

$$f(0) = a, f(-x) =$$

NO.

DATE

4.2 確率の生成モデル

$p(x|C_k)$: クラスの条件付き確率密度

$p(C_k)$: クラスの事前確率

↓ ベイズ定理

$p(C_k|x)$: 事後確率

$$\log_{\text{exp}} x = x,$$

事後確率

$$p(C_1|x) = \frac{p(x|C_1)p(C_1)}{\sum_{k=1} p(x|C_k)p(C_k)}$$

$$\exp(\log x) = x$$

$$\log x = \ln x$$

→ $x = e^y$

$$= \frac{p(x|C_1)p(C_1)}{p(x|C_1)p(C_1) + p(x|C_2)p(C_2)}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{p(x|C_2)p(C_2)}{p(x|C_1)p(C_1)}} \quad (\log e^{-1}) = -1$$

$$\left(\frac{1}{p^x}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{1 + \left(\frac{p(x|C_2)p(C_2)}{p(x|C_1)p(C_1)}\right)^{-1}}$$

$$= \frac{1}{1 + \log \left(\frac{p(x|C_2)p(C_2)}{p(x|C_1)p(C_1)} \right)} = \frac{1}{1 + e^{-a}}, \quad a = \log \left(\frac{p(x|C_2)p(C_2)}{p(x|C_1)p(C_1)} \right)$$

$\sigma(a)$: sigmoid 関数

K 772 の場合

$$\begin{aligned}
 p(C_k|x) &= \frac{p(x|C_k)p(C_k)}{\sum_{j=1}^K p(x|C_j)p(C_j)} \\
 &= \frac{\exp(\log(p(x|C_k))) \cdot p(C_k)}{\sum_{j=1}^K \exp(\log(p(x|C_j)p(C_j)))}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\exp(a_k)}{\sum_{j=1}^K \exp(a_j)} \quad \text{where } a_k \equiv \log(p(x|C_k)p(C_k)) \\
 &\quad (4.62)
 \end{aligned}$$

正規化指数関数, or soft max 関数

$$a_k \gg a_j \text{ for } j \neq k \Rightarrow \exp(a_k) \gg \exp(a_j)$$

$$\sum_{j \neq k}^K \exp(a_j) = \sum_{j \neq k}^K \exp(a_j) + \exp(a_k) \approx \exp(a_k)$$

f' ,

極限の値より成

$$p(C_k|x) \approx \frac{\exp(a_k)}{\exp(a_k)} = 1.$$

ジグザグ関数は

$$p(C_j|x) \approx \frac{\exp(a_j)}{\exp(a_k)} \sim 0.$$

$$\Sigma \Sigma^{-1} = I$$

$$(\Sigma \Sigma^{-1})^T = I^T = I$$

$$\Sigma^{-1} = (\Sigma^{-1})^T$$

1. $p(x|C_k)$... Gauss分布

2. 各々のクラスが同じ分散行列を共有する

$$\Sigma_k = \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$p(x|C_k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu_k)^T \Sigma^{-1} (x-\mu_k)\right)$$

2クラスの場合

$$\langle x | \Sigma^{-1} | \mu_2 \rangle$$

$$p(C_1|x) = \sigma \left(\log \frac{p(x|C_1)p(C_1)}{p(x|C_2)p(C_2)} \right)$$

$$= \log \frac{p(C_1)}{p(C_2)}$$

~~log exp~~

$$= \sigma \left(\log \left(\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu_1)^T \Sigma^{-1} (x-\mu_1)\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu_2)^T \Sigma^{-1} (x-\mu_2)\right)} \right) \right)$$

(1) (2) (3)

$$= \sigma \left(\log \left(\frac{\frac{1}{2} (x-\mu_1)^T \Sigma^{-1} (x-\mu_1) - \frac{1}{2} (x-\mu_2)^T \Sigma^{-1} (x-\mu_2)}{\frac{1}{2} (x-\mu_1)^T \Sigma^{-1} (x-\mu_1) - \frac{1}{2} (x-\mu_2)^T \Sigma^{-1} (x-\mu_2)} \right) \right)$$

$$= \sigma \left(\log \left(\frac{\frac{1}{2} (x-\mu_1)^T \Sigma^{-1} (x-\mu_1) - \frac{1}{2} (x-\mu_2)^T \Sigma^{-1} (x-\mu_2)}{\frac{1}{2} (x-\mu_1)^T \Sigma^{-1} (x-\mu_1) - \frac{1}{2} (x-\mu_2)^T \Sigma^{-1} (x-\mu_2)} \right) \right)$$

$$\left(\frac{1}{2} (x-\mu_1)^T \Sigma^{-1} (x-\mu_1) - \frac{1}{2} (x-\mu_2)^T \Sigma^{-1} (x-\mu_2) \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \mu_2^T \Sigma^{-1} x + \frac{1}{2} \mu_1^T \Sigma^{-1} x + \frac{1}{2} \mu_1^T \Sigma^{-1} \mu_1 - \frac{1}{2} \mu_2^T \Sigma^{-1} \mu_2$$

$$= (\mu_1 - \mu_2)^T \Sigma^{-1} x = (\Sigma^{-1} (\mu_1 - \mu_2))^T x$$

$$\sigma(\mu_1^T x + \mu_2^T x)$$

最大化の場合

$$a_k = \log(p(x|C_k)p(C_k))$$

$$= \log \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{|\Sigma|^{\frac{D}{2}}} \exp \left(-\frac{1}{2}(x - \mu_k)^T \Sigma^{-1} (x - \mu_k) \right) \right) p(C_k)$$

$$= \log \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{|\Sigma|^{\frac{D}{2}}} \right) - \frac{1}{2}(x - \mu_k)^T \Sigma^{-1} (x - \mu_k) + \log(p(C_k))$$

$$= \log \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{|\Sigma|^{\frac{D}{2}}} \right) - \frac{1}{2} x^T \Sigma^{-1} x - \frac{1}{2} \mu_k^T \Sigma^{-1} \mu_k$$

$$+ \frac{1}{2} x^T \Sigma^{-1} \mu_k + \frac{1}{2} \mu_k^T \Sigma^{-1} x^T + \log(p(C_k))$$

$$\mu_k^T \Sigma^{-1} x = (\Sigma^{-1} \mu_k)^T x$$

$$= \log \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{|\Sigma|^{\frac{D}{2}}} \right) - \frac{1}{2} x^T \Sigma^{-1} x + \mu_k^T x + w_0$$

$$p(C_k|x) = \frac{\exp \left(\log \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{|\Sigma|^{\frac{D}{2}}} \right) - \frac{1}{2} x^T \Sigma^{-1} x \right) \exp(\mu_k^T x + w_0)}{\sum_j \exp \left(\log \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{|\Sigma|^{\frac{D}{2}}} \right) - \frac{1}{2} x^T \Sigma^{-1} x \right) \exp(\mu_j^T x + w_0)}$$

$$= \frac{\exp(\mu_k^T x + w_0)}{\sum_j \exp(\mu_j^T x + w_0)}$$

$$= \frac{\exp(a_k(x))}{\sum_j \exp(a_j(x))}$$

$$4.2.2. \quad \left(\frac{P(C_1)P(x_n|C_1) \propto P(C_1|x_n)}{P(C_1|x_n)} = \frac{P(C_1)P(x_n|C_1)}{\sum_j P(C_j)P(x_n|C_j)} \right)$$

$$P(C_k|x) = \frac{P(x|C_k)P(C_k)}{P(x)}$$

事前確率

$$P(C_1) = \alpha, \quad P(C_2) = 1 - \alpha.$$

$$P(x_n, C_1) = P(C_1)P(x_n|C_1)$$

$$= \alpha P(x_n|C_1)$$

$$= \alpha \cdot N(x_n | \mu_1, \Sigma)$$

$$P(x_n, C_2) = P(C_2)P(x_n|C_2)$$

$$= (1 - \alpha) N(x_n | \mu_2, \Sigma).$$

尤度関数

$$P(t, X | t_n, \mu_1, \mu_2, \Sigma) \quad P(C_1|x_n) \quad P(C_2|x_n)$$

$$= \prod_{n=1}^N (N(x_n | \mu_1, \Sigma))^{\alpha} (N(x_n | \mu_2, \Sigma))^{1-\alpha}$$

尤度と事前確率を

ベイズの定理を用いて表現

1. ベイズの定理を求めよう。

正規分布の尤度関数と事前確率

尤度

$$\log p(t, X | \alpha, \mu_1, \mu_2, \Sigma)$$

$$= \log \left(\prod_{n=1}^N (\alpha N(\alpha_n | \mu_1, \Sigma))^{t_n} ((1-\alpha) N(\alpha_n | \mu_2, \Sigma))^{1-t_n} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^N \left(t_n \log (\alpha N(\alpha_n | \mu_1, \Sigma)) + (1-t_n) \log ((1-\alpha) N(\alpha_n | \mu_2, \Sigma)) \right)$$

$$= \sum_{n=1}^N \left(t_n \log \alpha + (1-t_n) \log (1-\alpha) + \underbrace{t_n \log N(\alpha_n | \mu_1, \Sigma)}_{\mu_1, \Sigma} + \underbrace{(1-t_n) \log N(\alpha_n | \mu_2, \Sigma)}_{\mu_2, \Sigma} \right)$$

↓ α の最大化

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \log p(t, X | \alpha, \mu_1, \mu_2, \Sigma)$$

$$t_n - \cancel{t_n} - \alpha + \cancel{t_n}$$

$$= \sum_{n=1}^N \left(\frac{t_n}{\alpha} - \frac{1-t_n}{1-\alpha} \right) = \sum_{n=1}^N \frac{(1-\alpha)t_n - (1-t_n)\alpha}{\alpha(1-\alpha)}$$

$$= \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \sum_{n=1}^N (t_n - \alpha) = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \left(\sum_{n=1}^N t_n - N\alpha \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \log p = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N t_n = \frac{N_1}{N} = \frac{N_1}{N_1 + N_2}$$

α の最大値 ... 全データの数 N に対する C_1 の割合 N_1 の割合。

μ, の最尤量

$$N(x_n | \mu_1, \Sigma)$$

$$\sum_{n=1}^N t_n \log N(x_n | \mu_1, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{\sqrt{|\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_n - \mu_1)^T \Sigma^{-1}(x_n - \mu_1)\right)$$

$$= \sum_{n=1}^N t_n \left(-\frac{1}{2}(x_n - \mu_1)^T \Sigma^{-1}(x_n - \mu_1) \right) + \text{Const.} \quad N_0$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N t_n (x_n - \mu_1)^T \Sigma^{-1}(x_n - \mu_1) + \text{Const.} \quad \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 1$$

$$\downarrow \frac{\partial}{\partial \mu_1} = 0 \quad \frac{\partial \log}{\partial x} = 0$$

$$x + \Delta - x =$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N t_n \left(-1 \sum^{-1} (x_n - \mu_1) \right) - 2 (x_n - \mu_1)^T \sum^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bf \\ ce+df \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$f(x+\Delta) = x + \Delta$$

$$f(x) = a^T x + b$$

$$f(x+\Delta) = a^T(x+\Delta) + b$$

$$\Rightarrow f(x) = a^T x + b$$

$$a^T \Delta$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (a \cdot x) = a$$

$$f(x+\Delta) = x + \Delta$$

$$= f(x) + 1 \cdot \Delta$$

$$\therefore \mu_1 = \frac{1}{N_1} \sum_{n=1}^{N_1} t_n x_n \quad C_1 \text{ に関する } x_n \text{ の平均}$$

$$N_1 \text{ 個の } x_n \text{ の平均} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = 1$$

$$\mu_2 = \frac{1}{N_2} \sum_{n=1}^{N_2} (1-t_n) x_n \quad \dots C_2 \text{ に関する } x_n \text{ の平均}$$

$$\langle a | \hat{A} | b \rangle = \hat{A} | b \rangle \langle a |$$

Σ 最大

$$\sum_{n=1}^N (t_n \log N(x_n | \mu_1, \Sigma) + (1-t_n) \log N(x_n | \mu_2, \Sigma))$$

$$= \sum_{n=1}^N \left[t_n \left(-\frac{1}{2} (x_n - \mu_1)^T \Sigma^{-1} (x_n - \mu_1) \right) + \log \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{D}{2}} \sqrt{|\Sigma|}} \right) \right]$$

$$+ (1-t_n) \left(-\frac{1}{2} (x_n - \mu_2)^T \Sigma^{-1} (x_n - \mu_2) + \log \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{D}{2}} \sqrt{|\Sigma|}} \right) \right)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N t_n \log |\Sigma| - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N t_n (x_n - \mu_1)^T \Sigma^{-1} (x_n - \mu_1) - \frac{D}{2} N \log(2\pi) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (1-t_n) \log |\Sigma| - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (1-t_n) (x_n - \mu_2)^T \Sigma^{-1} (x_n - \mu_2) - \frac{D}{2} N \log(2\pi) \\ &\quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{N_1} \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{N_2} \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{Tr}(\Sigma^{-1} S_1)} \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{Tr}(\Sigma^{-1} S_2)} \end{aligned}$$

$$= -\frac{N}{2} \log |\Sigma| - \frac{1}{2} \sum_{n \in G_1} (x_n - \mu_1)^T \Sigma^{-1} (x_n - \mu_1) - \frac{1}{2} \sum_{n \in G_2} (x_n - \mu_2)^T \Sigma^{-1} (x_n - \mu_2)$$

$$= -\frac{N}{2} \log |\Sigma| - \frac{1}{2} \sum_{n \in G_1} \sum_{k=1}^2 \sum_{n \in G_k} (x_n - \mu_k)^T \Sigma^{-1} (x_n - \mu_k)$$

$$= -\frac{N}{2} \log |\Sigma| - \frac{N}{2} \sum_{k=1}^2 \frac{N_k}{N} \frac{1}{N} \sum_{n \in G_k} (x_n - \mu_k)^T \Sigma^{-1} (x_n - \mu_k)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{N}{2} \log |\Sigma| - \frac{1}{2} (\text{Tr}(\Sigma^{-1} S_1) + \text{Tr}(\Sigma^{-1} S_2)) \\ &= -\frac{N}{2} \log |\Sigma| - \frac{N}{2} \text{Tr}(\Sigma^{-1} S) \end{aligned}$$

$$f(X) = \log |X| \quad f(X+\Delta) = \log |X+\Delta|$$

$$\begin{aligned} &= \log |X+\Delta| - \log |X| + \log |X| \\ &= \log \frac{|X+\Delta|}{|X|} + \log |X| \\ &= \log |1+X^{-1}\Delta| + \log |X| \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \Sigma} \log p(X|\alpha, \mu, \Sigma)$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \log |X| = (X^{-1})^T$$

$$\Rightarrow -\frac{N}{2} \frac{\partial}{\partial \Sigma^{-1}} (-\log |\Sigma^{-1}| + \text{Tr}(\Sigma^{-1}S)) \quad \frac{\partial}{\partial X} \text{Tr}(XA) = A^T$$

$$\log |\Sigma| = \log \frac{1}{|\Sigma^{-1}|}$$

$$\Rightarrow -\frac{N}{2} (-\Sigma^T + S^T) = 0$$

$$\rightarrow \Sigma = S$$

各々の成分分散行列の平均

A.2.3.

x_1^A x_2 x_3 ... x_D
 $\lambda_0: x_i \in \{0, 1\}^D$ ~~1~~ 特徴1 2 3 ... D

一般の分布 ... 20-1個

独立な変数集合

↓

1 2 3 ... D

0 or 1 0 or 1 ... 0 or 1

1 0 0 ... 0

0 1 0 ... -

↓

20. 月の要素

$\{x_i\}$ は互いに独立

μ_{k_i} は一定する. μ_{k_i} は x_i の分布に従う. (仮定)

$$p(x|C_k) = \prod_{i=1}^D \mu_{k_i}^{x_i} (1 - \mu_{k_i})^{1-x_i}$$

$$\downarrow \quad Q_k = \log (p(x|C_k) p(C_k)) \quad (4.63)$$

$$Q_k(x) = \log \left(\prod_{i=1}^D \mu_{k_i}^{x_i} (1 - \mu_{k_i})^{1-x_i} p(C_k) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^D (x_i \log \mu_{k_i} + (1-x_i) \log (1 - \mu_{k_i})) + \log p(C_k)$$

※ x_i の線形関数

→ 決定境界を越える

4.2.4. 指数型分布族

入力 $\vec{x} \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{Gaussian (連続)} \\ \text{離散値} \end{array} \right. \quad p(x|C_k) \propto N(x|\mu, \Sigma)$
 $x_i \in \{0, 1\}^D$

0と1、事後確率 $p(C_k|x)$ は $\dots \left\{ \begin{array}{l} \text{ソフトマックス (連続)} \\ \text{ソフトマックス (0と1)} \end{array} \right.$

正規化問題と一般化線形モデルで与えられる。

↓ 尤度 $p(x|C_k) \in \text{Gaussian 指数型分布族に}$
 属する。

$$\cancel{p(x|C_k)} \\ p(x|\lambda_k) = h(x) g(\lambda_k) \exp(\lambda_k^T u(x))$$

特に $u(x) = x$ の分布になる。

$x \rightarrow x/s$: 変数変換 (2.236) 尺度インバラースな
 導関数。

$$p(x|\lambda_k, s) = \frac{1}{s} h\left(\frac{1}{s}x\right) g(\lambda_k) \exp\left(\frac{1}{s} \lambda_k^T x\right)$$

$$p(x|\lambda_{k,5}) = \frac{1}{5} h\left(\frac{1}{5}x\right) g(\lambda_k) \exp\left(\frac{1}{5}\lambda_k^T x\right)$$

2つ目の場合

$$Q = \log \left(\frac{p(x|\lambda_1,5) p(\lambda_1)}{p(x|\lambda_2,5) p(\lambda_2)} \right) \quad (4.58)$$

$$= \log \left(\frac{\frac{1}{5} h\left(\frac{1}{5}x\right) g(\lambda_1) \exp\left(\frac{1}{5}\lambda_1^T x\right) p(\lambda_1)}{\frac{1}{5} h\left(\frac{1}{5}x\right) g(\lambda_2) \exp\left(\frac{1}{5}\lambda_2^T x\right) p(\lambda_2)} \right)$$

$$= \frac{1}{5} (\lambda_1^T - \lambda_2^T) x + \log g(\lambda_1) - \log g(\lambda_2) + \log p(\lambda_1) - \log p(\lambda_2) \quad (4.59)$$

$p(C|x) \geq p(C_2|x)$ であることは
xの線形関数。

$K > 2$ の場合

$$Q_k = \log (p(x|\lambda_{k,5}) p(C_k))$$

$$= \log \left(\frac{1}{5} h\left(\frac{1}{5}x\right) g(\lambda_k) \exp\left(\frac{1}{5}\lambda_k^T x\right) p(C_k) \right)$$

$$= \frac{1}{5} \lambda_k^T x + \log g(\lambda_k) + \log p(C_k) + \log \left(\frac{1}{5} h\left(\frac{1}{5}x\right) \right)$$

xの線形関数 $Q_k(x)$