3章の3.89式の別の手法による導出

jiko

(3.89) 式の別手法による導出を考えてみた。

(3.78) 式の両辺の対数を取ることにより、

$$\ln p(\mathbf{t}|\alpha,\beta) = \frac{M}{2}\ln\alpha + \frac{N}{2}\ln\beta + \ln\int \exp\left\{-\frac{\beta}{2}||\mathbf{t}-\Phi\mathbf{w}||^2 - \frac{\alpha}{2}\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{w}\right\}d\mathbf{w} \tag{1}$$

となることから、[1] α に関する微分を考えることで、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln p(\mathbf{t}|\alpha,\beta) &= \frac{M}{2\alpha} - \frac{1}{2}\frac{\int \mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{w}\exp\left\{-\frac{\beta}{2}||\mathbf{t}-\Phi\mathbf{w}||^2 - \frac{\alpha}{2}\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{w}\right\}d\mathbf{w}}{\int \exp\left\{-\frac{\beta}{2}||\mathbf{t}-\Phi\mathbf{w}||^2 - \frac{\alpha}{2}\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{w}\right\}d\mathbf{w}} \\ &\equiv \frac{M}{2\alpha} - \frac{1}{2}\left\langle \mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{w}\right\rangle = 0\end{aligned} \tag{2}$$

より

$$\alpha = \frac{M}{\left\langle \mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{w}\right\rangle} \tag{3}$$

と書ける。一方、$\left\langle \mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{w}\right\rangle$ について、

$$\begin{aligned}\left\langle \mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{w}\right\rangle &= \left\langle (\mathbf{w}-\mathbf{m}_{\mathrm{N}}+\mathbf{m}_{\mathrm{N}})^{\mathrm{T}}(\mathbf{w}-\mathbf{m}_{\mathrm{N}}+\mathbf{m}_{\mathrm{N}})\right\rangle \\ &= \left\langle (\mathbf{w}-\mathbf{m}_{\mathrm{N}})^{\mathrm{T}}(\mathbf{w}-\mathbf{m}_{\mathrm{N}})\right\rangle + \mathbf{m}_{\mathrm{N}}{}^{\mathrm{T}}\mathbf{m}_{\mathrm{N}}\end{aligned} \tag{4}$$

と変形できることがわかる。[2] この第一項に関して、(3.81) 式の $\mathbf{A}$ が共分散行列の逆行列になっていることから

$$\begin{aligned}\left\langle (\mathbf{w}-\mathbf{m}_{\mathrm{N}})^{\mathrm{T}}(\mathbf{w}-\mathbf{m}_{\mathrm{N}})\right\rangle &= \mathrm{Tr}\left\langle (\mathbf{w}-\mathbf{m}_{\mathrm{N}})(\mathbf{w}-\mathbf{m}_{\mathrm{N}})^{\mathrm{T}}\right\rangle \\ &= \mathrm{Tr}\mathbf{A}^{-1}\end{aligned} \tag{5}$$

となり、$\mathbf{A}$ の固有値は (3.81) 式と (3.87) 式を参照すると $\lambda_i + \alpha$ と書けることがわかるので

$$\mathrm{Tr}\mathbf{A}^{-1} = \sum_i \frac{1}{\lambda_i+\alpha} \tag{6}$$

のように (3.88) 式と同じ式を得る。これらを整理すると (3)、(4)、(6) 式から

$$\alpha = \frac{M}{\sum_i \frac{1}{\lambda_i+\alpha} + \mathbf{m}_{\mathrm{N}}{}^{\mathrm{T}}\mathbf{m}_{\mathrm{N}}} \tag{7}$$

を得て、整理すると (3.89) 式が導出できる。

[1] 定数は消えるので無視

[2] (4) 式で $\left\langle \mathbf{w}-\mathbf{m}_{\mathrm{N}}\right\rangle = 0$ を使う。