

Recuit Simulé



Réalisé par

BEN JAAFAR Chaima

OUAATOU Fatima

BOUSSELHAM Oumaima



Encadré par

Pr OUAARAB Aziz

Plan

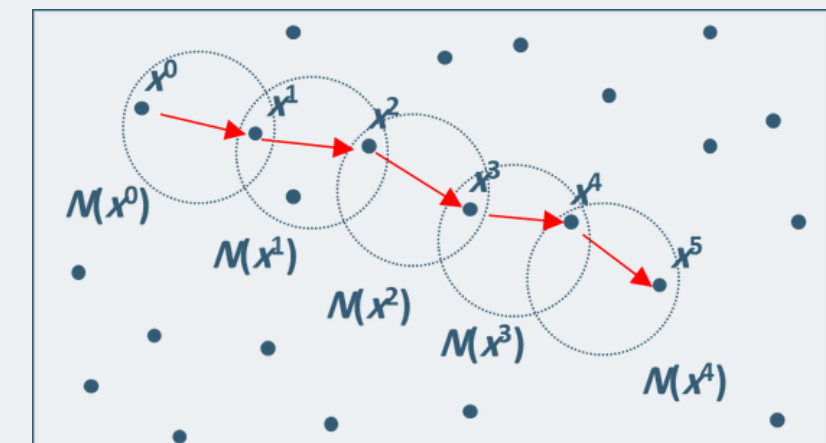
- Introduction
- C'est quoi recuit simulé ?
- Inspiration de recuit simulé
- Principes du recuit simulé
 1. Solution initiale
 2. Température initiale
 3. Itérations
 4. Critères d'Arrêt
- Intensification et Diversification
- Applications dans la Vie Réelle
- Conclusion
- Implémentation
- Références

Introduction

L'optimisation combinatoire représente un défi majeur dans de nombreux domaines, où l'objectif est de trouver la meilleure solution parmi un ensemble fini de choix possibles. Ces problèmes se caractérisent par leur complexité, souvent exprimée par un espace de recherche discret où chaque point correspond à une combinaison spécifique de décisions ou de variables. Résoudre ces problèmes implique la recherche de l'optimum d'une fonction dans cet espace, et cette quête peut être considérablement ardue en raison du nombre exponentiel de solutions potentielles.

Les approches "trajectoire" émergent comme une famille de métaheuristiques particulièrement puissantes dans le contexte de l'optimisation combinatoire. Plutôt que d'explorer de manière exhaustive tout l'espace de recherche, ces méthodes se concentrent sur la recherche d'une solution optimale en suivant une trajectoire spécifique à travers cet espace.

Parmi ces métaheuristiques basées sur la trajectoire, le recuit simulé.



C'est quoi recuit simulé ?

- La méthode de “recuit simulé” ou simulated annealing est un algorithme d’optimisation souvent utilisé pour résoudre des problèmes d’optimisation combinatoire.
- Elle a été mise au point par trois chercheurs de la société IBM, S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt et M.P. Vecchi en 1983 (première méta-heuristique qui a été proposée).
- Pour éviter le piège des minima locaux, accepter sous certaines conditions de se déplacer d'une solution s à une solution voisine s' dont la qualité décroît.

C'est quoi recuit simulé ?

- RS simule une opération de "recuit". le terme « recuit » correspond à un réchauffement suivi d'un refroidissement lent.
- RS introduit un paramètre de température qui est ajusté au cours de la recherche, permettant ainsi d'explorer l'espace des solutions de manière plus flexible. En ajustant la température, le recuit simulé peut accepter des solutions de moindre qualité au début de l'exploration, ce qui aide à éviter de rester bloqué dans des optima locaux.

C'est quoi recuit simulé ?

- L'algorithme du recuit simulé (SA) se déroule en plusieurs itérations à partir d'une solution initiale x_0 .
- À chaque itération, une solution voisine x' est générée de manière aléatoire.
- La solution voisine qui améliore la fonction de coût est toujours acceptée.
- Sinon, la solution voisine est sélectionnée avec une probabilité donnée qui dépend de la température actuelle T et de la variation E de la fonction objectif.
- E représente la différence de valeur objective entre la solution courante x et la solution voisine générée x' .
- La probabilité suit généralement la distribution de Boltzmann, comme indiqué dans l'équation suivante :

$$P(\Delta E, T) = \exp - \left(\frac{f(x') - f(x)}{T} \right)$$

Inspiration du recuit simulé

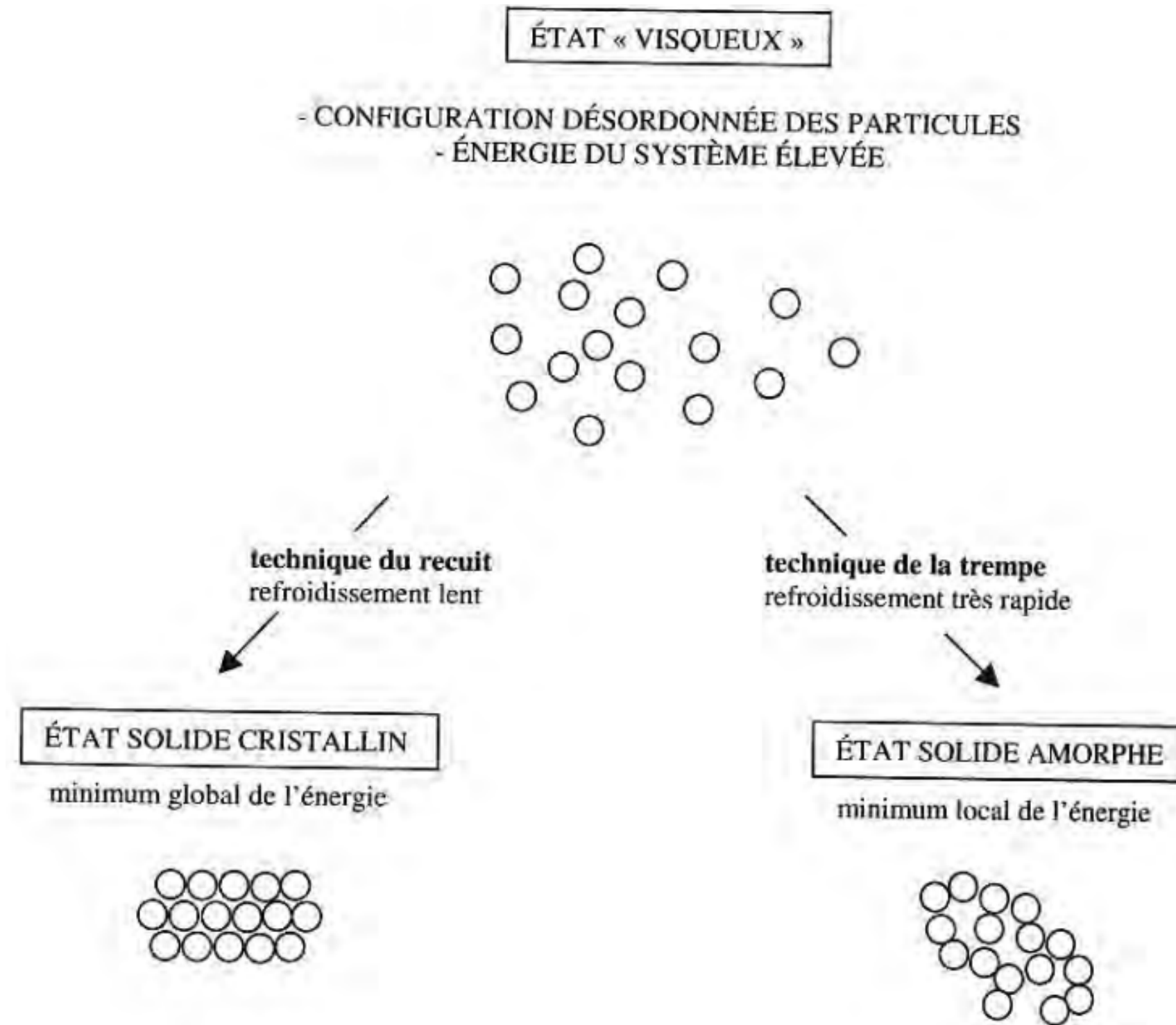
Métallurgie «le recuit»

On commence d'abord par chauffer le métal jusqu'à une certaine température où il devient liquide (les atomes peuvent donc circuler librement).

Après avoir atteint ce stade, on abaisse la température très lentement de sorte à obtenir un solide. Si cette baisse de température est brusque on obtient alors du verre ; si au contraire cette baisse de température est très lente (laissant aux atomes le temps d'atteindre l'équilibre statistique), nous obtiendrons des structures de plus en plus régulières, jusqu'à atteindre un état d'énergie minimale correspondant à la structure parfaite d'un Crystal, on dit alors que le système est « gelé ».

Au cas où cet abaissement de température ne se ferait pas assez lentement, il pourrait apparaître des défauts. Il faudrait alors les corriger en réchauffant de nouveau légèrement la matière de façon à permettre aux atomes de retrouver la liberté de mouvement, leur facilitant ainsi un éventuel réarrangement conduisant à une structure plus stable.

Métallurgie



Analogie entre un problème Thermodynamique et un problème d'optimisation

PROBLÈME D'OPTIMISATION

- Fonction objectif.
- Paramètres du problème.
- Trouver une configuration optimale.

PROBLÈME THERMODYNAMIQUE

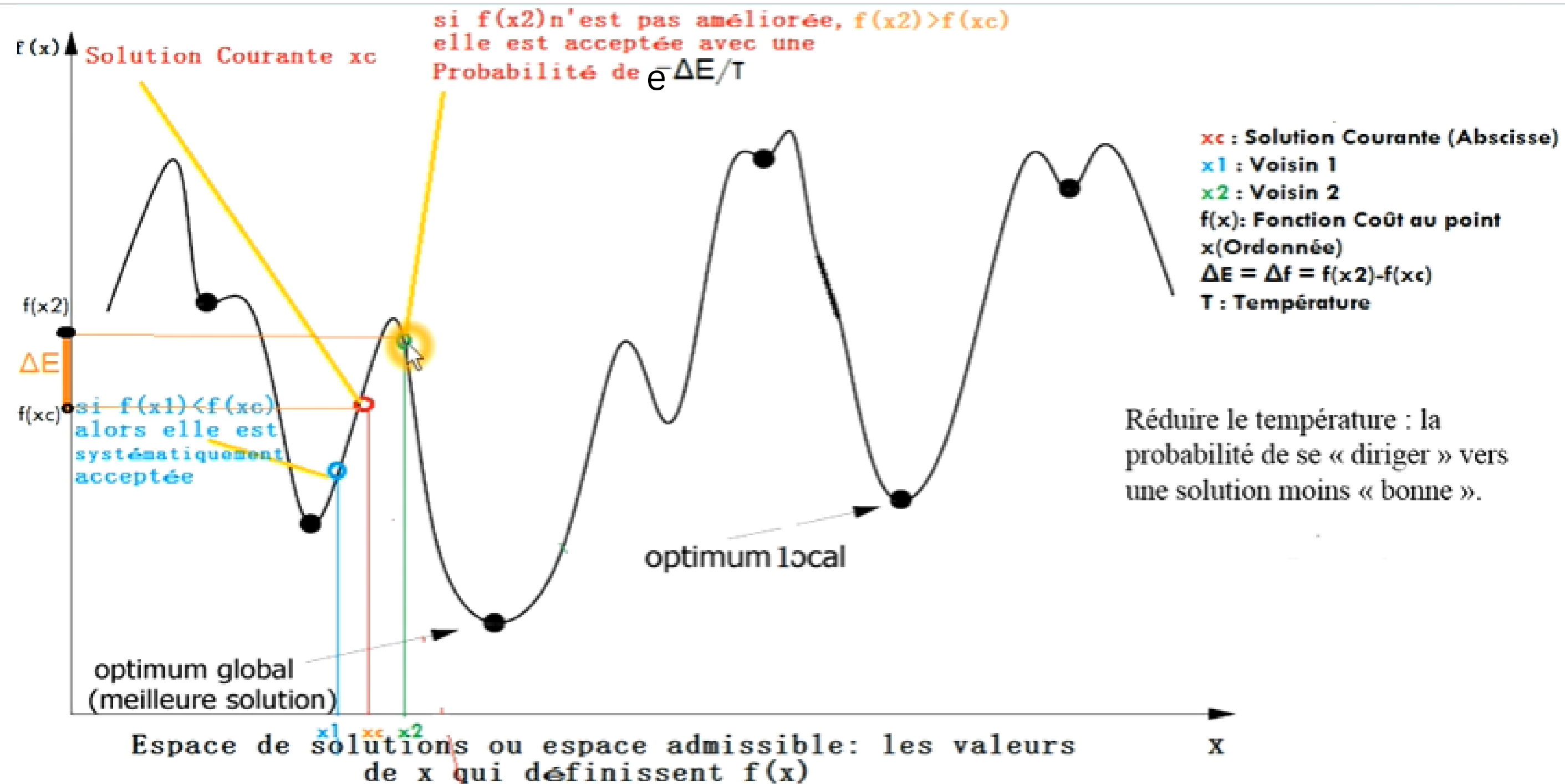
- Énergie libre.
- Cordonnées des particules.
- Trouver les états de basse énergie.

Principes du recuit simulé

Process

- Solution Initiale
- Température Initiale
- génération des voisins
- Itérations
- Critères d'Arrêt

Le Processus Réduit Simulé



Solution Initiale

La solution initiale peut être prise au hasard dans l'espace des solutions possibles.

Elle peut aussi être générée par une heuristique classique, telle que :

- la Descente du Gradient
- l'algorithme Glouton ()
- . . .

Température Initiale

- **Perturbation aléatoire** : Faites subir au système 100 perturbations aléatoires. Cela signifie que vous effectuez 100 modifications aléatoires à la configuration actuelle du système.
- **Calcul de la moyenne de la variation d'énergie** : Pour chaque perturbation, mesurez la variation d'énergie (ΔE) entre la solution modifiée et la solution actuelle. Calculez ensuite la moyenne de toutes ces variations ($\langle \Delta E \rangle$).
- **Choix du taux d'acceptation initial (Θ_0)** : Selon la qualité supposée de la configuration initiale, choisissez un taux d'acceptation initial Θ_0 . Si la qualité est supposée médiocre, fixez Θ_0 à 50%. Si la qualité est supposée bonne, fixez Θ_0 à 20%.
- **Calcul de la température initiale (T_0)** : Utilisez la formule $T_0 = -\langle \Delta E \rangle / \log(\Theta_0)$. Cela implique que la température initiale est déterminée en fonction de la moyenne des variations d'énergie et du logarithme du taux d'acceptation initial.

La génération des voisins

L'algorithme du recuit simulé génère des voisins à partir d'une solution initiale en effectuant des perturbations sur cette solution.

- **Perturbation de la solution** : Pour générer un voisin, l'algorithme applique une perturbation à la solution actuelle. La perturbation peut prendre différentes formes en fonction du problème. Voici quelques exemples pour illustrer le concept :
 - **TSP (Voyageur de commerce)** : Échangez deux villes dans la séquence de villes à visiter.
 - **Problème du sac à dos** : Changez la présence ou l'absence d'un article dans le sac.
 - **Optimisation de la planification** : Modifiez les horaires ou les affectations de ressources.

Le Critère d'Acceptation (métropolis)

Métallurgie

Le critère d'acceptation détermine si une nouvelle solution est acceptée ou rejetée.

L'acceptation dépend de la différence d'énergie entre la nouvelle solution et la solution actuelle, ainsi que de la température actuelle.

Le critère d'acceptation classique de SA provient de la mécanique statistique et est basé sur la distribution de probabilité de Boltzmann.

Un système en équilibre thermique à la température T peut se trouver dans un état avec une énergie E avec une probabilité proportionnelle à $\exp(-\Delta E/kT)$, où k est la constante de Boltzmann.

$$\text{Prob}(E) \sim \exp(-\Delta E/kT)$$

Ainsi, à basse température, il y a une petite chance que le système soit dans un état d'énergie élevée. Cela joue un rôle crucial dans SA car une augmentation d'énergie permet d'échapper aux minima locaux et de trouver le minimum global.

Selon la distribution de Boltzmann, l'algorithme suivant définit le critère pour accepter une variation d'énergie ΔE à la température T .

Algorithm 1: Acceptance Function

Data: T , ΔE - the temperature and the energy variation between the new candidate solution and the current one.

Result: Boolean value that indicates if the new solution is accepted or rejected.

```
if ( $\Delta E < 0$ ) then
|   return True;
else
|    $r \leftarrow$  generate a random value in the range  $[0, 1)$ 
|   if ( $r < \exp(-\Delta E/T)$ ) then
|   |   return True
|   else
|   |   return False
|   end
end
```

Le Critère d'Acceptation

Simulated Annealing

Cette analogie est appliquée à l'algorithme où E est f la fonction de coût.

Soit \mathbf{s} : la solution courante et \mathbf{s}' : la solution voisine.

soit $\Delta f = f(\mathbf{s}') - f(\mathbf{s})$ la variation de coût.

Soit β appartenant à l'intervalle $[0,1]$.

On tire au sort ce β .

- Si $\Delta f \leq 0$ on effectue la transformation : \mathbf{s} devient \mathbf{s}' .
- Si $\Delta f > 0$ on accepte la transformation \mathbf{s} devient \mathbf{s}' avec la probabilité $\exp(-\Delta f / T)$.
Si $\exp(-\Delta f / T) \geq \beta$ la solution \mathbf{s}' est accepté sinon elle rejeté

Refroidissement

Le processus de refroidissement dans l'algorithme du recuit simulé est une stratégie dynamique visant à guider la recherche vers des solutions optimales tout en évitant de rester piégé dans des optima locaux.

Initialement, le système est "chauffé" à une température élevée (T_0), permettant une exploration plus étendue de l'espace des solutions. À cette phase, l'algorithme est plus enclin à accepter des solutions moins optimales pour éviter de restreindre prématurément la recherche.

Au fil des itérations, la température est réduite progressivement selon un schéma prédéfini. Cette décroissance contrôlée rend l'algorithme progressivement plus sélectif, réduisant la probabilité d'acceptation de solutions moins optimales à mesure que la température diminue.

La décroissance de la température

Fonction Linéaire  $T_{k+1} = \alpha T_K$

$$\alpha \leq 1 \quad \text{typ. } 0.95 \text{ à } 0.8$$

Critère d'arrêt

- **$T < T_{min}$** : La température (T) dans le recuit simulé décroît au fil des itérations. Le critère d'arrêt " $T < T_{min}$ " indique que l'algorithme doit s'arrêter lorsque la température devient inférieure à une valeur minimale prédéfinie (T_{min}). Une température très basse signifie que l'algorithme devient de plus en plus sélectif, acceptant moins fréquemment des solutions moins optimales. Cela suggère que l'algorithme a exploré l'espace des solutions de manière suffisamment approfondie, et une diminution supplémentaire de la température n'est pas nécessaire.
- **$f(x) < f_{th}$** : $f(x)$ représente la valeur de la fonction de coût pour la solution actuelle (x). Le critère d'arrêt " $f(x) < f_{th}$ " stipule que l'algorithme doit s'arrêter lorsque la valeur de la fonction de coût atteint un seuil minimal prédéfini (f_{th}). Cela signifie que l'algorithme a trouvé une solution qui est suffisamment proche de l'optimum ou qui satisfait les critères d'arrêt de manière satisfaisante.

Généralement, On s'arrête quand T atteint un seuil fixe ϵ , proche de 0, mais pratiquement, on n'atteint pas le zéro.

Pseudo-code

Début

Engendrer la solution initiale $s_{(0)}$

Mini = $s_{(0)}$

Répéter

Choix de $s_{(i)} \in V(s_{(i)})$

Calcul de $\Delta d = f(s_{(i)}) - f(\text{Mini})$

Si $\Delta d < 0$

Alors Mini = $s_{(i)}$ /* idem algorithme de la descente */

Sinon tirer p dans $[0,1]$ suivant une distribution uniforme

Si $p \leq e^{(-\Delta d/T)}$

Alors Mini = $s_{(i)}$ /* solution moins bonne */

Sinon $s_{(i)}$ est rejetée

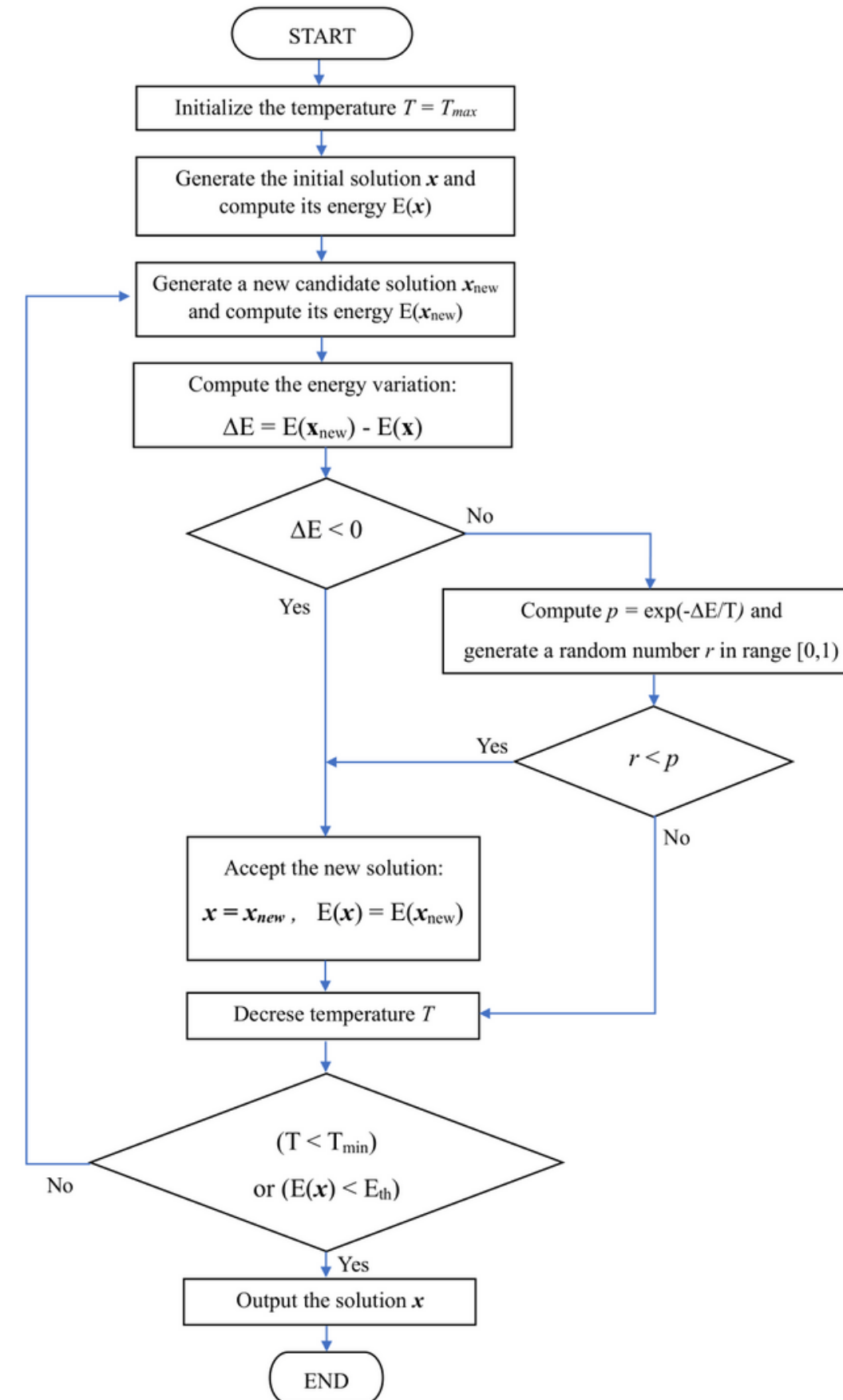
$T = g(T)$ /* avec g décroissante, par exemple $T = 0.9995 \cdot T$ */

Jusqu'à ce que T proche de 0

Fin

source : Université des Sciences et de la Technologie d'Oran - BENDAHOUA Sarah – thèse de Master2 RFIA

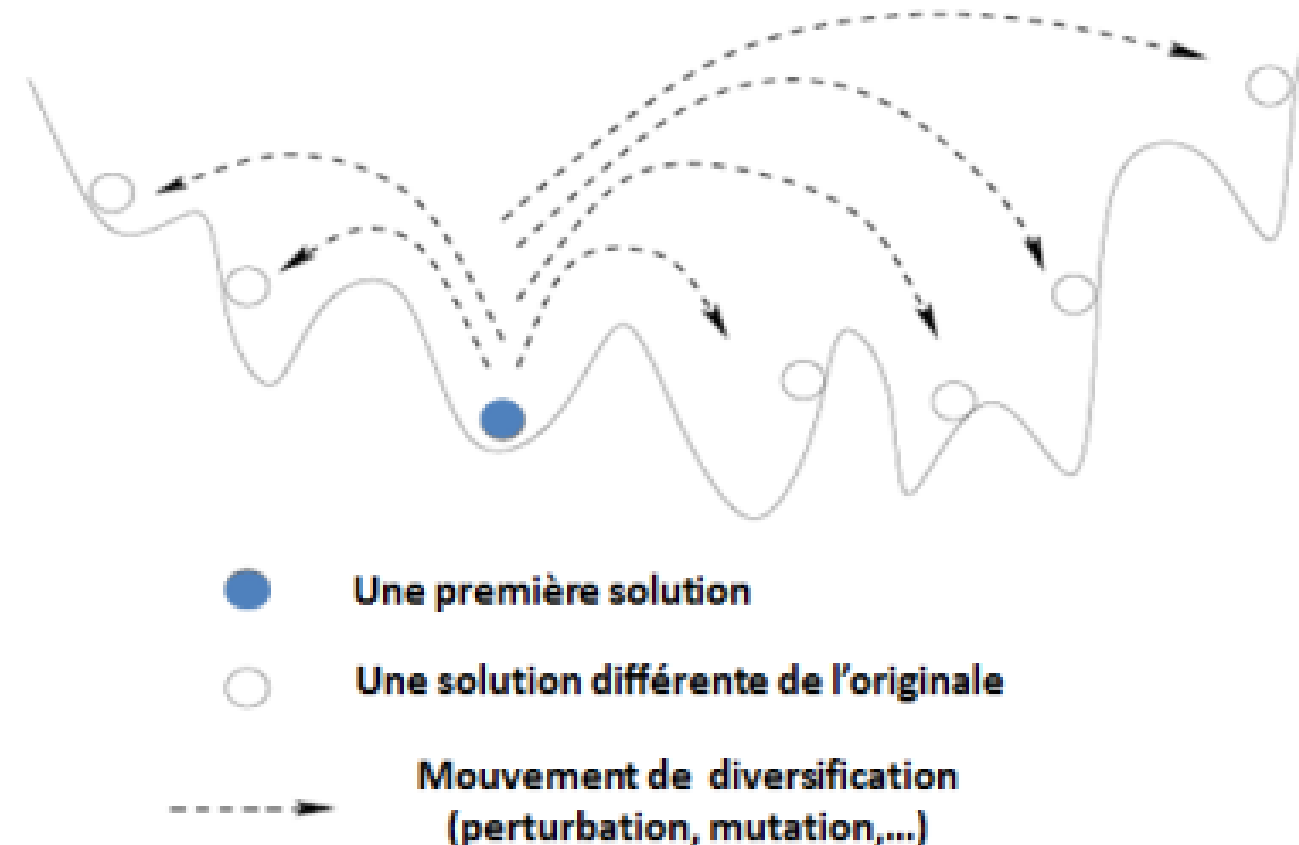
SA Flowchart



Intensification et Diversification

- Diversification :

Le principe de diversification d'une méthode d'optimisation donnée correspond à sa capacité de parcourir aisément l'espace de recherche pour obtenir des solutions très différentes les unes des autres. Autrement dit, c'est une mécanique pour une exploration assez large de l'espace de recherche.



Intensification et Diversification

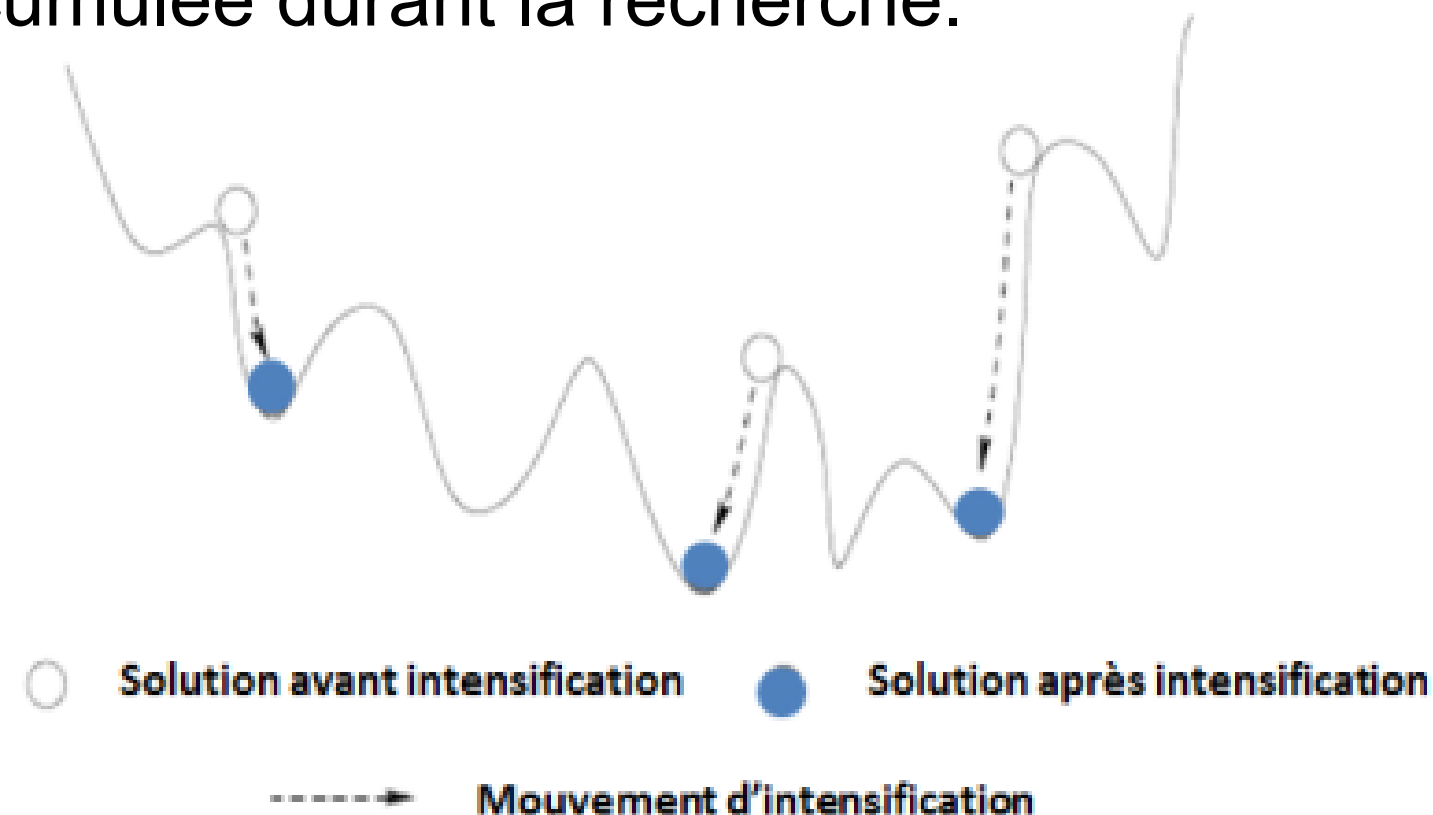
- Diversification dans le recuit simule:

Lorsque l'algorithme commence, la température est choisie très élevée, $e^{\frac{f(s)-f(s')}{T}}$ est donc proche de 1 et la plupart des solutions choisies aléatoirement dans le voisinage de la solution courante sont acceptées : on est en phase d'exploration.

Intensification et Diversification

- Intensification_:

Autant le principe de diversification essaye de déplacer les solutions dans d'autres zones de l'espace de recherche, autant le processus d'intensification vise à forcer une solution donnée à tendre vers l'optimum local de la zone à laquelle elle est attachée. En effet, Elle permet une exploitation de l'information accumulée durant la recherche.



Intensification et Diversification

- Intensification dans le recuit simule:

On fait décroître T de façon linéaire, et il devient plus difficile de « sauter » d'une région à une autre : l'algorithme commence à se figer dans une certaine région de l'espace des configurations.

Lorsque T a acquis une faible valeur, l'algorithme se conduit comme une simple recherche locale : on est en phase d'intensification.

Pour que celle-ci soit suffisante, on peut faire décroître plus lentement T , ou attendre « suffisamment longtemps ».

Il est également possible d'opter pour un schéma de refroidissement non monotone, en faisant brutalement remonter la température, avant de la rabaisser graduellement : on peut ainsi explorer de nouveau l'espace des configurations.

Applications dans la Vie Réelle

- La conception des circuits intégrés (problème de placement et de répartition)
- Le routage des paquets dans le réseaux
- La segmentation d'images
- Le problème de voyageur de commerce
- Le problème de sac à dos
- . . .




Résumé et conclusion

Le recuit simulé présente des avantages notables, notamment sa simplicité d'implémentation et ses solutions de qualité, converge vers un optimum global sous certaines conditions de décroissance de la température. Cependant, son principal défi survient à basse température, où il peut rester piégé dans des optima locaux. Pour pallier cela, des stratégies comme les remontées brusques de température ont été suggérées.

Le paramétrage de la température, bien que crucial, demeure souvent empirique. Une diminution lente est requise pour une exploration approfondie, mais cela peut prolonger le temps de calcul, en particulier avec les fréquents calculs d'exponentielles.

En résumé, malgré ses avantages, le recuit simulé demande une approche méticuleuse et des ajustements adaptés à chaque problème, tout en restant sensible aux compromis entre exploration exhaustive et temps de calcul.

Références

-  <https://www.baeldung.com/cs/simulated-annealing#sa-flowchart>
-  <http://www.i2m.univ-amu.fr/~preaux>
-  https://pepite-depot.univ-lille.fr/LIBRE/Th_Num/1998/50376-1998-241.pdf



Session questions- réponses



Merci pour votre attention !



Implémentation