2 \cdot y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

$$F = \begin{bmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (T1 + T2) & K & 0 \\ T1 \cdot T2 & 1 & 0 \\ 0 & (T1 + T2) & K \end{bmatrix}$$

Чтобы система была асимптотически устойчивой, все угловые ведущие миноры должны быть положительными:

$$(T1 + T2) > 0$$

$$det \begin{bmatrix} (T1 + T2) & K \\ T1 \cdot T2 & 1 \end{bmatrix} > 0$$

$$det \begin{bmatrix} (T1 + T2) & K & 0 \\ T1 \cdot T2 & 1 & 0 \\ 0 & (T1 + T2) & K \end{bmatrix} > 0$$

Отсюда получим:

$$(T1 + T2) - K \cdot T1 \cdot T2 > 0$$
$$K \cdot T1 \cdot T2 < (T1 + T2)$$
$$T1 = -\frac{1}{\lambda_1} = -\frac{1}{-1} = 1$$
$$T2 = -\frac{1}{\lambda_2} = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}$$

Пусть T1=1, тогда найдем границу и область устойчивости (Рисунок 32. График K(T2)), граница выделена пунктиром:

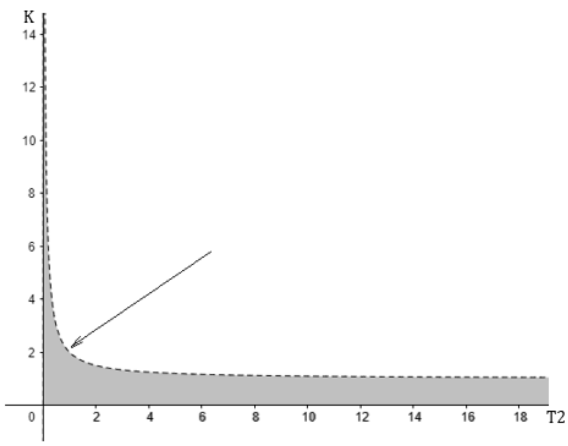


Рисунок 32. График K(T2)

Пусть T2=$\frac{1}{3}$, тогда:

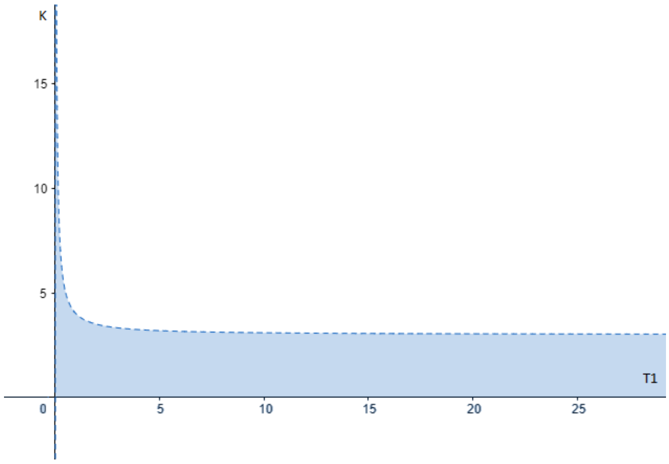


Рисунок 33. График K(T1)

Система	K	T1	T2
устойчивая	1	0.5	1
на границе устойчивости	2	1	1
неустойчивая	1	-1	-2

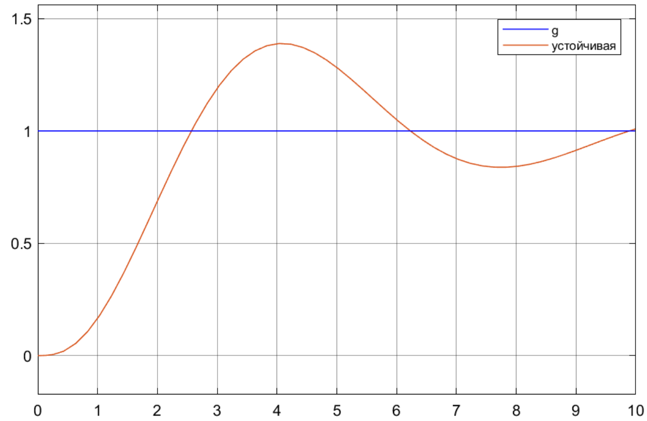


Рисунок 34. Моделирование при K=1, T1=0.5, T2=1

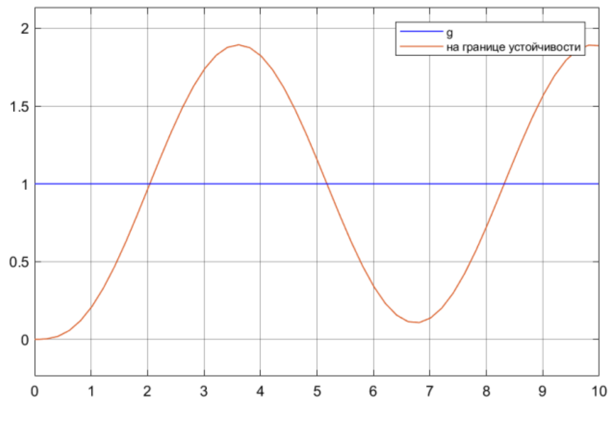


Рисунок 35. Моделирование при K=2, T1=1, T2=1

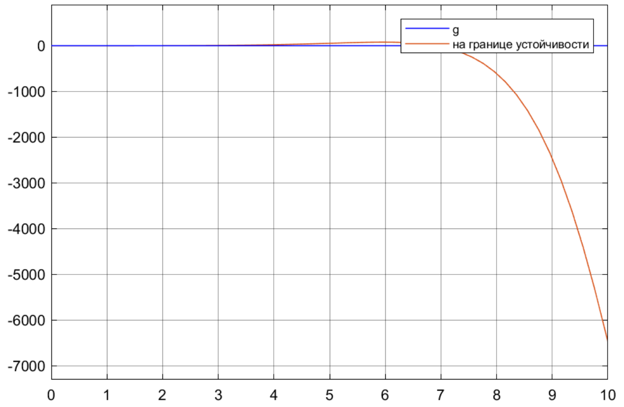


Рисунок 36. Моделирование при K=1, T1=-1, T2=-2

Вывод: в задание 4 изучали границы и области устойчивости. Анализируя графики, заметили, что графики устойчивой и на границе устойчивости системы схожи, в отличии от графика моделирования неустойчивой системы.

Задание 5. Вновь свободное движение.

Придумайте такую систему вида:

$$\begin{cases} x' = Ax \\ y = Cx \end{cases}$$

с ненулевыми начальными условиями x(0), чтобы выход системы при свободном движении совпадал с желаемым выходом:

$$y(t) = \cos(6t) + e^{-2t}\cos(3t)$$

В отчёте приведите матрицы A и C полученной системы, схему моделирования и результаты моделирования свободного движения системы с заданными начальными условиями. Выполните сравнение полученного выхода с желаемым. Сделайте выводы.

Решение:

Так как y(t) содержит $e^{-2t}\cos(3t)$, предположим, что корни уравнения были равны:

$$\lambda_1, \lambda_2 = -2 \pm 3i = \frac{-4 \pm 6i}{2} \Rightarrow \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} \Rightarrow \lambda_1^2 + 4\lambda_2 + 13$$

Аналогично находит корни $\cos(6t)$: $\lambda_1, \lambda_2 = \pm 6i \Rightarrow \lambda^2 + 36 = 0$

Тогда соберем все вместе:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 6i \\ \lambda_2 = -6i \\ \lambda_3 = -2 + 3i \\ \lambda_4 = -2 - 3i \end{cases}$$

$$(\lambda^2 + 4\lambda + 13)(\lambda^2 + 36) = 0$$
$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 13\lambda + 36\lambda^2 + 144\lambda + 468 = 0$$
$$\lambda^3 + 40\lambda^2 + 157\lambda + 468 = 0$$
$$y''' + 40y'' + 157y' + 468y = 0$$

Выберем вектор состояния $x(0)$, чтобы он соответствовал $Cx(0)$:

$$C = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 0]$$
$$x(0) = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 0]$$

Составим систему для свободного движения:

$$\begin{cases} y = Ce^{At}x(0) \\ x = e^{At}x(0) \end{cases}$$

Далее составляем матрицу А:

$$\begin{bmatrix} 6i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2+3i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2-3i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

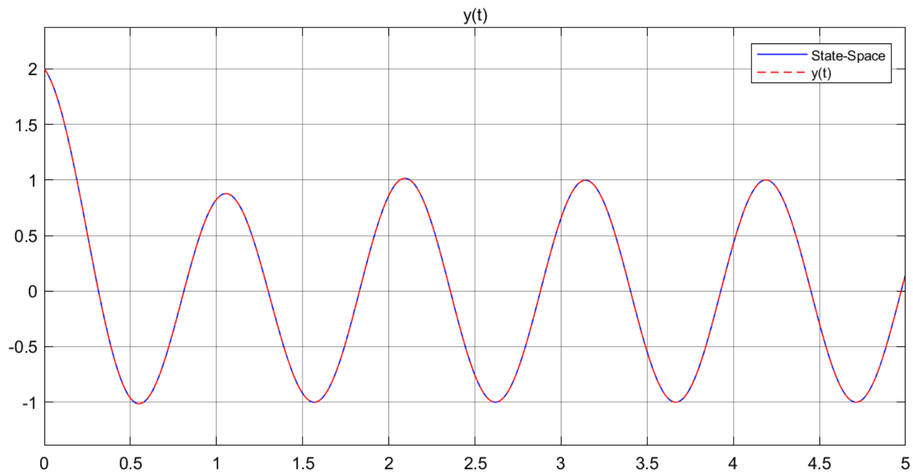


Рисунок 37. Результаты моделирования

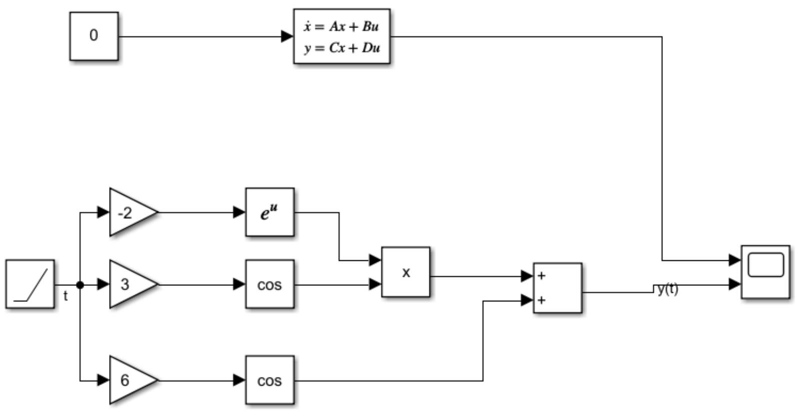


Рисунок 38. Схема моделирования

Вывод: в процессе выполнения задания 5 построили схему моделирования для систем найденной и желаемой. Анализируя, графики, видно, что графики одинаковые, значит А, С и начальные условия найдены правильно.