Rapport du Projet de Fin d'Etude

Présenté par :

M. OUABOUNE Ahmed

En vue de l'obtention d'un Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Spécialité : Finance et Ingénierie Décisionnelle

L'implémentation et le backtesting des stratégies quantitatives d'investissement sur les produits Swaptions

---

Encadré par :

M. EL ASRI Brahim (ENSA)
M. KASSI Hamza (SG ATS)
M. YOUSFI Mouataz (SG ATS)

Entreprise :
Société Générale ATS

Soutenu le 16/06/2023, devant l'honorable jury composé de :

M. EL ASRI Brahim	**Professeur ENSA**
M. FAKHOURI Imade	**Professeur ENSA**
M. TAARABTI Said	**Professeur ENSA**
M. YOUSFI Mouataz	**Technical leader QIS ATS**

Année universitaire : 2022/2023

Note de confidentialité

Certaines informations présentes dans ce rapport ont été floutées par soucis de confidentialité. Merci pour votre compréhension.

Dédicace

"

À ma mère et à mon père

C'est très difficile de trouver autant de phrases ou d'expressions qui peuvent exprimer ma gratitude et ma reconnaissance. Vous avez su m'inculquer le sens de la responsabilité, de l'optimisme et surtout de la confiance en soi pour faire face aux difficultés de la vie. Que Dieu le tout puissant vous préserve, vous accorde santé, bonheur, quiétude de l'esprit et vous protège de tout mal.

À mes frères et mes grands-parents
Avec tout l'amour que je vous porte. Que Dieu vous bénisse et vous préserve.

A toute ma famille et mes amis.

Merci.

"

- Ahmed

Remerciements

Au terme de la réalisation de ce travail, c'est un devoir agréable d'exprimer en quelques lignes la reconnaissance que je dois à tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail et qui ont fait que mon stage soit fructueux et profitable. Tout d'abord, je souhaite adresser ma vive reconnaissance à mon professeur encadrant, Monsieur **EL ASRI Brahim**, pour sa disponibilité, sa patience, sa réactivité et son suivi tout au long de mon projet, ainsi que son assistance pour la rédaction du rapport. Il a su se rendre disponible tout le temps qu'il a fallu pour me guider, m'orienter et me conseiller tout au long de l'élaboration de ce projet.

Je tiens à remercier l'équipe QIS pour leur accueil chaleureux, leur soutien ainsi que leur implication envers le bon déroulement de mon projet, et SG ATS, qui n'a pas hésité également à déployer tous les outils et les efforts nécessaires au bon déroulement de mon stage. Ma reconnaissance se dirige particulièrement envers mon encadrant de stage, Monsieur **Yousfi MOUATAZ**, qui a suivi mon travail de très près pendant toute la période de mon stage.

Les conseils et les remarques de fond qu'il n'a cessé de me prodiguer m'ont permis de surmonter mes difficultés et de monter en compétences. J'exprime mes sincères remerciements à Monsieur **Hamza Kassi**, Team Leader de l'équipe QIS à SG ATS, pour ses conseils et son suivi durant la période de stage.

Je n'oublierai pas de remercier Monsieur **ARJANI Nabil**, **BAKSYS Oussama**, et **AJJA Ayoub**, qui m'ont accueilli au sein de l'équipe dès le premier jour. Leurs amabilité et leurs vifs encouragements furent une source de motivation pour le dépassement des difficultés rencontrées et la réalisation de ce projet.

Je témoigne ma profonde gratitude aux membres du jury, qui m'ont fait l'honneur de juger mon travail,Monsieur **EL ASRI Brahim**, Monsieur **FAKHOURI Imade** et Monsieur **TAARABTI Said** pour l'honneur qu'ils me font en prenant le temps de lire et d'évaluer ce travail.

Je souhaite également remercier l'équipe pédagogique et administrative de l'ENSAA pour leurs efforts visant à nous offrir une excellente formation.

Résumé

Dans le cadre de ce projet, nous avons développé un modèle de **backtesting** qui permet de calculer les stratégies d'investissement sur des produits structurés liés aux **swaptions**. L'objectif de ce modèle est de résoudre les problèmes de l'exécution liés aux calculs des stratégies de marché OTC, qui sont plus complexes et prennent plus de temps d'exécution que celles liées au marché standardisé.

Pour y parvenir, nous avons mis en place plusieurs optimisations en utilisant la logique de la programmation orientée objet en langage **Python**, ainsi que la technique de numba, qui permet d'exécuter les modèles de pricing, tels que le modèle de **Black**, dans des délais proches de ceux du langage C.

Enfin, pour garantir une expérience utilisateur optimale pour l'outil **Backtester**, nous avons créé une application web mise en production, accessible à tous les utilisateurs internes de SG ATS.

Mots clés : Stratégies d'investissement, courbe de taux d'intérêt, Indice propriétaire, courbe zéro coupon, swaption, stripping/bootstrapping, backtesting, produits structurés, pricing.

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Liste des sigles et acronymes

ATM *At The Money (à la monnaie)*

CA *Calculation Agent*

CCL *Cash Components Level*

FRA *Forward Rate Agreement*

HPPL *Hedging Portfolios Profit & Loss*

IL *Index Level*

Intrady *L'achat et la vente au cours de la même journée*

ITM *In The Money (dans la monnaie)*

IRS *Intrest Rate Swap*

IWC *Indices Warehouse and Computing*

JSON *JavaScript Object Notation*

LIBOR *London Inter Bank Offer Rate*

MtM *Market-to-Market*

MVHP *Market Value of Hedging Portfolios*

OTC *Over the Counter (gré a gré)*

OTM *Out of the money*

QIS *Quantitative investment strategies*

RRule *Recurrence Rule*

SG ATS	*Société Générale Africa Technologies & Services*
SGCIB	*Société Générale Corporate Investment Banking*
SGDB	*Société Générale Data Base*
SGI	*Société Générale Index*
ZC	*Zéro Coupon*

Introduction générale

Le backtesting, également appelé Systems Testing, consiste à prendre une stratégie et à remonter dans le temps pour voir ce qui se serait passé si la stratégie avait été appliquée réellement. L'hypothèse est que si la stratégie a fonctionné par le passé, il y a de bonnes chances, mais pas toutes, qu'elle fonctionne à nouveau à l'avenir, et inversement si la stratégie n'a pas bien fonctionné dans le passé, elle ne fonctionnera probablement pas bien à l'avenir.

Le backtesting des stratégies de trading est important pour les traders et les investisseurs pour juger si les stratégies sont rentables dans certaines circonstances. Il permet également aux utilisateurs d'apprendre comment une stratégie de trading est susceptible de fonctionner sur le marché et d'améliorer une stratégie de trading existante. Une discussion détaillée des approches du backtesting est donnée par [10].

Le backtesting est largement utilisé par les traders et les investisseurs [9], et de nombreux systèmes de backtesting sont disponibles sur le marché. Cependant, les stratégies quantitatives d'investissement deviennent de plus en plus complexes, nécessitant l'utilisation de données intraday et d'indicateurs plus compliqués. Il est parfois nécessaire d'essayer une stratégie sur plusieurs produits et même sur plusieurs marchés, ce qui rend le backtesting de ces stratégies beaucoup plus long. Les produits commerciaux basés sur les résultats des backtests deviennent incapables de les gérer, et les gens ont besoin d'implémentations plus efficaces pour effectuer le backtesting de ces stratégies dans un laps de temps acceptable.

L'équipe QIS a créé un nouvel outil appelé Papyrus, un moteur de calcul des niveaux d'indices développé en langage de programmation Python, pour remplacer les feuilles de calcul. Cependant, avec l'évolution du nombre et de la complexité des stratégies à évaluer chaque jour, Papyrus a montré des limites au niveau des backtests des nouvelles stratégies qui sont basées sur d'autres stratégies, telles que les stratégies de Cross Assets.

De plus, la manière de son implémentation n'a pas été optimale à la base. Ainsi, l'équipe de SGI Index a créé un autre outil appelé Backtester pour être plus flexible que celui de Papyrus en termes de vitesse de calcul et de nombre de stratégies qu'il peut lancer à la fois. Cet outil permet également de visualiser le comportement et la rentabilité des stratégies dans le passé. Backtester permettra de valoriser l'indice de la stratégie sur la période temporelle souhaitée.

Le sujet du stage consiste à réviser et optimiser le script d'exécution du backtest d'une stratégie d'investissement quantitative, plus précisément le roulement des swaptions de taux d'intérêt, en utilisant une approche orientée objet, des listes et des tableaux qui sont performants pour les calculs complexes. Pour ce faire, plusieurs classes principales ont été mises en place, notamment SwaptionGroup pour le pricing de la stratégie et RollSwaption pour le calcul de la performance et du niveau de l'indice de la stratégie. L'objectif final de ce projet est de contribuer à la réalisation d'un outil de backtesting capable de convertir de nouvelles stratégies en indices, parmi celles déjà existantes chez Société Générale.

Ce rapport retracera les différentes étapes du projet à travers quatre chapitres :

- Le premier chapitre consistera en une présentation du cadre opérationnel, c'est-à-dire l'organisme d'accueil, l'équipe et la nature de son activité, ainsi que le cadre technique qui englobe les outils utilisés pour mener le projet à bien.
- Le deuxième chapitre abordera le cadre théorique en présentant les différentes notions liées aux taux et produits de taux qui seront examinés dans la stratégie étudiée.
- Les troisième et quatrième chapitres seront consacrés à la présentation de la stratégie d'investissement en question, à la mise en œuvre du code du backtest, ainsi qu'à son optimisation et à son amélioration.

Chapitre 1

Présentation de l'organisme d'accueil

1.1 Présentation du Groupe Société Générale

Depuis sa création en 1864, Société Générale met son expertise au service de ses clients et du financement de l'économie, avec l'ambition de devenir la banque relationnelle de référence. L'engagement, la responsabilité, l'esprit d'équipe et l'innovation sont les valeurs partagées par tous ses collaborateurs.

La Société Générale Corporate Investment Banking est la marque de la banque de financement et d'investissement du groupe Société générale. Elle compte près de 12 000 collaborateurs dans plus de 38 pays.

L'activité de Société Générale Corporate Investment Banking, comme celle de la plupart des banques de financement et d'investissement, consiste à conseiller et accompagner les entrepreneurs, les grandes entreprises, les institutions financières, les gouvernements et les investisseurs à établir des liens sur les marchés des capitaux (ex : les marchés financiers), et leur fournir des solutions de financement, d'investissement et de gestion des risques. SG CIB regroupe l'ensemble des activités de banque d'investissement, de financements et de marchés au service des émetteurs et des investisseurs. Elle est présente en Europe, sur le continent américain, et en Asie-Pacifique. Elle accompagne ses clients sur leurs besoins stratégiques de long terme et leur offre des solutions sur mesure :

Pour les entreprises, les institutions financières et le secteur public :
une approche conseil globale (fusion-acquisitions, dette, actions, capital et gestion actif-passif) ; des solutions de levée des capitaux, dettes ou actions ; des financements optimisés et des réponses aux besoins de couverture, en particulier dans le domaine du change et des taux.

Pour les investisseurs :
des opportunités d'investissement adaptées et des solutions fiables en matière de gestion du risque grâce à une plateforme intégrée offrant un accès global aux marchés (actions, taux, crédit, change, matières premières et dérivés), des services de conseil et d'ingénierie financière, une qualité d'exécution, et une recherche transversale à travers les différentes classes d'actifs.

1.1.1 Présentation de SG ATS

Le groupe Société Générale, a crée au Maroc, à travers la banque de financement est d'investissement,la filiale SG ATS pour ses activités de marché.

Fig. 1.1 : Logo de SG ATS

SG ATS, basée à Casablanca et dirigée par **Mme. Widad Azzam Lahlou**, Directeur

Général, est constituée de plusieurs équipes d'ingénieurs dont la SGI. Son rôle est de développer pour la banque de financement et d'investissement des logiciels et librairies d'évaluation de produits financiers, sur l'ensemble des classes d'actifs et des produits de marché. Cette nouvelle équipe vient compléter le dispositif de recherche et développement pour les activités de marchés de Société Générale. Elle est composée d'équipes basées à Paris, Londres, New-York et Hong-Kong afin de concevoir et développer de nouveaux outils toujours plus performants.

1.1.2 Organigramme

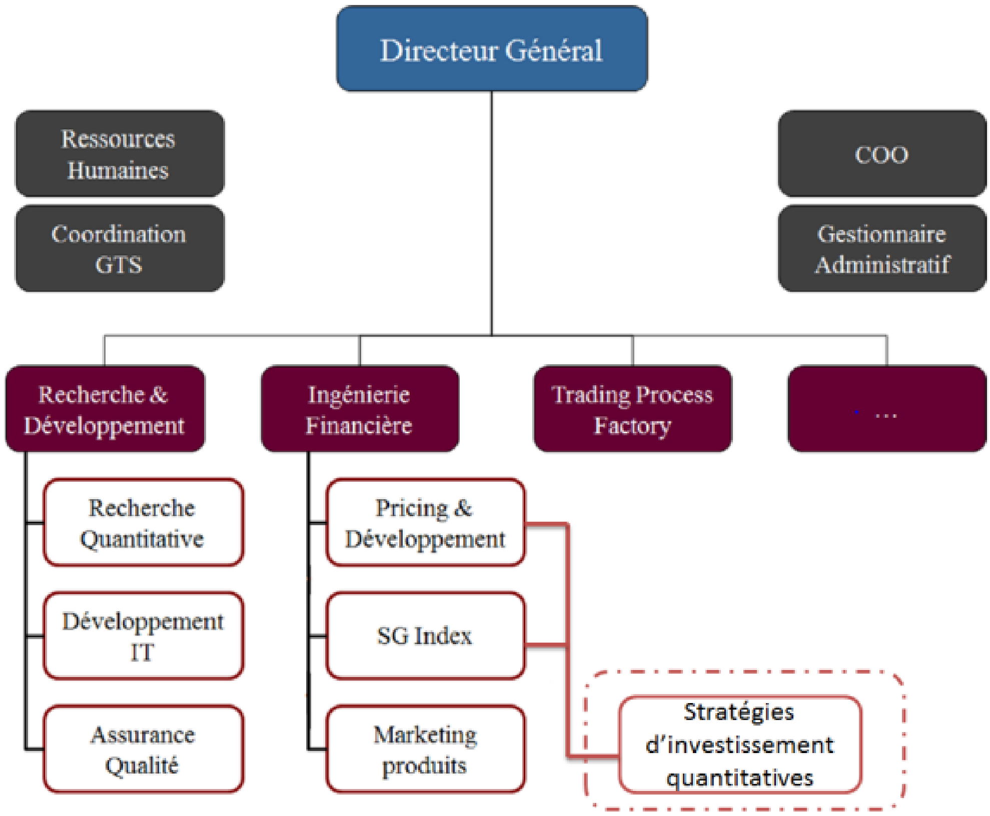


Fig. 1.2 : Organigramme de SG ATS

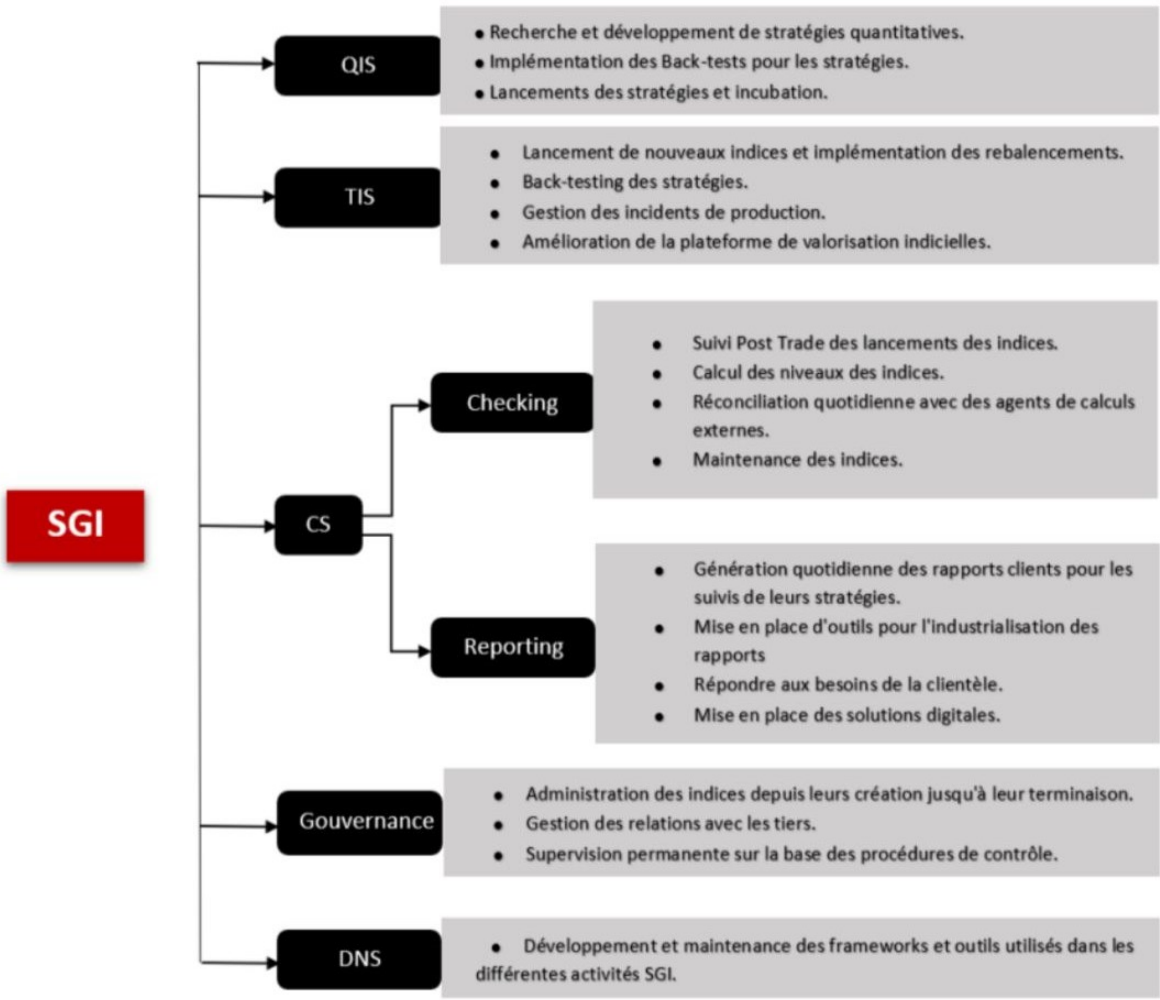


Fig. 1.3 : Présentation d'équipes de SGI

- Le pôle Recherche Développement : se charge de la conception, du dévelop-pement et dela maintenance des librairies de calcul et des calculateurs de risque pour l'ensemble des équipes de Trading du groupe Société Générale.
- Le pôle Ingénierie Financière : responsable de la structuration des indices propriétaires et élaboration des stratégies d'investissement au profit des clients SGI.

1.1.3 Société Générale Index SGI

Société Générale Index (SGI) offre un large éventail d'indices boursiers proprié-taires. Ce sont des indicateurs qui indiquent la tendance d'un marché, ou repré-sentent les performances des stratégies d'investissement. Ils peuvent être utilisés pour indiquer la performance d'une société, d'un marché, ou comme sous-jacents à d'autres produits financiers, tels que les options.

L'équipe participe au développement, à l'intégration et la maintenance des in-dices propriétaires SG pour l'ensemble du groupe Société Générale. Elle est plus particulièrement en charge du développement et de la maintenance des outils de calcul et de suivi des indices SGI, créés à la demande des équipes de vente de la Banque de Financement et d'Investissement de Société Générale.

Après avoir développé et lancé un indice, SGI confie sa valorisation quotidienne à des agents calculateurs externes. En même temps, SGI calcule en interne les ni-veaux de l'indice au quotidien, pour comparer les résultats avec ceux de l'agent de calcul, et intervenir en cas d'écart. Cela permet aussi de générer des rapports qui seront présentés aux clients souhaitant avoir une idée sur la performance de l'indice.

1.1.4 Présentation de l'équipe QIS

J'ai effectué mon stage au sein de l'équipe Quantitative Investment Strategies (QIS) de Société Générale Africa Technologies Services. Cette équipe se spécialise dans le développement de stratégies quantitatives à l'aide d'une plateforme interne de backtest et de production appelée Papurys. Grâce à ces deux plateformes, l'équipe est en mesure de créer, construire, tester et exécuter des stratégies puissantes sur n'importe quel ensemble de données.

L'équipe utilise la plateforme Backtester pour effectuer des tests rigoureux et scientifiques sur chaque stratégie, sans aucune régression ni ajustement de courbe. Deux autres équipes utilisent les stratégies développées par l'équipe QIS dans leurs portefeuilles et les mettent en pratique. Elles sont constamment en contact avec l'équipe QIS pour obtenir des éclaircissements, apporter des corrections et contribuer au développement global des stratégies de la Société Générale. Cela fait partie de la vision stratégique du groupe, de ses principes et plus particulièrement de l'esprit d'équipe.

L'équipe QIS est unique car elle fait partie à la fois des équipes Pricing Development et SGI en raison de sa polyvalence, de sa grande responsabilité et des qualités de leadership élevées de son responsable.

1.1.5 Présentation des familles d'indices

A la base, un indice boursier constitue un indicateur clé pour déterminer la performance d'un marché donné. En fait, il existe plusieurs indices mondiaux très populaires, qui sont représentatifs soit d'un marché ou d'une économie donnée ; le cas du CAC40 par exemple, est un indice reflétant la performance de 40 sociétés choisies parmi les 100 premières en France. Le MASI, également, est un indice boursier de la bourse de Casablanca, composé des actions de 62 sociétés les plus actives, et donne une image sur l'évolution du marché marocain. Les indices boursiers peuvent être utilisés comme des instruments financiers servant d'actifs sous-jacents à d'autres produits financiers, conçus pour le compte d'investisseurs pour qui le marché ne suffit pas. Ils sont également employés comme une base d'investissement pour des fonds via une réplication qui peut être : — Physique ; où l'on conçoit un portefeuille reproduisant les rendements d'un indice de référence en achetant simplement des actifs composant l'indice en question. Ou : — Synthétique ; qui peut avoir la forme d'un swap de performance entre l'investisseur et la banque d'investissement ; elle délivrera la performance de l'indice en échange d'une commission, ainsi que des rendements d'actifs détenus dans le portefeuille. En effet, il peut arriver à ce que des clients ne se contentent pas seulement du rendement d'un marché donné, mais souhaitent, à la rigueur, avoir des bénéfices bien plus élevés, ou encore, avoir des solutions d'investissement qui leur garantiraient des rendements identiques à ceux générés sur un marché très risqué. Dans le but de diversifier les stratégies et les solutions d'investissements proposées aux investisseurs, la SGI met à disposition deux classes d'indices propriétaires ; les indices vedettes (ou "Flagship") et les indices customisés (ou "Bespoke")

On détaille l'utilité de chacun de ces deux types :

— **Les indices vedettes :** ils constituent la vitrine de la SGI, ils ne visent pas une catégorie de personnes précise. Ils sont plutôt destinés à toute personne qui n'est pas trop exigeante. Ils concernent alors une marge diversifiée de clients, d'où leurs appellation « Indices prêt à porter ». Leurs compositions sont généralement proposées par la SGI suite à une étude précise des tendances du marché.

— **Les indices customisés :** Ces indices sont destinés aux clients très exigeants, qui ne sont pas tout à fait satisfaits par les indices "Flagship" et qui préfèrent réaliser leurs propres choix de l'allocation des composants de l'indice, et même de la classe d'actifs les constituant. A travers ce type d'indices, les investisseurs souhaitent répliquer une stratégie d'investissement redimensionnée selon une étude prolongée sur des prévisions des prix dans le futur.

1.2 L'environnement des indices propriétaires

Dans cette section on décrira l'environnement de travail de l'équipe SGI, commençant par les définitions des termes courants dans le business et finissant par les détails concernant les mécanismes de travail.

1.2.1 Définitions et terminologie

– **Indice Boursier :** Un indice boursier est une mesure qui résume la performance d'un portefeuille hypothétique. Celui-ci peut contenir l'ensemble des titres d'un marché, ou un ensemble de titres choisis selon des critères spécifiques. Ces titres peuvent être des actions des obligations, des contrats à terme ou encore des indices . . . [3]

– **Indice propriétaire :** Les indices propriétaires, objet de notre travail, sont des indices conçus par SGI ou l'un de ses conseillers d'indices, et sponsorisés par la Société Générale qui gère le processus d'investissement dans ces indices. Il est important de spécifier que ces indices ne servent pas de référence par rapport à l'état d'un marché ou d'une économie donnée. Ils sont utilisés comme des instruments financiers servant d'actifs sous-jacents à d'autres produits financiers, tels que les contrats à terme ou les options. Ils sont également employés comme une base d'investissement pour des fonds qui les répliquent, c'est-à-dire copient leur composition et leur stratégie afin d'atteindre des rendements identiques à leurs performances.

Toutefois, contrairement aux indices standards qui reflètent le rendement d'un marché donné, les indices propriétaires sont conçus pour le compte d'investisseurs pour qui le marché ne suffit pas.[4]

– **Un agent de calcul :** Un agent de calcul est une entité qui détermine le prix d'un produit dérivé, il établit également le prix d'un produit structuré et peut agir comme son garant. L'agent de calcul n'est pas un fiduciaire, mais il est prévu pour éviter les conflits d'intérêts et d'agir de bonne foi. Dans le contexte de notre travail, l'agent de calcul se charge des calculs journaliers et de la publication des niveaux des indices de SGI.

– **Une plateforme :** Une plateforme est une structure logicielle organisée conformément à une architecture souvent fournie sous forme d'une bibliothèque, destinée à aider dans la programmation. Dans le cadre de ce travail, les plateformes seront la base de l'implémentation des scripts de valorisation.

– **Un Template :** La technique du Template (template method pattern) est un design pattern comportemental utilisé en génie logiciel. Un Template définit le squelette d'un algorithme à l'aide d'opérations abstraites dont le comportement concret se trouvera dans les sous-classes, qui implémenteront ces opérations. Cette technique, très répandue dans les classes abstraites, permet de : fixer clairement des comportements standards qui devraient être partagés par toutes les sous-classes, même lorsque le détail des sous-opérations diffère ; et factoriser du code qui serait redondant s'il se trouvait répété dans chaque sous-classe.

1.2.2 La procédure de création et d'implémentation des stratégies indicielles

La procédure de création des indices peut être décrite par les étapes suivantes :

– **Analyse du besoin :** La première étape pour construire un indice est l'analyse du besoin pour la détection des opportunités de gain, et pour que l'indice conçu attire l'intention des investisseurs.

– **Choix des composantes et allocation des poids :** Après avoir bien défini le besoin d'investissement, vient l'étape du choix des composantes, il existe plu-sieurs stratégies selon la classe de l'actif sous-jacent. Ces stratégies peuvent être soit conçus par l'équipe de recherche de SGI soit conseillées par un "Advisor" d'indices. Comme exemple de ces stratégie, il y a la méthode de scoring qui est la plus utilisée dans les indices Equity, objet de notre travail. Elle consiste à donner un score à chaque entreprise de l'univers des entreprises (un secteur économique, ou une zone géographique). Ce score est calculé selon les critères définis préala-blement dans l'analyse des besoins. Par exemple le score de Piotroski, qui est un score discret entre 0 et 9 qui reflète neuf critères utilisés pour déterminer la force de la position financière des entreprises. Le score de Piotroski est utilisé pour dé-terminer les meilleures entreprises. Pour chaque critère, on donne 1 point si l'entreprise le vérifie, 0 sinon.

Les point sont ensuite additionnés pour créer un score qui aidera à classifier ces entreprises, pour construire le panier des actions sur lesquels sera basé l'indice.

– **Choix de l'agent de calcul :** Pour garantir la transparence, les propriétaires d'indices chargent une entité indépendante du calcul quotidien du niveau de l'indice. Il s'agit de l'agent calculateur. Il sert à assurer l'intégrité des niveaux de l'indice afin de garantir aux clients qu'ils n'ont pas été biaisés par le propriétaire de l'indice, ou qu'il n'a pas publié des niveaux erronés si l'indice n'a pas la per-formance souhaitée.

– **Rédaction de l'index Rules :** C'est une étape très importante dans la créa-tion d'un indice. Après avoir défini la stratégie et la méthode d'allocation des composantes, et éventuellement la méthode de calcul, il faut rédiger tous cela dans un document qui prend en compte tous détails de l'indice : les jours de calcul, les jours de revue, les jours de rebalancement 1 , l'agent de calcul, les dif-férents frais, la classe d'actif, la stratégie, la méthode de rebalancement, les formules de calcul et les événements exceptionnels qui peuvent interrompre le calcul de l'indice. Ce document devient donc la référence de toutes les parties. On s'y réfère lors de toute divergence entre SGI, le trading et l'agent de calcul.

– **Convergence avec l'agent calculateur :** Après avoir eu l'accord de l'agent calculateur, le propriétaire de l'indice le valorise lui-même sur un horizon fini de telle sorte qu'il s'assure que les outils mis en place sont efficaces et permettent d'aboutir à un niveau d'indice correct. C'est à ce niveau que se trouve le but de ce travail qui cherche à enrichir des plateformes qui rendraient plus facile la valorisation des indices et leur suivi.

– **Suivi de l'indice :** Les opérations relatives à l'indice ne s'arrêtent pas lors de son lancement. Bien au contraire, un suivi quotidien est effectué. Bien que l'agent calculateur se charge du calcul du niveau de l'indice, son propriétaire doit le valoriser à son tour afin de vérifier que l'agent calculateur ne s'est pas trompé. Situation qui peut se produire assez souvent. Ceci dit, les indices propriétaires ne sont pas créés uniquement pour un besoin en chiffres indicateurs. Les clients s'attendent plutôt à ce que cet indice-là soit répliqué par les équipes de Trading. Cela signifie qu'une équipe de traders copie la stratégie de l'indice développé de manière concrète afin d'aboutir à son niveau de performance. La figure 1.2 re-trace les différents intervenants dans le cycle de vie d'un indice propriétaire

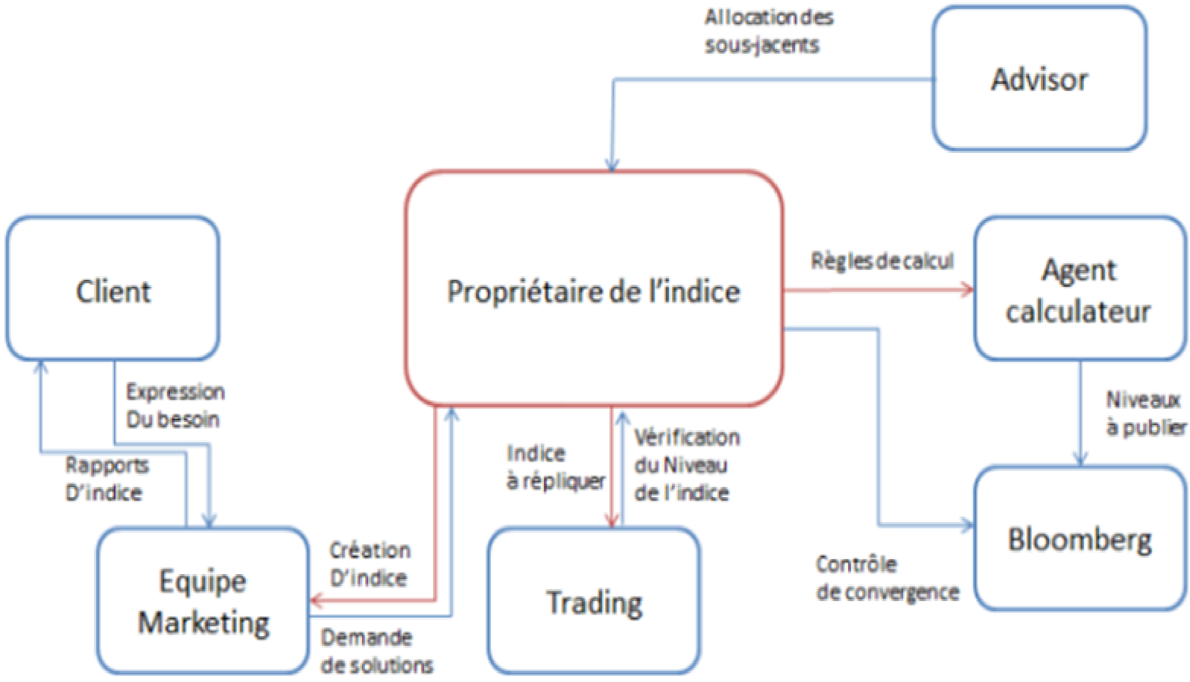


Fig. 1.4 : Diagramme d'interaction entre les intervenants dans les indices propriétaires

1.3 Les plateformes de calcul de SGI

Vu le nombre d'indices lancés et qui dépasse les 1000 indices, il est légitime de penser à un moyen optimal et facile à accéder vues les réplications des mêmes étapes de calcul plusieurs fois, d'où l'intérêt de concevoir des plateformes robustes et optimales qui collecteront le calcul de tous ces indices :

- La plateforme Indices Warehouse and computing IWC : indices Warehouse and Computing (IWC) est une interface utilisateur qui permet de faciliter l'accès aux informations concernant chaque indice. "IWC" contient principalement ce qui suit :

  – **Un tableau de bord :** Sert à lister l'ensemble des indices SGI et permet d'accéder aux informations de ces indices : leurs compositions, leurs paramètres et leurs indicateurs ainsi que les résultats des dates passées. Les paramètres d'indice sont spécialement des valeurs fixes servant à calculer le niveau de l'indice. Ils sont mentionnés dans l'Index Rules". Parmi les paramètres, on trouve : le "ticker" 2 de l'indice dans "Bloom-berg", les arrondis du niveau, les coûts de transactions s'ils sont fixes.

  Les indicateurs, contrairement aux paramètres, ne sont pas obligatoirement dans l'Index Rules", mais plutôt dans des calculs intermédiaires qui vont servir à déterminer le niveau de l'indice sans avoir à le lancer depuis sa date de lancement.

  – **Un "Scheduler" :** Pour pouvoir lancer les calculs et afficher les résultats. Il permet aussi de lancer ces mêmes calculs d'une manière récurrente et donc affiche le résultat journalier automatiquement.

– **Les paramètres globaux :** Ce sont des paramètres utilisés par plusieurs indices. Ils ne dépendent pas de chaque indice en particulier, et donc la meilleure façon est de les stocker une fois pour toute au lieu de les faire entrer pour chaque in-dice ; par exemple les taxes appliquées aux dividendes.

– **Les compositions des indices :** Chaque indice stocké dans la base de données IWC, a sa composition stockée dans une base de données externe appelée Indexman, qui est mise à jour quotidiennement d'une manière automatique. Ces compositions que l'on appelle les compositions officielles, sont celles qu'utilise l'agent de calcul dans la détermination des niveaux des indices. Il existe a aussi des compositions que l'on appelle "computed compositions". C'est la composition que nous utilisons pour calculer le niveau d'indice. Cette composition est soit déduite chaque jour de calcul soit de la composition du jour de calcul précédent, en modifiant les quantités si nécessaire selon les événements survenus à cette date, soit calculée par un algorithme de rebalancement, soit insérée directement après la recevoir de l'advisor de l'indice, si cet indice est advisé.

La figure ci-dessous décrit le stockage et le chargement des donnés dans la base :

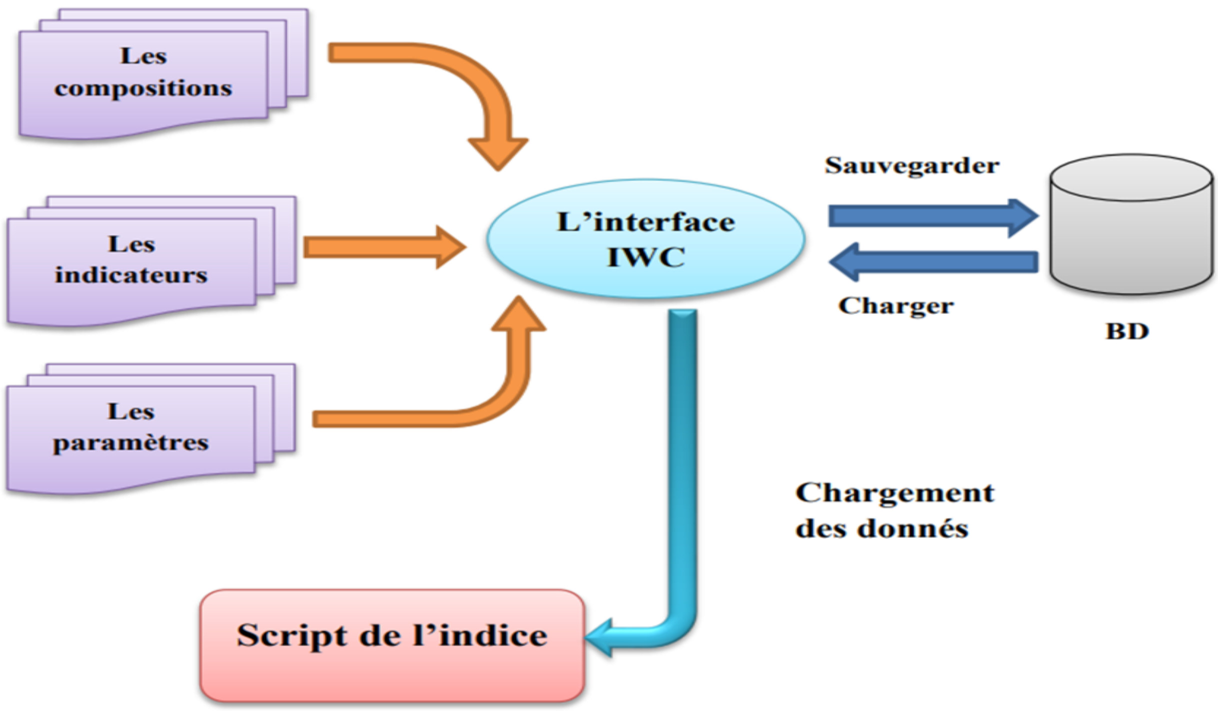


Fig. 1.5 : Chargement et sauvegarde des données IWC

Papyrus : est la plateforme conçue pour faire la connexion entre la base de données et les scripts de calcul pour pouvoir faire des requêtes et rassembler des informations nécessaires aux calculs ou enregistrer les résultats obtenus. "Papyrus" permet à IWC d'exécuter les calculs, afficher et enregistrer les résultats. Il permet également de lancer ces calculs, en local, sur chaque poste de travail. En plus de ces fonctionnalités, Papyrus enregistre des fichiers, soit en local soit sur le serveur, contenant les différentes informations du script, parmi ces enregistrements il y a :

- Un fichier d'inputs contenant toutes les requêtes de "Bloomberg" concernant le niveau d'indice calculé par l'agent calculateur. – Un fichier de résultats daté en jour d'exécution, contenant les calculs intermédiaires contribuant aux calculs du niveau d'indice.

- Un fichier "log" spécifiant s'il y a eu des problèmes d'exécution.

- Un fichier text contenant la date, le niveau de l'agent calculateur et le niveau calculé ainsi que la validité du calcul. "Papyrus" et IWC constituent la nouvelle plateforme de gestion de tous les indices SGI. Ceci dit, ces deux plateformes restent des sources d'affichage et de gestion seulement et ne permettent pas de calculer le niveau d'indice. Le calcul se fait par des "scripts" de valorisation établis et connectés à "papyrus". Chaque indice est calculé par un script qui est une "classe" qui "hérite" d'une classe mère qui réunit la structure et les traitements communs d'une famille d'indices, respectivement sous forme d'attributs et de méthodes. Cette classe mère est appelée Template, qui elle aussi "hérite" d'un template global qui réunit la structure et les méthodes utilisées par toutes les familles d'indices, est appelé StandardIndex. La figure représente un diagramme qui explique la structure globale de ces plateformes en relation avec les scripts des indices, la base de données, et le service Bloomberg, ce qui présente le système global de valorisation des indices propriétaires.

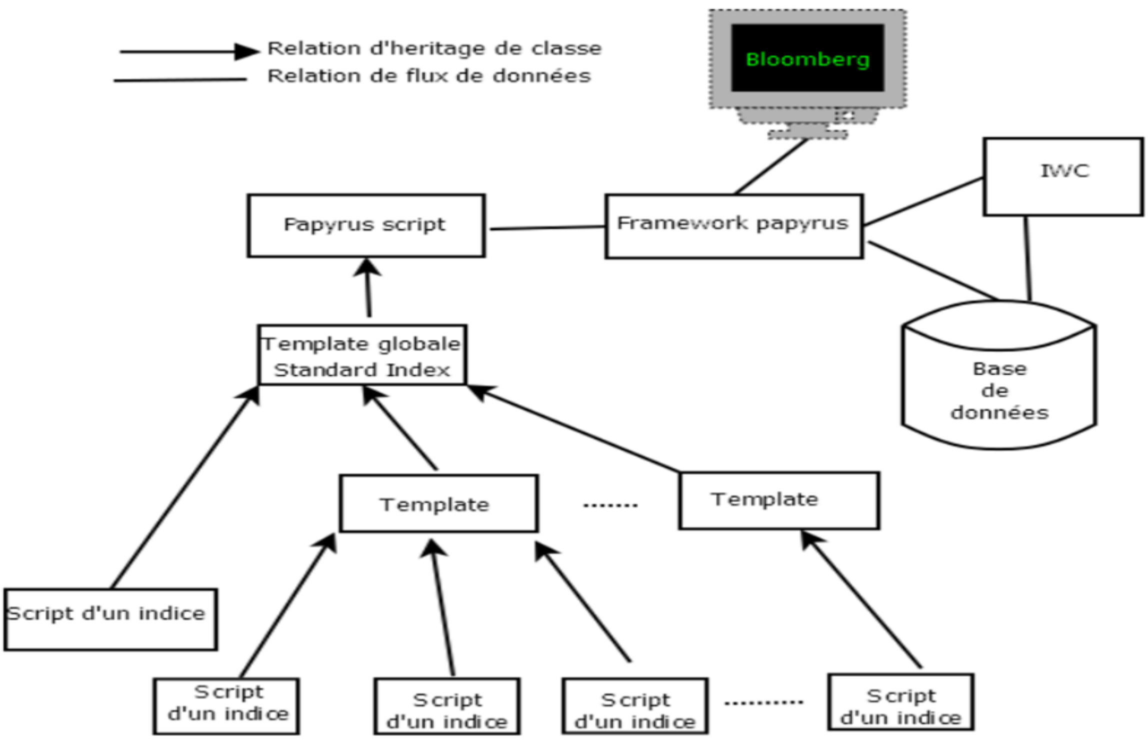


FIG. 1.6 : Diagramme du système de valorisation de Papyrus

1.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons essayé dans un premier temps de présenter l'organisme d'accueil et le métier de l'équipe QIS ainsi que les autres équipes auquelles elle est liée. Ainsi que le cadre général du projet à savoir le choix du thème et sa pertinence ainsi que la problématique du projet, la méthodologie et la planification du travail.

Chapitre 2

Les Produits des Swaptions

2.1 Introduction

Au fil des décennies, la pertinence des produits dérivés sur les marchés financiers n'a cessé de croître depuis les années 1980. Les transactions impliquant des contrats à terme, des options et d'autres types de produits dérivés se sont multipliées sur de nombreux marchés organisés. Parallèlement, les marchés de gré à gré (OTC) ont également été le théâtre d'échanges réguliers de contrats à terme, de swaps et de divers types d'options, impliquant des institutions financières, des gestionnaires de fonds et des trésoriers d'entreprise.

Prenant l'exemple d'une swaption qu'est un contrat d'option qui confère à son détenteur le droit, mais non l'obligation, de conclure un swap de taux d'intérêt débutant dans le futur à un taux fixé aujourd'hui. Les swaptions sont cotées en N x M, où N indique l'échéance de l'option en années et M fait référence à la durée du swap sous-jacent en années. Ainsi, une swaption 1 x 5 correspond à une option d'un an permettant d'entrer dans un swap de 5 ans1.

Les swaptions sont spécifiées en tant que payeur ou receveur, ce qui signifie que l'on a l'option d'entrer dans un swap pour payer ou recevoir la jambe fixe du swap respectivement. En outre, les swaptions sont associées à un style d'option, dont les principaux sont l'option européenne, l'option américaine et l'option bermudienne, qui font référence à la (aux) date(s) d'exercice de l'option, donnant au détenteur le droit d'exercer l'option à l'expiration de l'option uni-quement, à n'importe quelle date jusqu'à et à des intervalles discrets jusqu'à et y compris l'expiration de l'option, respectivement. Les swaptions peuvent être réglées en espèces ou physiquement, ce qui signifie qu'à l'expiration de l'option, si elle est exercée, nous pouvons spécifier d'entrer dans le swap sous-jacent ou de recevoir l'équivalent en espèces à l'expiration. Dans ce qui suit, nous examinons comment les swaptions européennes sur les swaps de taux d'intérêt avec règlement physique sont tarifées.

En examinant le pricing des swaptions, nous présentons tout d'abord les préliminaires nécessaires, à savoir le théorème de représentation de Martingale (MRT), qui nous fournit un mécanisme permettant de répliquer, de couvrir et d'évaluer les paiements d'options par rapport à un instrument de couverture. Ensuite, comme les swaptions de taux d'intérêt ont des gains déterminés par le swap de taux d'intérêt sous-jacent (IRS), nous examinons comment évaluer l'IRS sous-jacent afin de mieux comprendre le gain des swaptions, en soulignant que les prix des swaps de taux d'intérêt peuvent être exprimés en termes d'un numéraire d'annuité. Nous décrivons également les gains des options d'achat et de vente afin d'identifier que les swaptions payantes correspondent à une option d'achat sur un IRS et que les swaptions réceptrices correspondent à des options de vente.

Nous appliquons ensuite le théorème de représentation de Martingale, en sélectionnant le numéraire de l'annuité, qui était un élément clé du prix de l'IRS sous-jacent. Nous faisons ce choix pour simplifier les mathématiques de l'espérance de gain, qui dans ce cas conduit à une expression de type Black-Scholes.

Cela nous permet d'utiliser le résultat généralisé de Black-Scholes (1973) pour obtenir une expression analytique du prix de l'option de swap, dont nous montrons qu'il s'agit de la formule de Black-76 mise à l'échelle par un terme d'annuité.

2.2 Utilisations des Swaptions

Les swaptions peuvent être utilisées de différentes manières pour aider les investisseurs et les institutions à gérer leurs portefeuilles et à se couvrir contre les fluctuations des taux sur les marchés financiers. Voici quelques uns des principaux avantages :

Couverture du risque de taux d'intérêt : Les swaptions permettent aux acteurs du marché de se couvrir contre le risque de taux d'intérêt en bloquant un taux d'intérêt fixe. Cela permet de se protéger contre les variations inattendues des taux d'intérêt, qui peuvent avoir un impact sur la rentabilité d'une entreprise ou d'un portefeuille d'investissement.

La gestion du risque : Les swaptions offrent aux investisseurs une certaine souplesse dans la gestion du risque de taux d'intérêt. Ils peuvent être utilisés pour se couvrir contre les mouvements futurs des taux d'intérêt, ce qui permet aux investisseurs de bloquer un taux d'intérêt fixe et d'éviter les pertes potentielles liées aux fluctuations des taux.

Amélioration de la diversification du portefeuille : Les swaptions peuvent être utilisées dans le cadre d'un portefeuille diversifié d'instruments financiers. Cela peut aider les investisseurs à gérer les risques en répartissant leurs investis-sements entre différentes classes d'actifs, secteurs et régions géographiques.

Flexibilité : Les swaptions offrent une certaine flexibilité en ce sens qu'elles donnent à leur détenteur l'option de conclure un swap, mais pas l'obligation. Cela signifie que le détenteur peut choisir d'exercer son option si cela s'avère avantageux, mais qu'il n'est pas tenu de le faire si les conditions du marché changent.

Création d'opportunités d'arbitrage : Les swaptions peuvent créer des opportunités d'arbitrage pour les traders qui peuvent identifier les mauvaises évaluations du marché. Par exemple, si le prix d'une swaption est trop bas par rapport au taux en vigueur sur le marché, un opérateur peut acheter la swaption et exercer l'option de conclure un swap, bloquant ainsi un profit.

Potentiel d'amélioration des rendements : Les swaptions peuvent être utilisées pour tirer parti d'opportunités permettant d'obtenir des rendements plus élevés sur les investissements. Par exemple, une swaption peut être utilisée pour conclure un swap qui offre un taux d'intérêt fixe plus élevé que les taux en vigueur sur le marché.

Les institutions utilisent les swaptions principalement comme outil de couverture du risque de taux d'intérêt. Par exemple, les banques et autres institutions financières peuvent utiliser les swaptions pour gérer leur exposition aux variations de taux d'intérêt, telles que celles qui pourraient résulter de changements dans la politique monétaire ou les conditions économiques. En concluant un swap par le biais d'une swaption, les institutions peuvent bloquer un taux d'intérêt fixe et réduire leur exposition aux fluctuations des taux du marché.

2.3 Swap de Taux : Principe et Structure

Un swap de taux d'intérêt est un contrat légal conclu entre deux parties pour échanger des flux de trésorerie à une série de dates futures convenues. Le marché des swaps de taux d'intérêt constitue la partie la plus importante et la plus liquide du marché mondial des produits dérivés.

À la fin du mois de juin 2014, le montant notionnel total des contrats en cours s'élevait à 563 000 milliards de dollars, soit **81%** du marché mondial des produits dérivés de gré à gré, et la valeur de marché brute des dérivés de taux d'intérêt s'élevait à 13 000 milliards de dollars.
Prenant l'exemple des swaps "plain vanilla", qui constituent la grande majorité du marché des swaps de gré à gré. Chaque flux de trésorerie est appelé "jambe". Un swap de taux d'intérêt ordinaire comporte deux jambes :
- une jambe fixe et une jambe flottante.

Les flux de cash-flow de la jambe fixe sont fixés lors de l'initiation du contrat, tandis que les flux de cash-flow de la jambe flottante sont déterminés aux "dates de fixation du taux", qui se situent à proximité du début de la période de paiement et sont spécifiées dans les conditions générales du contrat.

La valeur de marché actuelle d'un swap de taux d'intérêt est déterminée par l'environnement de taux d'intérêt prévalant à la date d'évaluation, représenté par l'ensemble des taux d'intérêt en vigueur, représenté par l'ensemble des courbes de taux d'intérêt actuelles. Il existe deux courbes importantes pour l'évaluation des swaps de taux d'intérêt - la courbe OIS (Overnight index swaps) et la courbe de l'indice des taux flottants pertinente pour la juridiction, qui, pour les swaps simples, est l'Interbank Offered Rate (IBOR).

IBOR fait référence à un taux interbancaire offert générique. Lorsqu'il est fait référence à un IBOR spécifique, tel que le LIBOR (London Interbank Offered Rate) en USD, il s'agit de LIBOR générique.

London Interbank Offered Rate (LIBOR), le nom le plus spécifique sera utilisé (c.-à-d. LIBOR USD). Par exemple, cette distinction est importante pour différencier l'Euribor, qui est le taux interbancaire offert pour l'euro par les banques de la zone euro, et l'EUR LIBOR, qui est le taux interbancaire offert pour l'euro fixé par les banques à Londres.

Taux OIS

L'OIS (Overnight Indexed Swap) est une norme de référence de taux d'intérêt sur le plan international. L'OIS concerne principalement les opérations d'échange de taux référencées sur une maturité quotidienne varie entre une semaine et un an. Ce sont principalement des taux flottants appliqués aux prêts sans exigence de garantie entre banques, comme le taux Eonia pour l'euro, le Sonia pour la livre sterling, et le Federal funds rate pour le dollar.

Taux dépôt (Deposit rates)

Les dépôts à taux d'intérêt sont des contrats de gré à gré qui débutent à la date de référence (aujourd'hui ou au comptant) et qui versent un taux d'intérêt fixé à l'origine. À la fin du contrat, l'emprunteur devra rembourser le montant principal ainsi que les intérêts accumulés pendant toute la période.

Ainsi, en cohérence avec ce que nous avons dit précédemment, pour chaque courbe forward et en fonction de la durée du dérivé que nous devons évaluer, nous ne pouvons sélectionner que le dépôt ayant la même durée que le dérivé.

Taux LIBOR

Le taux LIBOR (London Interbank Offered Rate) est le taux interbancaire historique le plus utilisé au monde pour les taux d'intérêt à court terme. Le calcul des taux de référence LIBOR est fondé sur la soumission quotidienne par des banques de premier plan des taux auxquels une banque peut emprunter des fonds non garantis auprès d'une autre banque.

L'administrateur du taux LIBOR émet des taux quotidiens pour cinq devises différentes : USD, GBP, EUR, JPY et CHF. Chaque taux est offert pour différentes échéances, variant d'au jour le jour à douze mois. Ces taux sont désignés généralement par l'appellation « IBOR » ou, selon leur devise, par exemple « LIBOR en USD ». Publié quotidiennement, le taux LIBOR est le taux utilisé dans une grande variété de contrats, notamment des produits de crédit, des obli-gations, des dérivés.

Le Taux FRA

Un FRA (ou Forward Rate Agreement) est une façon pour un investisseur de se garantir un taux d'intérêt futur. Il s'agit, en compagnie des swaps vanilles, d'un des instruments fixed income les plus répandus sur la place financière.

Un FRA est un accord de taux futurs, conclu entre deux contreparties, de gré à gré. L'un (acheteur) paiera un taux fixe, connu dès la date de signature du FRA. L'autre (vendeur) paiera le taux qui prévaudra au moment où commence le FRA (date de valeur), pour une période donnée (date d'échéance). Le FRA ne donnera lieu, de façon effective, qu'à un seul versement, en date de valeur : la différence entre les deux taux, et se fera en faveur de l'une ou l'autre des contreparties. Si le taux qui prévaut en date de valeur est supérieur au taux fixé en date de signature, c'est l'acheteur qui reçoit de l'argent. Si le taux qui prévaut en date de valeur est inférieur au taux fixé en date de signature, c'est le vendeur qui reçoit de l'argent.

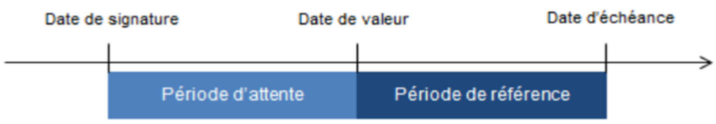


Fig. 2.1 : Diagramme de Forward Rate agreement

Le taux FRA est un taux de référence utilisé dans les contrats forward. Il est généralement de type IBOR (Interbank Offered Rate) de la même durée que le FRA. Le taux FRA est coté avec le taux fixe, ce taux étant le taux forward implicite pour la période.

Calcul du taux forward

Le principe repose sur la supposition que le placement sur plusieurs reprises et équivalent à un placement d'une durée égale à la somme des placements, à l'instant t0, nous ne disposons que de la courbe de taux zéro coupon à ce jour. Or, nous souhaitons connaître le taux zéro coupon correspondant à une période T qui débute à un instant ultérieur t1. Nous devons pour cela calculer le taux Forward à t0, qui débute en t1 et de durée T.

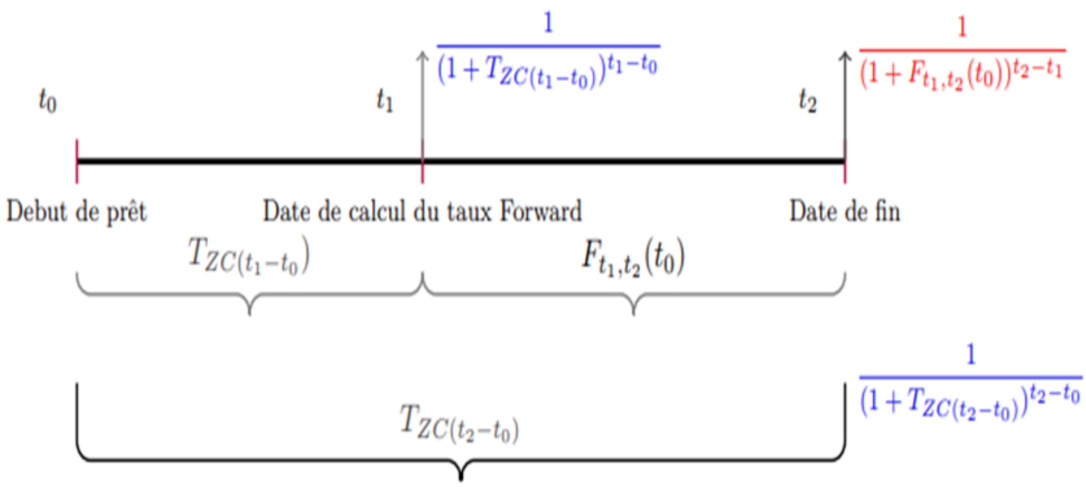


FIG. 2.2 : Schéma explicatif de calcule de taux à terme

Au début, on se positionne à la date t_2 et on actualise le montant pour le ramener à la date t_1 en multipliant par le facteur d'actualisation $\frac{1}{\left(1+F_{t_1,t_2}(t_0)\right)^{t_2-t_1}}$. A ce niveau intervient le taux forward F_{t_1,t_2} que l'on cherche à estimer. Dans le but de ramener ce montant à t_0, il doit être multiplié par $\frac{1}{\left(1+T_{ZC(t_1-t_0)}\right)^{t_1-t_0}}$. Symétriquement, on calcule le montant actualisé à la date t_0 en faisant usage du taux de référence. De ce principe découle l'égalité suivante :

$$\frac{1}{\left(1+T_{ZC(t_2-t_0)}\right)^{t_2-t_0}} = \frac{1}{\left(1+T_{ZC(t_1-t_0)}\right)^{t_1-t_0}} \cdot \frac{1}{\left(1+F_{t_1,t_2}\left(t_0\right)\right)^{t_2-t_1}} \tag{2.1}$$

Nous distinguons plusieurs cas, selon que les périodes de calcul $t_i - t_{i-1}$ sont inférieures ou supérieures à 1 an.

Les paiements à taux fixe d'un swap sont connus à l'avance, de sorte que le calcul de leur valeur actuelle est un processus simple. En revanche, les taux flottants, par définition, ne sont pas connus à l'avance, de sorte que la banque de swap les prédit en utilisant les taux à terme applicables à chaque date de paiement. Les taux à terme sont ceux qui sont implicites à partir des taux au comptant actuels. Ils sont calculés à l'aide de l'équation :

$$rf = \left(\frac{Df_i}{Df_{i+1}} - 1 \right) \cdot N$$

- rf_i = le taux à terme à une période commençant au temps i
- df_i = le facteur d'actualisation pour la période allant du présent au temps i
- df_{i+1} = le facteur d'actualisation pour la période i + 1
- N = le nombre de fois par an que les coupons sont payés

On considère que les taux zéro coupon pour les autres échéances soient connus :

Année	Taux zc
1	4%
2	5%
3	5.5%
4	5.85%
5	6%

Tab. 2.1 : Table des taux zéro coupon

Ainsi pour la seconde année, les taux forward est le taux qui devrait être observé dans un an pour qu'un placement a 2 ans donne le même résultat que les deux placements successifs à un an. On écrit donc :

$$100 \cdot (1 + r_{zc3})^3 = 100 \cdot (1 + rzc2)^2 * (1 + R_{f_2}) \tag{2.2}$$

On obtient donc :

$$R_{F_2} = 100 \cdot (1 + r_{zc3})^3 \,/\, \left(100 \cdot (1 + r_{zc_2})^2\right) - 1 \tag{2.3}$$

En générale on peut dire que le taux forward pour une maturité n ans, vu de la date 0, est le taux a 1 ans qui devrait être observe au début de la nième année pour qu'un placement a n années soit équivalent a la succession de deux placements, le premier sur n-1 années avec le taux zc de l'année n-1 et le second sur un an avec le taux forward recherché :

On écrit donc :

$$rf = \left(\frac{Df_i}{Df_{i+1}} - 1 \right) \cdot N \tag{2.4}$$

Avec la formule on peut compléter le tableau suivant :

Année	Taux zc	Taux forward de l'année n
1	4%	–
2	5%	6%
3	5.5%	6.5%
4	5.85%	6.9%
5	6%	6.6%

Tab. 2.2 : Table des taux forward

Swaps de taux d'intérêts (IRS)

Les swaps de taux d'intérêt sont des produits dérivés négociés de gré à gré dans lesquels deux institutions conviennent d'échanger des taux fixes contre des taux variables.

Les swaps de marché sur l'Euribor peuvent être utilisés comme instruments de bootstrapping pour la construction de la partie moyen-long terme de la courbe à terme (dans certains cas, lorsque les swaps sont disponibles, nous pouvons les utiliser pour construire la courbe jusqu'à 60 ans)

2.3.1 Généralité sur Swap

Un swap de taux est un contrat d'échange de taux d'intérêts (fixe contre variable) entre deux contreparties A et B. Ces flux (appelés branches ou jambes du swap) sont calculés sur la base de positions obligataires sous-jacentes (fictives) en tous points identiques à l'exception du mode d'indexation :

1. Type de taux (fixe vs variable)

   Taux fixe (Taux swap) :

   - Le niveau de taux fixe : ce taux est déterminé de façon à ce que la valeur nette du swap soit nulle le jour de sa création. Ce taux est parfois exprimé en marge "Spread" par rapport à un bon de trésor nouvellement émis de maturité équivalente à celle du swap.
   - La base et le mode de calcul des intérêts de la jambe fixe (proportionnel ou actuariel).
   - L'échéancier des versements (paiements annuels, semestriels...).
   - Le mode d'ajustement des dates.

   Taux variable :

   - Le taux de référence : le taux variable n'est généralement payé qu'en fin de période et connu au jour de la transaction.
   - La périodicité du taux de référence.

- L'échéancier des paiements.

2. Périodicité des coupons

   La fréquence de paiement est le plus souvent multiple d'un nombre entier de mois. Les fréquences les plus utilisées sont : fréquence mensuelle, trimestrielle, semi annuelle et annuelle.

2.3.2 Détermination d'échéanciers d'intérêts :

Mode de calcul des intérêts :

La méthode de calcul des intérêts diffère selon la convention utilisée, nous distinguons deux méthodes, proportionnelle et actuarielle.
- Pour la méthode proportionnelle, la formule de calcul du coupon d'intérêt

Est la suivante :

$$C = \text{Notionnel}\ \ \text{Taux}\,\% \frac{\text{Nbr Jours}}{\text{Base}}$$

– Pour la méthode actuarielle, la formule de calcul du coupon d'intérêt est la suivante :

$$C = \text{Notionnel}\ (1 + \text{Taux}\,\%)^{\frac{\text{Nbr.Jours}}{\text{Base}}} - 1$$

1. Convention de décalage des dates de paiement : Lorsqu'une date d'anniversaire tombe un jour férié, et comme un paiement ne peut avoir lieu qu'un jour ouvré, nous choisissons une convention pour le paiement :

   Méthode Following : le paiement a toujours lieu le premier jour ouvert après la date d'anniversaire, si ce jour est férié.

   Méthode Modified Following : Le paiement a lieu le premier jour ouvert après la date d'anniversaire sauf si ce décalage fait changer le mois calendaire. Si c'est le cas, le paiement a alors lieu le premier jour ouvert avant la date d'anniversaire.

   Preceding : le paiement a toujours lieu le premier jour ouvert avant la date d'anniversaire si elle est fériée.

2. Convention de décompte des jours :

   - La base "Act/360" : Elle calcule le nombre de jours exact de chaque mois et considère que l'année est constituée de 360 jours.

   - La base "30/360" : Elle considère tous les mois composés de 30 jours et l'année constituée de 360 jours.

- La base "Act/365" : Elle calcule le nombre de jours exact de chaque mois et considère que l'année est constituée de 365 jours.

- La base "Act/Act" : Elle calcule le nombre de jours exact des mois et des années.

Swap de taux

Supposons que deux contreparties A et B s'engagent dans un contrat de swap de taux (fixe vs variable) pour :

- Une maturité T
- Un montant nominal N
- Un taux de swap C (sur la branche fixe)

Regardons les flux provenant des branches fixe et variable du point de vue de la contrepartie. Sur la branche fixe du swap, la contrepartie A va recevoir aux dates $t_i(i = 1...K)$ un montant d'intérêt F_{f_i} calculé à partir du taux fixe C :

$$F_{fi} = NCf_{Fixe} \quad \text{avec Base }_{Fixe} = 30/360$$

Le graphique permet de visualiser le flux d'intérêt correspondant à la branche fixe du swap du point de vue de la contrepartie.

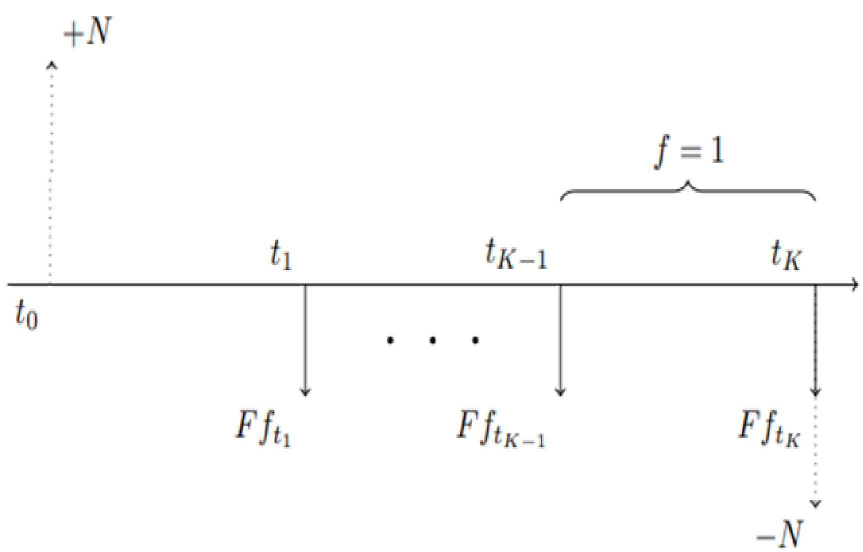


Fig. 2.3 : Cashflows sur la Branche Fixe (1Y) du Swap

Sur la branche variable du swap, la contrepartie A va payer aux dates t (j=1. . . M) un montant d'intérêt F_vj indexé sur un taux variable Z_j (indice Euribor 6M) :

$$F_{vi} = NZ_j f_{\text{Variable}} \text{ avec Base }_{\text{Variable}} = \text{Exact } /360$$

Le graphique permet de visualiser le flux d'intérêt correspondant à la branche variable du swap du point de vue de la contrepartie A. Seul le premier cash-flow Fv 1 est connu en date d'initialisation du swap, les autres cashflows $Fv_j(j = 2...M)$ ne seront connus qu'en date de fixing des taux Euribor correspondants.

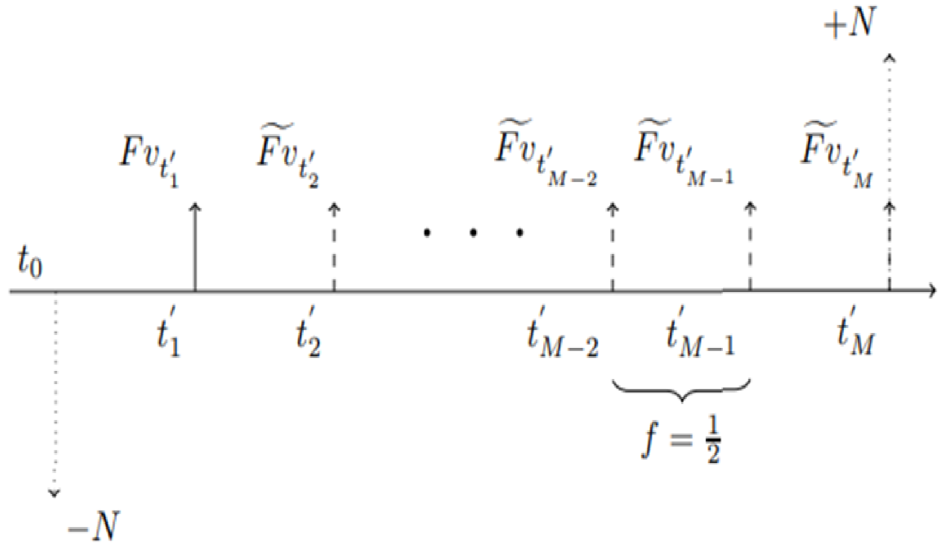


Fig. 2.4 : Cashflows sur la Branche Variable (6M) du Swap

La légende des graphiques 2.3 et 2.4 est la suivante :

$\longrightarrow$ Flux certains connus à l'initiation du swap (branches fixe et variable)

--→ Flux incertains dont le montant exact sera connu en début de période de coupon (branche variable)

--→Flux en capital non échangés dans le cadre d'un contrat de swap mais représentés à titre indicatif

Le montant nominal N qui sert au calcul des flux d'intérêts est le même sur chaque branche (mais n'est pas échangé) et les dates de départ et de n sont les mêmes sur la branche fixe et la branche variable :

$$t_0 = t'_0 = 0 \text{ et } t_K = t'_M = T$$

Un swap est un instrument financier hors bilan car seuls les flux d'intérêt sont échangés et non les flux en capital. De surcroît, la valeur de marché d'une transaction de swap à l'initiation du swap est nulle (les branches fixe et variables se compensant parfaitement en termes de valorisation) :

$$V_{\text{Swap}} = 0 \text{ (a l'initiation de la transaction)}$$

Par conséquent, une transaction de swap (standard) ne donne lieu à aucun paiement en date de valeur du swap (J+2) de la contrepartie acheteuse vers la contrepartie vendeuse. Par convention, la branche fixe du swap sert de référence sur le marché des swaps et il est d'usage de dire que :

- La contrepartie B paye le fixe
- La contrepartie A reçoit le fixe

Les courbes correctes dépendent de la juridiction dans laquelle le swap est évalué, comme le montre le tableau 1 :

Juridiction	La fréquence du jambe fixe	Nombre du jour du jambe fixe	La fréquence du jambe variable	Nombre du jour du jambe variable
USD	6M	ACT/360	3M	ACT/360
EUR ($> 1Y$)	1Y	ACT/360	6M	ACT/360
JPY	6M	ACT/365	6M	ACT/365
GBP (> 1Y)	6M	ACT/365	6M	ACT/360
CHF (> 1Y)	1MY	ACT/360	6M	ACT/360

Tab. 2.3 : Comparaison des fréquences et de la durée des segments fixes et variables dans les juridictions

Conventions sur les swaps pour les principales juridictions :

Juridiction	Courbe Overnight pertinente	La convention du jour de l'Overnight
USD	U.S. Federal Reserve (federal funds rate)	ACT/360
GBP	Sterling Overnight Index Average (SONIA)	ACT/365
JPY	Tokyo Overnight Average Rate (TONAR, also called MUTAN)	ACT/365
EUR	Euro Overnight Index Average (Eonia®)	ACT/360
CHF	Swiss Average Rate Overnight (SA-RON®)	ACT/360

Tab. 2.4 : Courbes de OIS pertinentes et convention journalière par juridiction

2.3.3 Pricing du Swap

Puisque le swap est la combinaison de la jambe fixe et de la jambe variable, la valeur du swap est égale à chaque instant à la différence entre les valeurs des deux jambes. Il devient alors essentiel de déterminer la valeur de chacune des deux jambe fixe et variable, afin de déterminer la Valeur Actuelle Net du swap.

Valorisation de la jambe fixe :

La jambe fixe est assimilée à une obligation qui verse des coupons à taux fixe. Sa valorisation revient donc à valoriser une obligation à taux fixe dont le taux facial est le taux fixe, et dont les taux d'actualisation sont récupérés à partir de la courbe de taux de référence, correspondante à la devise du swap.

$$J_{fixe} = \sum_{i=k}^{n} \frac{F_{fi}}{(1+ZCi)^{\left(Dc_{fi}-D_{val}\right)}}$$

Où :

- J_{fixe} : est la valeur de la jambe fixe.
- Dc_{fi} : est la date du $i^{\text{ème}}$ coupon fixe.
- D_{val} : est la date de valorisation.
- Z_{Ci} : est le taux zéro-coupon de référence correspondant à la période entre la date de valorisation et la date du $i^{\text{ème}}$ coupon fixe.
- n : est le nombre de coupons de la jambe fixe.
- k : est l'indice de la date du prochain coupon fixe après la date de valorisation.

Valorisation de la jambe variable :

La jambe fixe est assimilée à une obligation qui verse des coupons à taux variable. Ce taux indexé sur le taux de marché correspondant à la devise du swap. Nous allons donc valoriser cette jambe de la même façon d'une obligation à taux variable.

$$J_{var} = \sum_{j=l}^{n\prime} \frac{f_{varj}}{(1+ZCi)^{\left(Dc_{fi}-D_{val}\right)}}$$

Où :

- J_{fixe} : est la valeur de la jambe variable.
- Dc_{fi} : est la date du $j^{\text{ème}}$ coupon variable.
- D_{val} : est la date de valorisation.
- F_{fi} : est le flux variable versé à la date Dc_{fvar}

VAN du swap de taux :

Pour un Vendeur de Swap : C'est à dire payeur du variable et receveur du fixe.

$$VAN = J_{\text{fixe}} - J_{\text{var}}$$

Ce qui donne :

$$VAN = \sum_{i=k}^{n} \frac{F_{fi}}{(1+ZCi)^{\left(Dc_{fi}-D_{val}\right)}} - \sum_{j=l}^{n\prime} \frac{f_{\text{varj}}}{(1+ZCi)^{\left(Dc_{fi}-D_{val}\right)}}$$

Pour un Payeur de Swap : c'est à dire payeur du fixe et receveur du variable.

$$VAN = J_{\text{fixe}} - J_{var}$$

Ce qui donne :

$$VAN = \sum_{j=l}^{n\prime} \frac{f_{varj}}{(1+ZCi)^{\left(Dc_{fi}-D_{val}\right)}} - \sum_{i=k}^{n} \frac{F_{fi}}{(1+ZCi)^{\left(Dc_{fi}-D_{val}\right)}}$$

Détermination du taux swap :

La valorisation d'un swap de taux revient à déterminer le taux Swap, c'est le taux d'intérêt fixe exigé par l'acheteur du swap et versé par son vendeur. Ce taux, intervenant dans le calcul des flux fixes F_{f_i} est déterminé par l'égalisation des deux jambes.

On a :

$$F_{fi} = N\frac{(ti-t_{i-1})}{base}\tau_{\text{fixe}}$$

Où :

- N : est le montant notionnel.
- ti : est L'instant de paiement des intérêts fixes.
- n : est le nombre de paiements.
- base : est le nombre de jours de la base de décompte des jours $(360, 365$ ou $366)$.

Nous déduisons le taux Swap, à partir de l'égalité suivante :

$$J_{\text{fixe}} = J_{\text{var}} \text{ (1)}$$

Ce qui est équivalent à :

$$\sum_{i=k}^{n} \frac{N\frac{(ti-t_{i-1})}{base}\tau_{fixe}}{(1+ZCi)^{\left(Dc_{fi}-D_{val}\right)}} = \sum_{j=l}^{n\prime} \frac{N\frac{(ti-t_{i-1})}{base}\left(\tau_{frwd_i} + \text{ spread }\right)}{(1+ZCi)^{\left(Dc_{fi}-D_{val}\right)}}$$

Nous trouvons par la suite :

$$\tau_{\text{fixe}} = \sum_{j=l}^{n'} \frac{\frac{N\frac{(ti-t_{i-1})}{base}(\tau_{\text{forward}} + \text{spread})}{(1+ZCi)^{\left(Dc_{fi}-D_{\text{val}}\right)}}}{N\frac{(ti-t_{i-1})}{base}} \quad (2.5)$$

Remarque : Généralement le taux swap est calculé pour un Spread nul.

Spread : ou marge additive, elle représente la quantité qu'on ajoute au taux variable pour le calcul des flux de la jambe variable. Le spread est aussi utilisé dans la partie risque crédit, et traduit le degré de confiance de la contrepartie à honorer ses engagements.

Détermination du spread :

À partir de l'égalité (2.5) nous obtenons :

$$\text{Spread} = \frac{\sum_{i=k}^{n} \frac{N\frac{(ti-t_{i-1})}{base}\tau_{fixe}}{(1+ZCi)^{\left(Dc_{fi}-D_{\text{val}}\right)}} - \sum_{j=l}^{n'=} \frac{N\frac{(ti-t_{i-1})}{base}\tau_{\text{var}}}{(1+ZCi)^{\left(Dc_{fi}-D_{\text{val}}\right)}}}{\sum_{i=k}^{n} \frac{N\frac{(ti-t_{i-1})}{base}}{(1+ZCi)^{\left(Dc_{fi}-D_{\text{val}}\right)}}}$$

Valorisation à l'aide du facteur d'actualisation à l'échéance finale

les paiements de la jambe flottante d'un swap de taux d'intérêt peuvent être évalués en utilisant uniquement le facteur d'actualisation pour la période d'échéance finale et le principal notionnel.
Avec : N =10000

La période	Taux zéro coupon %	Facteur d'actualisation	Taux forward %
1	5.5	0.94786729	5.5
2	6	0.889996	6.50236
3	6.25	0.833706	6.75177
4	6.5	0.777323	7.253534
5	7	0.712986	9.023584

Tab. 2.5 : Tableau des différents taux de valorisation

Cela consiste à échanger le principal notionnel au début et à la fin du swap et à l'investir à un taux flottant dans l'intervalle. Dans les deux cas, le résultat net est une collection de paiements d'intérêts à taux variable. Le principal plus les paiements provenant du placement pendant la durée du swap doivent être actualisés à la valeur du principal au début du swap.

Les paiements fixes	Les paiements variables	Valeur de la jambe fixe	Valeur de la jambe variable
689.625	550	653.67299	521.32701
689.625	650.23696	613.76379	578.70858
689.625	675.17703	574.94484	562.89947
689.625	725.35350	536.06144	563.83402
689.625	902.35847	491.69309	643.36912

TAB. 2.6 : Les différentes paiements de la jambe sont fixes et variables

2.3.4 Théorème de la représentation de Martingale

En théorie des probabilités, le théorème de représentation des martingales stipule qu'une variable aléatoire mesurable par rapport à la filtration générée par un mouvement brownien peut être écrite en termes d'une intégrale d'Itô par rapport à ce mouvement brownien.

Le théorème n'affirme que l'existence de la représentation et n'aide pas à la trouver explicitement ; il est possible dans de nombreux cas de déterminer la forme de la représentation à l'aide du calcul de Malliavin. Des théorèmes similaires existent également pour les martingales sur les filtrations induites par des processus de saut, par exemple, par des chaînes de Markov. À la suite de Baxter (1966), Hull (2011) et Burgess (2014), nous avons établi le théorème de représentation des martingales qui nous fournit un cadre pour évaluer le prix d'une option à l'aide de la formule ci-dessous, dans laquelle le prix V_t à l'instant t d'une telle option avec un gain X_T à l'instant T est évalué par rapport à un actif négociable ou à un numéraire N avec la mesure de probabilité correspondante Q_N.

$$\tfrac{V_t}{N_t} = E^{Q_N}\left[\tfrac{X_T}{N_T}/F_t\right]$$

Ce qu'est équivaut de :

$$V_t = N_t E^{Q_N}\left[\frac{X_T}{N_T}/F_t\right]$$

Où V_t est le prix de l'option évalué au temps t,N_t est le numéraire évalué au temps t, $\mathrm{E}^{\mathrm{Q_N}}$ est une espérance par rapport à la mesure du numéraire N, X_T est au temps T.

Une option européenne avec un gain X_T au temps T prend la forme suivante pour un call européen :

$$X_T = \max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+$$

Et de même pour une option de vente européenne :

$$\mathrm{X}_T = \max(K - S_T, 0) = (K - S_T)^+ (2.6)$$

Valeur actuelle du swap

Une swaption de taux d'intérêt est une option et un swap de taux d'intérêt (IRS). Afin d'évaluer le paiement de la swaption, nous devons comprendre l'instrument IRS et la manière de déterminer son prix ou sa valeur actuelle.

Dans une transaction de swap de taux d'intérêt, une série de flux financiers fixes est échangée contre une série de flux financiers flottants. On peut considérer un swap comme un accord d'échange d'un prêt à taux fixe contre un prêt à taux variable ou flottant. Burgess (2017a) présente un examen approfondi des swaps de taux d'intérêt, de leur pricing et des risques qu'ils présentent.

La valeur actuelle nette PV ou le prix d'un swap de taux d'intérêt peut être évalué comme suit.

$$PV^{\text{Swap}} = \varphi(PV^{\text{Fixed leg}} - PV^{\text{Float Leg}}) = \varphi\left[\sum_{i=1}^{n} N r^{\text{Fixed}} \tau_i \rho\left(t_E, t_i\right) - \sum_{j=1}^{m} N\left(l_{j-1}+s\right) \rho\left(t_E, t_j\right)\right] \tag{2.7}$$

Où PV Fixed Leg fait référence à la valeur actuelle des paiements de swaps à coupons fixes. Les swaps receveurs reçoivent les coupons fixes (et paient les coupons flottants) et les swaps payeurs paient les coupons fixes (et reçoivent les coupons flottants). La jambe PV Float fait référence à la valeur actuelle des paiements de swaps de coupons Libor variables ou flottants. Chaque coupon est déterminé par le taux Libor au début de la période de coupon. Lorsque le taux Libor est connu, on dit que le taux a été fixé ou réinitialisé et que le paiement du coupon correspondant est connu.

Sur le marché des swaps, les investisseurs souhaitent conclure des transactions à coût nul. À la date d'entrée en vigueur du swap, le swap a une valeur nulle, mais au fil du temps, ce n'est plus le cas et le swap devient rentable ou déficitaire. À cette fin, les investisseurs veulent savoir quel taux fixe doit être utilisé pour rendre égales les jambes fixe et flottante d'une transaction de swap, que nous appelons P^{Market}. Ce taux fixe est appelé taux de swap ou taux nominal. Les swaps de taux d'intérêt sont généralement cotés et négociés sur les marchés financiers en tant que taux nominal, c'est-à-dire le taux qui correspond à la valeur actuelle de la VA de la jambe fixe et de la VA de la jambe flottante. Ainsi, les swaps qui sont exécutés avec le taux fixe au taux nominal sont appelés swaps au taux nominal et ont une valeur ajoutée nette de zéro.

$$PV^{\text{Swap}} = \varphi\left[\sum_{i=1}^{n} N r^{Fixed} \tau_i \rho\left(t_E, t_i\right) - \sum_{j=1}^{m} N\left(l_{j-1}+s\right) \tau_j \rho\left(t_E, t_j\right)\right] \tag{2.8}$$

Puisque les swaps au pair ont une PV nulle, nous en déduisons,

$$\sum_{i=1}^{n} N r^{\text{Fixed}} \tau_i \rho\left(t_E, t_i\right) = \sum_{j=1}^{m} N\left(l_{j-1}+s\right) \tau_j \rho\left(t_E, t_j\right) \tag{2.9}$$

En outre, les swaps au pair ont un taux fixe égal au taux nominal, c'est-à-dire que $r^{\text{Fixed}} = p^{\text{Market}}$.

En suivant Burgess (2017a), nous pouvons représenter la jambe flottante comme une jambe fixe négociée au taux nominal du marché P^{Market} et donc (7) devient,

$$\begin{aligned} PV^{\text{Swap}} = \varphi \left[\sum_{i=1}^{n} N \left(r^{\text{Fixed}} - p^{\text{Market}} \right) \tau_i \rho \left(t_E, t_i \right) - \sum_{j=1}^{m} N s \tau_j \rho \left(t_E, t_j \right) \right] = \\ \varphi \left[\left(r^{\text{Fixed}} - p^{\text{Market}} \right) A_N^{\text{Fixed}} - s A_N^{\text{Float}} \right] \end{aligned} \tag{2.10}$$

Où :

- A_N^{Fixed} : $N \tau_i \rho \left(t_E, t_i \right)$

Dans le cas où il n'y a pas de spreads Libor sur la jambe flottante, cela se simplifie :

$$\begin{aligned} PV^{\text{Swap}} = \varphi \left[\sum_{i=1}^{n} N r^{\text{Fixed}} \tau_i \rho \left(t_E, t_i \right) - \sum_{j=1}^{m} N l_{j-1} \tau_j \rho \left(t_E, t_j \right) \right] \\ = \varphi \left[\left(r^{\text{Fixed}} - p^{\text{Market}} \right) A_N^{\text{Fixed}} \right] \end{aligned} \tag{2.11}$$

2.3.5 Pricing du Swaption

Dans une swaption receveuse, le détenteur a le droit de recevoir les flux fixes du swap sous-jacent à un taux d'exercice convenu aujourd'hui et de payer les flux de la jambe flottante. Un détenteur d'option rationnel n'exercera l'option que si les flux fixes à recevoir sont supérieurs aux flux flottants à payer. Le gain correspondant de l'option $X_(T)$peut être représenté comme suit :

$$\begin{aligned} X_T = \max \left(\sum_{i=1}^{n} N K \tau_i \rho \left(t_E, t_i \right) - \sum_{j=1}^{m} N l_{j-1} \tau_j \rho \left(t_E, t_j \right), 0 \right) \\ = \max \left(A_N^{\text{Fixed}} K - A_N^{\text{Fixed}} p^{\text{Market}}, 0 \right) \\ = A_N^{\text{Fixed}} \max \left(K - p^{\text{Market}}, 0 \right) \\ = A_N^{\text{Fixed}} \left(\mathrm{K} - \mathrm{p}^{\text{Market}} \right)^{+} \end{aligned} \tag{2.12}$$

Comme on peut le voir en comparant (2.12) et (2.6), le payoff d'une swaption réceptrice reproduit le payoff d'une option de vente échelonné par l'annuité de la jambe fixe du $swap A_N^{Fixed}$

De même, une swaption payeuse confère à son détenteur le droit de recevoir les flux de trésorerie fixes du swap sous-jacent et a un payoff X_T.

Toujours en comparant (2.12) et (2.6), le paiement d'une swaption payeuse reproduit le paiement d'une option d'achat échelonné par l'annuité de la jambe fixe de la swap A_N^{Fixed}.

Il est facile de constater, à partir du paiement de la swaption, qu'une swaption payeuse représente le paiement d'une option d'achat et une swaption réceptrice le paiement d'une option de vente.

Les deux options donnent le droit, mais non l'obligation, de conclure un contrat de swap dans le futur pour payer ou recevoir des flux de trésorerie fixes en échange de flux de trésorerie flottants, le taux fixe étant fixé aujourd'hui au taux d'exercice K.

Dans le cas général, nous pouvons représenter le paiement d'une swaption comme suit,

$$X_T = A_N^{\text{Fixed}} \left(\varphi \left(p^{\text{Market}} - K\right)^+\right) \tag{2.13}$$

Où $\phi = 1$ pour une swaption payeuse et -1 pour une swaption receveuse.

En appliquant le théorème de représentation des martingales de la section précédente, nous pouvons déterminer le prix de la swaption à l'aide de l'équation de gain de la swaption de (2.13), ce qui donne :

$$\begin{aligned} V_t &= N_t E^{Q_N}\left[\frac{X_T}{N_T}/F_t\right] \\ &= N_t E^{Q_N}\left[\frac{A_N^{\text{Fixed}}\left(\varphi\left(p^{\text{Market}} - K\right)^+\right)}{N_T}/F_t\right] \end{aligned} \tag{2.14}$$

En suivant Burgess (2017a), nous pouvons choisir un numéraire pratique pour simplifier le terme d'espérance dans (2.14). Dans ce cas, nous choisissons la mesure d'annuité A_N^{Fixed} avec la mesure de probabilité correspondante Q_A , ce qui conduit à,

$$\begin{aligned} V_t &= A_N^{\text{Fixed}}(t) E^{Q_A}\left[\frac{A_N^{Fixed}(T)\left(\varphi\left(p^{\text{Market}} - K\right)^+\right)}{A_N^{\text{Fixed}}(T)}/F_t\right] \\ &= A_N^{\text{Fixed}}(t) E^{Q_A}\left[\left(\varphi\left(p^{\text{Market}} - K\right)\right)^+/F_t\right] \end{aligned} \tag{2.15}$$

Nous pourrions à ce stade constater que le terme d'espérance dans (2.15) peut être évalué à l'aide de la formule généralisée de Black-Scholes (1973). Toutefois, par souci d'exhaustivité, nous remplaçons la mesure de l'annuité Q_A par la mesure plus familière et native de Black-Scholes (1973), à savoir la mesure du risque neutre Q. Il s'agit simplement a aider à identifier l'espérance de Black-Scholes et ce n'est pas une exigence réelle.;

À la suite de Baxter (1966), Hull (2011) et Burgess (2014), nous appliquons la dérivée de

Radon-Nikodym, qui nous permet de modifier le numéraire et la mesure de probabilité associée d'une espérance et qui est souvent utilisée conjointement avec le théorème de représentation de Martingale. La dérivée de Radon-Nikodym dQ_M/dQ_N est définie comme suit,

$$(dQ_M/dQ_N) = \frac{\frac{\mathrm{M_t}}{\mathrm{M_T}}}{\frac{\mathrm{N_t}}{\mathrm{N_T}}} = \frac{N_{\mathrm{T}}}{N_t}\frac{M_T}{M_t} \tag{2.16}$$

Pour passer de Q_N à Q_M, on peut multiplier V_t par la dérivée de Radon-Nikodym (dQ_M/dQ_N)

L'utilisation de la dérivée de Radon-Nikodym pour changer la mesure d'annuité Q_A à la mesure du risque neutre Q dans 2.15 conduit à une expression généralisée de type formule de Black-Scholes, comme indiqué ci-dessous.

$$\begin{aligned}
V_t &= A_N^{\text{Fixed}}(t)E^Q\left[\left(\frac{dQ}{dQ_A}\right)\left(\varphi\left(p^{\text{Market}}-K\right)\right)^+/F_t\right] \\
&= A_N^{\text{Fixed}}(t)E^Q\left[\frac{\left(\frac{e^{rt}}{e^{rT}}\right)}{\frac{A_N^{Fixed}(t)}{A_N^{N_{\text{Fixed}}}(T)}}\left(\varphi\left(p^{\text{Market}}-K\right)\right)^+/F_t\right] \\
&= A_N^{\text{Fixed}}(t)E^Q\left[\left(\frac{e^{rt}}{e^{rT}}\right)\frac{A_N^{\text{Fixed}}(T)}{A_N^{\text{Fixed}}(t)}\left(\varphi\left(p^{\text{Market}}-K\right)\right)^+/F_t\right] \\
&= A_N^{\text{Fixed}}(t)E^Q\left[e^{-r(T-t)}\frac{A_N^{\text{Fixed}}(T)}{A_N^{\text{Fixed}}(t)}\left(\varphi\left(p^{\text{Market}}-K\right)\right)^+/F_t\right]
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Notons que $e^{-r(T-t)}$ est l'opérateur du facteur d'actualisation du temps T à t dans le cadre de la mesure du compte d'épargne. Si nous actualisons l'annuité au comptant $A_{N(T)}^{\text{Fixed}}$ au temps t en appliquant l'opérateur du facteur d'actualisation, nous obtenons le résultat $A_{N(T)}^{Fixed}e^{-r(T-t)} = A_{N(t)}^{Fixed}$

$$\begin{aligned}
V_t &= A_N^{\text{Fixed}}(t)E^Q\left[\frac{A_N^{Fixed}(t)}{A_N^{N_{\text{ixed}}}(t)}\left(\varphi\left(p^{\text{Market}}-K\right)\right)^+/F_t\right] \\
&= A_N^{\text{Fixed}}(t)\underbrace{E^Q\left[\left(\varphi\left(p^{\text{Market}}-K\right)\right)^+/F_t\right]}_{\text{Black Scholes}}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Dans le cas où notre swap sous-jacent a un spread Libor sur la jambe flottante, l'utilisation de 2.8 donne,

$$V_t = A_N^{\text{Fixed}}(t)E^Q\left[\left(\varphi\left(p^{\text{Market}} + s\left(\frac{A_N^{\text{Fixed}}(T)}{A_N^{\text{Fixed}}(t)}\right) - K\right)\right)^+ /F_t\right]$$
$$= A_N^{\text{Fixed}}(t)E^Q\left[\left(\varphi\left(p^{\text{Market}} - K\right)\right)^+ /F_t\right]$$

Où

$$K' = K - s\left(\frac{A_N^{\text{Float}}(T)}{A_N^{\text{Fixed}}(t)}\right) \tag{2.19}$$

2.3.6 Formules généralisées de Black-Scholes et de Black-76

La formule généralisée de Black-Scholes pour l'évaluation des options européennes, voir Black-Scholes (1973), est populaire parmi les traders et les praticiens du marché en raison de sa traçabilité analytique. La formule s'appuie fortement sur la couverture dynamique du delta, voir Derman et Taleb (2005) pour plus de détails. Elle évalue le prix V_t à l'instant t d'une option européenne expirant à l'instant T de la manière suivante,

$$V_t^{BS} = \varphi e^{-r(T-t)}\left[S_t e^{-b(T-t)}N(\varphi d_1) - KN(\varphi d_2)\right]$$

Où

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(b + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Et

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

En outre, comme indiqué dans Burgess (2017b), le fait de fixer le terme de portage b = 0 conduit à la formule de Black-76 pour l'évaluation des options sur taux d'intérêt, à savoir,

$$V_t^{BS76} = \varphi e^{-r(T-t)}\left[S_t N(\varphi d_1) - KN(\varphi d_2)\right] \tag{2.20}$$

Comme indiqué dans l'annexe, nous devons maintenant reconnaître que la formule de pricing des swaptions de 2.18 n'est rien d'autre que la formule généralisée de Black-Scholes (1973) mise à l'échelle par le facteur d'annuité $A_{(N)}^{Fixed}(t)$. Dans ce cas particulier, l'actif sous-jacent est un taux d'intérêt, nous adaptons donc la formule de Black-Scholes généralisée, comme indiqué dans Burgess, pour déterminer le prix des options sur taux d'intérêt en fixant le terme de portage b à zéro, ce qui conduit à la formule de Black-76, voir Black (1976).

Il convient de noter qu'en comparant la formule de Black-76 de 2.18 et notre formule de pricing des swaptions, nous avons un terme d'actualisation supplémentaire $e^{-r(T-t)}$, que nous éliminons en fixant le taux zéro r = 0 pour que ce terme supplémentaire soit égal à l'unité.

Par conséquent, l'application du résultat généralisé de Black-Scholes (1973) avec le terme de portage b = 0 et le taux zéro r = 0 conduit au résultat suivant. Les swaptions européennes peuvent être évaluées à l'aide de la formule analytique de Black-76 mise à l'échelle par la durée de l'annuité de la jambe fixe du swap de taux d'intérêt $A_N^{Fixed}(t)$.

$$V_t = A_N^{\text{Fixed}}(t) \text{ Black } - 76\left(p^{\text{Market}}, K, N(T-t), \sigma(K,t), r=0\right) \tag{2.21}$$

En citant cela explicitement, nous avons,

$$V_t = \varphi A_N^{\text{Fixed}}(t)\left[p^{\text{Market}} N(\varphi d_1) - KN(\varphi d_2)\right] \tag{2.22}$$

$$\begin{gathered} d_1 = \frac{\ln\left(\frac{p^{\text{Market}}}{K}\right) + \left(\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \end{gathered} \tag{2.23}$$

Et $\phi = 1$ désigne une swaption payante et $\phi = -1$ une swaption receveuse. Dans le cas où notre swap sous-jacent a une marge flottante Libor, nous ajustons le strike comme indiqué dans 2.18 en remplaçant K par K'.
où

$$K' = K - s\left(\frac{A_N^{\text{Float}}(T)}{A_N^{\text{Fixed}}(t)}\right) \tag{2.24}$$

2.3.7 Conclusion

En conclusion, nous avons examiné le théorème de représentation des martingales pour l'évaluation des options, qui nous permet d'évaluer les options en fonction d'un numéraire de notre choix. Nous avons également examiné les résultats classiques de l'évaluation des options européennes d'achat et de vente pour nous aider à identifier que les swaptions payeuses sont comparables aux options d'achat et que les swaptions receveuses sont comparables aux options de vente.

Les swaptions de taux d'intérêt étant des options sur des swaps de taux d'inté-rêt, nous avons également étudié la manière d'évaluer et de fixer le prix d'un swap de taux d'intérêt afin de mieux comprendre le gain d'une swaption. En particulier, nous avons souligné qu'un élément clé du prix du swap sous-jacent est la durée de l'annuité, qui a été déterminante dans la sélection d'un numéraire pour évaluer la valeur attendue du swaption.

Nous avons examiné comment évaluer les swaptions de taux d'intérêt en utilisant le théorème de représentation de Martingale pour dériver une solution analytique en forme fermée. Nous avons choisi la mesure de l'annuité pour simplifier le paiement attendu des swaptions. Cela a réduit le calcul du prix à une expression semblable à celle de Black-Scholes (1973). Pour rendre ce calcul plus transparent, nous avons pris une mesure supplémentaire inutile et appliqué la dérivée de Radon-Nikodym pour changer la mesure de probabilité de la mesure de l'annuité au numéraire du compte d'épargne ou à la mesure du risque neutre, qui est plus classique et reconnaissable, pour arriver à une formule de prix des swaptions exprimée en termes de la formule de Black-Scholes (1973).

Nous avons montré que la formule de pricing des swaptions d'intérêt n'est rien d'autre que la formule de Black-76 mise à l'échelle par le facteur d'annuité du swap sous-jacent.

2.4 Interpolation spline cubique

La meilleure interpolation spline qui garantit une courbe de rendement lisse, selon Adams [1], est une interpolation spline cubique. L'interpolation spline cubique garantit non seulement la différentiabilité mais aussi la continuité de la dérivée seconde.. Supposons que nous ayons des données connues $r_1, r_2, \ldots, r_n$ où $r(t_i) = r_i$, pour des coefficients donnés (a_i, b_i, c_i, d_i) pour $1 \leq i \leq n-1$ à n'importe quel moment t la valeur de la fonction sera :

$$r(t) = a_i + b_i (t - t_i) + c_i (t - t_i)^2 + d_i (t - t_i)^3 \quad \mathrm{t}_i \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{t}_{i+1}$$

Dans de nombreuses applications, il est essentiel d'avoir des courbes très régulières qui passent par un grand nombre de points donnés. C'est pourquoi l'interpolation spline cubique est utilisée, notamment pour des jeux de données séquentiels avec un espacement inégal entre les points.

Le concept fondamental consiste à relier chaque paire de points d'observation à l'aide de fonctions polynomiales de degré 3. Ainsi, il est nécessaire de déterminer les coefficients correspondants à chaque intervalle pour ces fonctions polynomiales.

Ainsi, le système revient à résoudre l'équation suivante :

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = a_1 x^3 + b_1 x^2 + c_1 x + d_1 \text{ si } x \in [x_1, x_2] \\ f_2(x) = a_2 x^3 + b_2 x^2 + c_2 x + d_2 \text{ si } x \in [x_2, x_3] \\ f_3(x) = a_3 x^3 + b_3 x^2 + c_3 x + d_3 \text{ si } x \in [x_1, x_2] \\ \vdots\vdots \\ \vdots \\ f_{n-1}(x) = a_{n-1} x^3 + b_{n-1} x^2 + c_{n-1} x + d_{n-1} \text{ si } x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases} \tag{2.25}$$

Ainsi, en interpolant avec cette méthode on obtient les points suivants :

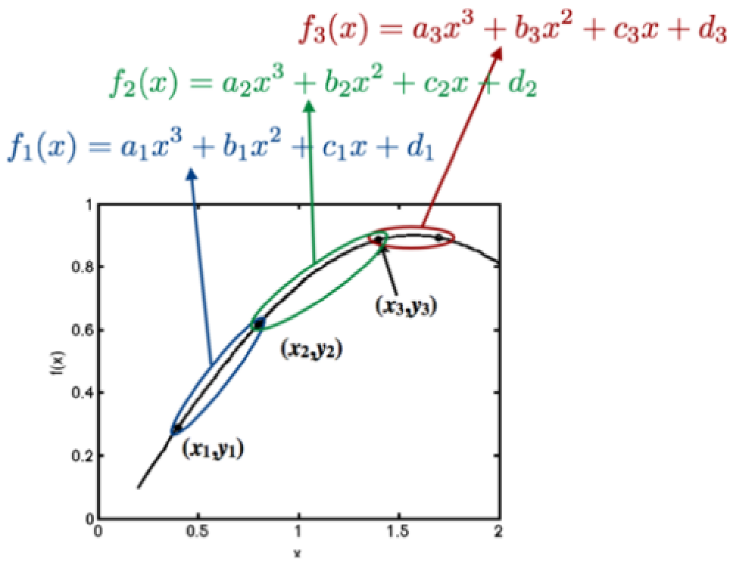


Fig. 2.5 : Illustration de l'interpolation splines cubiques

Méthodologie de la spline cubique

Nous supposons que le praticien a déjà calculé un ensemble de nœuds en utilisant une technique de construction de courbe de rendement telle que le bootstrapping. Une courbe zéro est ensuite ajustée en utilisant la méthodologie de la spline cubique en interpolant entre les nœuds à l'aide de polynômes cubiques individuels. Chaque polynôme a ses propres paramètres mais est construit de telle sorte que ses extrémités touchent chaque nœud au début et à la fin du polynôme. L'ensemble des splines, qui se touchent aux nœuds, forment donc une courbe continue. Notre objectif est de produire une courbe continue, joignant les taux observés sur le marché de la manière la plus régulière possible, ce qui est le moyen le plus direct par lequel nous pouvons déduire des données significatives sur la structure à terme correcte des taux d'intérêt sur le marché.

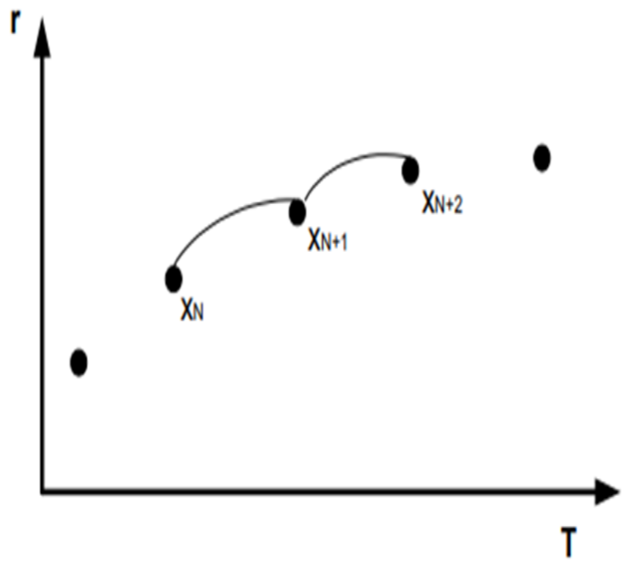


Fig. 2.6 : Méthodologie d'interpolation

On peut voir que deux polynômes cubiques qui se rejoignent au point X_{N+1} sont utilisés pour former une courbe continue. Cependant, il est également clair, d'après les courbes de la figure 1, que les deux polynômes ne donnent pas une courbe lisse. Afin d'obtenir une courbe lisse, nous devons établir des critères de "lissage" pour chaque spline. Pour ce faire, nous devons d'abord nous assurer que les polynômes se touchent ou se rejoignent au niveau des nœuds. Ensuite, nous devons nous assurer que la courbe est lisse là où les polynômes se touchent. Enfin, nous devons nous assurer que la courbe est continuellement différentiable, ou en d'autres termes, que la courbe a un taux de variation régulier aux points de ténor et entre eux. Les critères requis pour remplir ces conditions sont les suivants :

- Condition 1 : la valeur de chaque polynôme est égale aux points ténors.
- Condition 2 : la première différentielle de chaque polynôme est égale aux points ténors.
- Condition 3 : la deuxième différentielle de chaque polynôme est égale aux points ténors.
- Condition 4 : la deuxième différentielle de chaque polynôme est continue entre les points de tenor.

2.5 Volatilité implicite

Afin de traiter correctement les options, la volatilité implicite est un concept très important qu'il faudra prendre en compte. Tout trader connaît la volatilité (dite historique) puisque, plus le sous-jacent fluctue, plus on dit qu'il est volatile. Par exemple, quand le prix d'une action A fluctue beaucoup plus que celle d'une action B alors on dit que l'action

A est plus volatile que celle de B. L'autre volatilité est celle implicite. Le sous-jacent S_t est diffusé dans le temps dans le modèle de Black-Scholes par l'équation :

$$S_t = S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W_t} \forall t \geqslant 0 \tag{2.26}$$

Où S_0 est la valeur à l'origine du sous-jacent, r est le taux sans risque, est la volatilité du sous-jacent et $W = (W_t)$ t> 0 est un mouvement Brownien standard et une autre manière d'écrire cette action est :

$$(dS_t)/S_t = rdt + \sigma dW_t$$

Cette équation décrit l'évolution infinitésimale de S_t , c'est-à-dire l'écart entre S_t et $S_(t+h)$ quand h $\rightarrow$ 0. Comme déjà vu, dans un univers sans risque, r porte l'information du rendement du sous-jacent car la moyenne de dW_t est nulle et celle portée par la variabilité est puisque la source d'aléa est uniquement le mouvement brownien. Nous rappelons qu'avec les notations précédentes, la formule de Black-Scholes de la valeur d'une option européenne d'achat du sous-jacent, de strike K et de maturité T est :

$$\text{Call}_{BS}\left(S_0, K, r, \sigma, T\right) = S_0 N\left(d_1\right) - K e^{-rT} N\left(d_2\right) \tag{2.27}$$

$$\text{où } d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \text{ et } d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T} \tag{2.28}$$

Dans la réalité, les informations descriptives du contrat sont connues (fixées) à l'avance. On a S_0 est observable sur le marché, le strike K et la maturité T sont définis par les deux parties prenantes, le taux sans risque r peut aussi être déterminé à un temps t donné. En revanche, le calcul de la volatilité pose un problème. En effet, il n'en existe pas de valeur unique, ni de manière préétablie pour la calculer. Dans les faits, les prix des options ne sont pas calculés avec la formule de Black-Scholes. La plupart du temps, ces prix résultent simplement de la loi de l'offre et de la demande, laquelle règne sur la plupart des marchés. Quand on regarde alors l'expression non réduite

$$\text{Call }_{\text{market }} = S_0 N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - K e^{-rT} N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \tag{2.29}$$

Il s'agit d'une équation à une inconnue, puisque la seule valeur qui manque est σ. La volatilité implicite est donc la valeur σ pour laquelle cette équation est vraie :

$$\text{Call }_{\text{market }}\left(S_0, K, r, T\right) = \text{Call}_{BS}\left(S_0, K, r, \sigma^{\cdot}, T\right) \text{ ou encore Call}_{\text{market }} = \text{Call}_{BS}\left(\sigma^{\cdot}\right) \tag{2.30}$$

La fonction $\sigma \rightarrow$ Call $_{BS}\left(S_0, K, r, \sigma^*, T\right)$ admet une solution unique car elle est strictement croissante de $[0, +\infty[$ à $]0, S_0]$ et sa dérivée "vega" est aussi strictement positive. La difficulté pour résoudre cette équation est qu'elle fait intervenir des intégrales. Il faut donc faire recours à des procédures numérique pour en approximer la solution. L'idée serait de commencer par une volatilité très élevée, puis de baisser progressivement pour se rapprocher de la bonne valeur, en tâtonnant. Cependant, il est possible d'améliorer cette idée en utilisant l'algorithme de Newton-Raphson où de bissection. L'idée est que grâce à la formule de Taylor pour une fonction f dérivable au moins une fois. La volatilité implicite est définie comme étant la valeur de σ qui, une fois remplacée dans l'expression du call déduit, par exemple, à partir du modèle de Black Scholes, permet de retrouver la valeur numérique du call ou du put donné par le marché. Sur les marchés d'options, les primes sont régulièrement échangées et cotées en prix. On achète et vend des options en payant ou en encaissant des devises, telles que des euros, des dollars, etc. Cependant, il est toujours intéressant de connaître la volatilité qui aurait été nécessaire dans un modèle théorique pour obtenir le prix tel qu'il est sur le marché. Ainsi, il est possible de calculer la volatilité implicite. Toutefois, comme l'inverse de l'expression d'une option européenne définie par Black Scholes est difficile à obtenir, on utilise un procédé de recherche itératif tel que l'algorithme de Newton-Raphson, qui permet d'obtenir la valeur numérique de la volatilité implicite.

Dans un premier temps, pour l'étape pratique, nous attribuons une valeur donnée à σ pour son initialisation, puis nous la remplaçons par σ_n pour une itération n, afin de passer à l'itération suivante $n+1$. Ainsi, nous obtenons :

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \frac{C_{\text{marché}} - C_{BS}}{\frac{\partial C}{\partial \sigma}} \tag{2.31}$$

En d'autres termes, si la différence absolue entre σ_{n+1} et σ_n dépasse une certaine précision, l'algorithme est relancé en utilisant σ_{n+1} comme nouvelle valeur de σ_n. Si cette différence est inférieure à la précision donnée, la volatilité retenue est celle pour laquelle la valeur de l'option du modèle de Black-Scholes est presque égale à la valeur de l'option du marché.

2.5.1 Modèle de Black

Selon Corbet, le prix de l'option sur le marché des capitaux est le même que le prix théorique calculé à l'aide de la formule de Black-Scholes, qui peut s'écrire comme suit,

$$C_{obs} = C_{bs}(\sigma), (x)$$

En faisant de même pour le modèle de black, Par ailleurs, le prix théorique d'une swaption payeuse ($PS_b(\sigma)$) avec la volatilité (σ) de la formule de Black peut être défini comme suit :

$$V_t = A_(N)^{Fixed}(t)[p^{Market}N(d_1) - KN(d_2)]$$

Avec les expressions de d_1 et d_2 sont définit dans la section du pricing. Sur la base de l'équation précédente, la fonction BM peut être formée, à savoir

$$f(\sigma) = C_{ob} - C_b(\sigma)$$

Où

$$f(\sigma) = C_{ob} - A_N^{\text{Fixed}}(t)\left[p^{\text{Market}} N(d_1) - KN(d_2)\right]$$

2.5.2 Méthodes numériques

Les méthodes numériques utilisées pour estimer la valeur de la volatilité sont la méthode de la bissection et la méthode de Newton Raphson. Leurs algorithmes sont respectivement présentés comme suit :

Méthode de bissection

- Étape 1: Définir les approximations initiales σ_{i-1} et σ_i et fixer la valeur de tolérance de l'erreur $\varepsilon_{\text{tol}} = 10^{-4}$
- Étape 2 : Calculer $f\left(\sigma_{i-1}\right)$ et $f\left(\sigma_i\right)$
- Étape 3: Vérifier si la fonction f change de signe sur un intervalle $[\sigma_{i-1}, \sigma_i]$, ce qui peut être vérifié avec $f\left(\sigma_{i-1}\right) f\left(\sigma_i\right) < 0$. Si elles sont acceptées, les valeurs d'approximation initiales peuvent être utilisées pour l'itération. Dans le cas contraire, il faut sélectionner de nouvelles valeurs d'approximation initiales.
- Étape 4 : Définir $c = \frac{\sigma_{i-1}+\sigma_i}{2}$
- Étape 5: Calculer la valeur $f(c)$
- Étape 6 : Effectuer une évaluation pour déterminer dans quel sous-intervalle se trouve la racine de la fonction. Si $f(c) f\left(\sigma_i\right) < 0$ alors $\sigma_{(i-1)} = c$. Sinon, fixer $\sigma_i = c$
- Étape 7 : Calculer $|\varepsilon| = \frac{\sigma i-\sigma_{i-1}}{\sigma i}$
- Étape 8: Vérification, si $|\varepsilon| < \varepsilon_{\text{tol}}$ avec $i = 1, 2, \ldots, n$, alors l'itération est arrêtée avec c comme estimation de la solution σ de la fonction de volatilité $f(\sigma)$, mais si $|\varepsilon| > \varepsilon_{\text{tol}}$, avec $i = 1, 2, \ldots, n$, puis le processus se poursuit jusqu'à l'étape 4 .

2.5.3 Méthode de Newton Raphson

La dérivation de la formule de la méthode de Newton Raphson peut être obtenue géométriquement à l'aide de la série de Taylor. Si σ_{i-1} est l'approximation initiale, l'approximation suivante peut être calculée par l'équation suivante

$$\sigma_i = \sigma_{i-1} - f\left(\sigma_{i-1}\right) / f'(\sigma i - 1)), f'\left(\sigma_{i-1}\right) \neq 0 \tag{2.32}$$

La dérivée de la fonction de volatilité peut être définie comme suit

N() désigne la fonction de distribution cumulative de la distribution normale standard avec densité :

$$\varphi(d) = N'(d) = \frac{\partial N(d)}{\partial d} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-d_1^2}{2}} \tag{2.33}$$

$$f'\left(\sigma_{i-1}\right) = -\frac{\partial C_B\left(\sigma_{i-1}\right)}{\partial \sigma_i} - 1 \tag{2.34}$$

Où

$$f'\left(\sigma_{i-1}\right)=p^{\text{Market }}\sqrt{T}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-d_1{}^2}{2}}A_N^{\text{Fixed}} \tag{2.35}$$

Un algorithme pour la méthode de Newton Raphson est présenté comme suit,

- Étape 1: définir les approximations initiales σ_{i-1} et la valeur de tolérance de l'erreur $\varepsilon\varepsilon_{\text{tol }}=10^{-4}$
- Étape 2 : calculer la valeur $f\left(\sigma_{i-1}\right)$ et $f'\left(\sigma_{i-1}\right)$
- Étape 3 : Déterminer la valeur approximative suivante, c'est-à-dire σ_i qui se trouve à l'intersection de la tangente passant par $\left(\sigma_{i-1}, f\left(\sigma_{i-1}\right)\right)$ avec les axes σ,
- Étape 4 : Calculer $|\varepsilon|=\frac{\left(\sigma_i-\sigma_{i-1}\right)}{\sigma_i}$
- Étape 5 : vérification, si $|\varepsilon|<\varepsilon_{\text{tol }}$ où $i=1,2,\ldots,n$, l'itération est arrêtée. Avec σ_i comme estimation de la solution σ de la fonction de volatilité $f(\sigma)$, mais si $|\varepsilon|>\varepsilon_{\text{tol }}$, alors le processus est repris à l'étape 1 .

RÉSULTATS ET DISCUSSION

Sur la base des données obtenues, la fonction de volatilité peut s'écrire comme suit :

$$\begin{gathered}f(\sigma)=2,18-21,11\cdot N\left(d_1\right)+21\cdot e^{-0,0030625}N\left(d_2\right)\\ d_1=2.34\cdot\sigma^{-1}+0.25\cdot\sigma\end{gathered} \tag{2.36}$$

Les résultats de l'itération de l'estimation de la racine de $f(\sigma)$ à l'aide des méthodes de bissection et de Newton Raphson. Les valeurs d'approximation initiale utilisées dans les méthodes de bissection et de tangente sont respectivement $\sigma_{i-1}=0,1$ et $\sigma_i=1$, avec une erreur de tolérance de 0,0001. L'approximation initiale utilisée dans la méthode de Newton est $\sigma_i=0,1$ avec la même erreur de tolérance.

$$f'(\sigma)=-21,110,5\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}} \tag{2.37}$$

Où :
$a=\sigma_{i-1}$, $b=\sigma_i$, $c=\sigma_{i+1}$

a	b	c	b-c	f(a)*f(c)
0.100000	0.550000	0.550000	0.450000	-66.899442
0.100000	0.325000	0.325000	0.225000	-23.587305
0.100000	0.212500	0.212500	0.112500	-2.046001
0.156250	0.212500	0.156250	0.056250	5.527921
0.184375	0.212500	0.184375	0.028125	2.360488
0.198438	0.212500	0.198438	0.014063	0.192494
0.198438	0.205469	0.205469	0.007031	-0.055802
0.198438	0.201953	0.201953	0.003516	-0.011126
0.200195	0.201953	0.200195	0.001758	0.010836
0.200195	0.201074	0.201074	0.000879	-0.000037
0.200635	0.201074	0.200635	0.000439	0.001790
0.200854	0.201074	0.200854	0.000220	0.000435
0.200964	0.201074	0.200964	0.000110	0.000102

TAB. 2.7 : Table d'itérations de la méthode de bissection

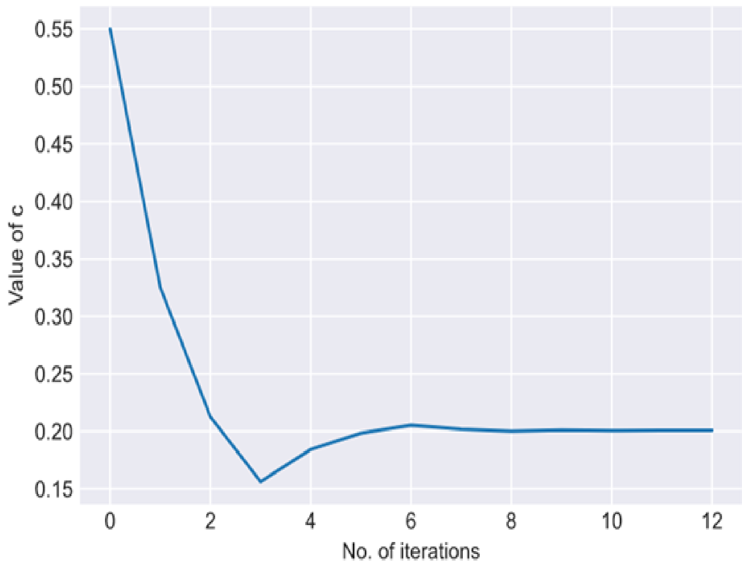


FIG. 2.7 : La valeur de vol par rapport aux itérations

On constate (voir Tableau 2.7) que l'itération s'arrête à la 11ème itération et obtient une valeur de volatilité de 0,200964 avec une valeur d'erreur absolue de 0,0000055. Parallèlement, les résultats de l'estimation de la valeur de la volatilité de la première à la dernière itération n'ont pas significativement une tendance. De la première à la cinquième itération, on constate que la dynamique des courbes de fluctuation est très erratique. La convergence a commencé à apparaître à la 8ème itération (voir figure 2.7). La méthode La méthode de bissection a une convergence linéaire, l'erreur est réduite d'au moins 1/2 de l'erreur précédente.

2.6 Paramètres de risque et couverture

Les dérivés partiels jettent les bases pratiques de l'application de techniques spéciales de trading et de couverture sur les options et autres dérivés. Ils quantifient l'influence (le risque) de l'évolution des facteurs de marché sur le prix de l'option. À cet égard et dans de nombreux cas, les dérivés partiels sont aussi importants que le prix théorique de l'option, car ils indiquent à l'utilisateur, de manière brève et précise, la direction à prendre pour l'investissement en cours (actifs, passifs) : acheter, vendre ou maintenir. Dans la suite, les paramètres de risque les plus importants ("Greeks") sont présentés en ce qui concerne les swaptions. Quelques stratégies de trading sont ensuite présentées brièvement. Étant donné que les "grecques" peuvent s'appliquer à différents types d'instruments (et notamment aux swaptions), nous désignerons par la suite le prix d'un produit dérivé général par D et le prix de son titre sous-jacent par S. Concrètement, dans le cas des swaptions (dont il est question ici), cela signifie que D représente le prix P_{PS} de la swaption payeuse et S représente le prix du swap correspondant i_F.

Delta :

Compte tenu d'une courbe de rendement spécifique (structure des taux d'intérêt) et d'un swap comme sous-jacent, le prix d'une swaption dépend de la date d'expiration T et du prix d'exercice K. Par conséquent, l'impact d'une variation du prix du swap (taux d'exercice i_S maintenu constant) sur le prix du swaption dépend des variables T et i_F. Généralement, le paramètre delta décrit le taux de variation du prix du titre dérivé par rapport à l'actif (prix du sousjacent) :

$$\Delta = \frac{\partial D}{\partial S} \tag{2.38}$$

Dans le cas présent, notre sous-jacent est le taux de swap à terme fixe i_F. Par analogie avec le delta d'une option d'achat d'actions , la règle suivante s'applique au delta Δ_{PS} d'une swaption de payeuse européenne.

$$\Delta_{PS} = \frac{\partial P_{PS}}{\partial i_F} = NA\Phi(d1), \tag{2.39}$$

$$\text{Avec } A = \sum_{i=1}^{n} e^{-it_i}\left(t_i - t_{i-1}\right).$$

$\Phi()$: Fonction de répartition

Par analogie, nous obtenons pour le delta d'une swaption receveuse européenne la valeur suivante :

$$\Delta_{RS} = NA(\Phi(d1) - 1) \tag{2.40}$$

Gamma

Le gamma d'un produit dérivé (par exemple, une swaption ou un portefeuille de swaptions) est la seconde dérivée du prix du produit dérivé par rapport au sous-jacent : le gamma est le prix du produit dérivé par rapport au sous-jacent :

$$\Gamma = \frac{\partial^2 D}{\partial S^2} = \frac{\partial \Delta}{\partial S} \tag{2.41}$$

Comme dans le cas du delta, une formule fermée peut être dérivée pour le gamma par différenciation :

$$\Gamma_{PS} = \frac{NA\varphi(d1)}{\sqrt{T i_F \sigma_F}} \tag{2.42}$$

Où $\varphi(d1) = \Phi'(d1)$ représente la fonction de densité de probabilité de la distribution gaussienne. Selon la définition, le gamma est la sensibilité du delta au titre sous-jacent. Par conséquent, il mesure l'ampleur et la fréquence des corrections à apporter à Gamma, afin de maintenir un portefeuille delta-neutre.

Theta

Le thêta d'un portefeuille de produits dérivés est le taux de variation du prix du portefeuille par rapport au temps à courir jusqu'à l'échéance T (temps restant jusqu'à l'expiration de l'option) :

$$\Theta = \frac{\partial D}{\partial T} \tag{2.43}$$

Dans le cas particulier d'une swaption payeuse, on obtient :

$$\Theta = \frac{\partial P_{PS}}{\partial T} = -i_F P_{PS} + NAi_F \sigma_F \frac{\phi(d1)}{2\sqrt{T}}. \tag{2.44}$$

Vega

Vega est la sensibilité du prix du produit dérivé (ou du portefeuille de produits financiers dérivés) à la volatilité :

$$V = \frac{\partial D}{\partial \sigma}. \tag{2.45}$$

Dans le cas particulier des swaptions, on obtient l'équation suivante par différenciation :

$$V_{PS} = V_{RS} = NAi_F\sqrt{T}\varphi(d1) \tag{2.46}$$

La quantité implicite σ_F est l'estimation du taux de swap à terme attendu. Un portefeuille est protégé contre les fluctuations de la volatilité.

2.7 Trading Strategies

2.7.1 Delta-Hedging

La couverture dite delta est une stratégie de couverture dynamique. Il s'agit ici de compenser les variations de prix du swap par les variations de prix du swaption. Pour ce faire, on met en place un portefeuille en détenant (ou en vendant) une swaption et en vendant à découvert (ou en détenant) une quantité δ du sous-jacent (swap), c'est ce que l'on appelle un portefeuille de couverture. De cette manière, au sein du portefeuille, les hausses de prix du swap sont compensées par les baisses de prix du swaption et vice-versa. Les risques liés aux fluctuations du titre sous-jacent sont pratiquement éliminés, comme on peut le vérifier, ce portefeuille a un delta égale zéro (P_{Port} étant le prix du portefeuille) :

$$\Delta_{\text{Port}} = \frac{\partial P_{\text{Port}}}{\partial S} = \Delta \cdot \frac{\partial S}{\partial S} - \frac{\partial D}{\partial S} = \Delta \cdot 1 - \Delta = 0 \tag{2.47}$$

Par conséquent, grâce à la couverture delta, il est possible d'éliminer (au moins en théorie et dans une large mesure en pratique) le risque. La proportion de la valeur sous-jacente dans le portefeuille doit être modifiée en permanence, car la quantité Δ dépend à la fois du prix du sous-jacent et de la durée restante du swaption. Ce processus est appelé couverture dynamique (ou rééquilibrage) du portefeuille. Par conséquent (théoriquement), il faut continuellement acheter et vendre des swaps. Cependant, dans le cas d'un modèle discret, le rééquilibrage du delta est effectué à des intervalles de temps discrets intervalles de temps Δt.

2.7.2 La strategie du VolSpot

L'expression "VolSpot" désigne une stratégie de trading qui cherche à tirer profit du niveau actuel de volatilité d'un marché donné. Les traders qui utilisent une stratégie de volatilité spot cherchent généralement à identifier les niveaux clés de support et de résistance sur le marché et placent des transactions en fonction de la rupture de la volatilité spot au-dessus ou en dessous de ces niveaux. Ce type de stratégie vise à tirer profit des fluctuations à court terme de la volatilité, plutôt que d'essayer de prédire ou de contrôler le niveau global de volatilité du marché.

D'autre part, la VolTarget fait référence à une stratégie d'investissement qui cherche à maintenir un niveau spécifique de volatilité dans un portefeuille. Cette approche implique une gestion active de l'exposition d'un portefeuille à diverses catégories d'actifs et l'ajustement de l'allocation pour maintenir un niveau de volatilité cible. L'objectif de VolTarget est d'atteindre un niveau de risque et de rendement souhaité pour un portefeuille d'investissement donné sur le long terme, plutôt que d'essayer de tirer profit des fluctuations de la volatilité à court terme.

Dans l'ensemble, si la stratégie de VolSpot et VolTarget sont toutes deux liées à la volatilité des marchés financiers, elles diffèrent par leur objectif et leur approche. La stratégie de VolSpot est une stratégie de trading à court terme qui cherche à tirer profit des fluctuations à court terme de la volatilité, tandis que VolTarget est une stratégie d'investissement à plus long terme qui cherche à maintenir un niveau spécifique de volatilité dans un portefeuille sur le long terme.

2.7.3 Straddle

Une combinaison populaire est le straddle, qui consiste à acheter une option d'achat et une option de vente européennes ayant le même prix d'exercice et la même date d'expiration. Avec le même prix d'exercice et la même date d'expiration. Le schéma de profit est illustré à la figure 2.8. Le prix d'exercice est noté K. Si le cours de l'action est proche de ce prix d'exercice à l'expiration des options.

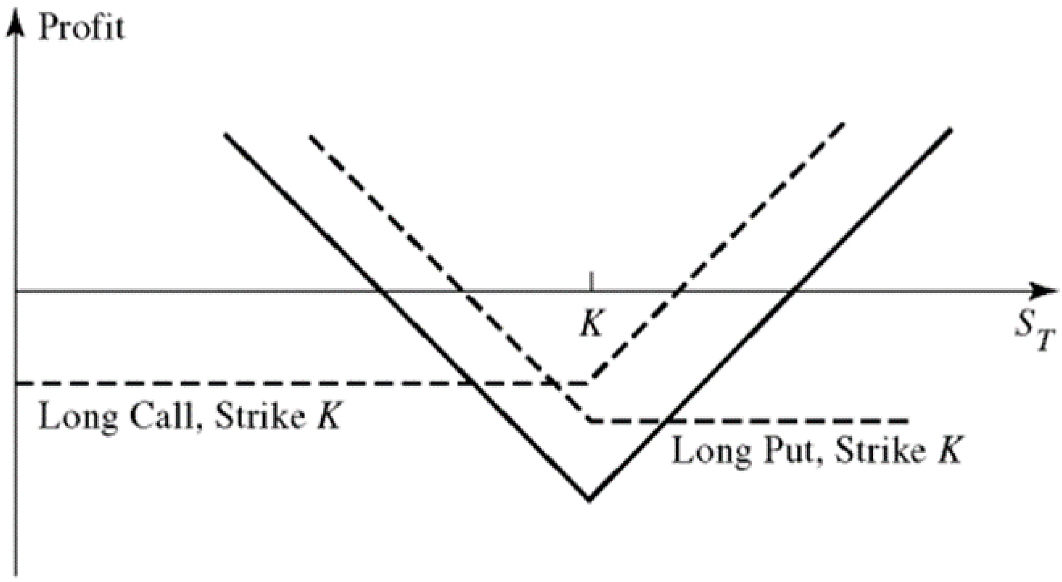


Fig. 2.8 : Le profit d'achat d'un straddle

Le straddle conduit à une perte, Toutefois, si le mouvement est suffisamment important dans l'une ou l'autre direction, il en résulte un bénéfice significatif. Un straddle est approprié lorsqu'un investisseur s'attend à une forte variation du cours d'une action, mais ne sait pas dans quelle direction cette variation se produira. Prenons le cas d'un investisseur qui pense que le prix d'une certaine action, actuellement évaluée à 69 dollars par le marché, va évoluer de manière significative au cours des trois prochains mois. L'investisseur pourrait créer un straddle en achetant à la fois une option de vente et une option d'achat avec un prix d'exercice de 70 dollars et une date d'expiration dans 3 mois. Supposons que l'option d'achat coûte 4 \$ et l'option de vente 3 \$. Si le cours de l'action reste

Intervalle du prix de l'action	Payoff de call	Payoff de put	Total payoff
ST < K	0	K- ST	K-ST
ST > K	ST-K	0	ST-K

Tab. 2.8 : Payoff du Straddle

à 69 $, il est facile de voir que la stratégie coûte 6 $ à l'investisseur (un investissement initial de 7 $ est nécessaire, l'option d'achat expire sans valeur et l'option de vente expire avec une valeur de 1 $). Si le cours de l'action passe à 70 dollars, l'investisseur subit une perte de 7 dollars. (C'est le pire qui puisse arriver.) Toutefois, si le cours de l'action grimpe à 90 $, un bénéfice de 13 $ est réalisé ; si l'action descend à 55 $, un bénéfice de 8 $ est réalisé ; et ainsi de suite. Comme nous l'avons vu, un investisseur doit examiner attentivement si le bond qu'il anticipe est déjà reflété dans les prix des options avant de procéder à une opération de straddle. Le straddle de la figure 2.8 est parfois appelé straddle inférieur ou achat de straddle. Un straddle supérieur ou une vente de straddle est la position inverse. Elle est créée par la vente d'un call et d'un put ayant le même prix d'exercice et la même date d'expiration. Il s'agit d'une stratégie très risquée. Si le cours de l'action à la date d'expiration est proche du prix d'exercice, il en résulte un bénéfice important. En revanche, la perte résultant d'un mouvement important est illimitée.

Delta

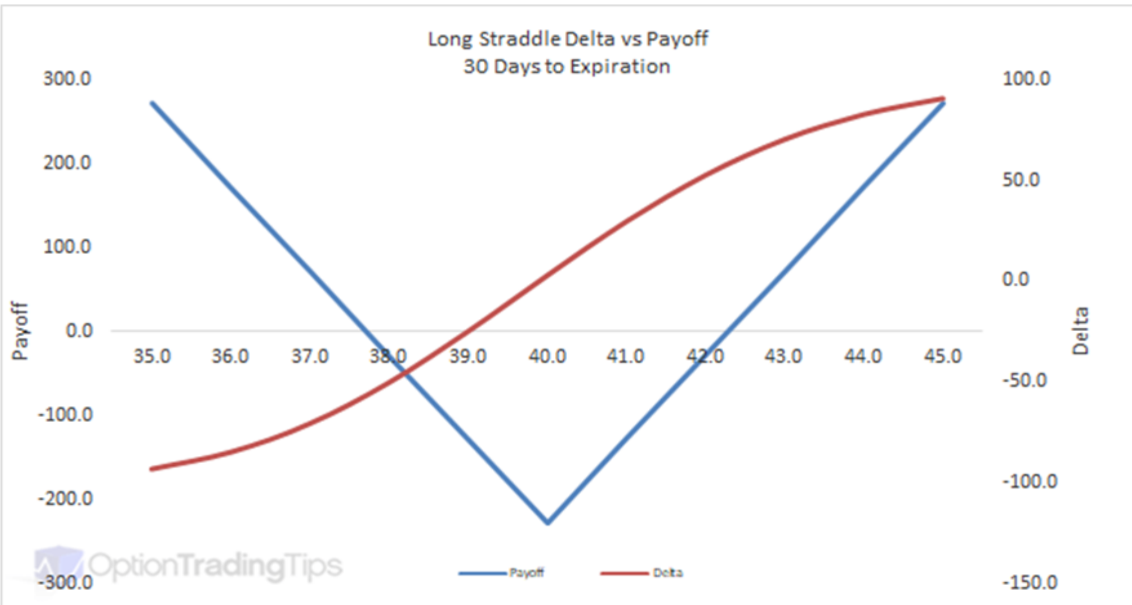


Fig. 2.9 : Delta de straddle

Le delta d'un straddle est une fonction croissante du sous-jacent comme le rend compte cette figure ci-dessous. Ce delta s'annulle lorsque le sous-jacent égalise le strike.

Gamma

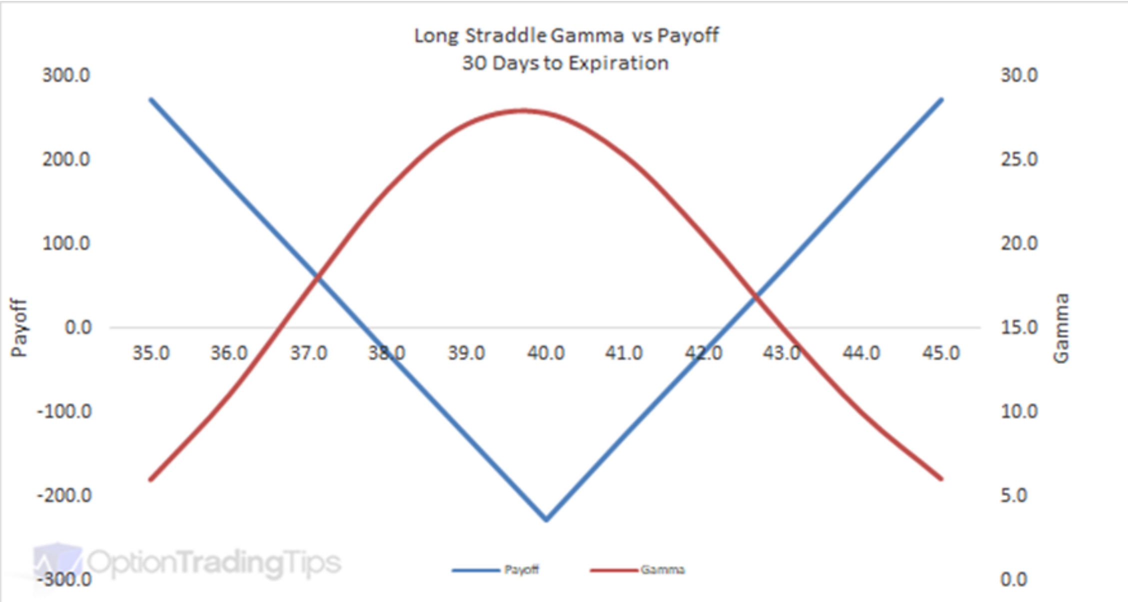


Fig. 2.10 : Gamma de straddle

La courbe de gamma d'achat d'un straddle est généralement en forme de V inversé, avec un pic au centre de la courbe. À ce point, le gamma atteint son niveau le plus élevé, ce qui signifie que le delta de la position longue dans la stratégie de straddle est le plus sensible aux mouvements de prix de l'actif sous-jacent

Theta

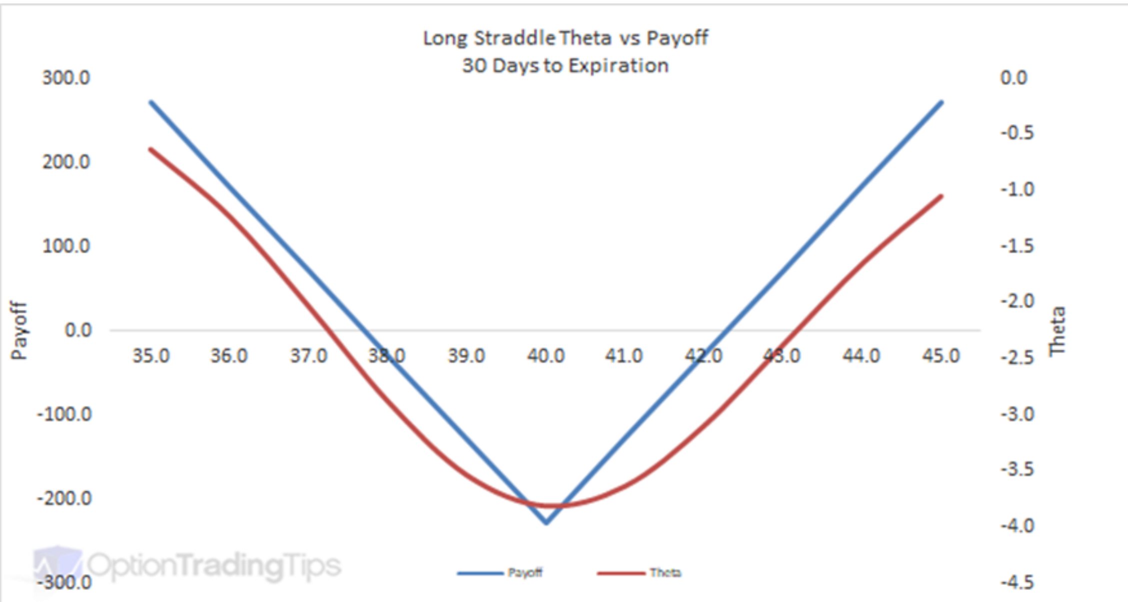


Fig. 2.11 : Theta de straddle

La courbe de thêta d'un straddle est généralement en forme de U, avec une perte de valeur temps importante au début de la vie de l'option, suivie d'une diminution progressive de la valeur temps à mesure que la date d'expiration approche. Cela signifie que la stratégie de straddle perd de la valeur temps à mesure que le temps passe.

2.8 Indices propriétaires

Dans un marché financier de forte évolution, l'innovation est désormais un aspect influent dans l'industrie financière, l'innovation prend la forme d'indices obligataires, smart beta, d'investissement durable, de stratégie, mais aussi d'indices ”propriétaires”.
Les stratégies d'investissements deviennent de plus en plus complexes, face à une demande croissante d'investisseurs qui cherchent toujours des investissements alternatifs, les indices propriétaires prouvent leur nécessité comme des représentations objectives des performances de ces stratégies malgré leur volume qui reste assez modeste comparé aux indices boursiers.
Les indices propriétaires sont des indices de référence créés par des banques d'investissement et qui suivent des méthodologies différentes à celles des indices boursiers, càd, ils permettent de suivre la performance d'un panier d'instruments financiers, mais en utilisant des stratégies parfois bien plus avancées. Ces indices sont la propriété de la société de gestion qui les a créés.
Elle seule détient la possibilité de les vendre ou de les utiliser exclusivement et de développer leur méthodologie de calcul. En général, ces indices sont créés par les banques d'investissements dans le but d'offrir une multitude de choix et de solutions, et parfois, de surperformer les indices standard. Ils sont le résultat d'une fine expertise et de recherches approfondies de la part des responsables des banques.

2.8.1 Types d'indices

Le choix des composants d'un indice joue un rôle dans la définition de la classe de ce dernier. Il existe plusieurs 'Asset Classes' ou classe d'actifs qui permettent de diviser le marché des indices de référence. Un indice peut donc suivre le développement d'un panier d'instruments faisant partie des classes suivantes :

- Equity (Actions)
- Commodities (Matières Premières)
- Interest Rates (Taux d'intérêts)
- Foreign Exchange (Taux de Change)
- Credit (Crédit)

Certains indices peuvent avoir une composition qui contient des sous-jacents faisant partie de différentes classes. Ces Indices sont appelés « Multi-Asset ».

2.8.2 Supports d'investissements

Comme nous l'avons précisé précédemment, les indices propriétaires sont des instruments financiers dans lesquels il est possible d'investir. Ceci est possible grâce à plusieurs supports entre ceux précisés ci-dessous :

- **Les fonds :** Un fonds est un véhicule regroupant la contribution de plusieurs personnes, physiques ou morales, qui possèdent un capital réduit et souhaitent tout de même placer leur argent dans un portefeuille de produits financiers diversifiés. Ainsi, la technique la plus directe pour investir dans un indice et atteindre son rendement serait de répliquer son mode de calcul dans un fond. C'est à dire de construire ce fonds-là en reprenant la composition et la méthodologie de calcul exacte de l'indice. Toutefois, la plupart des gestionnaires évitent cette approche à cause du capital, de l'effort et du temps qu'elle demande. En effet, elle exige d'acheter un nombre qui pourrait être très important d'actifs sous-jacents.

- **Les fonds indiciels cotés :**Un "Exchange Traded Fund" -ETF- ou fonds indiciel coté est un fond coté en bourse, comme une action, qui donne droit à des dividendes suite à son achat. Il se distingue des actions par le fait qu'il est destiné à reproduire le rendement d'un indice donné. Par conséquent,il est possible de toucher le rendement d'un indice en achetant cet "ETF", sans avoir à se soucier du nombre de composants de l'indice, de leurs pondérations ou de tous les changements qui pourraient avoir lieu pendant sa durée de vie. Ajouter à cela qu'à l'opposé des fonds indiciels qui ne peuvent se négocier qu'une fois par jour, les ETFs peuvent être achetés ou vendus de façon continue selon les horaires des bourses où ils sont traités, en fonction de l'offre et de la demande.

- **Les produits dérivés :** Les indices propriétaires peuvent servir de sous-jacents à des produits dérivés, comme les contrats Futures, les options ou les swaps. Ainsi, il est possible d'investir dans un indice donné en achetant un produit dérivé. C'est une approche qui ne demande que peu de capital du fait qu'elle n'exige pas la réplication physique de l'indice en question

2.8.3 Cycle de vie d'un indice au sein de SGI

Comme tout autre produit structuré, les indices propriétaires passent par plusieurs étapes avant d'arriver à leur conception, faisant intervenir plusieurs parties. Nous pouvons résumer ce processus de création en 7 étapes primordiales.

Etape 1 :
Analyse du besoin Comme cité précedemment, il existe deux types d'indices : Les indices Flagship et les indices Bespoke, La première catégorie est le fruit d'une étude de marché puis d'une détection d'opportunité de gain qui pourrait intéresser plusieurs clients à la fois, tandis que dans la deuxième catégorie, l'idée de lancer un indice vient plutôt pour répondre à un besoin spécifique du client qui est traduit par les "structureurs" en une stratégie d'investissement reposant sur une méthodologie de calcul.

Etape 2 :
Choix de la composition Une fois la requête du client bien définie, vient l'étape du choix des composants de l'indice sur lesquels celui-ci voudrait investir. Si par exemple le client souhaite avoir une exposition sur le marché asiatique, l'indice comptera des actions cotées sur ces marchés.

Etape 3 :
Méthode d'allocation et rebalancement, la méthode d'allocation est la méthode de détermination du poids des éléments composant l'indice. Ces poids sont choisis selon la stratégie de l'indice et sont susceptibles de changer au cours du temps. C'est en effet la méthode de rebalancement qui détermine comment les poids ou la composition de l'indice peuvent changer. Cette méthode peut être :

- **Advisée :**Dans ce cas c'est un agent externe qui se charge de déterminer, à travers des études de marché, les poids des composants et selon quelle fréquence pourront-ils changer.
- **Systématique :**Dans ce cas c'est la stratégie elle-même qui détermine de façon systématique, l'allocation des poids des composants au cours du temps. En général les indices n'ont pas une composition fixe. Elle change régulièrement suivant une fréquence de « Rebalancement », ou rééquilibrage de l'indice.

Etape 4 :
Choix de la stratégie d'investissement Dans cette étape, le besoin du client est traduit en étapes de calcul qui respectent ses perspectives d'investissement. Le chapitre suivant expliquera plus en détails quelques stratégies utilisées.

Etape 5 :
Choix de l'agent de calcul (AC) Par souci de transparence, un agent de calcul externe est chargé de calculer le niveau de l'indice et de publier sa valeur sur Bloomberg.Cette étape est importante afin d'assurer que le niveau de l'indice calculé ne soit pas erroné. L'agent de calcul externe est représenté par une société spécialisée dans le développement, le calcul et la commercialisation des indices.

Etape 6 :
Implémentation de l'indice Une fois la stratégie déterminée, l'équipe "structuration indicielle" de SG ATS, se charge de mettre en place des scripts de calcul du niveau de l'indice et de les intégrer à une plateforme de valorisation. Avant de les mettre en production "le script owner", c'est à dire celui qui a développé l'indice, doit s'assurer que les niveaux calculés par le script convergent avec les niveaux calculés par les agents de calcul.

Etape 7 :
Suivi et maintenance de l'indice Le processus de création ne s'arrête pas lors de son lancement, bien au contraire. Un suivi quotidien est effectué. Bien que l'agent calculateur se charge du calcul du niveau de l'indice, son propriétaire doit le valoriser à son tour afin de vérifier que l'agent de calcul ne s'est pas trompé ; situation qui peut se produire bien souvent. De plus, des rapports hebdomadaires ou mensuels sont publiés pour le compte du client dans le but de lui donner une idée sur la performance de l'indice.

En globalité, la production des indices propriétaires comprend bien plus d'activités depuis sa conception jusqu'à sa commercialisation sous forme de produits financiers, ce qui créé un large périmètre qui comprend plusieurs contreparties. On peut schématiser ces activités comme suit :

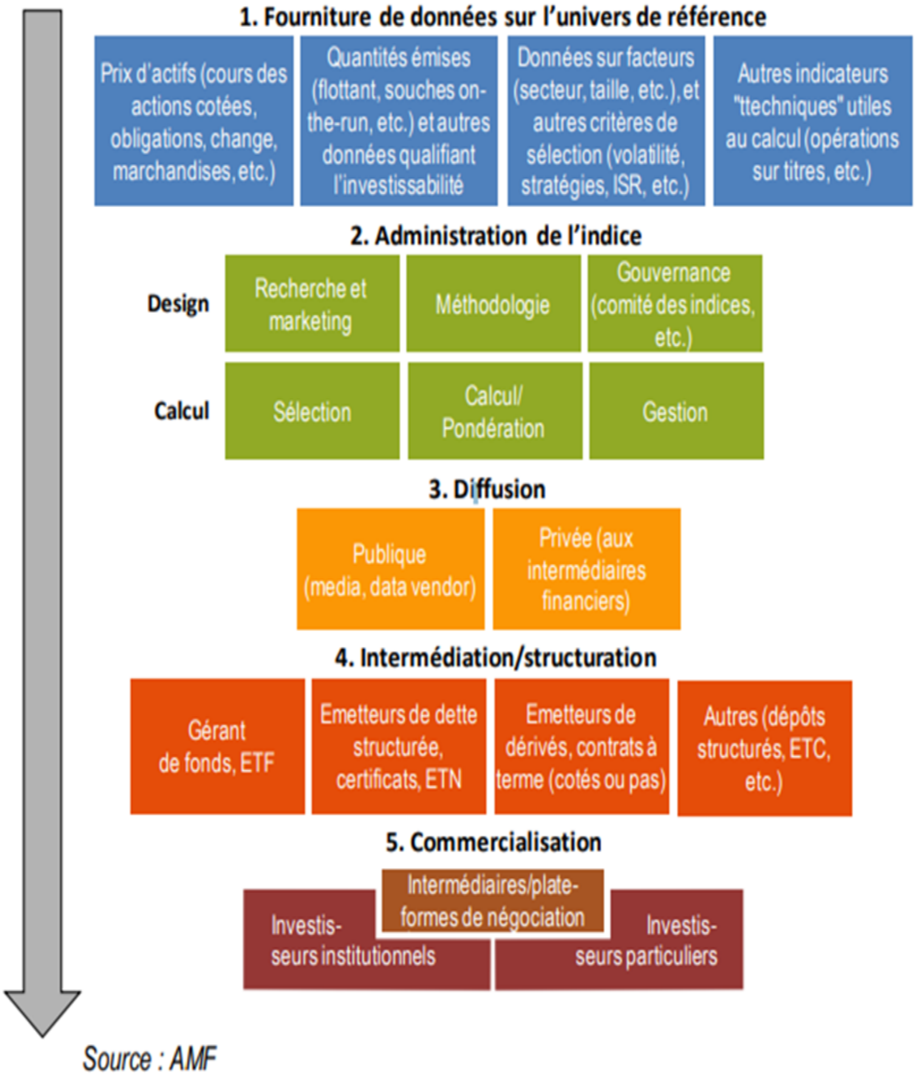


Fig. 2.12 : Activités associées à la production d'indices (laurent grillet-aubert, le marché des indices financiers : opportunités et risques, 2020)

2.8.4 Index Rules

L'Index Rules est le document essentiel à l'implémentation d'un indice, il est rédigé par le "structureur" et comporte toutes les étapes nécessaires dont devrait passer le calcul de l'indice ainsi que la stratégie sur laquelle il se base. Sur l'Index Rules, on pourra trouver des informations comme :

- **Le calendrier de l'indice :**
  Le calendrier regroupe toutes les dates clefs concernant le "rebalancement" de l'indice, ainsi que les jours ouvrables dans lesquelles l'indice devra être calculé.
- **La composition initiale :**
  Elle concerne la liste des sous-jacents ainsi que leurs poids à la date du lancement.
- **L'algorithme de calcul :**
  Cela concerne, toutes les étapes nécessaires à la détermination du niveau de l'indice ainsi que les calculs intermédiaires qui aboutiront au calcul du niveau.

2.8.5 Méthodologie des indices propriétaires

Avant de créer un indice propriétaire ou une famille d'indices (chacun répliquant une stratégie différente), les équipes de structuration définissent un ensemble de règles ainsi qu'une méthodologie utilisée pour calculer et publier le niveau de l'indice. La méthodologie de l'indice définit donc une stratégie basée sur des règles spécifiques (rules-based strategy), rassemblées dans un document appelé Index Rules. Les Index Rules englobent des informations détaillées sur la stratégie répliquée par l'indice et ses objectifs, le type de rendement, le calcul et la construction de l'indice, la composition de l'indice, les règles de recomposition et mécanisme de réajustement des poids des composants, les formules et méthodes de calcul du niveau de l'indice, les règles de gouvernance ainsi que la définition des évènements de perturbation des marchés.

Types de rendement d'un indice

On peut distinguer deux types de rendement des indices propriétaires. Ainsi, ces indices peuvent être à rendement total ''Total Return'' ou à rendement excédentaire ''Excess Return''.

Indices à rendement total (Total Return) :

Ces indices prennent en compte et reflètent les mouvements des niveaux des sous-jacents ainsi que les distributions générées par ces sous-jacents. Les distributions générées par les sous-jacents peuvent être sous forme d'intérêts ou de dividendes. Les investisseurs préfèrent généralement réinvestir ces flux dans le produit de l'indice ou d'autres produits relativement moins risqués, notamment les bonds de trésor.

Indices à rendement excédentaire (Excess Return) :

Au contraire des indices à rendement total, ces indices ne prennent pas en compte les versements en espèces liés aux intérêts des placements et dividendes. Ces indices reflètent donc la valeur de l'indice par rapport au marché. On peut distinguer donc ces deux types de rendement par la fonction suivante :

$$TR(t) = ER(t) + i * \frac{\mathrm{act}(t, t-1)}{360} \tag{2.48}$$

Avec :

- $TR(t)$: ' "Total Return" ou Rendement total à la date t.
- $ER(t)$: "Excess Return" ou Rendement excédentaire à la date t.
- i : le taux d'intérêt (des sous-jacents).
- $\text{act}(t, t-1)$: le nombre de jours entre les dates t et $t-1$.

2.8.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons introduit des notions générales concernant les produits structurés ainsi que les indices propriétaires et leur mécanismes.Le chapitre suivant sera dédié à l'étude théorique des stratégies quantitatives sur lesquelles reposent les indices propriétaires.

Chapitre 3

Méthode d'implémentation d'une stratégie d'investissement pour les swaptions

3.1 Introduction

Après avoir étudié en détail la théorie des swaptions et leur pricing, ce chapitre se concentre sur la partie pratique du projet, qui consiste à mettre en œuvre un modèle de backtesting des swaptions en utilisant la stratégie de roulement des options.

3.2 La stratégie de roulement des options

Le roulement des options, également appelé "roll-over", est une stratégie consistant à fermer une position sur une option arrivant à échéance et à ouvrir une nouvelle position sur une option avec une date d'expiration ultérieure. Cette stratégie est couramment utilisée par les traders qui souhaitent prolonger leur exposition à un actif sous-jacent ou ajuster leur position en fonction des conditions du marché.

Les produits swaptions sont des accords entre un acheteur potentiel et un vendeur potentiel d'un actif qui s'engagent à acheter (pour l'acheteur) ou à vendre (pour le vendeur) une certaine quantité de sous-jacents (l'actif) à un prix spécifié et à une date donnée. Toutes les stratégies d'investissement ont comme sous-jacent des indices boursiers. Etant donné que la plupart des swaptions ont une suite d'échéances mensuelles ou trimestrielles mais rarement plus, il n'est pas possible de détenir une swaption qui ne « mature » que dans quelques années, ce qui empêche les ingénieurs « structurers » de concevoir des stratégies sur des durées données. Ainsi, la solution qui permettrait de simuler ce cas serait de « rouler » sur des swaptions à échéances qui se suivent. Cela signifie qu'une fois l'échéance d'une swaption achetée approche, ce dernier est vendu pour acquérir en même temps un autre portant sur le même actif mais de maturité plus longue. Lorsque les swaptions sont connus au préalable, on parle de roulement statique des swaptions. Les roulements statiques se font suivant un calendrier statique défini par la stratégie de l'indice.
Il est important de noter que le roulement des options peut entraîner des coûts supplémentaires pour les traders, tels que les primes d'options et les commissions de courtage. Les traders doivent donc prendre en compte ces coûts lorsqu'ils décident de rouler leurs positions sur les options.

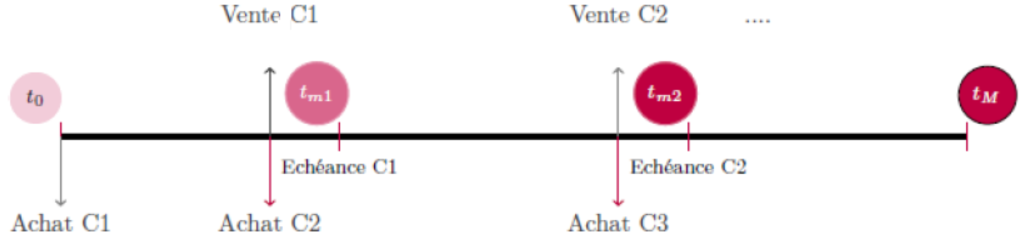


FIG. 3.1 : Principe de roulement des contrats des options

3.3 Implémentation de l'indice VolSpot

3.3.1 Etude de l'existant

En SGI, le backtest des stratégies se fait à travers deux scripts : un de contrôle pour le calcul et le pricing des produits de la stratégie, et un autre pour le calcul du niveau de l'indice. Les résultats du script de contrôle s'enregistrent dans des fichiers CSV, qui seront utilisés comme entrée pour le script de l'indice. Étant donné la quantité volumineuse de données qui s'étend sur plus d'une quinzaine d'années, l'exécution du backtest dure plusieurs heures, ce qui est considéré comme une énorme perte de temps

3.3.2 Analyse du besoin

Le projet vise principalement à mettre en place un modèle de backtesting robuste pour les swaptions en utilisant la stratégie de roulement. Le principal problème des frameworks de backtesting de SGI réside dans la durée d'exécution, en particulier sur le marché des swaptions qui est non standardisé (OTC). Il est nécessaire de calculer chaque jour le niveau de l'indice final en pricant les portefeuilles, contrairement au marché organisé où les prix sont déjà cotés et directement utilisés dans le calcul des niveaux. Une autre contrainte est que chez SGI, chaque indice ou stratégie a son propre script qui ne dépend pas des autres. Dans la plupart des cas, on reçoit des cahiers de charges (Index rules) à la base d'autres stratégies en fixed income, mais avec des changements dans la méthodologie de pricing ou la stratégie de roll, etc. Pour cette raison, la mission principale consistait à créer un framework général pour toutes les stratégies de VRR (volatility roll on rates), tout en maintenant une rapidité de calcul élevée.

les objectifs de projet sont présentés comme suit :

- Implémentation d'un Framework flexible en termes de choix de la fréquence de roulement, celle de hedging et le choix de calendrier.
- Création d'un modèle de pricing des swaptions.
- Optimisation de la vitesse de calcule en se basant sur les listes et les tuples au lieu des dataframes ou des séries.
- Génération d'un rapport sous la forme Excel, qui inclut tous les détails de calcul intermédiaire.

3.3.3 Partie Optimisation :

Le besoin dans cette partie est d'optimiser et de réduire au maximum le temps d'exécution du Backtest. En effet, la majeure partie du temps est consommée lors du chargement et du traitement des données. Il a ainsi paru évident d'isoler cette séquence de la partie pricing.

3.3.4 Etude conceptuelle

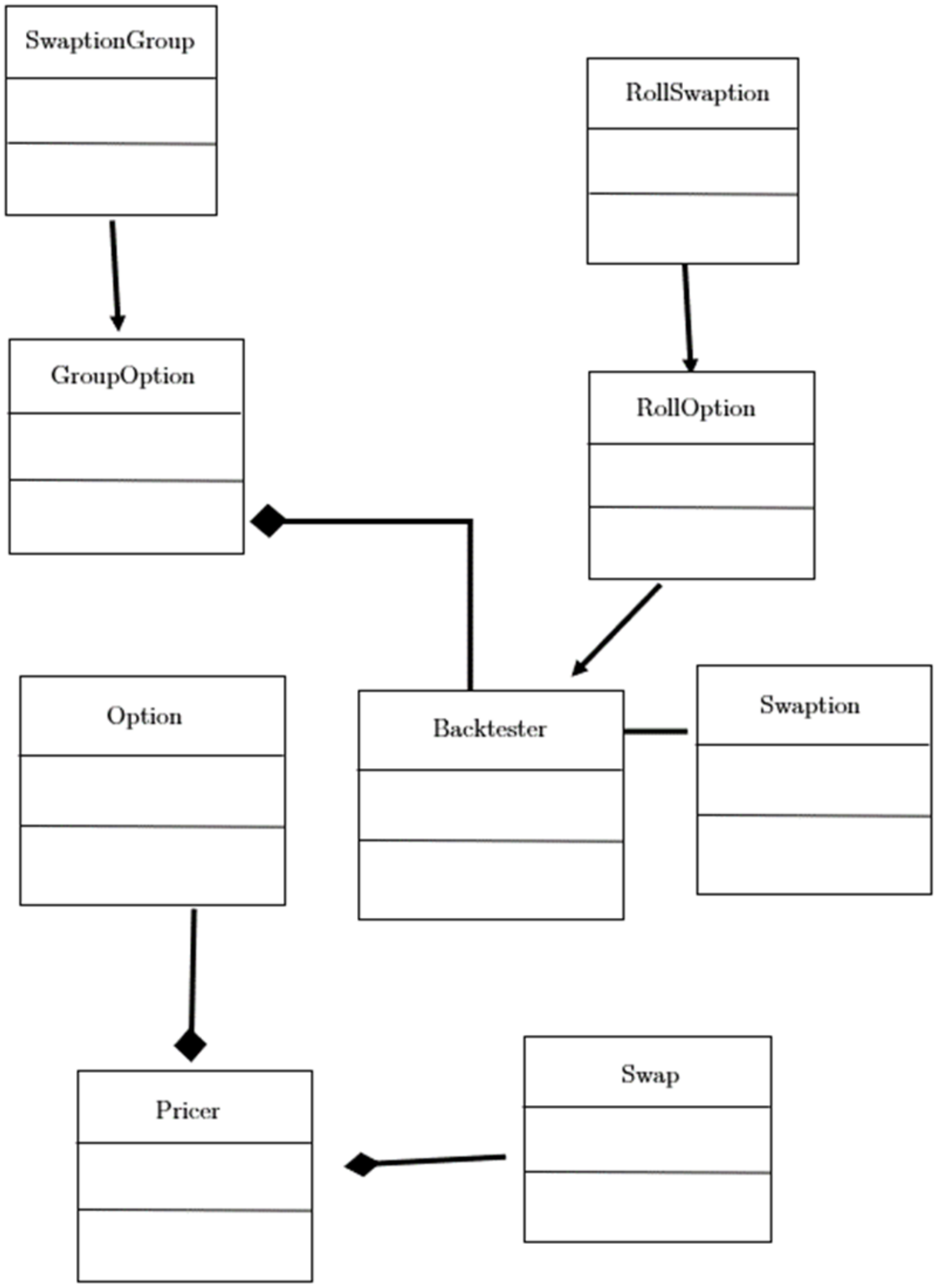


Fig. 3.2 : Diagramme UML du projet

3.3.5 Génération du calendrier

Le calcul du calendrier des jours ouvrables et les jours fériés de chaque indice sous-jacent : la gestion de ces calendriers fait l'objet d'un autre métier effectué par d'autres équipes au sein de la SG. Nous nous contentons alors d'importer ces libraires et de les utiliser.

- Les jours de roulement : sont donnés et caractérises par un paramètre dans le schéma backtest.
  Par exemple : ils peuvent être le troisième vendredi de chaque mois.

- La fréquence de roulement : quotidienne, hebdomadaire mensuelle, ...

- Les jours de détermination des portefeuilles : ce sont les jours pendant les-quels la détermination des quantités d'options à acheter est effectuée. Ils sont déterminés de la même manière que les jours de roulement mais avec un lag d'un jour ou plus.

- Et les jours de sortie ie : il existe une ambiguïté entre ces jours et les jours d'expiration d'options alors montrons la différence :

1. Les jours d'expiration sont des paramètres liés aux options et non pas à la stratégie elle-même. Comme je l'ai défini, un jour d'expiration c'est le jour ou l'option n'existe plus dans le marché.

2. Les jours de sortie : Ce sont les jours où l'option existe sur le marché mais avec une position inverse par rapport aux jours d'entrées ie : vente si on a acheté l'option et achat sinon.

Il existe une libraire sur internet qui permet de faciliter la gestion de ces jours et de les bien manipuler dans notre Framework c'est la rrule :

On peut la présenter comme une fonction qui prend comme arguments les jours ouvrables, la période de roule, le jour de roule et un lag comme paramètre optionnel, et qui retourne une liste des jours de roules.

Voilà un exemple d'un rrule :

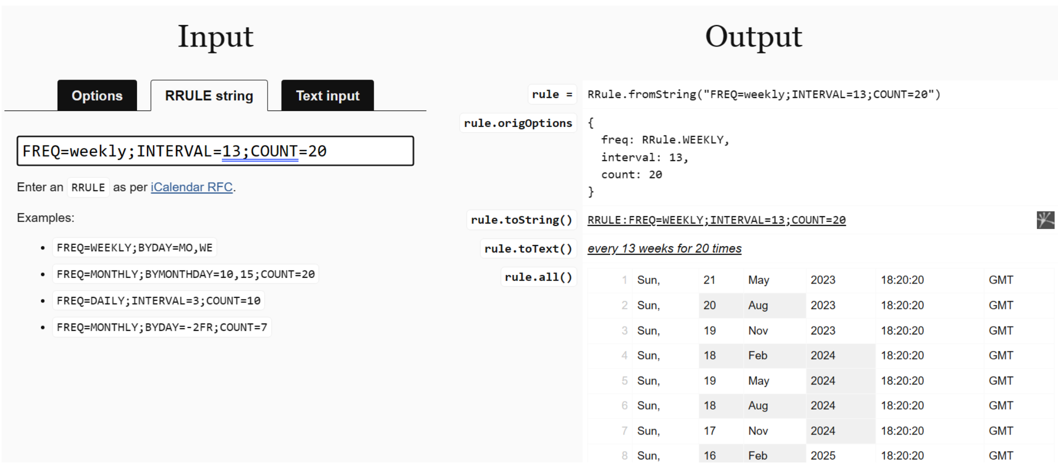


Fig. 3.3 : Exemple de récurrence pour les dates du calendrier

3.3.6 Flexibilité du modèle du backtest

la deuxième étape pour optimiser le modèle de backtest développé est d'améliorer son niveau de flexibilité c'est à dire de le rendre générique et apte à être utilisé sur plusieurs stratégies avec des caractéristiques différentes :

Les paramètres de Roll

Le but de cette partie est de rendre notre modèle capable de faire des backtests pour différentes types de roll. Pour ce faire, nous avons doté notre schéma JSON d'un paramètres "Roll" qui contient une règle RRule personnalisé comme vu précédemment :

```
{
  Roll : {
    Frequence : RRule
    RRule :
          RRULE:INTERVAL=2;FREQ=WEEKLY;BYDAY=FR;
          DTSTART=20151012
  }
}
```

FIG. 3.4 : Partie du roll dans le schéma

Ensuite il est nécessaire de modifier le modèle pour qu'il puisse s'adapter aux modifications apportées au schéma.

Maturité-Tenor

Pour qu'on puisse lancer le backtest sur des stratégies avec de différentes valeurs de maturité et de ténor, il a été nécessaire d'ajouter deux paramètres dans le schéma, et pour ce faire :

```
{
  Expiry : 1Y
  Tenor : 2Y
  Roll : {
    Frequence : RRule
    RRule :
          RRULE:INTERVAL=2;FREQ=WEEKLY;BYDAY=FR;
          DTSTART=20151012
  }
}
```

FIG. 3.5 : Les paramètres pour la maturité et le ténor dans le schéma

3.3.7 Implémentation du modéle de backtesting de la stratégie roll de swaptions

Afin de produire le modéle du backtest des roll de swaptions, plusieurs fonctions mentées :

Dates de calcul, de transaction et d'échéance

La première étape est la génération d'un calendrier des dates de calcul, qui est composé des dates de jours ouvrés,et omet les dates de jours fériés, des dates comprises entre une date de lancement du backtest et une date de fin, représentant l'intervalle auquel nous nous intéressons a avoir le comportement de la stratégie avec les données historiques. Ce calendrier est basé sur des données importés correspondant aux calendriers nationaux des pays :un calendrier européen pour le roll swaption EUR, un calendrier US pour le roll swaption USD, et ainsi de suite.
Pour les dates de transaction, elles dépendent de la durée de détention déterminée parmi les paramètres d'entrée du backtest. Par exemple, si la durée de détention est de 1 mois, les dates de transactions sont générées mensuellement, à partir de la date de lancement du backtest.

3.3.8 Importation de la courbe

La deuxième étape est celle d'importation des taux nécessaires pour le pricing des swaptions. Pour une swaption EUR par exemple, ces taux seraient les taux OIS avec EONIA comme taux de référence et les taux forward construits de produits liquides dans le marché : taux dépôts, taux FRA pour des maturités (20, 30 ans et plus).

Le stripping des courbes se fait par **la dual-curve methodology** comme décrit dans une partie précédente.
Pour ce fait, la méthode suivante a été implémenté :
load curve(self, open_dates) : prend en argument le calendrier des dates de calcul et donne les taux dont nous avons besoin pour le stripping.

3.3.9 Stripping des taux

Dans cette étape de calcul, les méthodes sont implémentées en suivant la logique de la méthodologie présentée dans la partie de stripping de la courbe. Les méthodes implémentées selon une méthodologie interne précisée dans les Index Rules sont :

base_day_frac(date1, date2, basis) : prend en argument deux dates la convention de décompte de jours et retourne la durée date 2 - date 1 en fraction d'année.

get_zc_rates(input_OIS, pricing_date) : prend en argument les taux OIS pour une certaine date et retourne les taux bootstrappés qui constitue la courbe des taux d'actualisation.

get_swap_rate(input_swaption, pricing_date,maturity, basis) : prend en argument les taux swaption du marché jusqu'à la date de pricing et retourne les taux de la courbe forward a partir des swaptions.

3.3.10 Méthode d'évaluation des swaptions des taux d'intérêt

L'évaluation d'un swap de taux d'intérêt est très critique pour toutes les contreparties traitant ce type de produit financier.
Avant les crises financières, l'évaluation des swaps de taux d'intérêt était directe : on utilisait le processus de bootstrapping pour calculer le coefficient d'actualisation des flux de trésorerie futurs à partir d'une courbe de taux sans risque.

3.3.11 La Méthode de stripping a courbe unique

La methode classique utilisée pour évaluer un de taux était l'approche a courbe unique (single curve stripping approach en anglais)
Cette méthodologie consiste à sélectionner les instruments vanilles de taux d'intérêt les plus liquides afin de construire une seule courbe de taux, qui sera utilisée à la fois comme taux d'actualisation et comme taux forward. Ceci était possible car à l'époque, le taux LIBOR était la référence pour la plupart des produits dérivés de taux, considéré comme un taux sans risque.
L'approche a courbe unique peut etre resumée par les étapes suivantes :

- Sélectionner un ensemble de produits dérivés de taux d'intérêts cotés sur le marché avec des maturités croissantes. Par exemple, une procédure très courante consiste à choisir une combinaison de dépôts EUR à court terme, de FRA/Futures à moyen terme sur l'Euro LIBOR 3M et de swaps à moyen-long terme sur l'Euro LIBOR 6M.
- En suivant la technique classique du bootstraping, utilisez ces instruments pour construire la courbe des taux ZC.
- Utiliser la courbe ZC pour extraire à la fois les taux forward pour le calcul des flux de trésorerie futurs et les facteurs d'actualisation.
- Avec les éléments calculés au point 3, calculez le prix du produit dérivé en additionnant tous les flux de trésorerie actualisés.

3.3.12 La méthode de stripping a double courbe

Les crises financières qu'a connues le marché ont montré que les bases considérées comme acquises jusqu'en 2007 devraient être revues si l'on souhaite construire un cadre technique aussi cohérent que possible avec les conditions actuelles du marché et les changements qu'il connaît.

Cette révision nécessaire implique une transition de l'approche traditionnelle à courbe unique vers la nouvelle approche à courbes multiples (approche à courbes doubles) pour faire face aux incohérences des cadres utilisés jusqu'à présent.

Dans cette méthodologie, la courbe d'actualisation est devenue la courbe des taux OIS, tandis que la courbe génératrice des taux d'intérêt est calculée distinctement à partir des taux de dépôts, des taux de FRA et des taux de swaps de taux d'intérêt.

Construction d'une courbe d'actualisation de taux ZC à partir des taux OIS

1. Pour le court terme (maturités jusqu'à 1 an) : les taux OIS peuvent être directement utilisés pour construire la courbe, puisque nous avons mentionné que les OIS de maturité inférieure à un an ne paient pas d'intérêt périodique, avec interpolation pour les dates intermédiaires.

   Nous pouvons trouver les taux OIS au pair directement cotés sur le marché. Ainsi, par exemple, un flux de trésorerie qui sera reçu dans 6 mois sera actualisé en utilisant le taux OIS 6 mois coté sur le marché.

2. Pour le long terme (au-delà d'un an), nous devons utiliser des OIS d'une maturité supérieure à un an qui paient des intérêts intermédiaires.
   Dans ce cas, un processus traditionnel de bootstrap peut être utilisé.

Par conséquent, une courbe des taux sans risque a été construite à partir des taux OIS, qui sera utilisée pour l'actualisation des flux de trésorerie. Le recours à l'interpolation (linéaire ou cubique) permet d'obtenir les taux d'actualisation pour des dates intermédiaires.

Construction des taux ZC à partir des taux de dépôt, des FRA et des swaps de taux d'intérêt

Lors de l'évaluation d'un swap de taux d'intérêt, une courbe forward est utilisée pour calculer les taux à terme (taux forward), c'est-à-dire les taux que nous devons utiliser comme les meilleures prédictions pour les flux de trésorerie futurs générés par la jambe flottante du swap lui-même. En réalité, contrairement à la jambe fixe, les taux forward sont inconnus au début du contrat.

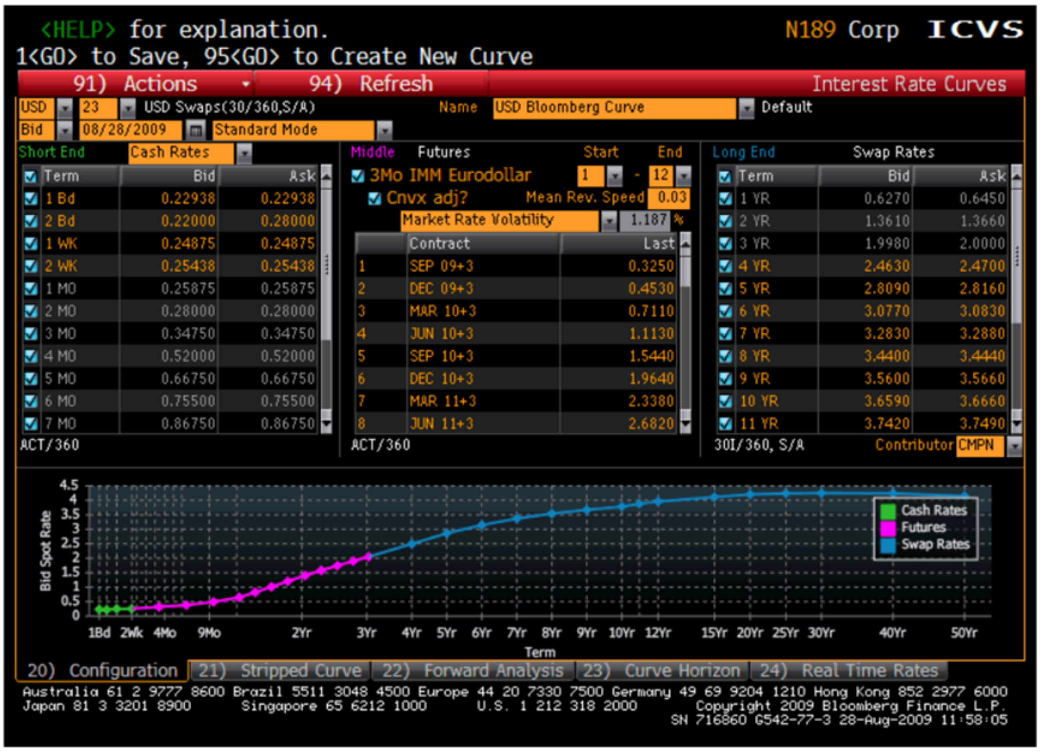
La nouvelle approche pour construire une courbe forward doit tenir compte de l'une des principales conséquences qui a été déclenchée à partir de mi-2007, à savoir la nouvelle et forte segmentation du marché des taux d'intérêt en sous-zones correspondant à des instruments caractérisés par des échéances sous-jacentes différentes.

Cela signifie par exemple que le risque d'un prêt de 6 mois était plus important que celui d'un prêt renouvelé tous les 3 mois, ce qui a des conséquences évidentes sur les coûts des prêts et donc sur la tarification du produit.

3.3.13 Méthodologie de pricing

Taux d'intérêt

1. La construction de la courbe du taux pour l'actualisation des cash flows par les taux de type OIS.
2. La sélection de différents ensembles d'instruments de taux d'intérêt à maturité croissante pour chaque période.
3. Génération du taux d'intérêt X-tenor correspondant à chaque instrument.
4. La construction d'une courbe du taux pour le calcul des cash-flows future avec les taux de type LIBOR.
5. Utilisation de la courbe du taux LIBOR pour le calcul du taux à terme forward pour le but de générer les cash flows future attendu.
6. Actualisation des cash flows par la courbe de OIS.



Term	Bid	Ask
1 Bd	0.22938	0.22938
2 Bd	0.22000	0.28000
1 WK	0.24875	0.24875
2 WK	0.25438	0.25438
1 MO	0.25875	0.25875
2 MO	0.28000	0.28000
3 MO	0.34750	0.34750
4 MO	0.52000	0.52000
5 MO	0.66750	0.66750
6 MO	0.75500	0.75500
7 MO	0.86750	0.86750

	Contract	Last
1	SEP 09+3	0.3250
2	DEC 09+3	0.4530
3	MAR 10+3	0.7110
4	JUN 10+3	1.1130
5	SEP 10+3	1.5440
6	DEC 10+3	1.9640
7	MAR 11+3	2.3380
8	JUN 11+3	2.6820

Term	Bid	Ask
1 YR	0.6270	0.6450
2 YR	1.3610	1.3660
3 YR	1.9980	2.0000
4 YR	2.4630	2.4700
5 YR	2.8090	2.8160
6 YR	3.0770	3.0830
7 YR	3.2830	3.2880
8 YR	3.4400	3.4440
9 YR	3.5600	3.5660
10 YR	3.6590	3.6660
11 YR	3.7420	3.7490

Fig. 3.6 : Exemple d'écran Bloomberg permettant de choisir un ensemble d'instruments pour construire la courbe IR de l'USD 23.

Volatilité implicite

1. Estimation des volatilités implicites des swaptions non listées (OTC) par la méthode de Newton-Raphson.

2. Interpolation des volatilités implicites des swaptions.

3. Interpolation des points manquants.

4. Calcule de la volatilité ATM du swaption.

5. Pricing des swaptions par le modéle de Black.

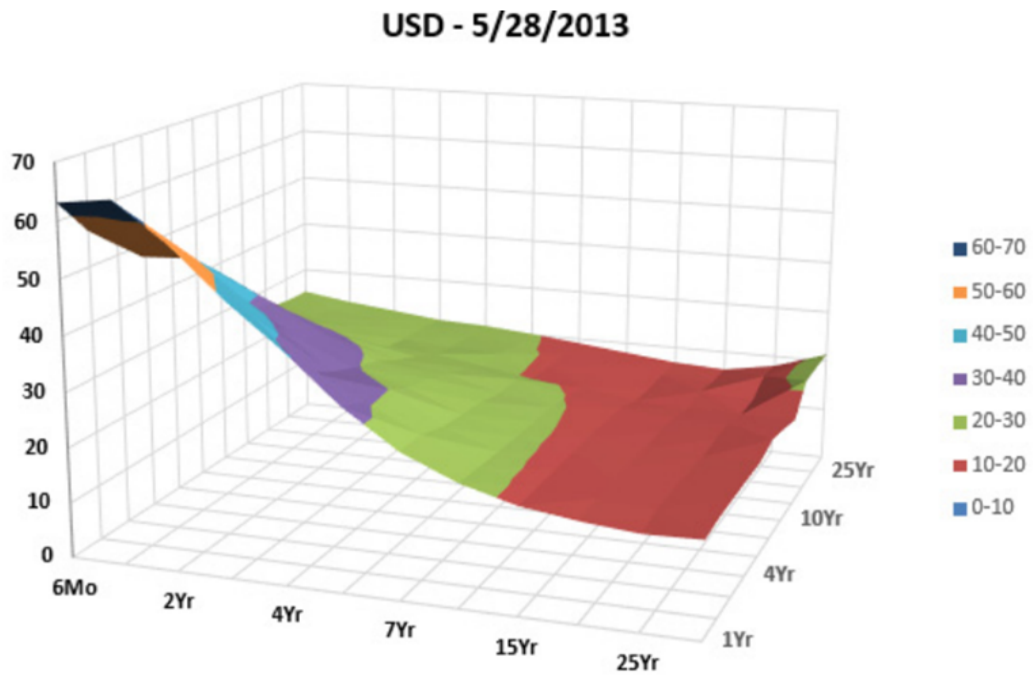


FIG. 3.7 : Exemple d'une surface de volatilité d'un produit swaption.

3.3.14 Construction de la courbe du taux

Le processus de construction de la courbe IR, également appelé stripping de la courbe, consiste à créer un objet courbe permettant de fixer correctement le prix d'un ensemble de N instruments donnés, par exemple en produisant des facteurs d'actualisation et des taux à terme corrects utilisés dans ces instruments. Examinons le choix des instruments. Actuellement, dans la construction des courbes de Bloomberg, les instruments appartiennent à trois groupes appartiennent à 3 groupes :

(1) les taux au comptant ou les taux de dépôt (Deposit).

(2) IR futures ou Forward Rate Agreements (FRA).

(3) les swaps IR.

Par ailleurs, depuis 2008, les taux libor ne sont plus utilisés car ils portent un risque de contrepartie additionnel, ils sont remplacés dans l'industrie financière par les taux OIS.

Type	Date de règlement	Rate (%)
Cash	Overnight rate	5.58675
Cash	Tomorrow next rate	5.59375
Cash	1 m	5.625
Cash	3 m	5.71875
Future	Dec-97	5.76
Future	Mar-98	5.77
Future	Jun-98	5.82

Tab. 3.1 : Les données concernent les prêts en dollars américains et sont basées sur les chiffres du 6 octobre 1997.

Pour les maturités les plus longues, les seuls instruments applicables sont les swaps de taux.

Cas pratique :

On a requêté à partir du Bloomberg les taux de différents instruments qu'on a rassemblé dans un seul tableau. Le tableau suivant montre les données de l'EURIBOR 3M pour la date 29/12/2017.

	Maturity Date	Market Rate	Shifted Rate	Zero Rate	Discount	Source
0	04/03/2018	-0.329000	-0.329000	-0.329000	1.000823	CASH
1	05/03/2018	-0.326000	-0.326000	-0.325139	1.001085	FRA
2	06/04/2018	-0.324000	-0.324000	-0.326680	1.001381	FRA
3	07/03/2018	-0.321000	-0.321000	-0.324845	1.001636	FRA
4	08/03/2018	-0.316000	-0.316000	-0.321024	1.001894	FRA
5	01/03/2019	-0.312500	-0.312500	-0.312533	1.003135	SWAP
6	01/03/2020	-0.210150	-0.210150	-0.210311	1.004220	SWAP
7	01/04/2021	-0.054500	-0.054500	-0.054757	1.001646	SWAP
8	01/03/2022	0.099500	0.099500	0.099590	0.996026	SWAP
9	01/03/2023	0.239000	0.239000	0.239933	0.988089	SWAP
10	01/03/2024	0.364000	0.364000	0.366259	0.978303	SWAP
11	01/03/2025	0.482750	0.482750	0.486935	0.966569	SWAP
12	01/05/2026	0.598000	0.598000	0.604814	0.952874	SWAP
13	01/04/2027	0.705000	0.705000	0.715044	0.937869	SWAP
14	01/03/2028	0.804000	0.804000	0.817848	0.921777	SWAP
15	01/03/2029	0.898000	0.898000	0.916291	0.904536	SWAP

Tab. 3.2 : Les produits dérives utilisés dans la construction des courbes de taux

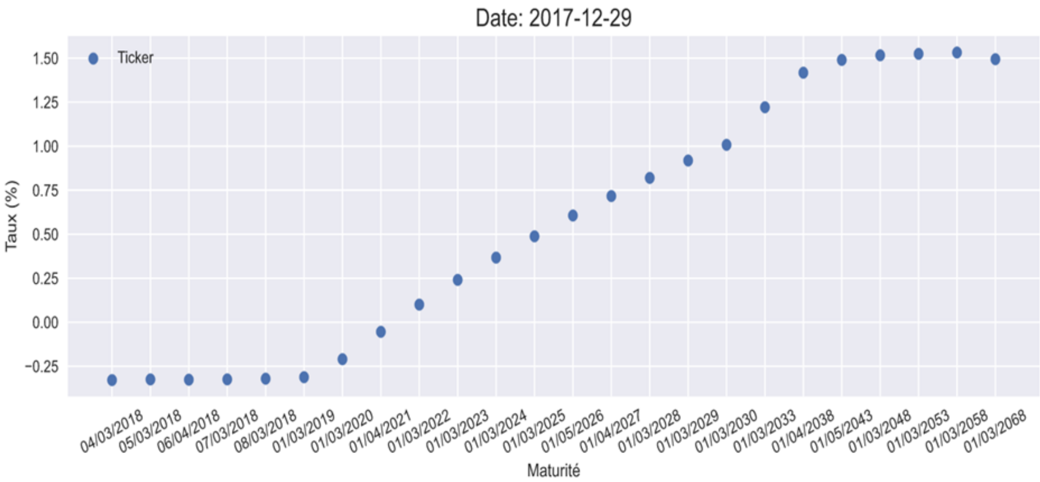


Fig. 3.8 : Visualisation des variations des taux sur la courbe des taux

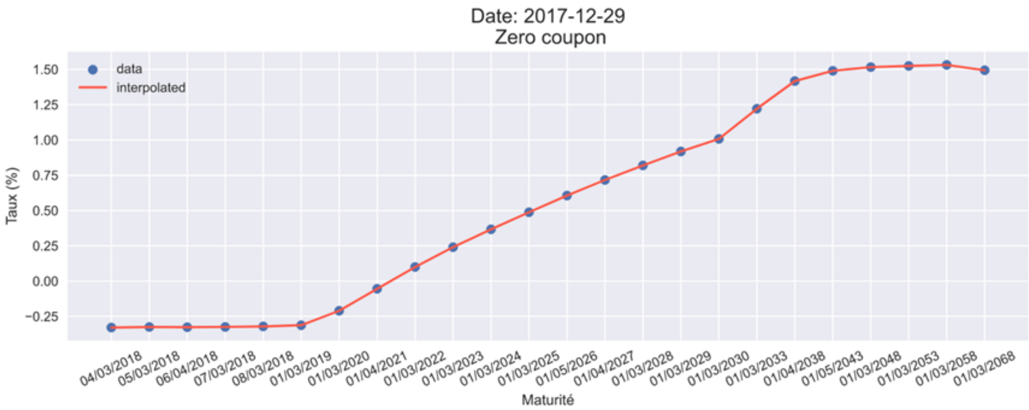


FIG. 3.9 : Courbe des taux interpolée par la méthodologie de spline cubique

Calcule du Taux forward :

- δ_i : la fraction d'année entre $T_i - 1$ et T_i
- $DF(T_i)$: facteur d' actualisation T_i

$$EURIBOR_f\left(T'_{j-1}, T'_j\right) = \frac{1}{\delta_j}\left(\frac{DF\left(T'_{j-1}\right)}{DF\left(T'_j\right)} - 1\right)$$

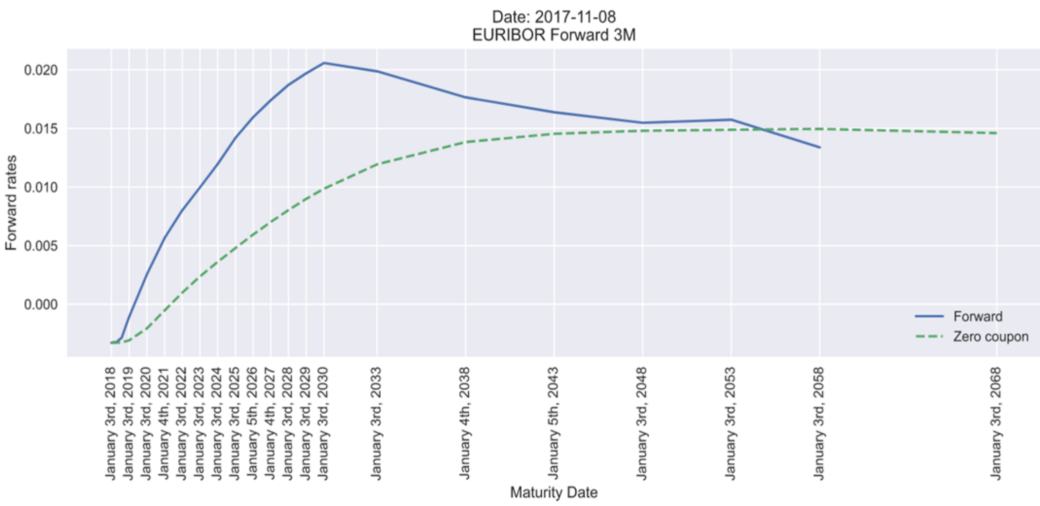


FIG. 3.10 : Comparaison entre les taux zéro coupon et les taux forward

Date	Nominal
January 3rd, 2018	10000
April 3rd, 2018	10000
July 3rd, 2018	10000
October 3rd, 2018	10000
January 3rd, 2019	10000
...	...
July 4th, 2067	10000
October 3rd, 2067	10000
January 3rd, 2068	10000
April 3rd, 2068	10000
July 3rd, 2068	10000

FIG. 3.11 : Nominale du swap durant la période du pricing

```
==========================================================================================
5-year market swap-rate = 0.24 %
==========================================================================================
term structure | net present value | fixed leg NPV | floating leg NPV | fair spread | fair fixed rate
------------------------------------------------------------------------------------------
       5-years swap paying 0.24 %
------------------------------------------------------------------------------------------
 depo-FRA-swap |             15.76 |    -119575.06 |        119590.83 |   -0.0000 % |        0.2390 %
------------------------------------------------------------------------------------------
       5-years swap paying 4.00 %
------------------------------------------------------------------------------------------
 depo-FRA-swap |       -1881665.52 |   -2001256.34 |        119590.83 |    3.7054 % |        0.2390 %
------------------------------------------------------------------------------------------
```

FIG. 3.12 : Pricing du swap du date 29/12/2017

3.3.15 Sélection des Swaptions entrant dans le portefeuille

Lors de la sélection de swaptions, le choix du strike et de la maturité/tenor (option et swap) est généralement déterminé en fonction de la stratégie d'investissement. Pour le choix du strike, il est courant d'utiliser des straddles ATM avec un prix d'exercice égal au taux de swap. En ce qui concerne la maturité, cela dépend de la nature de la stratégie. Pour les stratégies de volatilité spot, il est courant de sélectionner des dates de maturité/tenor fixées à l'avance, par exemple 12 ans/30 ans. En revanche, pour les stratégies de volatilité forward, la logique est un peu différente car l'objectif est de maximiser la volatilité forward. Pour ce faire, des calculs intermédiaires sont nécessaires, y compris le calcul d'une métrique qui maximise la volatilité. En se basant sur cette valeur, on passe ensuite à des univers prédéfinis pour calculer la période exacte de chaque maturité/tenor. Cette approche permet de sélectionner les maturités tenor les plus adaptées à la stratégie d'investissement, en fonction de la volatilité forward recherchée.

Ticker 1 Grp_0	Ticker 1 Grp_1	Ticker 1 Grp_2	Ticker 1 Grp_3	Ticker 1 Grp_4
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	None	None	None	None
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	None	None	None	None
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	None	None	None	None
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	None	None	None	None
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	None	None	None
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	None	None	None
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	None	None	None
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	None	None	None
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	None	None	None
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	<STRADDLE 0,0299 2022-06-07 00:00:00 2042-06-09 00:00:00>	None	None
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	<STRADDLE 0,0299 2022-06-07 00:00:00 2042-06-09 00:00:00>	None	None
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	<STRADDLE 0,0299 2022-06-07 00:00:00 2042-06-09 00:00:00>	None	None
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	<STRADDLE 0,0299 2022-06-07 00:00:00 2042-06-09 00:00:00>	None	None
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	<STRADDLE 0,0299 2022-06-07 00:00:00 2042-06-09 00:00:00>	None	None
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	<STRADDLE 0,0299 2022-06-07 00:00:00 2042-06-09 00:00:00>	<STRADDLE 0,0294 2022-06-14 00:00:00 2042-06-16 00:00:00>	None
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	<STRADDLE 0,0299 2022-06-07 00:00:00 2042-06-09 00:00:00>	<STRADDLE 0,0294 2022-06-14 00:00:00 2042-06-16 00:00:00>	None
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	<STRADDLE 0,0299 2022-06-07 00:00:00 2042-06-09 00:00:00>	<STRADDLE 0,0294 2022-06-14 00:00:00 2042-06-16 00:00:00>	None
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	<STRADDLE 0,0299 2022-06-07 00:00:00 2042-06-09 00:00:00>	<STRADDLE 0,0294 2022-06-14 00:00:00 2042-06-16 00:00:00>	None
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	<STRADDLE 0,0299 2022-06-07 00:00:00 2042-06-09 00:00:00>	<STRADDLE 0,0294 2022-06-14 00:00:00 2042-06-16 00:00:00>	None
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	<STRADDLE 0,0299 2022-06-07 00:00:00 2042-06-09 00:00:00>	<STRADDLE 0,0294 2022-06-14 00:00:00 2042-06-16 00:00:00>	<STRADDLE 0,0305 2022-06-21 00:00:00 2042-06-23 00:00:00>
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	<STRADDLE 0,0299 2022-06-07 00:00:00 2042-06-09 00:00:00>	<STRADDLE 0,0294 2022-06-14 00:00:00 2042-06-16 00:00:00>	<STRADDLE 0,0305 2022-06-21 00:00:00 2042-06-23 00:00:00>
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	<STRADDLE 0,0299 2022-06-07 00:00:00 2042-06-09 00:00:00>	<STRADDLE 0,0294 2022-06-14 00:00:00 2042-06-16 00:00:00>	<STRADDLE 0,0305 2022-06-21 00:00:00 2042-06-23 00:00:00>
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	<STRADDLE 0,0299 2022-06-07 00:00:00 2042-06-09 00:00:00>	<STRADDLE 0,0294 2022-06-14 00:00:00 2042-06-16 00:00:00>	<STRADDLE 0,0305 2022-06-21 00:00:00 2042-06-23 00:00:00>
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	<STRADDLE 0,0299 2022-06-07 00:00:00 2042-06-09 00:00:00>	<STRADDLE 0,0294 2022-06-14 00:00:00 2042-06-16 00:00:00>	<STRADDLE 0,0305 2022-06-21 00:00:00 2042-06-23 00:00:00>
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	<STRADDLE 0,0299 2022-06-07 00:00:00 2042-06-09 00:00:00>	<STRADDLE 0,0294 2022-06-14 00:00:00 2042-06-16 00:00:00>	<STRADDLE 0,0305 2022-06-21 00:00:00 2042-06-23 00:00:00>
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	<STRADDLE 0,0299 2022-06-07 00:00:00 2042-06-09 00:00:00>	<STRADDLE 0,0294 2022-06-14 00:00:00 2042-06-16 00:00:00>	<STRADDLE 0,0305 2022-06-21 00:00:00 2042-06-23 00:00:00>
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	<STRADDLE 0,0299 2022-06-07 00:00:00 2042-06-09 00:00:00>	<STRADDLE 0,0294 2022-06-14 00:00:00 2042-06-16 00:00:00>	<STRADDLE 0,0305 2022-06-21 00:00:00 2042-06-23 00:00:00>
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	<STRADDLE 0,0299 2022-06-07 00:00:00 2042-06-09 00:00:00>	<STRADDLE 0,0294 2022-06-14 00:00:00 2042-06-16 00:00:00>	<STRADDLE 0,0305 2022-06-21 00:00:00 2042-06-23 00:00:00>
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	<STRADDLE 0,0299 2022-06-07 00:00:00 2042-06-09 00:00:00>	<STRADDLE 0,0294 2022-06-14 00:00:00 2042-06-16 00:00:00>	<STRADDLE 0,0305 2022-06-21 00:00:00 2042-06-23 00:00:00>
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	<STRADDLE 0,0299 2022-06-07 00:00:00 2042-06-09 00:00:00>	<STRADDLE 0,0294 2022-06-14 00:00:00 2042-06-16 00:00:00>	<STRADDLE 0,0305 2022-06-21 00:00:00 2042-06-23 00:00:00>
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	<STRADDLE 0,0299 2022-06-07 00:00:00 2042-06-09 00:00:00>	<STRADDLE 0,0294 2022-06-14 00:00:00 2042-06-16 00:00:00>	<STRADDLE 0,0305 2022-06-21 00:00:00 2042-06-23 00:00:00>
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	<STRADDLE 0,0299 2022-06-07 00:00:00 2042-06-09 00:00:00>	<STRADDLE 0,0294 2022-06-14 00:00:00 2042-06-16 00:00:00>	<STRADDLE 0,0305 2022-06-21 00:00:00 2042-06-23 00:00:00>
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	<STRADDLE 0,0299 2022-06-07 00:00:00 2042-06-09 00:00:00>	<STRADDLE 0,0294 2022-06-14 00:00:00 2042-06-16 00:00:00>	<STRADDLE 0,0305 2022-06-21 00:00:00 2042-06-23 00:00:00>
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	<STRADDLE 0,0299 2022-06-07 00:00:00 2042-06-09 00:00:00>	<STRADDLE 0,0294 2022-06-14 00:00:00 2042-06-16 00:00:00>	<STRADDLE 0,0305 2022-06-21 00:00:00 2042-06-23 00:00:00>
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	<STRADDLE 0,0299 2022-06-07 00:00:00 2042-06-09 00:00:00>	<STRADDLE 0,0294 2022-06-14 00:00:00 2042-06-16 00:00:00>	<STRADDLE 0,0305 2022-06-21 00:00:00 2042-06-23 00:00:00>
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	<STRADDLE 0,0299 2022-06-07 00:00:00 2042-06-09 00:00:00>	<STRADDLE 0,0294 2022-06-14 00:00:00 2042-06-16 00:00:00>	<STRADDLE 0,0305 2022-06-21 00:00:00 2042-06-23 00:00:00>
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	<STRADDLE 0,0299 2022-06-07 00:00:00 2042-06-09 00:00:00>	<STRADDLE 0,0294 2022-06-14 00:00:00 2042-06-16 00:00:00>	<STRADDLE 0,0305 2022-06-21 00:00:00 2042-06-23 00:00:00>
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	<STRADDLE 0,0299 2022-06-07 00:00:00 2042-06-09 00:00:00>	<STRADDLE 0,0294 2022-06-14 00:00:00 2042-06-16 00:00:00>	<STRADDLE 0,0305 2022-06-21 00:00:00 2042-06-23 00:00:00>
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	<STRADDLE 0,0299 2022-06-07 00:00:00 2042-06-09 00:00:00>	<STRADDLE 0,0294 2022-06-14 00:00:00 2042-06-16 00:00:00>	<STRADDLE 0,0305 2022-06-21 00:00:00 2042-06-23 00:00:00>
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	<STRADDLE 0,0299 2022-06-07 00:00:00 2042-06-09 00:00:00>	<STRADDLE 0,0294 2022-06-14 00:00:00 2042-06-16 00:00:00>	<STRADDLE 0,0305 2022-06-21 00:00:00 2042-06-23 00:00:00>
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	<STRADDLE 0,0299 2022-06-07 00:00:00 2042-06-09 00:00:00>	<STRADDLE 0,0294 2022-06-14 00:00:00 2042-06-16 00:00:00>	<STRADDLE 0,0305 2022-06-21 00:00:00 2042-06-23 00:00:00>
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	<STRADDLE 0,0299 2022-06-07 00:00:00 2042-06-09 00:00:00>	<STRADDLE 0,0294 2022-06-14 00:00:00 2042-06-16 00:00:00>	<STRADDLE 0,0305 2022-06-21 00:00:00 2042-06-23 00:00:00>
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	<STRADDLE 0,0299 2022-06-07 00:00:00 2042-06-09 00:00:00>	<STRADDLE 0,0294 2022-06-14 00:00:00 2042-06-16 00:00:00>	<STRADDLE 0,0305 2022-06-21 00:00:00 2042-06-23 00:00:00>
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	<STRADDLE 0,0299 2022-06-07 00:00:00 2042-06-09 00:00:00>	<STRADDLE 0,0294 2022-06-14 00:00:00 2042-06-16 00:00:00>	<STRADDLE 0,0305 2022-06-21 00:00:00 2042-06-23 00:00:00>
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	<STRADDLE 0,0299 2022-06-07 00:00:00 2042-06-09 00:00:00>	<STRADDLE 0,0294 2022-06-14 00:00:00 2042-06-16 00:00:00>	<STRADDLE 0,0305 2022-06-21 00:00:00 2042-06-23 00:00:00>
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	<STRADDLE 0,0299 2022-06-07 00:00:00 2042-06-09 00:00:00>	<STRADDLE 0,0294 2022-06-14 00:00:00 2042-06-16 00:00:00>	<STRADDLE 0,0305 2022-06-21 00:00:00 2042-06-23 00:00:00>
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	<STRADDLE 0,0299 2022-06-07 00:00:00 2042-06-09 00:00:00>	<STRADDLE 0,0294 2022-06-14 00:00:00 2042-06-16 00:00:00>	<STRADDLE 0,0305 2022-06-21 00:00:00 2042-06-23 00:00:00>
<STRADDLE 0,0295 2022-05-24 00:00:00 2042-05-26 00:00:00>	<STRADDLE 0,0303 2022-05-31 00:00:00 2042-06-02 00:00:00>	<STRADDLE 0,0299 2022-06-07 00:00:00 2042-06-09 00:00:00>	<STRADDLE 0,0294 2022-06-14 00:00:00 2042-06-16 00:00:00>	<STRADDLE 0,0305 2022-06-21 00:00:00 2042-06-23 00:00:00>

Fig. 3.13 : La méthode d'entrée des groupes des straddles

Pricing des options :

Le graphique ci-dessous illustre les différentes variations de prix pour chaque groupe de straddles. Chaque groupe est caractérisé par des maturités/tenors et des prix d'exercice différents, comme expliqué dans la figure de sélection précédente 3.13. Il est important de noter que chaque groupe de straddles peut avoir une dynamique de prix différente, en fonction de la maturité et du prix d'exercice choisis. Cette analyse permet de mieux comprendre les variations de prix des straddles et de sélectionner les groupes les plus adaptées à la stratégie d'investissement.

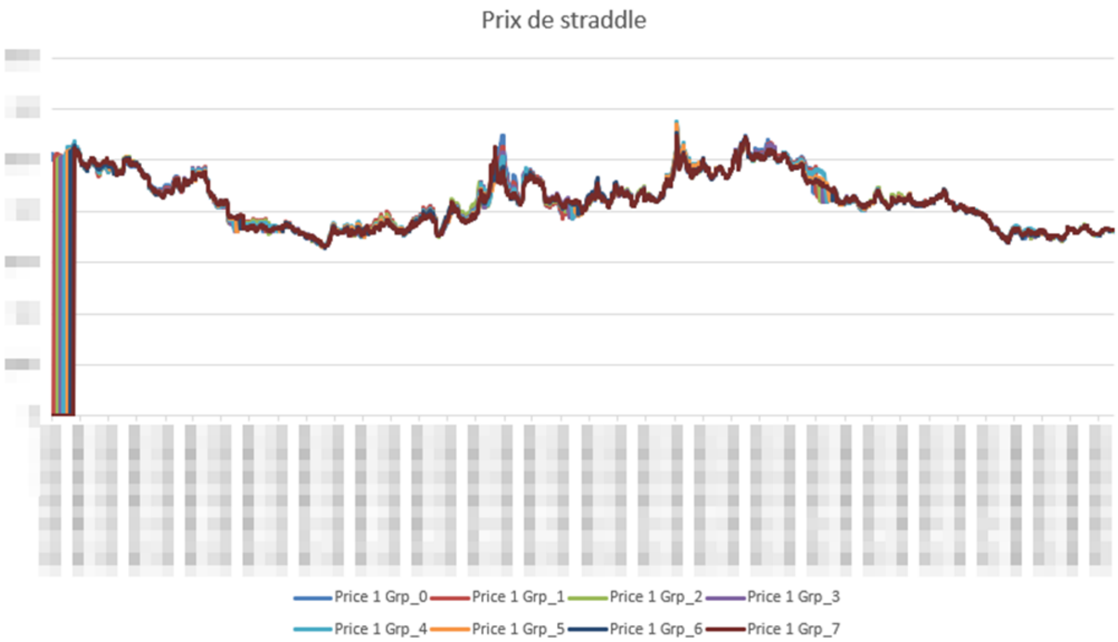


Fig. 3.14

Calcul des quantités des Straddles

Le calcul des quantités des produits qui composent le groupe est généralement déterminé par deux méthodes. La première méthode, appelée "FIXED", consiste à prendre le montant initial investi (par exemple 100 dollars) et à le multiplier par un effet de levier. Le résultat obtenu correspondra exactement à la quantité du groupe pendant toute la période du backtest. La deuxième approche "IL" suppose que le niveau de l'indice sera réinvesti à chaque date de roulement. Ce niveau est multiplié par un effet de levier, ce qui permet également de déterminer la quantité exacte du groupe de straddles. Ces deux approches permettent de déterminer les quantités de produits à acheter pour chaque groupe de straddles, en fonction de la stratégie d'investissement choisie. Il est important de noter que le choix de la méthode de calcul peut avoir un impact significatif sur les résultats du backtest, et doit donc être effectué avec soin.

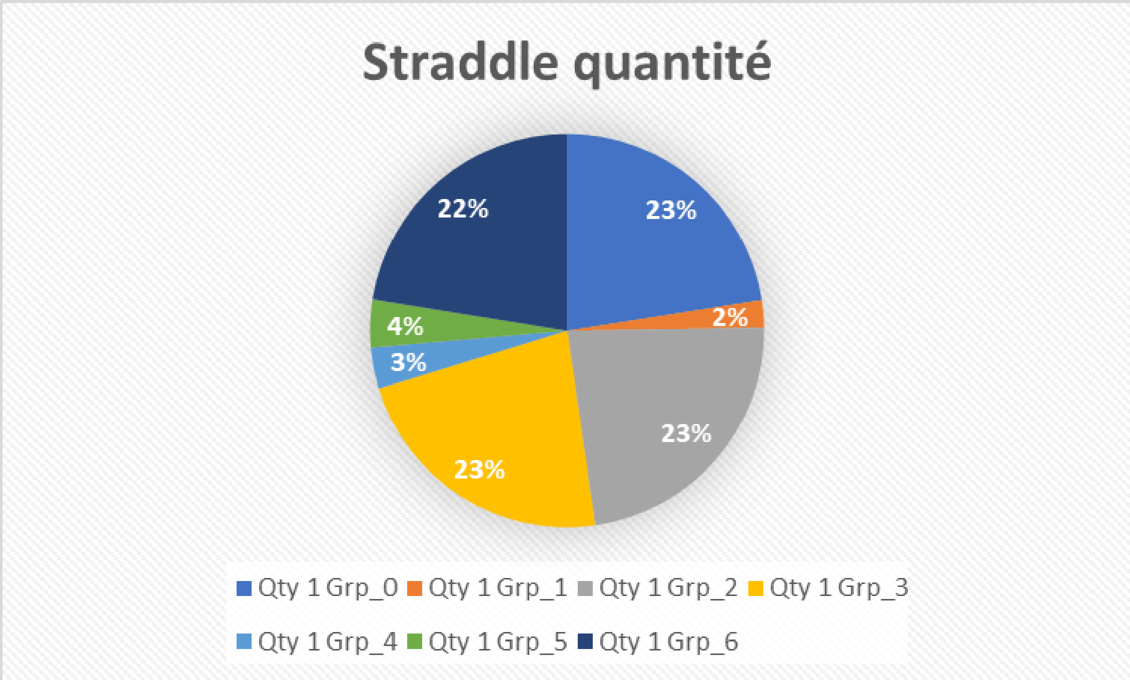


FIG. 3.15 : Les différentes quantités du groupe dans une période donnée.

Mark to Market Value

Le marquage au marché (Mark to Market) est une méthode de mesure de la valeur des comptes qui peut fluctuer dans le temps, tels que les actifs et les passifs.

L'évaluation au prix du marché vise à fournir une évaluation réaliste de la situation financière actuelle d'une institution ou d'une entreprise, en se basant sur les conditions actuelles du marché. Le marquage d'une swaption au marché est une technique permettant de l'évaluer en utilisant les prix courants du marché. Cela permet de déterminer sa valeur nette, et donc son profit ou sa perte pour une contrepartie à un moment donné.

Le marquage au marché peut être mis en œuvre selon différentes méthodes, toutes conduisant à des chiffres approximatifs, non identiques, et basées sur la courbe d'actualisation qui sera utilisée pour actualiser ses flux de trésorerie. Les swaptions sont évaluées au marché selon une méthode convenue sur une base périodique (quotidienne, hebdomadaire, mensuelle, ou à chaque fois que les gains et pertes dépassent un montant minimum spécifique), par la nouvelle méthodologie de pricing présentée dans le chapitre précédent.

Calcul de la MVHP (Market Value of Hedging Portfolios)

En général, le mécanisme de hedging dans les volspots repose sur des opérations d'achat et de vente de sous-jacent swap avec des fréquences bien déterminées. En se basant sur la procédure de hedging expliquée dans les index rules relatives aux swaptions, nous calculons la valeur de marché des portefeuilles couverts, également appelée Market Value of Hedging Portfolios (MVHP).

Calcul de Cash Component Level (CCL) :

Le CCL est calculé comme suit :

$$CCL(t) = CCL(t-1) + OPPL(t) + HPPL(t) \tag{3.1}$$

avec :

- OPPL(t) : est le Profit & loss du portefeuille de swaptions à la date t.
- HPPL(t) : est le Hedging Portfolios Profit & Loss.

6. **Option Portfolio Profit and Loss (OPPL) :**
La OPPL est definie comme suit :

$$OPPL(t) = \sum \text{quantité}_i(t) * MtM(t) \tag{3.2}$$

- Quantité$_i$(t) : la quantité d'une position dans le portefeuille global.
- MtM : la Mark-to-Market Value de la position

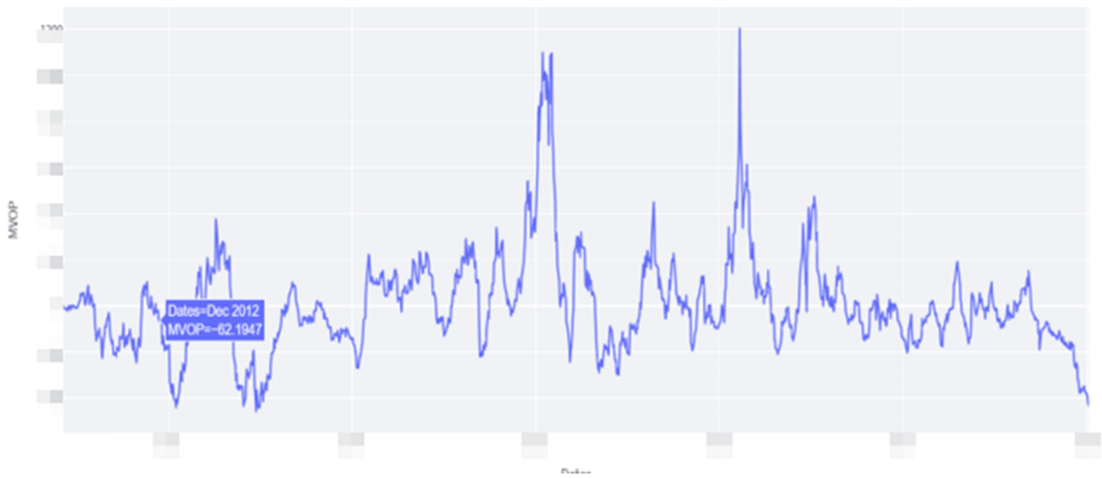


Fig. 3.16 : Le niveau d'OPPL montre la performance des groupes du straddles dans une période donnée

7. **Calcul du niveau d'indice :**

Après l'implémentation de nombreux des méthodes ou fonctions qui calcule les paramètre entrant dans notre stratégie, on aboutit à l'étape finale en calculant le niveau de l'indice en question.

Le niveau d'indice est à une date t est donné par la formule suivante :

$$IL(t) = IL\,(t-1) + \text{ Performance } (t) \tag{3.3}$$

Avec pour niveau de base IL $(t_0) = 100$.

for *all t in series_dates* **do**
  $Position \leftarrow Univers(t)$
  $OPPL(t) \leftarrow Quantity(\mathsf{Position}) * MtM(\mathsf{Position})$
  if $t = debut$ **then**
    $\mathsf{Cc}(t) \leftarrow$ il_initial_value
  end
  else
    $\mathsf{T} \leftarrow t - 1$
    $\mathsf{Cc}(t) \leftarrow \mathsf{Cc}(t) * Capitalisation(t)$
    if t *is* roll_date **then**
      Position $\leftarrow$ expired positions of date t
    end
    if t *is the expiry date of* Position **then**
      $\mathsf{Cc}(t) \leftarrow \mathsf{Cc}(t) + Quantity(\mathsf{Position}) * MtM(\mathsf{Position})$
    end
  end
  $\mathsf{II}(t) \leftarrow \mathsf{Cc}(t) + OPPL(t)$
end

Algorithm 1 : Exemple d'algorithme permettant de calculer un niveau d'indice

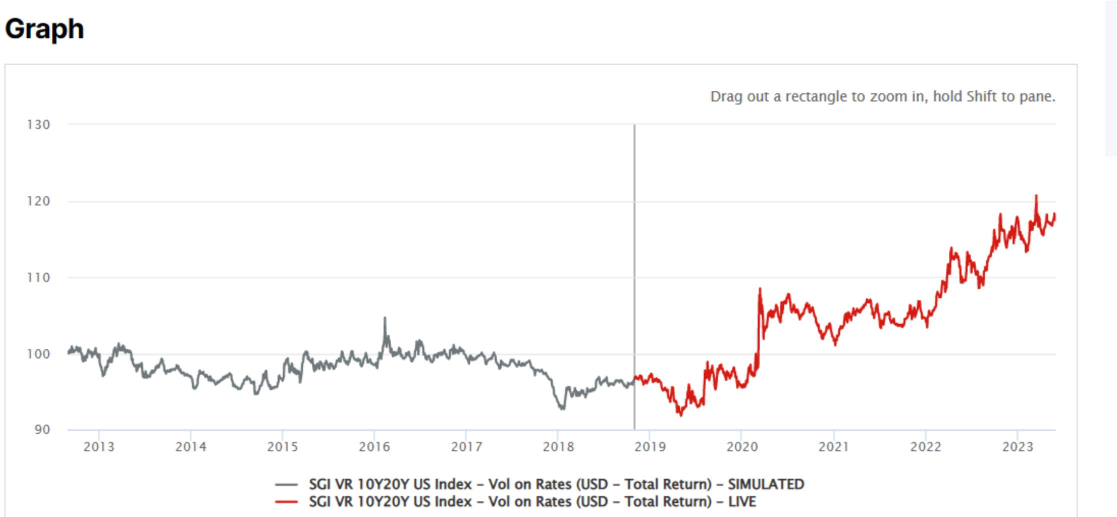


Fig. 3.17 : Le niveau final d'indice volsopt

NB : Le niveau de cet indice a déjà été publié sur la plateforme publique de SGI.SGMarkets.

3.4 Conclusion

Après avoir étudié en détail la théorie des swaptions et leur pricing, ce chapitre se concentre sur la partie pratique du projet, qui consiste à mettre en œuvre un modèle de backtesting des swaptions en utilisant la stratégie de roulement des options.

Dans le cadre de ce projet, la stratégie de roulement des options est appliquée aux swaptions, qui sont des accords entre un acheteur potentiel et un vendeur potentiel d'un actif qui s'engagent à acheter (pour l'acheteur) ou à vendre (pour le vendeur) une certaine quantité de sous-jacents (l'actif) à un prix spécifié et à une date donnée. Étant donné que la plupart des swaptions ont une suite d'échéances mensuelles ou trimestrielles, il n'est pas possible de détenir une swaption qui ne "mature" que dans quelques années. Par conséquent, la solution consiste à "rouler" sur des swaptions à échéances successives. Cela signifie que lorsque l'échéance d'une swaption approche, elle est vendue pour acquérir en même temps une autre swaption portant sur le même actif mais avec une maturité plus longue. Cette approche permet de simuler des stratégies sur des durées données.

Dans le cadre de l'implémentation de cette stratégie de roulement des swaptions, un modèle de backtesting a été développé. Le modèle prend en compte différents paramètres, tels que la fréquence de roulement, la fréquence de hedging et le calendrier. Il permet également de générer un rapport détaillé au format Excel, qui inclut tous les calculs intermédiaires.

L'implémentation du modèle de backtesting a nécessité une optimisation pour réduire le temps d'exécution. Cela a été réalisé en utilisant des structures de données efficaces, telles que les listes et les tuples, plutôt que les dataframes ou les séries.

De plus, le modèle offre une flexibilité pour s'adapter à différentes stratégies de roulement des swaptions. Il permet de personnaliser les règles de roulement, de choisir les maturités et les tenors, et de générer des calendriers spécifiques.

En résumé, ce projet a permis de mettre en place un modèle de backtesting robuste pour les swaptions en utilisant la stratégie de roulement des options. Le modèle offre une flexibilité et une optimisation pour réduire le temps d'exécution. Il permet aux traders d'évaluer et de tester différentes stratégies d'investissement basées sur les swaptions.

Chapitre 4

Optimisation du script de backtest et Test de nouvelles stratégies

4.1 Introduction

L'optimisation du script de backtest et le test de nouvelles stratégies sont des éléments essentiels pour les investisseurs et les traders qui cherchent à prendre des décisions éclairées sur les marchés financiers. Le backtesting permet de simuler l'exécution d'une stratégie d'investissement sur des données historiques pour évaluer ses performances passées, tandis que le test de nouvelles stratégies vise à explorer de nouvelles approches et techniques d'investissement.

Cependant, le temps d'exécution des principales fonctions dans un backtester peut être un obstacle majeur. Des tâches telles que le chargement des données de marché, le calcul des indicateurs techniques, la sélection des instruments financiers et l'optimisation des paramètres peuvent prendre beaucoup de temps, surtout lorsqu'il s'agit de grandes quantités de données. Il est donc primordial d'optimiser ces fonctions pour minimiser le temps d'exécution et maximiser l'efficacité du backtester.

Dans cette optique, ce chapitre se penche sur l'optimisation du script de backtest et le test de nouvelles stratégies. Nous explorerons différentes techniques et approches visant à améliorer les performances du backtester et à réduire les temps d'exécution.

Nous commencerons par analyser les parties du code qui prennent le plus de temps d'exécution et identifierons les domaines qui nécessitent une optimisation. Ensuite, nous discuterons de l'utilisation de techniques telles que le sauvegardage des données précalculées, l'optimisation algorithmique et l'utilisation d'outils d'optimisation tels que Numba pour accélérer le temps de calcul.

4.2 Analyse et Optimisation du script de backtest

Le temps d'exécution des principales fonctions dans un backtester est un élément clé à prendre en compte lors de la mise en place d'une stratégie d'investissement. Les principales fonctions, telles que le chargement des données de marché, le calcul des indicateurs techniques, la sélection des instruments financiers et l'optimisation des paramètres, peuvent prendre beaucoup de temps, en particulier lorsque l'on travaille avec de grandes quantités de données. Il est donc important de veiller à ce que ces fonctions soient optimisées pour minimiser le temps d'exécution et maximiser l'efficacité du backtester. Cela peut être réalisé en utilisant des algorithmes de traitement de données efficaces, en optimisant les paramètres de la stratégie et en utilisant des outils de calcul haute performance. En réduisant le temps d'exécution des principales fonctions, les investisseurs peuvent améliorer la rapidité et la précision de leurs analyses, ce qui peut se traduire par des gains plus importants sur le marché.

Après avoir réussi à implémenter un modèle fiable de backtest pour une stratégie simple de roll des swaptions, il est maintenant nécessaire d'améliorer notre script afin qu'il soit plus rapide et générique, ce qui nous permettra éventuellement de backtester plusieurs nouvelles stratégies avec de nouvelles caractéristiques et d'un niveau de complexité supérieur.

Name	Call Count	Time (ms)		Own Time (ms)	
factory.py	1	759653	100,0 %	3	0,0 %
run_backtest	1	744492	98,0 %	0	0,0 %
run_backtest	2	744492	98,0 %	0	0,0 %
run	1	740689	97,5 %	0	0,0 %
run	1	740689	97,5 %	0	0,0 %
price_options	1	709442	93,4 %	0	0,0 %
wrapper	1	499110	65,7 %	0	0,0 %
price_options	1	499110	65,7 %	0	0,0 %
price	2	316551	41,7 %	14	0,0 %
wrapper	271	316532	41,7 %	5	0,0 %
f	271	311860	41,1 %	10	0,0 %
getPriceswaption	271	311837	41,0 %	3558	0,5 %
get_swap	328	266780	35,1 %	14	0,0 %
get_zc_price	103878	245539	32,3 %	2798	0,4 %
get_zc_rate	103878	242360	31,9 %	4466	0,6 %
get_floating_leg	328	232793	30,6 %	1100	0,1 %
read	2	205073	27,0 %	0	0,0 %
_do_read	2	204976	27,0 %	23	0,0 %
read	2	204903	27,0 %	417	0,1 %
__init__	1	195988	25,8 %	0	0,0 %
load_vol	1	195988	25,8 %	0	0,0 %
__init__	1	195988	25,8 %	0	0,0 %
load	2	189042	24,9 %	0	0,0 %
load	2	189042	24,9 %	43430	5,7 %
price	1	182558	24,0 %	8	0,0 %
get_Swapprice	476	182493	24,0 %	25	0,0 %
get_zc_price	133973	171343	22,6 %	1928	0,3 %
get_zc_rate	133973	169128	22,3 %	2973	0,4 %
get_floating_leg	475	145575	19,2 %	314	0,0 %
spline_cubic	103878	119274	15,7 %	1784	0,2 %

FIG. 4.1 : Le temps d'exécution des principales fonctions de backtester

4.2.1 Profiling et optimisation du script

Pour des tests preliminaires, les calculs s'effectuaient sur des durées courtes (3-6 mois) et pourtant le script prend une durée grande s'exécuter. Afin de procéder a l'optimisation du code, il faut tout d'abord faire un profiling sur le script afin de détecter les parties du code qui prennent le plus de temps.

Dans le tableau suivant, une description des durées prises par chaque bloc de code :

Partie du code	Durée	Pourcentage
Calcul du calendrier	0.0234	0.02%
Construction de la courbe zc	60.45	57.24%
Importation de la vol	12.3	11.65%
Importation des paramètres	1.3	1.23%
Pricing d'une swaption	31.54	29.86%

TAB. 4.1 : Durées des blocs de code avant optimisation

Avec une durée total de 105 secondes.

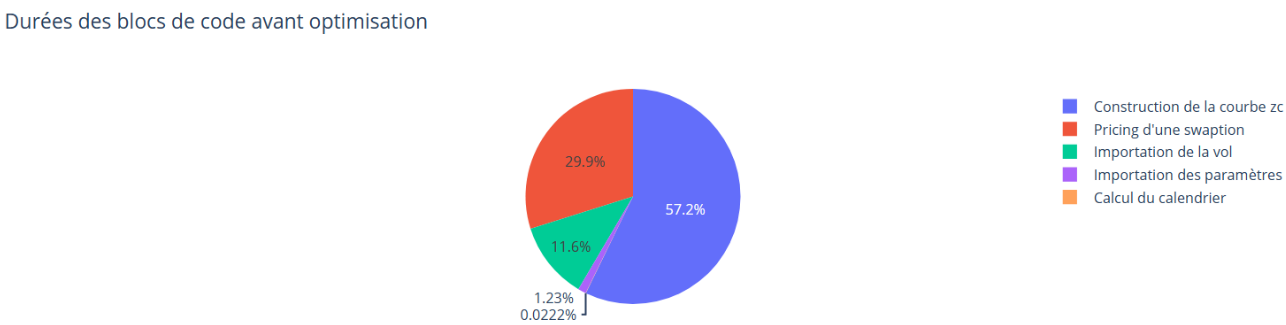


FIG. 4.2 : Durées des blocs de code avant optimisation

A partir de ce tableau, on peut remarquer que les parties qui prennent le plus de temps sont celles relatives au pricing et au calcul des grecs et la partie d'importation des taux ZC.

4.2.2 Sauvegardage des taux strippés

À chaque lancement d'un backtest, les mêmes taux sont utilisés à chaque fois pour le pricing des swaptions. Il s'avère donc utile de sauvegarder les taux strippés et de les réutiliser plutôt que de les recalculer à chaque fois.
L'idée serait donc de calculer les taux et de les appeler chaque fois que nous en avons besoin. Pour ce faire, nous allons utiliser le module Pickle sous Python, qui sert simplement à sauvegarder dans un fichier, au format binaire, n'importe quel objet Python tel qu'il est, sans aucune manipulation supplémentaire.
Afin de donner la possibilité de charger les taux déjà calculés, de recalculer les taux ou d'ajouter un paramètre à notre fichier JSON, appelé **StripCurve** prenant une valeur booléenne **True/False**.

On lance donc le processus de stripping des taux à partir de la date de lancement de la stratégie afin qu'ils soient sauvegardés pour toute éventuelle réutilisation.

```
                                                   zc_curve
date
2001-01-02  {'BOR': {2001-04-04 00:00:00: 0.066174114142, ...
2001-01-03  {'BOR': {2001-04-05 00:00:00: 0.0652702867916,...
2001-01-04  {'BOR': {2001-04-09 00:00:00: 0.0607976116663,...
2001-01-05  {'BOR': {2001-04-09 00:00:00: 0.0589902599354,...
2001-01-08  {'BOR': {2001-04-10 00:00:00: 0.0581660471953,...
...                                                     ...
2023-05-22  {'OIS': {2023-05-23 00:00:00: 0.05253106125074...
2023-05-23  {'OIS': {2023-05-24 00:00:00: 0.05253106125074...
2023-05-24  {'OIS': {2023-05-25 00:00:00: 0.05253106125074...
2023-05-25  {'OIS': {2023-05-26 00:00:00: 0.05253106125074...
2023-05-26  {'OIS': {2023-05-29 00:00:00: 0.05263017904747...
```

FIG. 4.3 : Exemple de zc_curve enregistrée dans des fichiers pickle

Après avoir apporté cette modification, il est évident que la durée de construction de la courbe ZC diminue considérablement, atteignant une baisse de 90%.

Ainsi le temps global du backtest devient :

Avec un total de 51.46 secondes.

Partie du code	Durée	Pourcentage
Calcul du calendrier	0.0234	0.02%
Construction de la courbe ZC	6.3	12.24%
Importation de la volatilité	12.3	23.9%
Importation des paramètres	1.3	2.53%
Pricing des swaptions	**31.54**	**61.29%**

TAB. 4.2 : Durées des blocs de code après optimisation

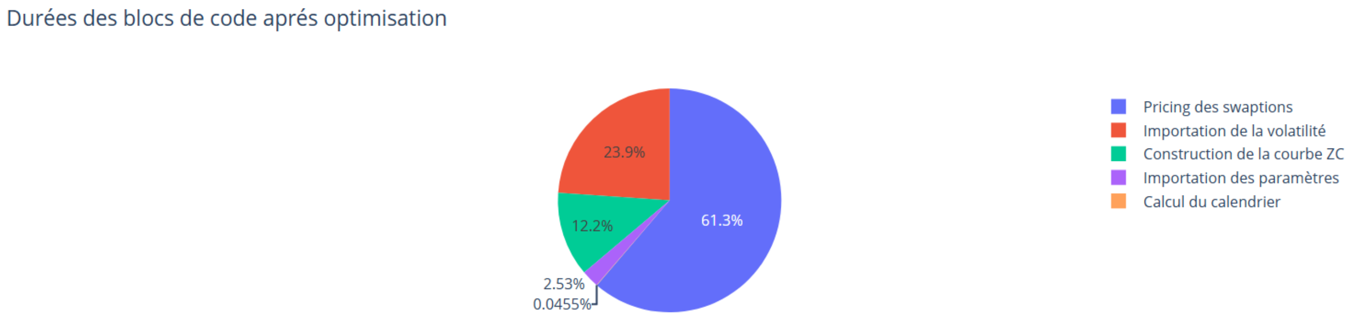


FIG. 4.4 : Durées des blocs de code après optimisation

La partie du code qui occupe désormais le plus de temps est celle relative à l'évaluation du prix des swaptions, représentant un pourcentage supérieur à. **60%**

4.2.3 Optimisation algorithmique

Pour optimiser la partie du code relative au pricing des swaptions et au calcul des grecques, il est possible d'utiliser des améliorations algorithmiques au niveau du script. Les modifications apportées au code visaient principalement à éliminer les boucles et les appels redondants. Le choix des types d'objets manipulés a également eu un impact significatif.

Par exemple

En utilisant des dictionnaires et des tableaux numpy à la place des dataframes, dont la complexité temporelle est inférieure lors des opérations de recherche et de parcours des valeurs, des modifications ont été apportées à la partie pricing. Cela a également eu un impact sur l'ensemble du code, réduisant ainsi le temps de calcul en moyenne de **56%**

Avec un temps total de **21.96 secondes**.

Partie du code	Durée	Pourcentage
Calcul du calendrier	0.0234	0.11%
Construction de la courbe ZC	6.2	28.23%
Importation de la volatilité	12.3	56%
Importation des paramètres	0.9	4.1%
Pricing des swaptions	**2.7**	**11.56 %**

TAB. 4.3 : Durées de blocs de code aprés optimisation algorithmique

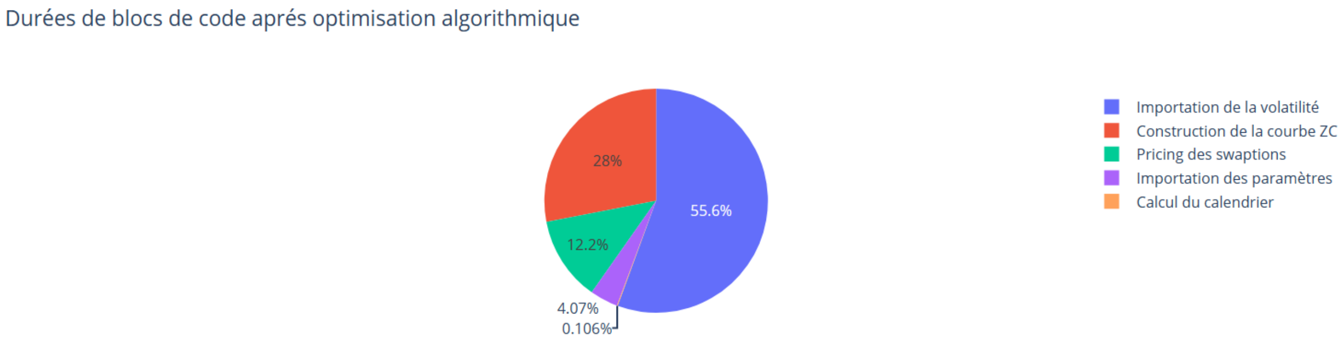


FIG. 4.5 : Durées de blocs de code aprés optimisation algorithmique

Optimisation à l'aide de la technique de Numba

Python n'a pas la réputation de construire des applications rapides et optimisées. En général, pour atteindre des vitesses plus élevées, de nombreux programmeurs traduisent leur code de Python à C++. Le passage d'un code actuel d'un langage à un autre demande beaucoup de travail. Dans mon cas, si je décide de changer mes scripts Python en C++, cela nécessitera également l'apprentissage d'un nouveau langage puisque je n'ai jamais travaillé un projet tout entier avec C++ auparavant. Numba semble être une bonne solution à ce problème.

Numba est un paquetage Python qui traduit le code Python et NumPy en code machine optimisé à l'exécution, en utilisant la bibliothèque du compilateur LLVM, ce qui permet aux algorithmes numériques en Python d'approcher la vitesse du C ou du FORTRAN. Pour traduire un algorithme numérique en python en un algorithme compilé par Numba, il suffit d'appliquer l'un des décorateurs numba à votre fonction python.

Le décorateur jit de Numba est simple à utiliser et comme nous l'avons vu, il peut accélérer votre temps d'exécution en transformant votre code Python en code machine optimisé au moment de l'exécution, mais gardons à l'esprit qu'il fonctionne mieux avec les tableaux et les fonctions Numpy, ainsi qu'avec les boucles. Scipy appelle à compiler du C et du Fortran mais il fonctionne d'une manière que numba ne peut pas gérer, donc numba ne fonctionne pas avec Scipy. Si vous travaillez avec du code qui utilise Scipy, numba ne sera pas la solution, à moins que vous ne vouliez passer du temps à refactoriser votre code pour utiliser quelque chose d'alternatif à Scipy.

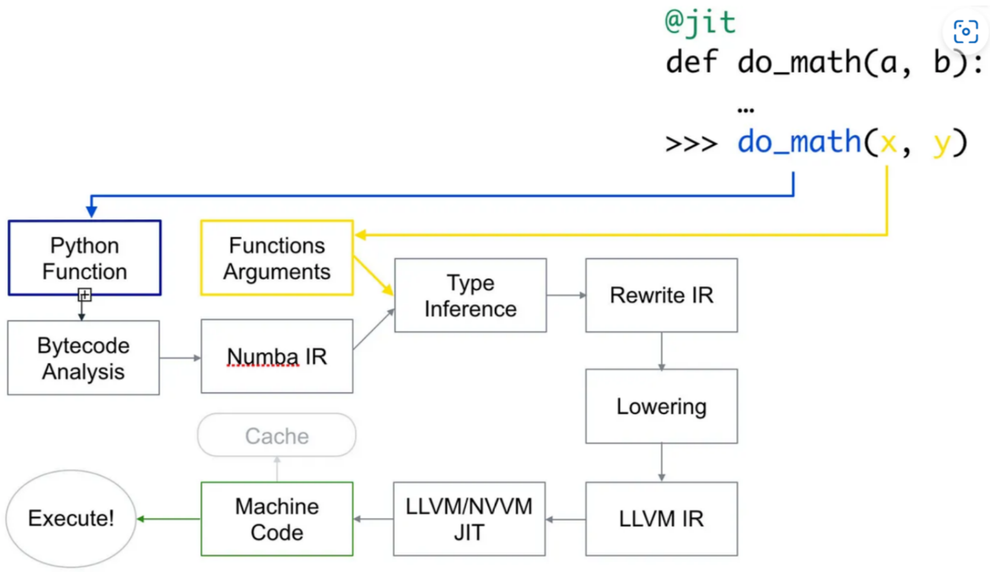


FIG. 4.6 : Le fonctionnement du mécanisme de l'outil d'optimisation numba

Généralement Numba exploite la technologie LLVM comme suit :

Détection des fonctions à compiler :

Lorsque vous utilisez Numba, vous devez annoter les fonctions Python que vous souhaitez accélérer avec des décorateurs spécifiques fournis par Numba. Cela indique à Numba quelles fonctions doivent être compilées avec LLVM.

Analyse et transformation : Numba analyse les fonctions annotées pour extraire des informations sur les types de données utilisés et effectue des transformations nécessaires pour préparer le code à la compilation.

Génération de l'IR LLVM :

Numba utilise la bibliothèque LLVM pour générer une représentation intermédiaire (IR) LLVM à partir du code Python annoté. Cette représentation intermédiaire est une représentation basée sur des registres qui capture le comportement du code Python de manière abstraite.

Optimisation :

L'IR LLVM généré par Numba est soumis à des optimisations avancées fournies par LLVM. Ces optimisations comprennent l'optimisation des registres, l'élimination des boucles, la vectorisation, la spécialisation des types, etc. Ces étapes visent à améliorer les performances du code.

Compilation en code machine : Après les optimisations, LLVM traduit l'IR LLVM en un code machine spécifique à la plateforme cible. Le code machine généré est hautement optimisé et prêt à être exécuté sur la plateforme cible.

Exécution accélérée : Une fois que le code machine est généré, Numba remplace l'appel à la fonction Python d'origine par l'appel au code machine compilé. Ainsi, lors de l'exécution, la fonction compilée est utilisée pour accélérer l'exécution du code Python.

Partie du code	Durée	Pourcentage
Calcul du calendrier	0.0234	0.11%
Construction de la courbe ZC	6.2	30.36%
Importation de la volatilité	12.3	60.23%
Importation des paramètres	0.9	4.41%
Pricing des swaptions	**1.0**	**4.90%**

TAB. 4.4 : Durées de blocs de code aprés optimisation de l'outil numba

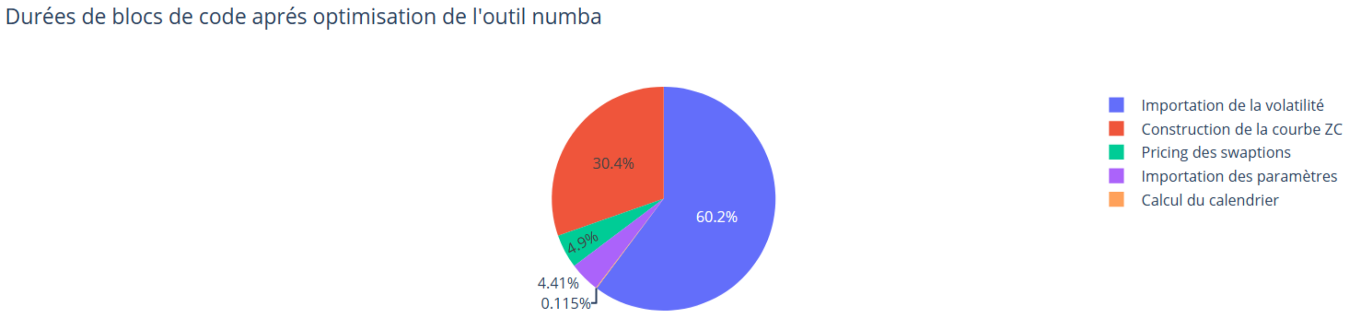


FIG. 4.7 : Durées de blocs de code aprés optimisation de l'outil numba

Conclusion La combinaison de Numba avec LLVM permet d'obtenir des performances significativement améliorées pour certaines parties du code Python, en particulier pour les boucles numériques et les calculs intensifs. La capacité de Numba à tirer parti de l'optimisation et de la génération de code machine de LLVM contribue à accélérer l'exécution du code Python sans nécessiter une réécriture complète en un langage compilé tel que C ou C++.

4.3 Conclusion

En conclusion, l'optimisation du script de backtest et des nouvelles stratégies est cruciale pour améliorer l'efficacité du backtester. Dans le cas présent, nous avons identifié les parties du code qui prenaient le plus de temps d'exécution, telles que la construction de la courbe zéro-coupon (ZC), l'importation de la volatilité et le pricing des swaptions.

Pour optimiser le script, nous avons mis en place différentes techniques. Tout d'abord, nous avons utilisé la technique du sauvegardage des taux strippés, ce qui nous a permis de réutiliser les taux déjà calculés et de réduire considérablement le temps de construction de la courbe ZC.

Ensuite, nous avons effectué une optimisation algorithmique en remplaçant les structures de données, comme les dataframes, par des dictionnaires et des tableaux numpy plus efficaces pour les opérations de recherche et de parcours des valeurs. Cela a réduit le temps de calcul en moyenne de 56%.

Enfin, nous avons utilisé l'outil d'optimisation Numba, qui traduit le code Python en code machine optimisé à l'exécution, en utilisant la bibliothèque du compilateur LLVM.

Cette optimisation a permis de réduire encore davantage le temps d'exécution du pricing des swaptions.

Il est important de souligner que l'optimisation du script de backtest et des nouvelles stratégies est un processus continu. À mesure que de nouvelles fonctionnalités sont ajoutées ou que les données augmentent en volume, il est nécessaire de réévaluer et d'optimiser régulièrement le code pour maintenir des performances élevées.

En résumé, l'optimisation du script de backtest et des nouvelles stratégies permet d'améliorer la rapidité et l'efficacité des analyses, ce qui peut se traduire par des gains plus importants sur le marché financier.

Conclusion générale et perspectives

Ce projet de fin d'études a porté sur une stratégie quantitative d'investissement basée sur le roulement de swaptions de taux d'intérêt. Pendant mon stage, j'ai été chargé de recevoir et de mettre en place un modèle de backtest pour évaluer les stratégies de roll swaption.

Pour cela, il était nécessaire de présenter d'abord quelques notions et techniques essentielles pour une bonne compréhension du sujet, notamment les taux d'intérêt, les produits dérivés qui en découlent, les obligations, les FRA et enfin les swaptions de taux d'intérêt.

Le travail effectué consistait à créer une application web de backtesting de stratégies de swaption accessible à tous les utilisateurs internes, tout en optimisant le temps d'exécution de ce backtesting. L'objectif était également de développer notre modèle de manière à ce qu'il soit suffisamment générique et rapide que possible.

Après plusieurs améliorations algorithmiques et en évitant les calculs redondants et inutiles pour déterminer le niveau d'indice, il a été possible de réduire considérablement le temps d'exécution, ce qui nous a permis de lancer des backtests sur de nouvelles stratégies susceptibles d'être converties en indices opérationnels pour la Société Générale.

Enfin, ce projet m'a été très bénéfique à plusieurs égards. Tout d'abord, il m'a permis de découvrir une partie vaste et fascinante de la finance et des stratégies quantitatives, et d'acquérir une culture financière non négligeable qui me sera également utile à l'avenir. Sur le plan technique, ce projet m'a permis de mettre en pratique et d'approfondir mes connaissances en informatique, notamment en utilisant le calcul scientifique avec Python, la programmation orientée objet et les outils de développement de projets collaboratifs tels que Github et Git.

En ce qui concerne les perspectives de ce travail, d'autres améliorations peuvent certainement être apportées, en particulier en ce qui concerne le temps d'exécution et la flexibilité du modèle

Bibliographie

[1] El Asri Brahim, **Calcul stochastique appliqué à la finance,ENSA-A**

[2] John Hull, **Options, Futures, and Other Derivatives**, 7th Edition, Pearson-Prentice Hall 2009.

[3] **Fixed-Income Securities and Derivatives Handbook** Second Edition

[4] Richard Flavell
Swaps and Other Derivatives Second Edition

[5] World scientific news
Efficiency and Convergence of Bisection, Secant, and Newton Raphson Methods in Estimating Implied Volatility.
http://www.worldscientificnews.com/

[6] Journal of Banking Finance
Riding the swaption curve. Johan Duyvesteyn, Gerben de Zwart.
https://www.sciencedirect.com/journal/journal-of-banking-and-finance

[7] Journal of Economics and Financial Analysis
Interest Rate Swaptions : A Review and Derivation of Swaption Pricing Formulae

[8] D. Akume
PRICING AND HEDGING OF SWAPTIONS
http://www.ict.nsc.ru/jct/getfile.php?id=461

[9] Campbell R. Harvey
Backtesting
https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2345489

[10] Brian G. Peterson
Developing Backtesting Systematic Trading Strategies
https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2345489

[11] Brian G. Peterson
Black, F., and Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities Journal of Political Economy, 81(3), 637-654.

[12] Black, F. (1976)
The Pricing of Commodity Contracts. Journal of Financial Economics, 3(1-2), 167-179

[13] Burgess, N. (2014).
Martingale Measures Change of Measure Explained
https://ssrn.com/abstract=2961006orhttp://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2961006

[14] Burgess, N. (2017a).
How to Price Swaps in Your Head - An Interest Rate Swap Asset Swap Primer
https://ssrn.com/abstract=2815495orhttp://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2815495

[15] Burgess, N. (2017b).
A Review of the Generalized Black-Scholes Formula It's Application to Different Underlying Assets https://ssrn.com/abstract=3023440orhttp://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3023440

Annexes

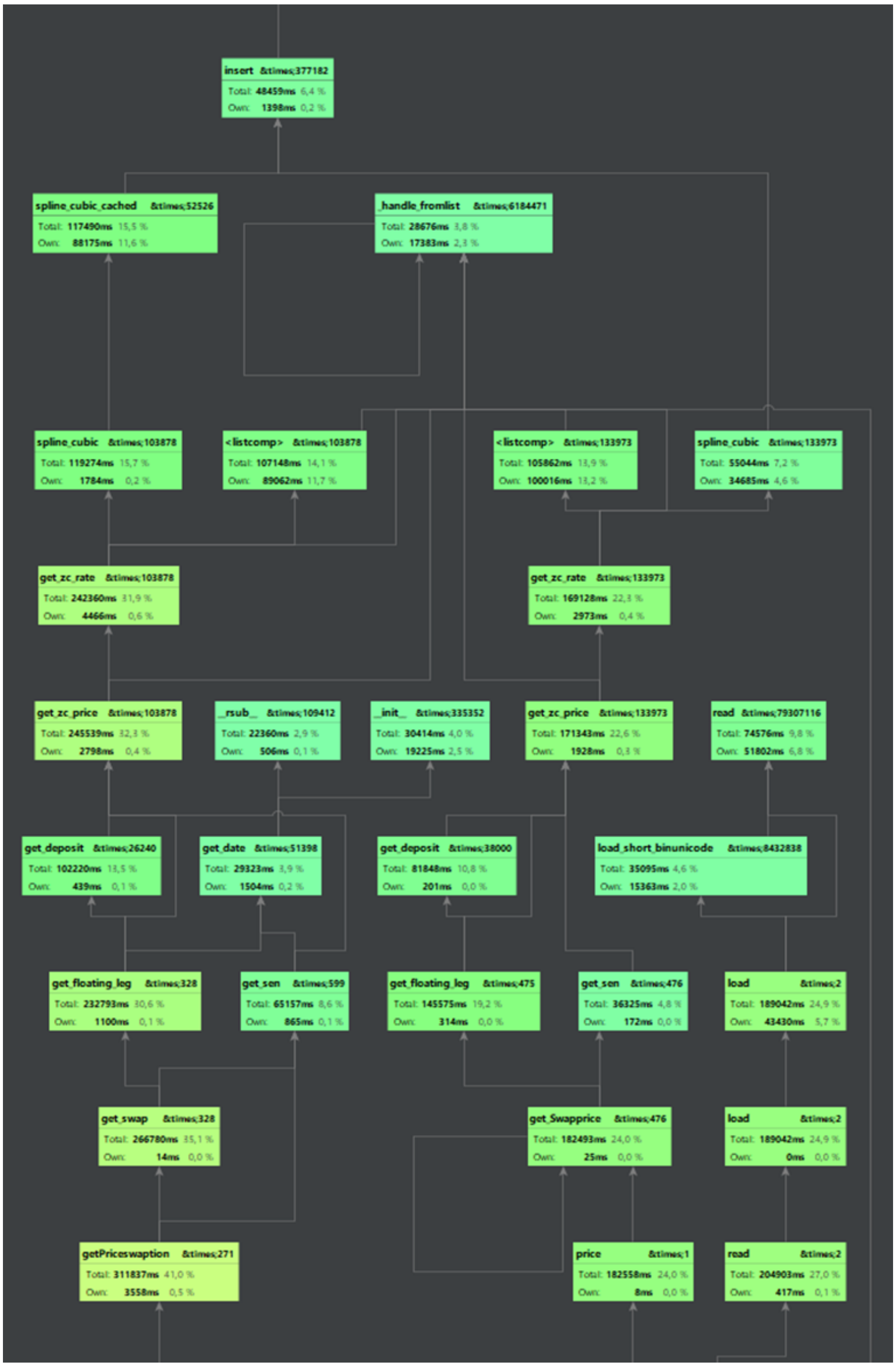


Fig. 8 : Profiling graphique N1 des fonctions du backtester

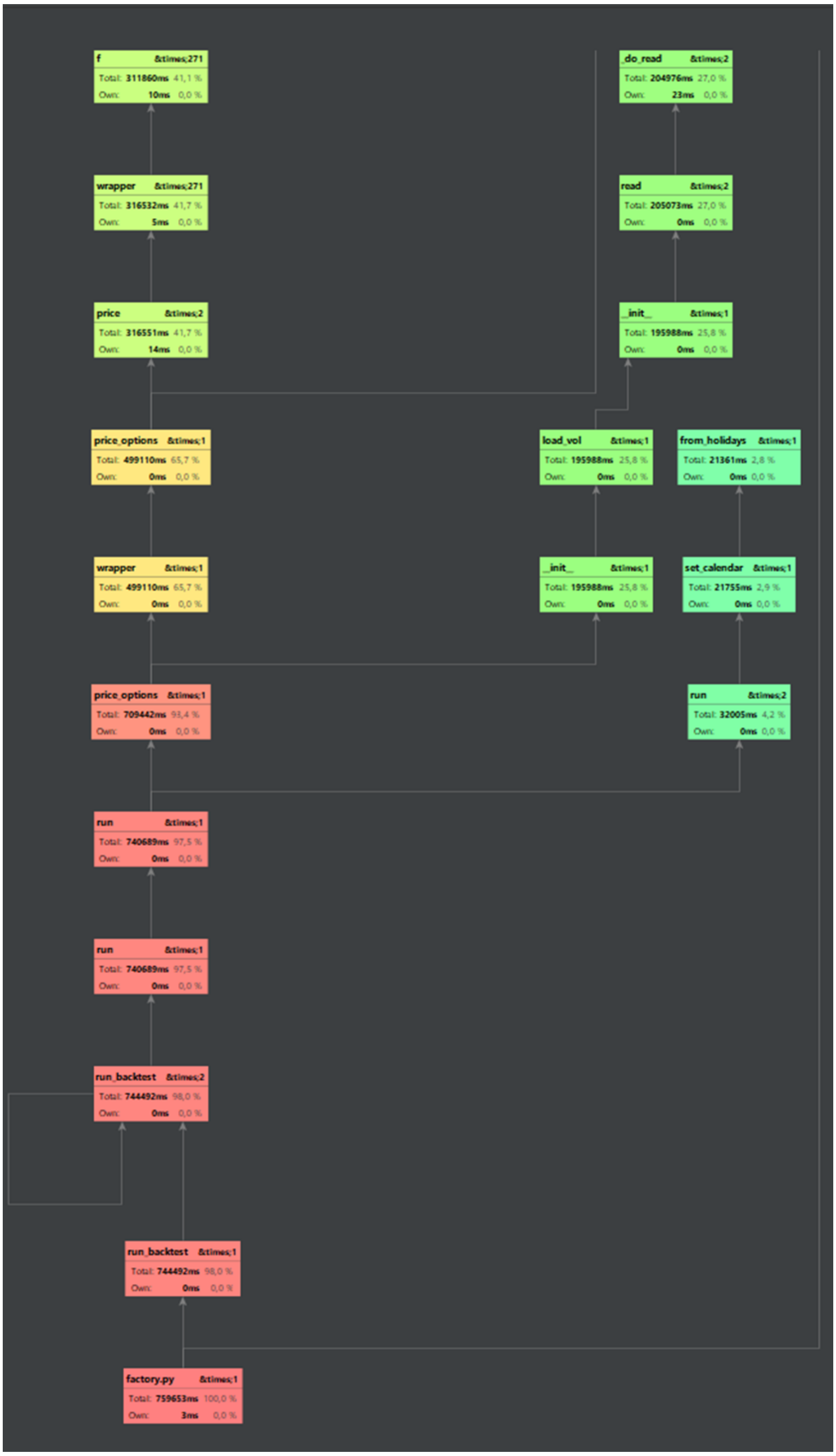


FIG. 9 : Profiling graphique N2 des fonctions du backtester