Домашнее задание №3 "Исследование свойств матричных функций от матриц"

по Математическим основам теории систем

Вариант №5

Работа выполнена: Осининой Татьяной, студенткой группы R33362

Преподаватель: Слита Ольга Валерьевна

Содержание

Задание №1

Вычислить обратную матрицу с помощью теоремы Гамильтона-Кэли

```
A = [1 -5 7;
    -6 2 -3;
    2 -5 6]
```

```
A = 3×3
     1    -5     7
    -6     2    -3
     2    -5     6
```

```
syms l
```

Чтобы вычислить обратную матрицу, найдем характеристический полином

```
I = l*eye(3)-A
```

I =

$$\begin{pmatrix} l-1 & 5 & -7 \\ 6 & l-2 & 3 \\ -2 & 5 & l-6 \end{pmatrix}$$

```
D_l = det(I)
```

D_l = $l^3 - 9\,l^2 - 39\,l - 29$

Далее вычислим обратную матрицу с помощью следствия из теоремы Гамильтона-Кели и проверим результат с помощью функции inv()

```
1/29*(A^2 + (-9)*A + (-39)*eye(3))
```

```
ans = 3×3
   -0.1034   -0.1724    0.0345
```

```
    1.0345   -0.2759   -1.3448
    0.8966   -0.1724   -0.9655
```

```
inv(A)
```

```
ans = 3×3
   -0.1034   -0.1724    0.0345
    1.0345   -0.2759   -1.3448
    0.8966   -0.1724   -0.9655
```

Так как результаты совпали, результат вычислен верно.

Задание №2

Вычислить матричную функцию от матрицы () = ^A

```
expA = funm(A, @exp)%находим матричную функцию с помощью funm()
```

```
expA = 3×3
10^5 ×
    0.5959   -0.7845    1.0278
   -0.5183    0.6823   -0.8939
    0.5959   -0.7845    1.0278
```

Задание №3

Вычислить матричную экспоненту методом диагонализации

```
[M,D] = eig(A)%M - матрица собственных векторов, D - диагональная матрица с собственными числам
```

```
M = 3×3
   -0.6023    0.3989    0.1374
    0.5238    0.8257    0.8242
   -0.6023    0.3989    0.5494
D = 3×3
   12.3485         0         0
         0   -2.3485         0
         0         0   -1.0000
```

```
M_inv = inv(M)
```

```
M_inv = 3×3
   -0.4290    0.5648   -0.7400
    2.6945    0.8528   -1.9528
   -2.4267   -0.0000    2.4267
```

Далее вычислим экспоненту диагональной матрицы, используя функцию expm()

```
expD = expm(D)
```

```
expD = 3×3
10^5 ×
    2.3061         0         0
         0    0.0000         0
         0         0    0.0000
```

Вычислим матричную экспоненту с помощью формулы

```
e_At = M*expD*inv(M)
```

```
e_At = 3×3
10^5 ×
    0.5959   -0.7845    1.0278
   -0.5183    0.6823   -0.8939
    0.5959   -0.7845    1.0278
```

Задание №4

Вычислить матричную экспоненту с помощью преобразования Лапласа

Для этого запишем матрицу (sI-A) и вычислим резольвенту

```
syms s
R = s*eye(3)-A
```

R =

$$\begin{pmatrix} s-1 & 5 & -7 \\ 6 & s-2 & 3 \\ -2 & 5 & s-6 \end{pmatrix}$$

```
Rez = inv(R)
```

Rez =

$$\begin{pmatrix} \frac{-s^2+8\,s+3}{\sigma_1} & \sigma_2 & -\frac{7\,s+1}{\sigma_1} \\ \frac{6\,(s-5)}{\sigma_1} & -\frac{s-8}{-s^2+10\,s+29} & \frac{3\,(s+13)}{\sigma_1} \\ -\frac{2\,(s+13)}{\sigma_1} & \sigma_2 & \frac{-s^2+3\,s+28}{\sigma_1} \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = -s^3 + 9\,s^2 + 39\,s + 29$$

$$\sigma_2 = \frac{5}{-s^2 + 10\,s + 29}$$

С помощью обратного преобразования Лапласа найдем e_At:

```
e_At = M * ilaplace(Rez, s) * inv(M)
```

e_At =

$$\left(\begin{array}{l} \frac{1298926815939827017564195130145\,e^{-s}}{5070602400912917605986812821504} - \sigma_6 + \frac{966099201865099\,\sqrt{53}\,\sigma_5}{119345390125318144} - \frac{347141152442229072 3\cdots}{1014120480182583 5\cdots} \\ \frac{3972243495432557589538618812091\,e^{-s}}{5070602400912917605986812821504} - \sigma_3 + \frac{2898297605595297\,\sqrt{53}\,\sigma_5}{59672695062659072} - \frac{179618976697110263\cdots}{2535301200456458\cdots} \\ \frac{1558712179127793097346475461743 3\,e^{-s}}{6084722881095501127184175385804 8} + \frac{966099201865099\,\sqrt{53}\,\sigma_5}{29836347531329536} - \sigma_4 - \frac{433926440552786461 1\cdots}{1267650600228229 4\cdots} \end{array}\right.$$

where

$$\sigma_1 = \sigma_{15} - \frac{\sqrt{6}\,\sigma_{14}}{6}$$

$$\sigma_2 = \sigma_{15} - \frac{\sqrt{6}\,\sigma_{14}}{2}$$

$$\sigma_3 = \frac{\sqrt{53}\,\left(\frac{4111631070353809\,e^{-s}}{2251799813685248} + \frac{6\,\sqrt{53}\,\sigma_{11}}{53} - \frac{393193536188631\,e^{5\,s}\,\sigma_{12}}{2251799813685248} - \frac{1859218767082589\,e^{5\,s}\cdots}{1125899906842624\cdots}\right.}{3}$$

$$\sigma_4 = \frac{\sqrt{53}\,\left(\frac{16134079979764267\,e^{-s}}{27021597764222976} + \frac{4\,\sqrt{53}\,\sigma_{11}}{53} + \frac{5425268280045317\,e^{5\,s}\,\sigma_{12}}{27021597764222976} - \frac{449153088746033\,e\cdots}{56294995342131\cdots}\right.}{3}$$

$$\sigma_5 = \sigma_{13} - \frac{4\,e^{5\,s}\,\sigma_{10}}{3}$$

$$\sigma_6 = \frac{\sqrt{53}\,\left(\frac{1344506664980355\,e^{-s}}{2251799813685248} + \frac{\sqrt{53}\,\sigma_{11}}{53} + \frac{904211380007553\,e^{5\,s}\,\sigma_{12}}{4503599627370496} - \frac{3593224709968263\,e^{5\,s}\,\sigma\cdots}{4503599627370496}\right.}{3}$$

$$\sigma_7 = 9601703803141505\,\sqrt{6}\,\sqrt{53}\,e^{5\,s}\,\sigma_{14}$$

$$\sigma_8 = 30337464546999695\,\sqrt{6}\,\sqrt{53}\,e^{5\,s}\,\sigma_{14}$$

$$\sigma_9 = 43973843682924395\,\sqrt{6}\,\sqrt{53}\,e^{5\,s}\,\sigma_{14}$$

$$\sigma_{10} = \sigma_{15} - \frac{\sqrt{6}\,\sigma_{14}}{4}$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{13} - \frac{e^{5\,s}\,\sigma_{12}}{3}$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{15} - \frac{3\,\sqrt{6}\,\sigma_{14}}{2}$$

$4\,e^{-s}$

Выводы

В домашнем задании №3 познакомились с теоремой Гамильтона-Кели, разными способами вычислили матричные экспоненты. Так как результаты совпали, то работа была выполнена верно.