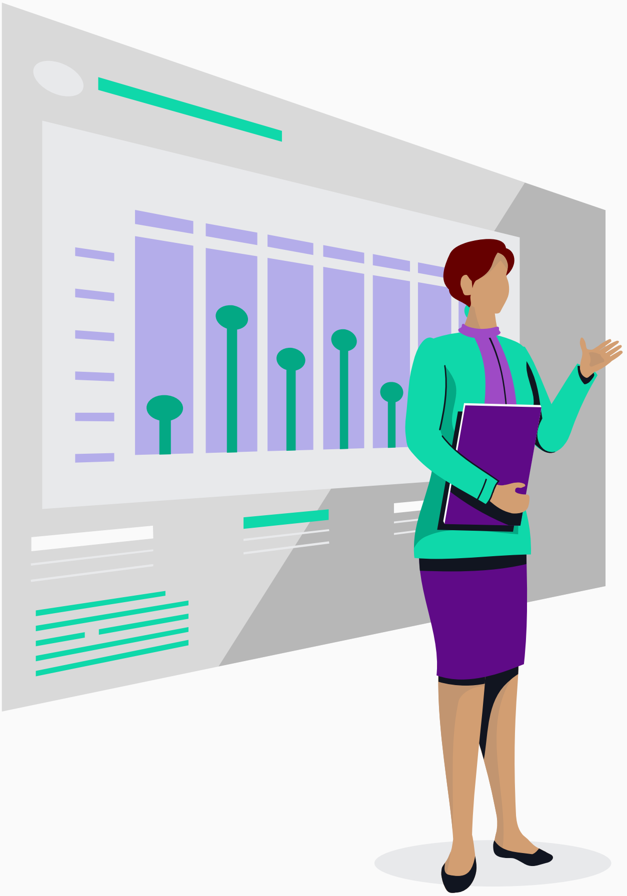
Tests Statistiques

Tests paramétriques
& Tests non paramétriques



Introduction

- Définition d'un test statistique
- Explication des deux types de test

Définition

Un test statistique est une procédure ou une méthode utilisée en statistiques pour prendre des décisions basées sur des données. Il permet de déterminer si une hypothèse concernant une population est vraie en se basant sur un échantillon de données de cette population.
Il existe deux grandes catégories de tests statistiques : les tests paramétriques et les tests non paramétriques.

Tests statistiques

Paramétriques | **Non paramétriques**

Tests paramétriques

Les tests paramétriques sont des tests statistiques qui supposent que les données suivent une distribution de probabilité spécifique, généralement une distribution normale (en forme de cloche). Ces tests font des hypothèses sur les paramètres de la distribution des données, comme la moyenne et l'écart-type.

Exemples: T Student, ANOVA ...

NB: Les tests paramétriques sont souvent utilisés lorsque les données sont numériques et suivent une distribution normale.

Tests non paramétriques

Les tests non paramétriques sont des tests qui ne nécessitent pas d'hypothèse sur la loi des données (ex : loi normale). Les données sont alors remplacées par des statistiques ne dépendant pas des moyennes/variances des données initiales (tableau de contingence, statistique d'ordre comme les rangs...).

Exemples: Chi-carré, Wilcoxon, Mann-Whitney...

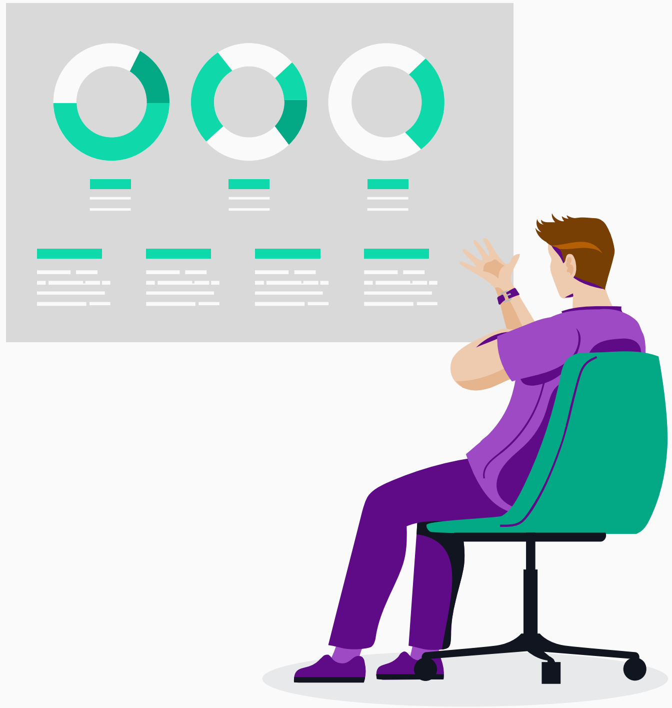
En somme, les tests paramétriques sont plus appropriés lorsque les données satisfont aux hypothèses, tandis que les tests non paramétriques sont utiles lorsque les données ne respectent pas ces hypothèses. Le choix entre les deux types de tests dépend de la nature des données que vous traitez et des questions que vous souhaitez résoudre en science des données.

Importance des tests statistiques dans la science de données

- Ils permettent de tirer des conclusions à partir de données brutes, ce qui est essentiel pour la prise de décision.
- Ils aident à évaluer l'importance des relations et des différences dans les données.
- Ils permettent de vérifier si les modèles et les prédictions construits à partir des données sont statistiquement valides.
- Ils fournissent une base solide pour la validation des résultats des expériences et des études.

Généralités

- Les hypothèses de test
- Niveau de signification et valeur p
- Statistique de test
- Degré de liberté
- Types d'erreurs
- Test unilatéral/bilatéral
- Les types de tests
- Les étapes d'un test d'hypothèses



Les hypothèses de test

- ## Qu'est-ce qu'une hypothèse ?

Une hypothèse est une supposition qui n'est ni prouvée ni réfutée. Dans le processus de recherche, une hypothèse est émise au tout début et l'objectif est de rejeter ou de ne pas rejeter l'hypothèse. Pour rejeter ou ne pas rejeter une hypothèse, des données, provenant par exemple d'une expérience ou d'une enquête, sont nécessaires et sont ensuite évaluées à l'aide d'un test d'hypothèse.

Exemple: "Les hommes gagnent plus que les femmes à poste égal au Maroc"

Les hypothèses de test

- **Qu'est-ce que l'hypothèse nulle et l'hypothèse alternative ?**

L'hypothèse nulle **notée H_0** est l'hypothèse que l'on désire contrôler : elle consiste à dire qu'il **n'existe pas de différence** entre les paramètres comparés ou que la différence observée n'est pas significative et est due aux variations d'échantillonnage.

L'hypothèse alternative **notée H_1** est la négation de H_0, elle est équivalente à dire « H_0 est fausse ». La décision de rejeter H_0 signifie que H_1 est réalisée ou H_1 est vraie.

Les hypothèses de test

Exemple:

Supposons que vous meniez une étude sur l'efficacité d'un programme de perte de poids et que vous souhaitiez déterminer si ce programme entraîne une réduction significative du poids des participants.

Hypothèse nulle (H0) : Le programme de perte de poids n'a aucun effet significatif sur le poids des participants.

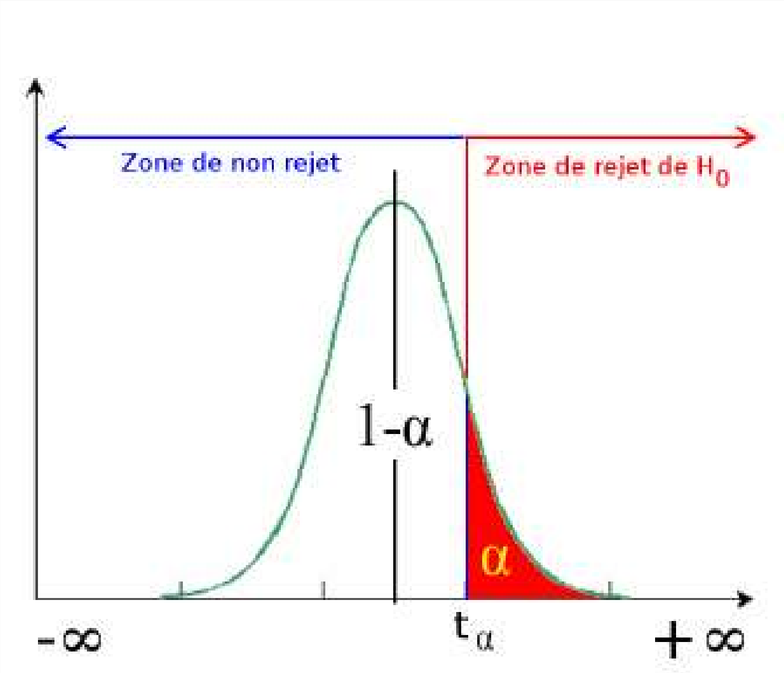
Hypothèse alternative (H1) : Le programme de perte de poids a un effet significatif sur le poids des participants.

Niveau de signification α et valeur p

1) Niveau de signification α

Un test d'hypothèse ne peut jamais rejeter l'hypothèse nulle avec une certitude absolue. Il existe toujours une certaine probabilité d'erreur que l'hypothèse nulle soit rejetée alors qu'en fait elle est vraie. Cette probabilité d'erreur est appelée niveau de signification ou α.

Habituellement, un seuil de signification de 5 % ou de 1 % est fixé. Si un seuil de signification de 5 % est fixé, cela signifie qu'il y a 5 % de chances de rejeter l'hypothèse nulle même si en fait elle est vraie.



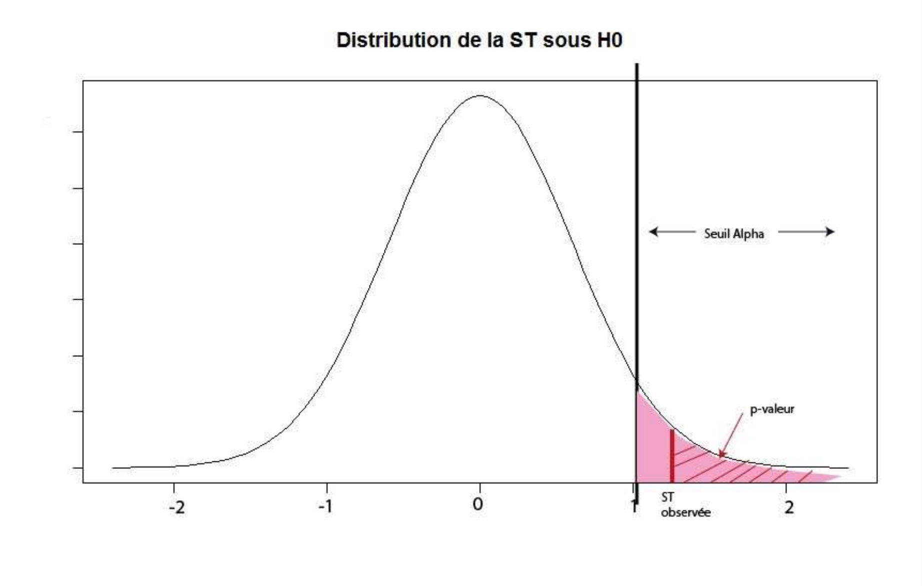
Niveau de signification α et valeur p

2) Valeur p

La valeur p (ou p-valeur) est une mesure statistique qui indique la probabilité que les données que vous avez collectées soient compatibles avec l'hypothèse nulle.

Une petite valeur p (typiquement inférieure à un niveau de signification préétabli, comme 0,05) suggère que les données sont incompatibles avec l'hypothèse nulle, tandis qu'une grande valeur p indique que les données sont compatibles avec l'hypothèse nulle.

En bref, la valeur p est utilisée pour accepter ou rejeter une hypothèse de recherche, car elle permet de différencier un résultat dû au hasard d'un résultat statistiquement significatif.



Niveau de signification α et valeur p

Exemple:

H0 : Les hommes et les femmes au Maroc ne diffèrent pas en ce qui concerne leur revenu net mensuel moyen.

Pour tester cette hypothèse, un seuil de signification de 5 % est fixé et une enquête est menée auprès de 600 femmes et 600 hommes pour les interroger sur leur revenu mensuel net. Un test t indépendant donne une valeur p de 0,04.
La valeur p de 0,04 est inférieure au seuil de signification de 0,05, ce qui nous permet de rejeter l'hypothèse nulle. Sur la base des données collectées, nous disposons de suffisamment d'éléments pour affirmer qu'il existe une différence statistiquement significative du revenu mensuel moyen entre la population respective d'hommes et de femmes au Maroc.

Statistique de test

- La statistique de test est une valeur calculé à partir des données d'une étude statistique pour aider à décider si une hypothèse est plausible ou non.
- Elle permet de quantifier à quel point les données soutiennent ou contredisent une hypothèse donnée.
- Le calcul de la statistique de test dépend du type de test statistique que vous effectuez. Chaque test statistique a sa propre formule pour calculer la statistique de test.

Degré de liberté DDL

- C'est une valeur que l'on détermine en se basant sur les tailles des échantillons, et elle est utilisée pour trouver les seuils ou les valeurs de référence critiques dans un test statistique.

- En comparant la valeur calculée de la statistique de test avec la valeur critique associée, on peut décider si l'hypothèse doit être rejetée ou acceptée dans un test statistique.

Degré de liberté DDL

❖ **Comment trouver la valeur critique?**

Niveau de signification : 5%.

Zone bilatérale

ddl	0	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.98	0.99	0.998	0.999
1	0	1	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	318.31	636.62
2	0	0.816	1.061	1.386	1.886	2.92	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	0	0.765	0.978	1.25	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	0	0.741	0.941	1.19	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.61
5	0	0.727	0.92	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0	0.718	0.906	1.134	1.44	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0	0.706	0.889	1.108	1.397	1.86	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0	0.703	0.883	1.1	1.383	1.833	2.262	2.821	3.25	4.297	4.781
10	0	0.7	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.93	4.318

Degrés de liberté : 9

Nous devons d'abord déterminer le niveau de signification que nous voulons utiliser. Ici, nous choisissons un niveau de signification de 0,05, c'est-à-dire 5 %. Ensuite, nous devons regarder dans la colonne à 1-0,05, donc à 0,95

Interpretation :

- ❖ valeur critique > valeur calculée : vous ne pouvez pas rejeter H0
- ❖ valeur critique < valeur calculée : Rejeter H0

Types d'erreurs

Dans un test d'hypothèse, en rejetant une hypothèse et en acceptant l'autre hypothèse du test, l'une des deux erreurs suivantes peut être commise :

- **Erreur de type I** : c'est l'erreur commise en rejetant l'hypothèse nulle alors qu'elle est réellement vraie.

- **Erreur de type II** : c'est l'erreur commise en acceptant l'hypothèse nulle alors qu'elle est en réalité fausse.

Globalement, les cas suivants se présentent :

	Décision	
	Non-rejet H_0	Rejet H_0
H_0 vraie	correct	Erreur de type 1
H_0 fausse	Erreur de type 2	correct

Types d'erreurs

Exemple:

Imaginez que vous êtes un juré dans un procès où un accusé est jugé pour un crime, et vous devez rendre un verdict. Les deux types d'erreurs peuvent se produire de la manière suivante :

1. **Erreur de type I (1ère espèce)** : Vous commettez une erreur de type I si vous condamnez un individu innocent. Cette erreur est similaire à un **erreur de type I** dans le contexte des tests statistiques, où vous croyez qu'il y a un effet ou une différence significative, mais en réalité, il n'y en a pas.

2. **Erreur de type II (2ème espèce)** : Vous commettez une erreur de type II si vous acquittez un individu coupable. Cette erreur est similaire à un **erreur de type II** dans le contexte des tests statistiques, où vous croyez qu'il n'y a pas d'effet ou de différence significative, mais en réalité, il y en a.

Dans le domaine des tests statistiques, il est important de choisir un niveau de signification approprié (alpha) pour contrôler le risque d'erreur de type I et d'utiliser des méthodes appropriées pour minimiser le risque d'erreur de type II.

Test unilatéral / bilatéral

Le type d'hypothèse alternative H1 définit si un test est unilatéral ou bilatéral.

1) Test unilatéral

Un test unilatéral est un test statistique dans lequel l'hypothèse alternative (H1) se concentre sur une seule direction de l'effet ou de la différence par rapport à l'hypothèse nulle (H0).

Exemple:

- Supposons que vous travaillez pour une entreprise de production de lampes électriques et que vous voulez tester si un nouveau processus de fabrication conduit à des lampes qui durent **plus longtemps** que les lampes produites précédemment. Vos hypothèses seraient les suivantes :
- H0 (nulle) : La durée de vie des nouvelles lampes est la même que celle des lampes précédentes.
- H1 (alternative) : La durée de vie des nouvelles lampes est **supérieure** à celle des lampes précédentes.
- Dans ce cas, vous effectueriez un test unilatéral pour déterminer si la durée de vie des nouvelles lampes est significativement supérieure à celle des lampes précédentes.

Test unilatéral / bilatéral

1) Test bilatéral

Un test bilatéral est un test statistique dans lequel l'hypothèse alternative (H1) ne spécifie pas de direction particulière de l'effet ou de la différence par rapport à l'hypothèse nulle (H0), mais s'intéresse à l'existence d'une différence, quelle que soit la direction.

Exemple:

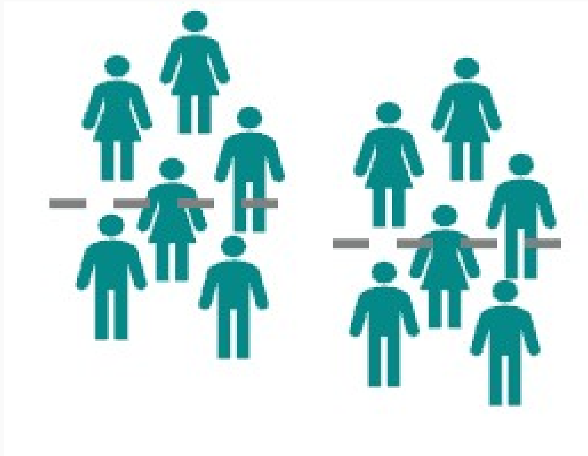
- Imaginez que vous meniez une étude pour déterminer si la consommation d'un médicament provoque une variation significative de la pression artérielle. Vos hypothèses seraient les suivantes :
- H0 (nulle) : La consommation du médicament n'a aucun effet sur la pression artérielle.
- H1 (alternative) : La consommation du médicament a un effet significatif sur la pression artérielle (dans n'importe quelle direction).
- Dans ce cas, vous effectueriez un test bilatéral pour déterminer si la consommation du médicament a un effet significatif, sans préjuger si la pression artérielle augmentera ou diminuera.

Les types de tests statistiques

1) Tests de conformité

les tests de conformité permettent de vérifier si les données observées correspondent à ce qui était attendu ou prédit, en se basant sur des critères statistiques ou des modèles théoriques.

2) Tests d'homogénéité



Sont utilisés pour évaluer si plusieurs groupes ou échantillons proviennent de la même population, c'est-à-dire s'ils présentent des caractéristiques similaires en termes de distribution. Ces tests sont utiles lorsque vous avez plusieurs groupes et que vous souhaitez déterminer s'ils diffèrent significativement les uns des autres en termes de moyennes, de variances ou de distributions.

Les types de tests statistiques

3) Tests sur séries appariées

Sont utilisés lorsque vous avez deux mesures liées entre elles, prises sur les mêmes individus ou unités, à deux moments différents. Ces tests sont conçus pour évaluer si une intervention ou un traitement a eu un effet significatif sur les données appariées. Ils comparent généralement les valeurs avant et après l'intervention pour voir s'il y a une différence significative..

Les étapes d'un test d'hypothèses

1) Énoncez l'hypothèse nulle et l'hypothèse alternative du test d'hypothèse.

2) Définissez le niveau de signification α souhaité.

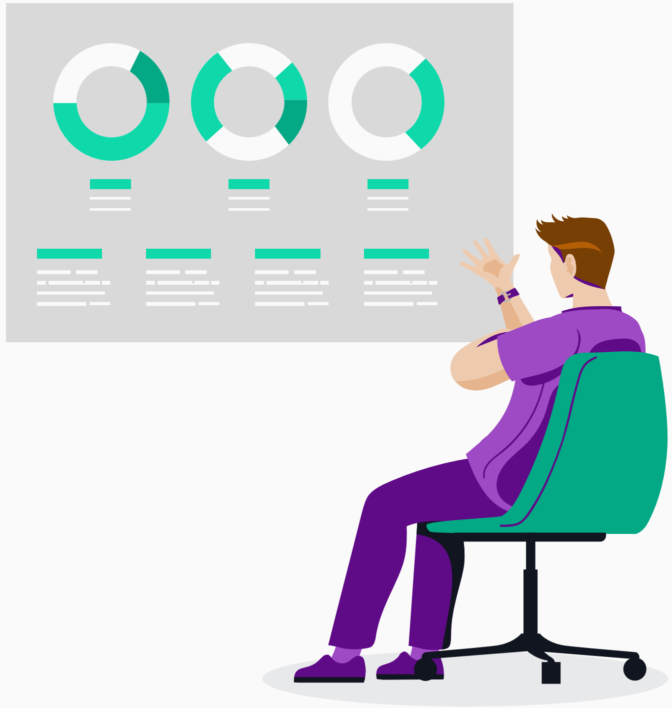
3) Calculez la statistique du test d'hypothèse.

4) Déterminez les valeurs critiques du test d'hypothèse pour connaître la région de rejet et la région d'acceptation du test d'hypothèse.

5) Prendre une décision concernant l'hypothèse posée .

Tests Paramétriques

- Test t de student
- Test de Fisher



Conditions à vérifier :

Avant de faire tout test paramétrique statistique, on doit, en toute rigeur, vérifier les hypothèses sous-jacentes :

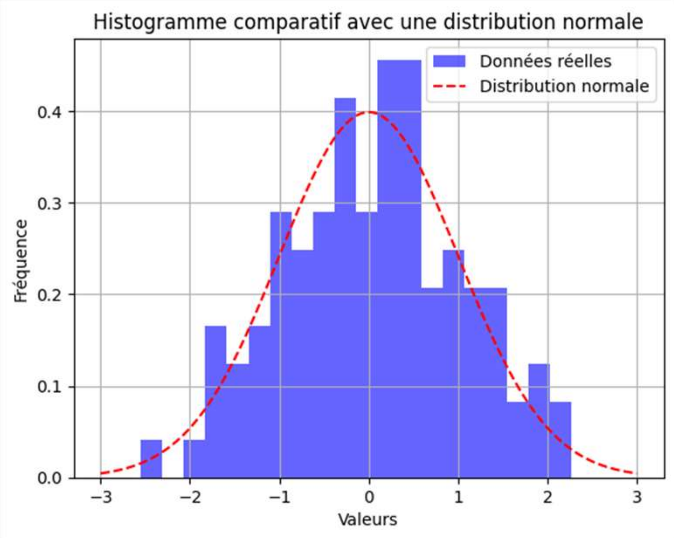
- **Hypothèse de normalité :**
  - Idéalement, les données dans chaque échantillon devraient suivre une distribution normale. Cependant, le test t est assez robuste et peut être utilisé même si la normalité n'est pas parfaitement satisfaite, à condition que les tailles des échantillons soient suffisamment grandes (typiquement, $n > 30$). Pour des échantillons de petite taille et des violations graves de la normalité, il peut être préférable d'utiliser d'autres tests non paramétriques.
- **Hypothèse d'indépendance :**
  - Les observationsdans les échantillons doivent être indépendantes les unes des autres.

Comment vérifier la normalité ?

Il existe plusieurs méthodes couramment utilisées pour vérifier si la distribution des données dans un échantillon suit une distribution normale.
Voici quelques-unes des approches les plus courantes :

- **Graphiques de distribution :**

Un moyen simple de vérifier la normalité est de créer un histogramme des données. Une distribution normale présente une forme en cloche.



Comment vérifier la normalité ?

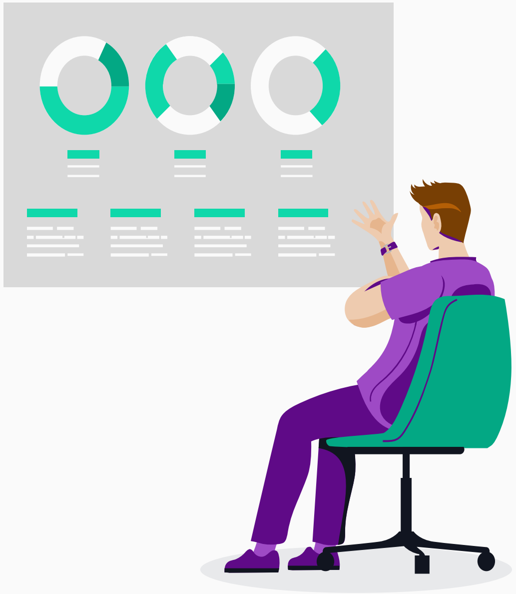
- **Test de Shapiro-Wilk :**

❖ Le test de Shapiro-Wilk est l'un des tests les plus puissants pour vérifier la normalité des données.

❖ Il évalue l'hypothèse nulle selon laquelle les données sont tirées d'une population normale.

❖ Les résultats du test comprennent une statistique W et une valeur p. Si la valeur p est inférieure à un seuil prédéfini (généralement 0,05), l'hypothèse nulle est rejetée, indiquant que les données ne suivent pas une distribution normale.

Test T Student



Définition

Le test t de Student, également appelé le test de Student, est un test statistique utilisé pour comparer les moyennes de deux groupes ou pour évaluer si la moyenne d'un échantillon diffère significativement de la moyenne d'une population de référence.

❖ **Le principe est de décider si la différence entre les moyennes observées des deux échantillons de comparaison est due à la variable indépendante (caractère) testée ou si elle peut être considérée comme l'effet du hasard.**

Ce test permet de comparer :

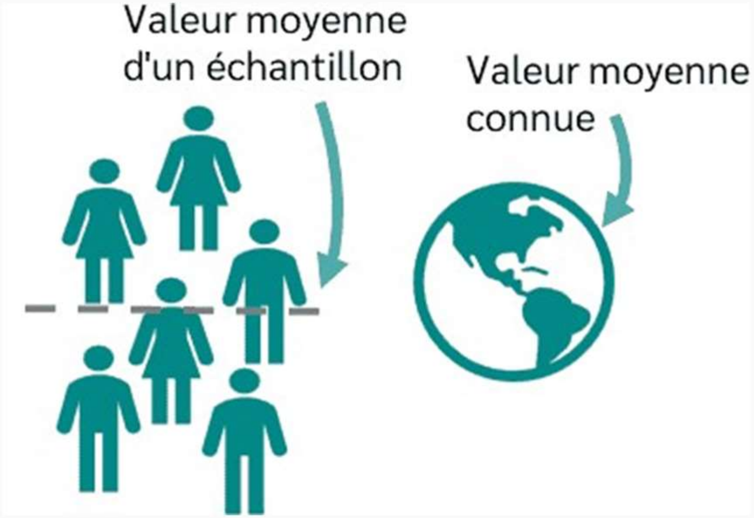
- une moyenne d'un à échantillon une valeur donnée.
- les moyennes de deux échantillons indépendants.
- les moyennes de deux échantillons appariés.

Test t

1) Test t à un échantillon

❖ Quand utilise-t-on le test t à un échantillon?

Nous utilisons le test t à un échantillon lorsque nous voulons comparer la moyenne d'un échantillon à une moyenne de référence connue.



❖ Exemple :

Un fabricant de barres chocolatées affirme que ses barres chocolatées pèsent en moyenne 50 grammes. Pour vérifier cette affirmation, un échantillon de 30 barres est prélevé et pesé. La valeur moyenne de cet échantillon est de 48 grammes.

Test t

Comment effectuer un test t sur un échantillon ?

1 - Formuler les hypotheses :

- ❖ **Hypothèse nulle :** La moyenne de l'échantillon est égale à la valeur de référence donnée (il n'y a donc pas de différence).
- ❖ **Hypothèse alternative :** La moyenne de l'échantillon n'est pas égale à la valeur de référence donnée (il y a donc une différence).

2 - Calculer la statistique selon la formule :

Moyenne de l'échantillon

Valeur de référence

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Écart-type

Nombre de cas

NB : dans le cas ou la variance n'est pas connue, on doit l'estimer en utilisant les observations.

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (X_i - \bar{x})^2$$

3 - Calculer degre de liberté : $ddl = n - 1$

Test t

La valeur t et l'hypothèse nulle :

Nous voulons maintenant utiliser le test t pour savoir si nous rejetons ou non l'hypothèse nulle. Pour ce faire, nous pouvons utiliser la valeur t de deux manières. Soit nous lisons la valeur t dite critique dans un tableau, soit nous calculons simplement la valeur p à l'aide de la valeur t.

la méthode de la valeur t critique, que nous pouvons lire dans un tableau. Pour ce faire, nous avons d'abord besoin du tableau des valeurs critiques.

Exemple

nous examinons si un didacticiel de statistiques en ligne nouvellement introduit à l'université a un effet sur les résultats des étudiants aux examens.
La note moyenne à l'examen de statistiques dans une université est de 28 points depuis des années. Ce semestre, un nouveau cours de statistiques en ligne a été introduit. La direction du cours aimerait maintenant savoir si la réussite des études a changé depuis l'introduction du tutoriel de statistiques : le cours de statistiques en ligne a-t-il un **effet positif** sur les résultats aux examens ?

La population considérée est l'ensemble des étudiants qui ont passé l'examen de statistique depuis l'introduction du nouveau didacticiel de statistique. La valeur de référence à comparer est 28.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
28	29	35	37	32	26	37	39	22	29	36	38

Réponse

On note :

- $\bar{x}$: La moyenne de l'échantillon
- μ : La moyenne de la population
- α : niveau de signification (0.05)

- Les hypothèses:
  - H0 : La note moyenne à l'examen de statistiques reste la même (28 points) après l'introduction du tutoriel de statistiques en ligne. ($\bar{x} = \mu$)
  - H1 : La note moyenne à l'examen de statistiques a changé après l'introduction du tutoriel de statistiques en ligne. Plus précisément, nous cherchons à déterminer si la note moyenne est supérieure à 28 points, ce qui signifierait un effet positif du tutoriel en ligne sur les résultats des étudiants. ($\bar{x} > \mu$)

Réponse

Étudiant	Score
1	28
2	29
3	35
4	37
5	32
6	26
7	37
8	39
9	22
10	29
11	36
12	38

Niveau de signification

$\alpha = 0{,}05$

Nombre de valeurs

$n = 12$

Moyenne

$\bar{x} = 32{,}33$

Écart-type

$s = 5{,}47$

Erreur standard de la moyenne

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{5{,}47}{\sqrt{12}} = 1{,}58$$

Valeur t

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x}}} = \frac{32{,}33 - 28}{1{,}58} = 2{,}75$$

Degrés de liberté

$df = n - 1 = 11$

Réponse : lecture de table des valeurs critiques

1−α	75 %	80 %	85 %	90 %	95 %	97,5 %	99 %	99,5 %	99,75 %	99,9 %	99,95 %
k											
1	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	127,3	318,3	636,6
2	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	14,09	22,33	31,60
3	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	7,453	10,21	12,92
4	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	5,598	7,173	8,610
5	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	4,773	5,893	6,869
6	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	4,317	5,208	5,959
7	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,029	4,785	5,408
8	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	3,833	4,501	5,041
9	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	3,690	4,297	4,781
10	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	3,581	4,144	4,587
11	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	3,497	4,025	4,437
12	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,428	3,930	4,318
13	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,372	3,852	4,221

Valeur t critique est égale à : 1.796

Interprétation :

2.75 **>** 1.796 donc on rejete l'hypothèse nulle

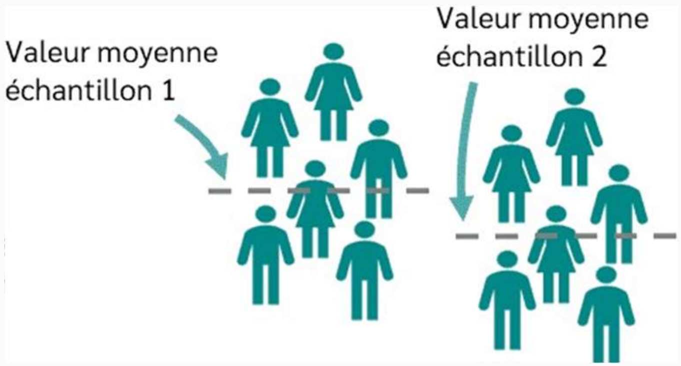
ce qui signifierait un effet positif du tutoriel en ligne sur les résultats des étudiants.

Test t

2) Test t pour les échantillons independants

❖ **Quand utilise-t-on ce test ?**

Supposons que l'on veuille tester s'il existe une différence entre deux groupes de la population, par exemple, s'il existe une différence de salaire entre les hommes et les femmes. Bien sûr, il n'est pas possible de demander à tous les hommes et à toutes les femmes de donner leur salaire, alors nous prenons un échantillon. Nous créons une enquête et l'envoyons au hasard à des personnes. Pour pouvoir avoir un renseignement sur la population à partir de cet échantillon, nous avons besoin du test t indépendant.



Test t

Comment effectuer un test t sur deux échantillons indépendants ?

1 - Formuler les hypotheses :

- **Hypothèse nulle :** Les valeurs moyennes des deux groupes sont égales.
- **Hypothèse alternative :** Les valeurs moyennes des deux groupes ne sont pas égales.

Test t

Comment effectuer un test t sur deux échantillons indépendants ?

2 - Calculer la statistique :

Moyenne échantillon 1

Moyenne de l'échantillon 2

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Écart-type Échantillons 1 et 2

Nombre de cas Échantillon 1 et 2

Le nombre de degrés de liberté est donné par

$$ddl = n_1 + n_2 - 2$$

Exemple

Semestre d'été	Semestre d'hiver
52	53
61	71
40	38
46	34
50	68
56	68
44	46
47	41
70	38
40	23
65	28
38	
68	

Une enseignante souhaite savoir si les résultats des **examens de statistiques** du semestre d'été diffèrent de ceux du semestre d'hiver. À cette fin, elle crée une vue d'ensemble des points obtenus par examen.

Existe-t-il une différence significative entre les résultats des examens du semestre d'été et du semestre d'hiver ?

Réponse

1−α	75 %	80 %	85 %	90 %	95 %	97,5 %	99 %	99,5 %	99,75 %	99,9 %	99,95 %
k											
1	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	127,3	318,3	636,6
2	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	14,09	22,33	31,60
3	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	7,453	10,21	12,92
4	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	5,598	7,173	8,610
5	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	4,773	5,893	6,869
6	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	4,317	5,208	5,959
7	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,029	4,785	5,408
8	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	3,833	4,501	5,041
9	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	3,690	4,297	4,781
10	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	3,581	4,144	4,587
11	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	3,497	4,025	4,437
12	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,428	3,930	4,318
13	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,372	3,852	4,221
14	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,326	3,787	4,140
15	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,286	3,733	4,073
16	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,252	3,686	4,015
17	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,222	3,646	3,965
18	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,197	3,610	3,922
19	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,174	3,579	3,883
20	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,153	3,552	3,850
21	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,135	3,527	3,819
22	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,119	3,505	3,792
23	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,104	3,485	3,767
24	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,091	3,467	3,745

H0 : les moyennes des groupes sont égales
H1 : les moyennes des deux groupes sont différents

	n	Moyenne	Écart-type
Semestre d'été	13	52.077	11.026
Semestre d'hiver	11	46.182	16.708

ddl
22

La valeur de la statistique de test : **t = 1**

La valeur de la t $_{\text{critique}}$ = 2.064

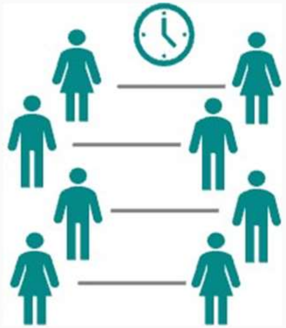
Donc puisque valeur de t est inferieur au valeur critique, on accepte H0.
Cad la différence entre les résultats des examens du semestre d'été et du semestre d'hiver est significative, et pas due au hasard.

Test t

3) Test t pour les échantillons appariés

❖ **Quand utilise-t-on ce test ?**

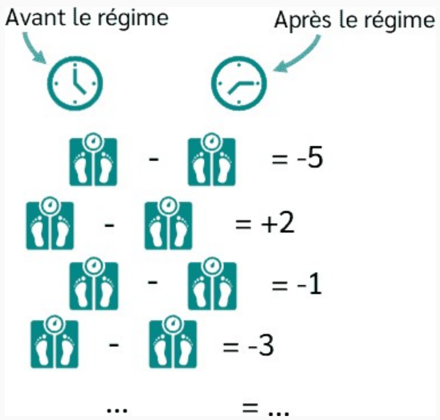
Le test t pour échantillons appariés est nécessaire chaque fois qu'une enquête est menée auprès d'un même groupe ou d'un même échantillon à deux moments différents.



❖ Exemple :

Nous voulons connaître l'efficacité d'un régime alimentaire. Pour ce faire, nous pesons 30 personnes avant le régime et exactement les mêmes personnes après le régime.

Nous pouvons maintenant voir pour chaque personne quelle est la différence de poids entre avant et après le régime. Avec un test t dépendant, nous pouvons maintenant vérifier s'il y a une différence significative.



Test t

Comment effectuer un test t sur deux échantillon appariés?

1 - Formuler les hypotheses :

- **Hypothèse nulle :** La moyenne de la différence entre les paires est nulle.
- **Hypothèse alternative :** La moyenne de la différence entre les paires n'est pas nulle.

2 - Calculer la statistique selon la formule :

Moyenne de la différence

$$t = \frac{\overline{x_d} - 0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Écart-type

Nombre de cas

3 - Calculer degre de liberté :

$$ddl = n - 1$$

Exemple

on examine si les vacances d'été ont un effet sur la condition physique des étudiants.
La question est donc la suivante : les vacances d'été ont-elles un effet sur la condition physique des étudiants en statistiques ? À cette fin, un test de condition physique est effectué une fois avant et une fois après les vacances pour 10 étudiants en statistiques.

Etudiant	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Points avant les vacances	60	70	40	41	40	40	45	48	30	50
Points après les vacances	61	71	38	39	38	33	55	56	38	68

Réponse

1	1	-2	-2	-2	-7	10	8	8	18

Les hypothèses :

- H0 :
Les vacances d'été n'ont aucun effet sur la condition physique des étudiants en statistiques (μ_avant = μ_après)
- **H1** :
Les vacances d'été ont un effet sur la condition physique des étudiants en statistiques (μ_avant ≠ μ_après)

Niveau de signification

α = 0.05

La taille

N = 10

Moyenne

$\bar{d}$ = 3.3

Ecart-type

s_d = 7.498

Valeur t

$t = \frac{\bar{d}}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}}$ = 1.39

Degre de liberté

df = 9

Exemple

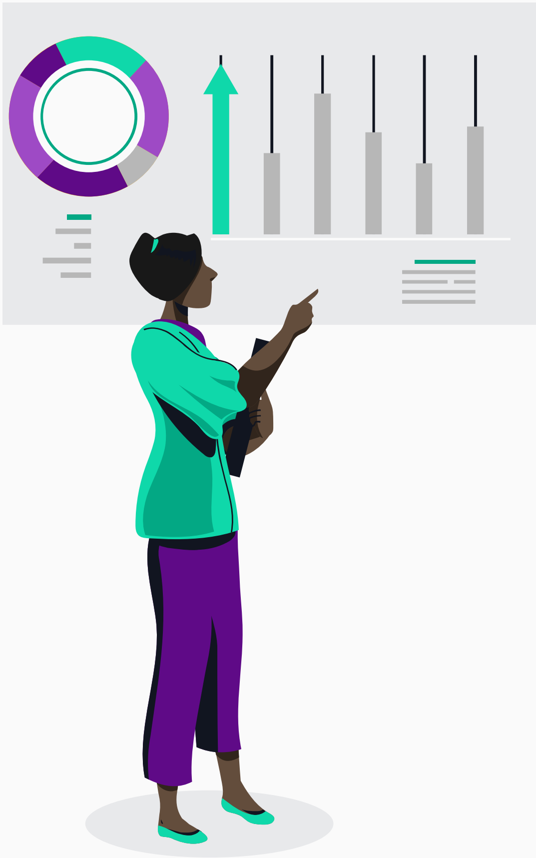
$1-\alpha$	75 %	80 %	85 %	90 %	95 %	97,5 %	99 %	99,5 %	99,75 %	99,9 %	99,95 %
k											
1	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	127,3	318,3	636,6
2	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	14,09	22,33	31,60
3	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	7,453	10,21	12,92
4	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	5,598	7,173	8,610
5	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	4,773	5,893	6,869
6	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	4,317	5,208	5,959
7	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,029	4,785	5,408
8	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	3,833	4,501	5,041
9	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	3,690	4,297	4,781
10	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	3,581	4,144	4,587
11	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	3,497	4,025	4,437
12	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,428	3,930	4,318
13	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,372	3,852	4,221
14	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,326	3,787	4,140

Valeur t critique est égale à : 2.262

Interprétation :
T.calculé = 1.39 **<** T.critique= 2.262

Donc , on accepte la H0

C.a.d que les vacances d'été n'ont aucun effet sur la condition physique des etudiants en statistique.



Test de Fisher

- Définition
- Expliquer comment effectuer le test
- Exemple

Définition

- **Le test de Fisher d'égalité de deux variances, également connu sous le nom de test F pour les variances, est un test statistique qui vise à déterminer si deux échantillons indépendants ont des variances égales ou différentes.**
- **Il ne compare que deux groupes à la fois.**

- **Hypothèse nulle (H0) : H0 affirme que les deux groupes ont des variances égales.**

- **Hypothèse alternative (H1) : H1 indique que les deux groupes ont des variances différentes.**

Test de Fisher

Avec les memes notations que précédement, on teste H0 : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ contre H1 : $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ au risque α .

- La statistique de Test est définie par : $Z = \frac{\hat{s}_1^2}{\hat{s}_2^2}$ avec $\hat{s}_1^2 = \frac{n_1 s_1^2}{n_1 - 1}$

- On rejette H0 au risque (α) si $z \notin [F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1), F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)]$

C.a.d que on rejette H0 si la réalisation de la statistique de test Z est soit plus grande que le quantile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ soit plus petite que le quantile $\frac{\alpha}{2}$ de la loi de fisher.

Remarque :

$$F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1) = \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2 - 1, n_1 - 1)}$$

Exemple

Une entreprise fabrique du fromage blanc qu'elle condionne en pots de 750 grammes.
Elle dispose pour cela de deux lignes de fabrication.
Sur la premiere ligne, on prélève un échantillon de 16 pots sur lequel l'écart-type des masses est de 2.3 g.
Sur la seconde ligne, on prélève un échantillon de 21 pots sur lequel l'écart-type des masses est de 1.4g.

Au vu de cet échantillon et au risque de 5% , peut-on affirmer que la variance des masses des pots de fromage blanc est la meme sur les deux lignes ?

https://www.supagro.fr/cnam-lr/statnet/tables.htm

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	22	24	26	28	30	35	40	45	50	60	8
1	647.79	799.48	864.15	899.60	921.83	937.11	948.20	956.64	963.28	968.63	973.03	976.72	979.84	982.55	984.87	986.91	988.72	990.35	991.80	993.08	995.35	997.27	998.84	1000.24	1001.40	1003.79	1005.60	1006.99	1008.10	1009.79	101
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41	39.41	39.42	39.43	39.43	39.44	39.44	39.44	39.45	39.45	39.45	39.46	39.46	39.46	39.46	39.47	39.47	39.48	39.48	39.48	39
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.37	14.34	14.30	14.28	14.25	14.23	14.21	14.20	14.18	14.17	14.14	14.12	14.11	14.09	14.08	14.06	14.04	14.02	14.01	13.99	13
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.79	8.75	8.72	8.68	8.66	8.63	8.61	8.59	8.58	8.56	8.53	8.51	8.49	8.48	8.46	8.43	8.41	8.39	8.38	8.36	8.
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.57	6.52	6.49	6.46	6.43	6.40	6.38	6.36	6.34	6.33	6.30	6.28	6.26	6.24	6.23	6.20	6.18	6.16	6.14	6.12	6.
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.41	5.37	5.33	5.30	5.27	5.24	5.22	5.20	5.18	5.17	5.14	5.12	5.10	5.08	5.07	5.04	5.01	4.99	4.98	4.96	4.
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.71	4.67	4.63	4.60	4.57	4.54	4.52	4.50	4.48	4.47	4.44	4.41	4.39	4.38	4.36	4.33	4.31	4.29	4.28	4.25	4.
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.24	4.20	4.16	4.13	4.10	4.08	4.05	4.03	4.02	4.00	3.97	3.95	3.93	3.91	3.89	3.86	3.84	3.82	3.81	3.78	3.
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.91	3.87	3.83	3.80	3.77	3.74	3.72	3.70	3.68	3.67	3.64	3.61	3.59	3.58	3.56	3.53	3.51	3.49	3.47	3.45	3.
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.66	3.62	3.58	3.55	3.52	3.50	3.47	3.45	3.44	3.42	3.39	3.37	3.34	3.33	3.31	3.28	3.26	3.24	3.22	3.20	3.
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.47	3.43	3.39	3.36	3.33	3.30	3.28	3.26	3.24	3.23	3.20	3.17	3.15	3.13	3.12	3.09	3.06	3.04	3.03	3.00	2.
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.32	3.28	3.24	3.21	3.18	3.15	3.13	3.11	3.09	3.07	3.04	3.02	3.00	2.98	2.96	2.93	2.91	2.89	2.87	2.85	2.
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.20	3.15	3.12	3.08	3.05	3.03	3.00	2.98	2.96	2.95	2.92	2.89	2.87	2.85	2.84	2.80	2.78	2.76	2.74	2.72	2.
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.09	3.05	3.01	2.98	2.95	2.92	2.90	2.88	2.86	2.84	2.81	2.79	2.77	2.75	2.73	2.70	2.67	2.65	2.64	2.61	2.
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	3.01	2.96	2.92	2.89	2.86	2.84	2.81	2.79	2.77	2.76	2.73	2.70	2.68	2.66	2.64	2.61	2.59	2.56	2.55	2.52	2.
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.93	2.89	2.85	2.82	2.79	2.76	2.74	2.72	2.70	2.68	2.65	2.63	2.60	2.58	2.57	2.53	2.51	2.49	2.47	2.45	2.
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.87	2.82	2.79	2.75	2.72	2.70	2.67	2.65	2.63	2.62	2.59	2.56	2.54	2.52	2.50	2.47	2.44	2.42	2.41	2.38	2.
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.81	2.77	2.73	2.70	2.67	2.64	2.62	2.60	2.58	2.56	2.53	2.50	2.48	2.46	2.44	2.41	2.38	2.36	2.35	2.32	2.
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.76	2.72	2.68	2.65	2.62	2.59	2.57	2.55	2.53	2.51	2.48	2.45	2.43	2.41	2.39	2.36	2.33	2.31	2.30	2.27	2.
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.72	2.68	2.64	2.60	2.57	2.55	2.52	2.50	2.48	2.46	2.43	2.41	2.39	2.37	2.35	2.31	2.29	2.27	2.25	2.22	2.
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.68	2.64	2.60	2.56	2.53	2.51	2.48	2.46	2.44	2.42	2.39	2.37	2.34	2.33	2.31	2.27	2.25	2.23	2.21	2.18	2.
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.65	2.60	2.56	2.53	2.50	2.47	2.45	2.43	2.41	2.39	2.36	2.33	2.31	2.29	2.27	2.24	2.21	2.19	2.17	2.14	2.
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.62	2.57	2.53	2.50	2.47	2.44	2.42	2.39	2.37	2.36	2.33	2.30	2.28	2.26	2.24	2.20	2.18	2.15	2.14	2.11	2.
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.59	2.54	2.50	2.47	2.44	2.41	2.39	2.36	2.35	2.33	2.30	2.27	2.25	2.23	2.21	2.17	2.15	2.12	2.11	2.08	2.
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.56	2.51	2.48	2.44	2.41	2.38	2.36	2.34	2.32	2.30	2.27	2.24	2.22	2.20	2.18	2.15	2.12	2.10	2.08	2.05	2.
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.54	2.49	2.45	2.42	2.39	2.36	2.34	2.31	2.29	2.28	2.24	2.22	2.19	2.17	2.16	2.12	2.09	2.07	2.05	2.03	1.
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57	2.51	2.47	2.43	2.39	2.36	2.34	2.31	2.29	2.27	2.25	2.22	2.19	2.17	2.15	2.13	2.10	2.07	2.05	2.03	2.00	1.
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.37	2.34	2.32	2.29	2.27	2.25	2.23	2.20	2.17	2.15	2.13	2.11	2.08	2.05	2.03	2.01	1.98	1.
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.48	2.43	2.39	2.36	2.32	2.30	2.27	2.25	2.23	2.21	2.18	2.15	2.13	2.11	2.09	2.06	2.03	2.01	1.99	1.96	1.
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34	2.31	2.28	2.26	2.23	2.21	2.20	2.16	2.14	2.11	2.09	2.07	2.04	2.01	1.99	1.97	1.94	1.
32	5.53	4.15	3.56	3.22	3.00	2.84	2.71	2.62	2.54	2.48	2.43	2.38	2.34	2.31	2.28	2.25	2.22	2.20	2.18	2.16	2.13	2.10	2.08	2.06	2.04	2.00	1.98	1.95	1.93	1.91	1.
34	5.50	4.12	3.53	3.19	2.97	2.81	2.69	2.59	2.52	2.45	2.40	2.35	2.31	2.28	2.25	2.22	2.20	2.17	2.15	2.13	2.10	2.07	2.05	2.03	2.01	1.97	1.95	1.92	1.90	1.88	1.
36	5.47	4.09	3.50	3.17	2.94	2.78	2.66	2.57	2.49	2.43	2.37	2.33	2.29	2.25	2.22	2.20	2.17	2.15	2.13	2.11	2.08	2.05	2.03	2.00	1.99	1.95	1.92	1.90	1.88	1.85	1.
38	5.45	4.07	3.48	3.15	2.92	2.76	2.64	2.55	2.47	2.41	2.35	2.31	2.27	2.23	2.20	2.17	2.15	2.13	2.11	2.09	2.05	2.03	2.00	1.98	1.96	1.93	1.90	1.87	1.85	1.82	1.

Exemple

H0: La variance des masses des pots de fromage blanc est la même sur les deux lignes de production.

H1: La variance des masses des pots de fromage blanc n'est pas la même sur les sur les deux lignes de production.

Sous H0, $$f_{calc} = \frac{\frac{16}{15} \times 2,3^2}{\frac{21}{20} \times 1,4^2} = 2,74$$ $f_{(15;20);0,025} = 0,36$ et $f_{(15;20);0,975} = 2,57$

Puisque $f_{calc} > f_{(15,20)0.975}$:

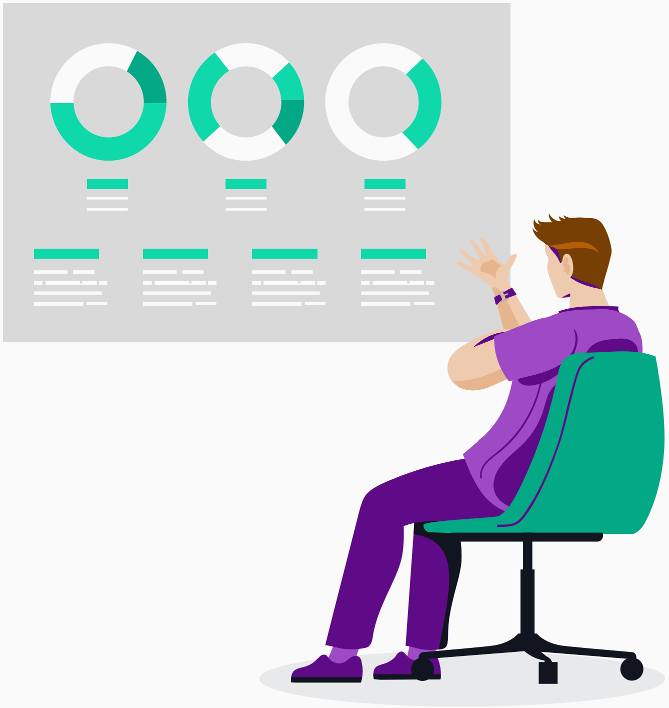
✓ **donc on rejette H0 au risque 5%.**

Que faire si j'ai plus de deux groupes ?

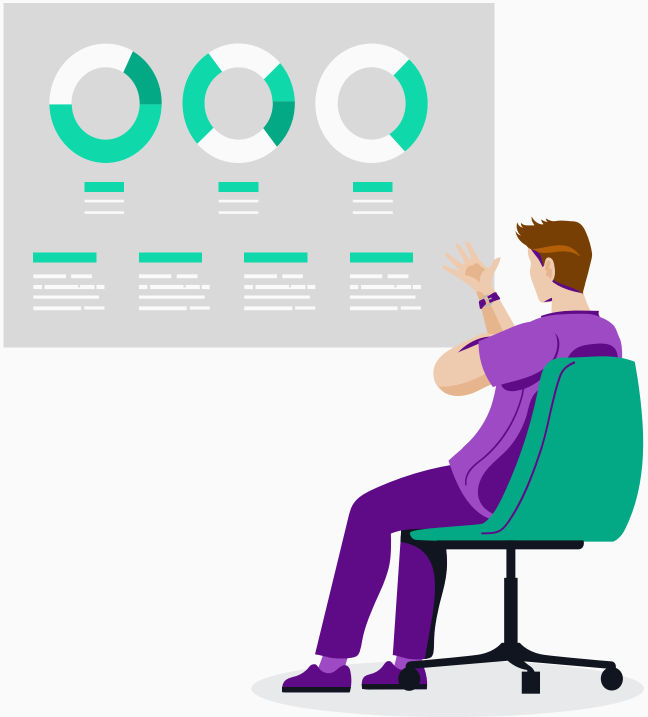
Vous ne devez pas utiliser le test de Student, mais une méthode de comparaisons multiples, comme l'analyse de la variance (ANOVA)

Tests non Paramétriques

- Test Chi-carre
- Test de Wilcoxon
- Test de Mann-Whitney



Test Chi-carre



Définition

- Le test du chi-carré (χ^2) est l'un des tests non paramétriques les plus couramment utilisés. Il est utilisé pour déterminer si les fréquences observées d'une variable catégorielle corresponde nt aux fréquences attendues sous une hypothèse nulle.

- Le test du chi carré est souvent utilisé pour évaluer l'indépendance entre deux variables catégorielles

Test χ^2

Comment effectuer un test chi-carré?

1 - Formuler les hypotheses :

- **Hypothèse nulle :** Les variables X et Y sont indépendantes
- **Hypothèse alternative :** Les variables X et Y ne sont pas indépendantes

2 - Calculer la statistique selon la formule :

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\overset{\text{Observed frequency}}{O_k} - \overset{\text{Expected frequency}}{E_k})^2}{E_k}$$

O : est la fréquence observée.
E : est la fréquence attendue. *[(Total des ligne) * (Total des colonne)] / Total général]*

3 - Calculer degre de liberté :

$$\{\text{df}\} = (r-1) \times (c-1)$$

Test χ^2

Comment effectuer un test chi-carré ?

- Consultation de la table de la distribution du chi-carré

  Vous consultez une table de la distribution du chi-carré pour obtenir la valeur critique du chi-carré en fonction de vos degrés de liberté et de votre niveau de signification (α).

- Comparaison de la statistique du chi-carré et de la valeur critique

  - Si X^2 > valeur critique : Vous rejetez l'hypothèse nulle (H0) et concluez qu'il y a une association significative entre les variables.
  - Si X^2 < valeur critique : Vous ne rejetez pas l'hypothèse nulle (H0) et concluez qu'il n'y a pas d'association significative entre les variables.

Exemple

Supposons que nous collectons des données pour 600 personnes dans notre cinéma. Pour chaque personne, nous connaissons le type de film visionné et l'achat éventuel de snacks.

Type de film	Snacks	Pas de snack
Action	50	75
Comédie	125	175
Familial	90	30
Horreur	45	10

Question : Existe-t-il une corrélation entre le type de film et les achats de snacks ?

Réponse

- **Formulation des hypothèses**

  - H0 : Les deux variables sont indépendantes, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'association significative entre elles.
  - H1 : Les deux variables ne sont pas indépendantes, ce qui signifie qu'il y a une association significative entre elles.

- **Calcul de la statistique du chi-carré**

  - Trouver des dénombrements attendus

Par exemple, pour la cellule Action-Snacks, nous avons :

$$\frac{125 \times 310}{600} = \frac{38,750}{600} = 65$$

Réponse

Type de film	Snacks	Pas de snack	Total de la ligne
Action	50 **64,58**	75 **60,42**	125
Comédie	125 **155**	175 **145**	300
Familial	90 **62**	30 **58**	120
Horreur	45 **28,42**	10 **26,58**	55
Total de la colonne	310	290	Total général = 600

Réponse

❖ Effectuer le test : La statistique du chi-carré X^2 est calculée à l'aide de la formule : $X^2 = \Sigma (O - E)^2 / E$

Type de film	Snack	Pas de snack
Action	Observé : 50 **Attendu : 64,58**	Observé : 75 **Attendu : 60,42**
	Différence : 50 – 64,58 = -14,58 Différence au carré : 212,67 Divisée par la valeur attendue : 212,67/64,58 = 3,29	Différence : 75 – 60,42 = 14,58 Différence au carré : 212,67 Divisée par la valeur attendue : 212,67/60,42 = 3,52
Comédie	Observé : 125 **Attendu : 155**	Observé : 175 **Attendu : 145**
	Différence : 125 – 155 = -30 Différence au carré : 900 Divisée par la valeur attendue : 900/155 = 5,81	Différence : 175 – 145 = 30 Différence au carré : 900 Divisée par la valeur attendue : 900/145 = 6,21

Réponse

Familial	Observé : 90 **Attendu : 62**	Observé : 30 **Attendu : 58**
	Différence : 90 – 62 = 28 Différence au carré : 784 Divisée par la valeur attendue : 784/62 = 12,65	Différence : 30 – 58 = -28 Différence au carré : 784 Divisée par la valeur attendue : 784/58 = 13,52
Horreur	Observé : 45 **Attendu : 28,42**	Observé : 10 **Attendu : 26,58**
	Différence : 45 – 28,42 = 16,58 Différence au carré : 275,01 Divisée par la valeur attendue : 275,01/28,42 = 9,68	Différence : 10 – 26,58 = -16,58 Différence au carré : 275,01 Divisée par la valeur attendue : 275,01/26,58 = 10,35

Enfin, pour obtenir notre statistique de test, nous additionnons les nombres dans la ligne finale pour chaque cellule $X^2 = 3,29+3,52+5,81+6,21+12,65+13,52+9,68+10,35=65,03$

Réponse

- **Calcul de degrés de liberté**

$$Df = (4-1)\times(2-1) = 3\times1 = 3$$

- **Consultation de la table de la distribution du chi-carré**

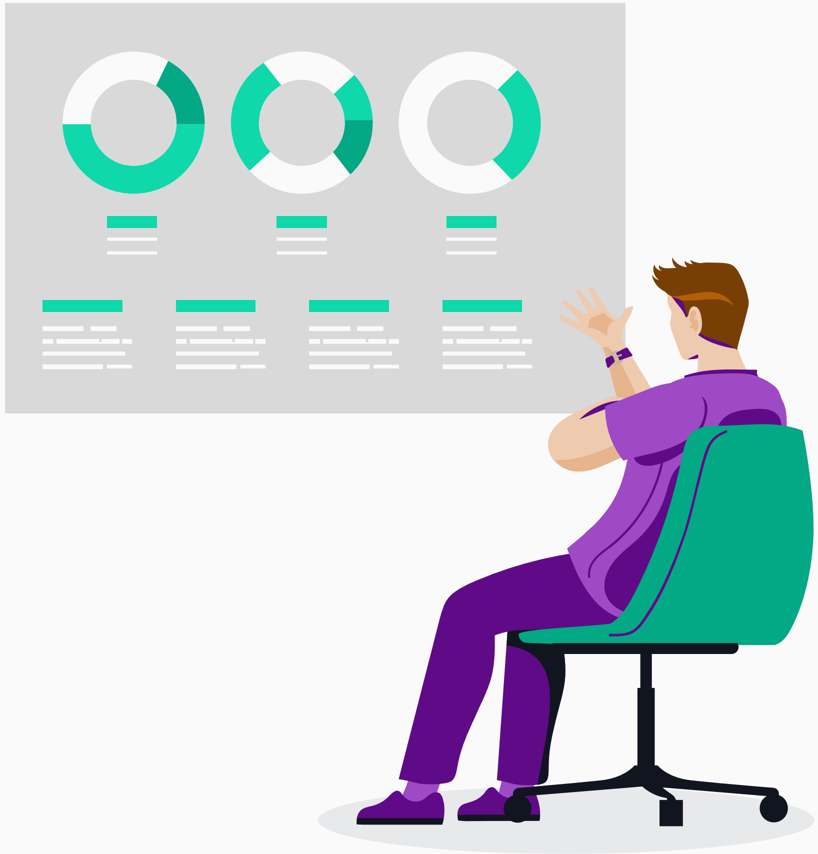
Tableau de distribution du khi-deux

Significance level Alpha	0.995	0.975	0.2	0.1	0.05	0.025	0.02	0.01	0.005
Degrés de liberté									
1	0	0.001	1.642	2.706	3.841	5.024	5.412	6.635	7.879
2	0.01	0.051	3.219	4.605	5.991	7.378	7.824	9.21	10.597
3	0.072	0.216	4.642	6.251	7.815	9.348	9.837	11.345	12.838
4	0.207	0.484	5.989	7.779	9.488	11.143	11.668	13.277	14.86
5	0.412	0.831	7.289	9.236	11.07	12.833	13.388	15.086	16.75
6	0.676	1.237	8.558	10.645	12.592	14.449	15.033	16.812	18.548
7	0.989	1.69	9.803	12.017	14.067	16.013	16.622	18.475	20.278
8	1.344	2.18	11.03	13.362	15.507	17.535	18.168	20.09	21.955
9	1.735	2.7	12.242	14.684	16.919	19.023	19.679	21.666	23.589

- ✓ la valeur critique du chi-carré avec α = 0,05 et trois degrés de liberté est de 7,815.
- ✓ Puisque **65,03 > 7,815** nous rejetons l'idée selon laquelle le type de film et les achats de snacks sont indépendants.
- ✓ Nous en concluons qu'il *existe* une certaine relation entre le type de film et les achats de snacks.

Test de Wilcoxon

Test des rangs signés de Wilcoxon



Définition

Le test de Wilcoxon Signé est un test statistique non paramétrique utilisé pour comparer les différences entre deux échantillons appariés.
Il est souvent utilisé pour évaluer l'effet d'un traitement ou d'une intervention en comparant les mesures avant et après.

- le test des rangs signés de Wilcoxon est une alternative non-paramétrique au test de Student pour des échantillons appariés.
- Ce test compare les différences entre les valeurs appariées de deux groupes

Test rangs signés de Wilcoxon

Comment effectuer un test rangs signés de Wilcoxon ?

➢ **Formuler les hypotheses :**

❖ **Hypothèse nulle :** il n'y a pas de différence significative
❖ **Hypothèse alternative :**il y a une différence significative

➢ **Calculer la statistique**

Pour calculer le test de Wilcoxon pour deux échantillons dépendants, on calcule d'abord la différence entre les valeurs dépendantes. Une fois les différences calculées, les valeurs absolues des différences sont utilisées pour former les classements. Il est important de noter le signe original des différences .

Test rangs signés de Wilcoxon

Temps de réaction matin	Temps de réaction soir
34	45
36	33
41	35
39	43
44	42
37	42

différence (matin - soir)	Rang de |différence|
-11	6 (-)
3	3
6	5
-4	2 (-)
2	1
-5	4 (-)
	$T^+ = 9$ & $T^- = 12$

Respectivement, la somme des rangs positifs et négatifs.

Dans la dernière étape, les sommes des rangs sont formées, qui sont dérivées d'une différence positive et d'une différence négative. La statistique de test *W* est alors calculée à partir de la plus petite valeur de *T+* et de *T-*.

$$W = min(T^+, T^-)$$

Dans cet exemple, la statistique de test W donne 9

$$W = min(9, 12) = 9$$

Test rangs signés de Wilcoxon

- **Comparer la statistique de test aux valeurs critiques**

En utilisant des tables de valeurs critiques ou des logiciels statistiques, compare la statistique de test calculée à un seuil de signification. Si la statistique de test est plus grande que la valeur critique, on rejeter l'hypothèse nulle.

- **Interpréter les résultats**

Si on rejeter l'hypothèse nulle, cela signifie qu'il y a une différence significative entre les deux échantillons. Si on n'as pas rejeter l'hypothèse nulle, cela suggère qu'il n'y a pas de différence significative.

Exemple

On dispose 13 clônes de Peuplier dont on a mesuré la concentation en Aluminium dans le bois (µg/g) a deux instants différents (Août et Novembre) au sein d'une zone polluée.

Question : Peut-on observer que la concentration en Aluminium est plus forte en Novembre qu'en Août dans le bois de Peuplie ?

Clône	A	N
1	8.1	11.2
2	10.0	16.3
3	16.5	15.3
4	13.6	15.6
5	9.5	10.5
6	8.3	15.5
7	18.3	12.7
8	13.3	11.1
9	7.9	19.9
10	8.1	20.4
11	8.9	14.2
12	12.6	12.7
13	13.4	36.8

Réponse

Étape 1 : Formulation des Hypothèses

- **H0 (Hypothèse nulle)** :la concentration en Aluminium reste inchangée entre Août et Novembre .
- **H1 (Hypothèse alternative)** : la concentration en Aluminium est plus forte en Novembre qu'en Août .

Étape 2 : Calcul de la Statistique du Test (W)

D'aprés le calcul du rang on trouver

$W_{obs}(+) = \mathbf{75}$

$W_{obs}(-) = \mathbf{16}$

Donc W=min(W(+),W(-))=16

Clône	A	N	N-A	|N-A|	Rang	Rang+	Rang-
1	8.1	11.2	3.1	3.1	6	6	
2	10.0	16.3	6.3	6.3	9	9	
3	16.5	15.3	-1.2	1.2	3		3
4	13.6	15.6	2	2	4	4	
5	9.5	10.5	1	1	2	2	
6	8.3	15.5	7.2	7.2	10	10	
7	18.3	12.7	-5.6	5.6	8		8
8	13.3	11.1	-2.2	2.2	5		5
9	7.9	19.9	12	12	11	11	
10	8.1	20.4	12.3	12.3	12	12	
11	8.9	14.2	5.3	5.3	7	7	
12	12.6	12.7	0.1	0.1	1	1	
13	13.4	36.8	23.4	23.4	13	13	

Réponse

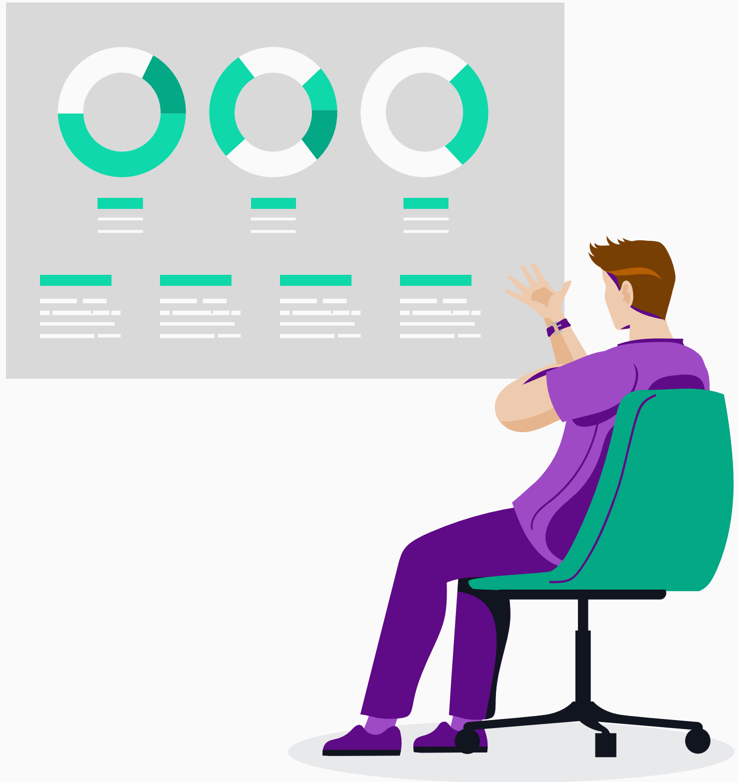
Étape 3 : Consultation de la table des valeurs critiques

n	Two-Tailed Test		One-Tailed Test	
	α = .05	α = .01	α = .05	α = .01
5	--	--	0	--
6	0	--	2	--
7	2	--	3	0
8	3	0	5	1
9	5	1	8	3
10	8	3	10	5
11	10	5	13	7
12	13	7	17	9
13	17	9	21	12
14	21	12	25	15
15	25	15	30	19
16	29	19	35	23
17	34	23	41	27
18	40	27	47	32
19	46	32	53	37
20	52	37	60	43
21	58	42	67	49

✓ D'aprés la table **W**$_{critique}$ = 21 > **W**$_{obs}$ = 16

❖ **Conclusion** : au risque de 5%, on valide notre hypothèse H0 de départ et on peut affirmer que il n'y a pas de différence significative

Test de Mann-Whitney



Définition

- Le test U de Mann-Whitney peut être utilisé pour vérifier s'il existe une différence entre deux échantillons (groupes).
- Comparer la distribution de deux échantillons non appariés pour une variable quantitative
- Le test U de Mann-Whitney est donc le correspondant non paramétrique du test t pour échantillons indépendants ; il est soumis à des hypothèses moins strictes que le test t. Par conséquent, le test U de Mann-Whitney est toujours utilisé lorsque la condition de distribution normale du test t n'est pas remplie.

Test de Mann-Whitney

Comment effectuer un test U de Mann-Whitney ?

1 - Formuler les hypotheses :

- **Hypothèse nulle :** il n'y a pas de différence entre les deux groupes de la population.
- **Hypothèse alternative :** il existe une différence entre les deux groupes de la population.

2 - Calculer la statistique de test U :

Test de Mann-Whitney

Gender	Reaktionszeit	Rang
female	34	2
female	36	4
female	41	7
female	43	9
female	44	10
female	37	5
male	45	11
male	33	1
male	35	3
male	39	6
male	42	8

Calculation of the rank sums

$$T_1 = 2 + 4 + 7 + 9 + 10 + 5 = 37$$

$$T_2 = 11 + 1 + 3 + 6 + 8 = 29$$

Female

Number of cases $n_1 = 6$ Rank sum $T_1 = 37$

$$U_1 = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_1 \cdot (n_1 + 1)}{2} - T_1$$
$$= 6 \cdot 5 + \frac{6 \cdot (6 + 1)}{2} - 37$$
$$= 14$$

Male

Number of cases $n_2 = 5$ Rank sum $T_2 = 29$

$$U_2 = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_2 \cdot (n_2 + 1)}{2} - T_2$$
$$= 6 \cdot 5 + \frac{5 \cdot (5 + 1)}{2} - 29$$
$$= 16$$

U-Wert

$$U = min(U_1, U_2) = min(14, 16) = 14$$

Exemple

On dispose de deux échantillons (mâles et femelles) de Souris, dont on a mesuré le poids (g) chez l'individu adulte

femelle	24	30	30	30	38	40
mâle	20	24	26	28		

Question : Le poids de souris mâles (M) est-il superieur de celle des souris femelles(F)?

Réponse

Étape 1 : Formulation des Hypothèses

- **H0 (Hypothèse nulle)** : mâles et femelles ont le même poids
- **H1 (Hypothèse alternative)** : Le poids des mâles (M) est superieur de celle des femelles(F)

Étape 2 : Calcul de la Statistique du Test (U)

Poids	20	24	26	28	30	38	40
M	1	1	1	1			
F		1			3	1	1
M+F	1	2	1	1	3	1	1
Rang	1	2 3	4	5	6 7 8	9	10
Rang moyen	1	2.5	4	5	7	9	10
Rang(M)	1	2.5	4	5			
Rang(F)		2.5			21	9	10

$T(M) = 1 + 2.5 + 4 + 5 = \mathbf{12.5}$

$T(F) = 2.5 + 21 + 9 + 10 = \mathbf{42.5}$

$U(M) = n(M)*n(F) + [n(M)*(n(M) + 1)/2] – T(M) = 4*6 + (4*5)/2 – 12.5 = \mathbf{21.5}$

$U(F) = n(M)*n(F) + [n(F)*(n(F) + 1)/2] – T(F) = 4*6 + (6*7)/2 – 42.5 = \mathbf{2.5}$

U = min(U(M),U(F)) =2,5

Réponse

Étape 3 : lecture de table des valeurs critiques:

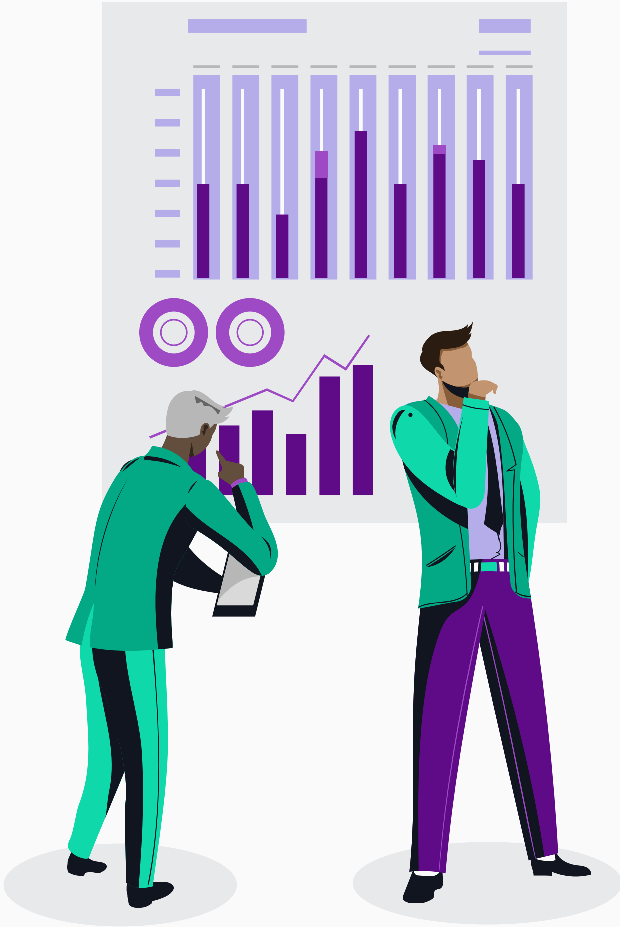
Nondirectional α=.05 (Directional α=.025)

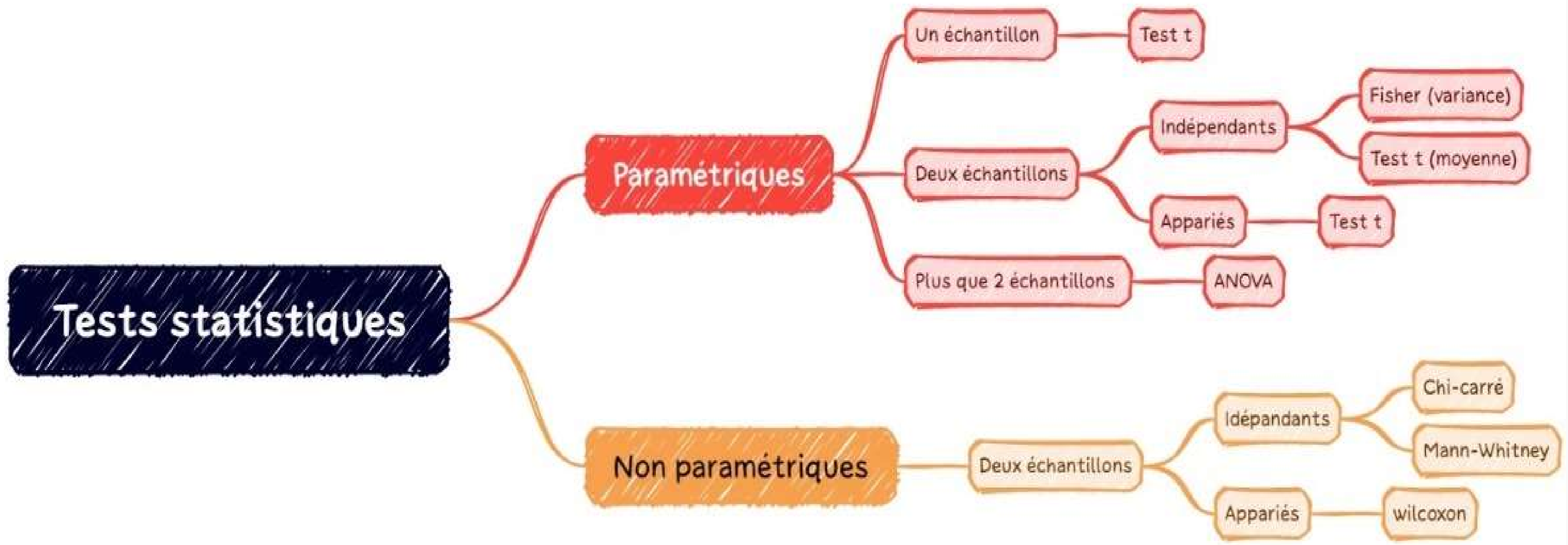
n_1 \ n_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	-	-	-	-	-	-	-	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2
3	-	-	-	-	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8
4	-	-	-	0	1	$\boxed{2}$	3	4	4	5	6	7	8	9	10	11	11	12	13	13
5	-	-	0	1	2	3	5	6	7	8	9	11	12	13	14	15	17	18	19	20
6	-	-	1	$\boxed{2}$	3	5	6	8	10	11	13	14	16	17	19	21	22	24	25	27
7	-	-	1	3	5	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
8	-	0	2	4	6	8	10	13	15	17	19	22	24	26	29	31	34	36	38	41
9	-	0	2	4	7	10	12	15	17	21	23	26	28	31	34	37	39	42	45	48
10	-	0	3	5	8	11	14	17	20	23	26	29	33	36	39	42	45	48	52	55
11	-	0	3	6	9	13	16	19	23	26	30	33	37	40	44	47	51	55	58	62
12	-	1	4	7	11	14	18	22	26	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65	69
13	-	1	4	8	12	16	20	24	28	33	37	41	45	50	54	59	63	67	72	76
14	-	1	5	9	13	17	22	26	31	36	40	45	50	55	59	64	67	74	78	83
15	-	1	5	10	14	19	24	29	34	39	44	49	54	59	64	70	75	80	85	90
16	-	1	6	11	15	21	26	31	37	42	47	53	59	64	70	75	81	86	92	98
17	-	2	6	11	17	22	28	34	39	45	51	57	63	67	75	81	87	93	99	105
18	-	2	7	12	18	24	30	36	42	48	55	61	67	74	80	86	93	99	106	112
19	-	2	7	13	19	25	32	38	45	52	58	65	72	78	85	92	99	106	113	119
20	-	2	8	14	20	27	34	41	48	55	62	69	76	83	90	98	105	112	119	127

Alors
Umin =2,5 > Useuil = 2

Conclusion : on rejette H0 et donc on peut conclure, à partir des distributions observés au sein de nos deux échantillons, que les souris mâles et les souris femelles sont différentes en terme de poids.

Résumé




Tests statistiques
Paramétriques
Un échantillon
Test t
Deux échantillons
Indépendants
Fisher (variance)
Test t (moyenne)
Appariés
Test t
Plus que 2 échantillons
ANOVA
Non paramétriques
Deux échantillons
Idépandants
Chi-carré
Mann-Whitney
Appariés
wilcoxon

Merci