# Hausdorff 测度简介

姓名 梁津滏　　学号 238612090034　　任课老师 郑云瑞

2024 年 5 月 19 日

**摘　要**

本文介绍了 Hausdorff 测度及其相关概念和性质。首先给出了 Hausdorff 测度的定义，通过覆盖一个集合的方式来度量其大小。然后讨论了 Hausdorff 测度的性质，包括单调性和次可数可加性。接着定义了 Hausdorff 可测集，并证明了所有的 Borel 集都是 Hausdorff 可测的。最后，引入了 Hausdorff 维数的概念，计算了 Cantor 集的 Hausdorff 维数，并讨论了 Minkowski 维数与 Hausdorff 维数之间的关系。

# 目录

# 1 引言

按照 $\mathbb{R}^n$ 中的 Lebesgue 测度, 是无法区别 $\mathbb{R}^n$ 内的两个零测集的. 但这些几何在分形几何及动力系统以及其他一些学科中是十分重要的. 于是出现了所谓分数维数 (Hausdorff 维数) 概念.

# 2 Hausdorff 外测度

## 2.1 Hausdorff 外测度的定义 [3] [1]

**定义 2.1.** *对 $\mathbb{R}^d$ 的任何子集 $E$, 记 $\mathcal{H}_\delta^\alpha(E) = \inf\left\{\sum(\mathrm{diam}F_k)^\alpha : E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k, \mathrm{diam}F_k \leqslant \delta, \forall k\right\}$. 称 $\mathcal{H}^\alpha(E) = \lim\limits_{\delta\to 0}\mathcal{H}_\delta^\alpha(E)$ 为 Hausdorff 外测度. 其中 $\mathrm{diamS} = \{\sup|x-y| : x, y \in S\}$.*

**命题 1.** *Hausdorff 外测度是一个测度.*

要证明 Hausdorff 外测度是一个测度, 只需证明 $\mathcal{H}^\alpha(E)$ 是非负的, 且有可数可加性.

*证明.* $\mathcal{H}^\alpha(E) \geqslant 0$, 这根据定义是显然的.

根据后文中的次可加性,Hausdorff 外测度是一个测度. 这里错了, 要可数可加性, 不是次可加性. □

## 2.2 Hausdorff 外测度性质

**性质 1** (单调性). *若 $E_1 \subset E_2$, 则 $\mathcal{H}^\alpha(E_1) \leqslant \mathcal{H}^\alpha(E_2)$.*

*证明.* 因为 $E_2$ 的任何覆盖也是 $E_1$ 的覆盖, 所以这个性质显然成立. □

**性质 2** (次可加性). *对 $\mathbb{R}^d$ 中的任何可数集簇 $E_j$, 有 $\mathcal{H}^\alpha\left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j\right) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{\infty}\mathcal{H}^\alpha(E_j)$.*

*证明.* 先固定 $\delta$, 对每个 $j$ 选择 $E_j$ 的一个用直径小于 $\delta$ 的集合的覆盖 $\{F_{j,k}\}_{k=1}^{\infty}$, 使得

$\sum\limits_k(\mathrm{diam}F_{j,k})^\alpha \leqslant \mathcal{H}_\delta^\alpha(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$ . 由于 $\bigcup\limits_{j,k} F_{j,k}$ 是 $E$ 的一个直径小于 $\delta$ 的集合的并的覆盖, 故有

$$\sum_j\sum_k(\mathrm{diam}F_{j,k})^\alpha \leqslant \sum_j\left\{\mathcal{H}_\delta^\alpha(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}\right\}$$

$$\mathcal{H}_\delta^\alpha(E) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{H}_\delta^\alpha(E_j) + \varepsilon$$

$$\mathcal{H}^\alpha(E) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{H}^\alpha(E_j) + \varepsilon$$

由于 $\varepsilon$ 是任意的, 不等式 $\mathcal{H}^\alpha(E) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{\infty}\mathcal{H}^\alpha(E_j)$ 成立. □

**性质 3.** *$\mathcal{H}^\alpha(A) = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists E_1, E_2, \cdots \in \mathbb{R}^n$, 使得$A \subset \bigcup\limits_i E_i$ 且 $\sum\limits_i(\mathrm{diam}(E_i))^\alpha < \varepsilon$ .*

*证明.* $\Rightarrow)\mathcal{H}_\delta^\alpha(E) = inf\left\{\sum\limits_i(\mathrm{diam}F_i)^\alpha : E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F_i, \mathrm{diam}F_i \leqslant \delta, \forall i\right\}$.

由 $\mathcal{H}^\alpha(A) = \lim\limits_{\delta\to 0}\mathcal{H}_\delta^\alpha(A) = 0$ 知, $\forall i, A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i, \mathrm{diam}E_i \leqslant \delta, \sum\limits_i(\mathrm{diam}(E_i))^s < \varepsilon$

只要取这些 $E_i$, 使得 $\sum\limits_i(\mathrm{diam}(E_i))^s < \varepsilon$ 成立.

反之,$\forall \varepsilon > 0, \exists E_1, E_2, \cdots \in \mathbb{R}^n$, 使得$A \subset \bigcup_i E_i$ 且 $\sum_i (\operatorname{diam}(E_i))^\alpha < \varepsilon$. 那么, 取这些子集 $E_1, E_2, \cdots$, 就可以得到

$$\mathcal{H}_M^\alpha(A) = \inf\left\{\sum_i (\operatorname{diam} E_i)^\alpha : E \subset \bigcup_{i=1}^\infty E_i, \operatorname{diam} E_i \leqslant M, \forall i, M >> 1\right\} < \varepsilon$$

由于 $\varepsilon$ 是任意的, 所以 $0 \leqslant \mathcal{H}^\alpha(A) \leqslant \mathcal{H}_M^\alpha(A) \leqslant 0$, 故 $\mathcal{H}^\alpha(A) = 0$.

□

# 3 Hausdorff 可测集

Lebesgue 可测集借助 Lebesgue 外测度来定义. 抽象测度具备更广泛的适用范围, 下面将列出抽象测度的定义. 仿照 Lebesgue 可测集和抽象测度的可测集, 我们定义 Hausdorff 可测集.

**定义 3.1** (Lebesgue 外测度)**.** 设 $E$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的点集，$\{I_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一列开长方体，且 $\bigcup_{n=1}^\infty I_n \supset E$. 则 $\sum_{n=1}^\infty |I_n|$ 确定一个非负的数 $u$（或 $+\infty$）。记

$$m^*(E) = \inf\left\{u \mid u = \sum_{n=1}^\infty |I_n|, \bigcup_{n=1}^\infty I_n \supset E, I_n \text{ 是开长方体}\right\}$$

称 $m^*(E)$ 为 $E$ 的 *Lebesgue* 外测度.

**定义 3.2** (Lebesgue 可测集)**.** 假设 $E \subset \mathbb{R}^n$，如果对任何集合 $T \subset \mathbb{R}^n$ 都有

$$m^*(T) = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c),$$

则称 $E$ 为 *Lebesgue* 可测集，此时称 $m^*(E)$ 为 $E$ 的 *Lebesgue* 测度。

**定义 3.3** ($\sigma$ - 环)**.** 设 $\mathscr{R}$ 是非空集合 $S$ 的一簇非空子集, 如果存在

*(1)* 当 $A, B \in \mathscr{R}$ 时, 有 $A \cup B \in \mathscr{R}$;

*(2)* 当 $A, B \in \mathscr{R}$ 时, 有 $A - B \in \mathscr{R}$,

则称 $\mathscr{R}$ 是 $S$ 的子集构成的一个环. 如果还有

*(3)* 对任意 $A_n \in \mathscr{R}$,

$n = 1, 2, 3, \cdots$, 有

$$\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathscr{R}$$

则称 $\mathscr{R}$ 是 $S$ 的子集构成的 $\sigma$ - 环.

**定义 3.4** (可加与可数可加)**.** 设 $\mathscr{R}$ ,$\mu : \mathscr{R} \to \mathbb{R}_+$ 是映射, 如果对任意 $A, B \in \mathscr{R}$, 只要 $A \cap B = \varnothing$, 则有 $\mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$, 则称 $\mu$ 是可加的.

如果当 $A_n \in \mathscr{R}, n = 1, 2, 3, \cdots$ 互不相交且 $\bigcap_{n=1}^\infty A_n \in \mathscr{R}$ 时, 有

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$$

则称 $\mu$ 是可数可加的.

**定义 3.5** (测度)**.** 假如对于任意集合 $A \in \mathscr{R}$, $\mu(A) \geqslant 0$, 则称 $\mu$ 是非负的. $\mathscr{R}$ 上非负的可数可加的使 $\mu(\varnothing) = 0$ 的集合函数称为 $\mathscr{R}$ 上的一个测度.

**定义 3.6** ($\mu^*-$可测集). 设 $A\in\mathscr{R}$, 若对任意 $T\in\mathscr{R}$, 等式

$$\mu^*(T)=\mu^*(T\cap A)+\mu^*(T\cap A^C)$$

恒成立, 则称 $A$ 为 $\mu^*-$可测集. 要寄!!!!!!

## 3.1 Hausdorff 可测集定义

仿照 Lebesgue 可测集的定义, 定义 Hausdorff 可测集如下:

**定义 3.7** (Hausdorff 可测集). $\mathcal{H}^s(A)=\lim\limits_{\delta\to 0}\mathcal{H}^\delta_\alpha(A)$. 假设 $E\subset\mathbb{R}^n$, 如果对任何集合 $T\subset\mathbb{R}^n$ 都有

$$\mathcal{H}^s(T)=\mathcal{H}^s(T\cap E)+\mathcal{H}^(T\cap E^c),$$

则称 $E$ 为 *Hausdorff* 可测集, 此时称 $\mathcal{H}^s(E)$ 为 $E$ 的 *Hausdorff* 测度.*(2)*

## 3.2 Hausdorff 可测集性质

1. **性质: 单调性**: 若 $E_1\subset E_2$, 则 $\mathcal{H}^s(E_1)\leqslant\mathcal{H}^s(E_2)$.

   证明. 因为 $E_2$ 的任何覆盖也是 $E_1$ 的覆盖, 所以这个性质显然成立. □

2. **性质: 次可加性**: 对 $\mathbb{R}^n$ 中的任意可数集簇 $E_j$, 有 $\mathcal{H}^s\left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}E_j\right)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{H}^s\left(E_j\right)$.

   证明. 先固定 $\delta$, 对于每个 $j$ 选择 $E_j$ 的一个直径小于 $\delta$ 的集合的覆盖 $\{F_{j,k}\}_{k=1}^{\infty}$, 使得

   $$\sum_k(\mathrm{diam}F_{j,k})^\alpha\leqslant\mathcal{H}^\alpha_\delta(E_j)+\frac{\varepsilon}{2^j}$$

   由于 $\bigcup\limits_{j,k}F_{j,k}$ 是 E 的一个直径小于 $\delta$ 的集合的覆盖, 故有

   $$\begin{aligned}\mathcal{H}^\alpha_\delta(E)&\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{H}^\alpha_\delta(E_j)+\varepsilon\\&\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{H}^\alpha(E_j)+\varepsilon.\end{aligned}$$

   由于 $\varepsilon$ 是任意的, 不等式 $\mathcal{H}^\alpha_\delta(E)\leqslant\sum\mathcal{H}^\alpha_\delta(E_j)$ 成立, 令 $\delta$ 趋于 0 就证明了 $\mathcal{H}^\alpha_\delta$ 的可数次可加性. □

3. **性质**: 设 $A,B\subset\mathbb{R}^n$ , 且 $d(A,B)>0$. 则 $\mathcal{H}^s(A\cup B)=\mathcal{H}^s(A)+\mathcal{H}^s(B)$.

   证明. $\mathcal{H}^s(A\cup B)\leqslant\mathcal{H}^s(A)+\mathcal{H}^s(B)$ 由上一条性质直接得到.

   下面证明 $\mathcal{H}^s(A\cup B)\geqslant\mathcal{H}^s(A)+\mathcal{H}^s(B)$.

   固定 $\varepsilon>0$ 满足 $\varepsilon\leq d(F_1,F_2)$. 令 $\delta<\varepsilon$ , 用 $F_1,F_2,F_3,\cdots$ 覆盖 $E_1\cup E_2$. 令

   $$F_j'=E_1\cap F_j,F_j''=E_2\cap F_j.$$

   $F_j'$ 和 $F_j''$ 是 $E_1$ 和 $E_2$ 的互不相交的覆盖. 因此

   $$\sum_j(\mathrm{diam}F_j')^\alpha+\sum_i(\mathrm{diam}F_i'')^\alpha\leqslant\sum_k(\mathrm{diam}F_k)^\alpha$$

$$inf\sum_j(\mathrm{diam}F_j')^\alpha+inf\sum_i(\mathrm{diam}F_i'')^\alpha\leqslant inf\sum_k(\mathrm{diam}F_k)^\alpha$$

$$\mathcal{H}^s(A)+\mathcal{H}^s(B)\leqslant\mathcal{H}^s(A\cup B)$$

□

### 3.3 定理

**定理 3.1.** *所有 Borel 集都是 Hausdorff 可测集.*

*证明.* 1. Borel 集的构造

由 $\mathbb{R}^n$ 中的开集经过可数次的交、并、差运算后得到的 $\sigma-$ 域记作 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$, 称为 $\mathbb{R}^n$ 中的 Borel 集类.$\mathscr{B}$ 中的元称为 Borel 集. 由于根据 Hausdorff 可测集的性质, 开集有限次交、并、差运算后得到的集合仍是可测集. 因此, 我们只需要证明, 任何开集 Hausdorff 可测.

2. 任何开集 Hausdorff 可测

设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 为开集. 不妨设 $G\neq\varnothing$. 则 G 可以写成可数个互不相交的区间之并 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$. 我们可以保证这些区间都是可测的.

再由可测集的可数次交并补运算仍然是可测集, 得到任意的开集 Hausdorff 可测.

□

## 4 Hausdorff 维数

### 4.1 定义

**定义 4.1.** *假设 $E\subset\mathbb{R}^n$, 定义 $E$ 的 Hausdorff 维数为*

$$\mathrm{dim}E=\inf\{s\in\mathbb{R}^1:\mathcal{H}^s(E)=0\}.$$

**定义 4.2** (Minkowski 维数 (记盒维数))**.** *设 $F$ 是 $\mathrm{R}^n$ 上任意非空的子集,$N_\delta(F)$ 是直径最大为 $\delta$ , 可以覆盖 $F$ 的集合的最小个数, 则 $F$ 的下 Minkowski 维数和上 Minkowski 维数分别定义为:*

$$\underline{\mathrm{dim}}_BF=\underline{\lim}_{\delta\to0}\frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln\delta}$$

$$\overline{\mathrm{dim}}_BF=\overline{\lim}_{\delta\to0}\frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln\delta}$$

*如果这两个值相等, 则称这共同的值为 $F$ 的 Minkowski 维数或盒维数, 记为*

$$\mathrm{dim}_BF=\lim_{\delta\to0}\frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln\delta}$$

### 4.2 Hausdorff 维数性质

**命题 2.** *Cantor 集的 Hausdorff 维数为 $\dfrac{\ln2}{\ln3}$.*

*证明.* Cantor 集的构造为将 [0,1] 均分为 3 段, 去掉中间的开区间. 然后将剩下的两个区间分别做三等分, 分别去掉中间的开区间. 这样继续下去, 最终留下的点集记作 C.

记第一次分割 $[0,1]$ 得到的闭集为 $C_1$, 第二次得到的集合为 $C_2$, 一直划分 $n$ 次, 得到集合 $C_n$.

记 $C=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}C_i$, C 是有界闭集.

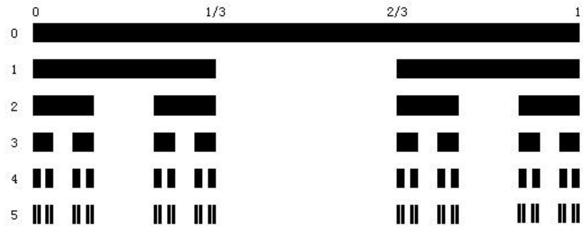



图 1: Cantor 集

表 1: 康托集的性质

| 集合 | Lebesgue 测度 | 不交的闭集个数 |
|---|---|---|
| $C_1$ | $\frac{2}{3}$ | $2^1$ |
| $C_2$ | $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ | $2^2$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $C_n$ | $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ | $2^n$ |

C 的 Lebesgue 测度为 0.

$$\mu(C) = \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right)^n$$

$$\begin{aligned}\mu(C) &= \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu(C_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} 2^n \frac{1}{3^{n\alpha}} \\ &= 0\end{aligned}$$

下证 C 的 Hausdorff 维数为 $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$.

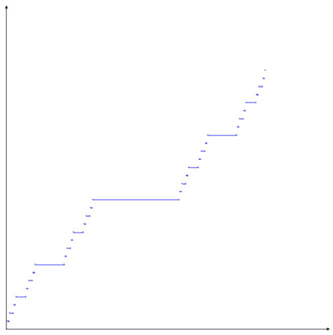
$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{\alpha}(C) &= \lim_{\delta\to 0} inf\left\{\sum_k (\mathrm{diam} F_k)^{\alpha} | C \subset \bigcup_k F_k, \forall F_k \in \mathbb{R}^n, F_k \le \delta\right\} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2}{3^{\alpha}}\right\}^n \\ &\leqslant \mathcal{H}^{\alpha}(C) \\ &= \left\{\frac{2}{3^{\alpha}}\right\}^k\end{aligned}$$

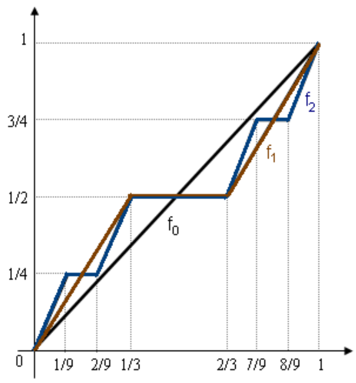
令 $3^{\alpha} = 2$, 则 $\alpha = \dfrac{\ln 2}{\ln 3}$, 此时 $\mathcal{H}^{\alpha}(C) \leqslant 1$ .

下面证明 $\mathcal{H}^{\alpha}(C)$ 有下界.

构造 Cantor-Lebesgue 函数. 下面我们构造一个函数序列 $\{f_n(x)\}$，这个序列将收敛于 Cantor-Lebesgue 函数函数. 首先定义

$$f_0(x) = x$$






接下来，对于每个正整数 $n$，函数 $f_{n+1}(x)$ 都由函数 $f_n(x)$ 定义：

$$f_{n+1}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cdot f_n(3x) & \text{if } 0\leqslant x<\frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \text{if } \frac{1}{3}\leqslant x<\frac{2}{3}\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot f_n(3x-2) & \text{if } \frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

$$|f_2(x)-f_1(x)|\leqslant\frac{1}{2^2}$$
$$|f_3(x)-f_2(x)|\leqslant\frac{1}{2^3}$$
$$\cdots$$
$$|f_n(x)-f_{n-1}(x)|\leqslant\frac{1}{2^n}$$

注意到

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|\leqslant|f_{n+p}(x)-f_{n+p-1}(x)|+\cdots+|f_{n+1}(x)-f_n(x)|$$

故 $\forall\varepsilon>0,\exists N,p>0,\forall n>N$

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|\leqslant|f_{n+p}(x)-f_{n+p-1}(x)|+\cdots+|f_{n+1}(x)-f_n(x)|<\frac{1}{2^n}<\varepsilon$$

. 因此在 $x\in[0,1]$ 上,$f_n\rightrightarrows f$.

下面先证明 Cantor-Lebesgue 函数 Hölder 连续.

定义 $\forall x_1,x_2\in[0,1]$,若$\exists\gamma\in\mathbb{R}^+$,$|f(x_1)-f(x_2)|\leq M|x_1-x_2|^\gamma$, 则 f 是 $\gamma$-Hölder 连续.

$$\begin{aligned}|f(x_1)-f(x_2)|&\leq|f(x_1)-f_n(x_1)|+|f_n(x_1)-f_n(x_2)|+|f_n(x_1)-f(x_2)|\\&\leq\frac{1}{2^n}+\left(\frac{3}{2}\right)^n|x_1-x_2|+\frac{1}{2^n}\end{aligned}$$

对于给定的 $|x_1-x_2|$, 可以选取 $n$, 使得$1\leqslant 3^n|x_1-x_2|\leqslant 3$,

$$\begin{aligned}|f(x_1)-f(x_2)|&\leqslant C\frac{1}{2^n}\\&\leqslant C\frac{3^{n\gamma}}{2^n}\frac{1}{3^{n\gamma}}\\&\leqslant C\frac{3^{n\gamma}}{2^n}|x_1-x_2|^\gamma\quad(令\gamma=\frac{\ln2}{\ln3})\\&=C|x_1-x_2|^{\frac{\ln2}{\ln3}}\end{aligned}$$

所以 $f$ 是 $\dfrac{\ln2}{\ln3}$-Hölder 连续.

考虑 $\phi(x)$ 在 E 上有定义. $|\phi(x)-\phi(y)| \leqslant M|x-y|^{\gamma}, \forall x, y \in E$.
$\forall F, F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \mathrm{diam} E_i < \delta$ , $\Phi(F) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \phi(F \cap E_i)$.
可以由 $\phi$ 的 $\gamma$-Hölder 连续性推出 F 和 $E_i$ 经过 $\phi$ 映射后直径的关系.

$$\begin{aligned}
\phi(F \cap E_i) \leqslant M \mathrm{diam}^{\gamma}(E_i) &\Rightarrow \mathrm{diam}\phi(F \cap E_i) \leqslant M \mathrm{diam}^{\gamma}(E_i) \\
&\Rightarrow \mathrm{diam}^{\alpha}\phi(F \cap E_i) \leqslant M^{\alpha}\mathrm{diam}^{\gamma\alpha}(E_i) \\
&\Rightarrow \sum_{i}^{\infty} \mathrm{diam}^{\alpha}\phi(F \cap E_i) \leqslant M^{\alpha} \sum_{i}^{\infty} \mathrm{diam}^{\gamma\alpha}(E_i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}^{\alpha}_{M\delta^{\gamma}}(\phi(F)) \leqslant \sum_{i}^{\infty} \mathrm{diam}^{\alpha}\phi(F \cap E_i) \\
&\Rightarrow \mathcal{H}^{\alpha}_{M\delta^{\gamma}}(\phi(F)) \leqslant M^{\alpha}\mathcal{H}^{\alpha\gamma}_{\delta}(F) \quad (\forall \delta \in \mathbb{R}^{+}) \\
&\Rightarrow \mathcal{H}^{\alpha}\phi(F) \leqslant M^{\alpha}\mathcal{H}^{\alpha\gamma}(F) \quad (\ \delta \to 0)
\end{aligned}$$

将这个结果应用于 Cantor-Lebesgue 函数, 令 $\gamma = \frac{\ln 2}{\ln 3}$, 取 $\alpha = 1$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(f([0,1])) &\leqslant M\mathcal{H}^{\frac{\ln 2}{\ln 3}}(C) \\
\mu(f([0,1])) = \mu[0,1] &\leqslant M\mathcal{H}^{\frac{\ln 2}{\ln 3}}(C) \\
1 &\leqslant M\mathcal{H}^{\frac{\ln 2}{\ln 3}}(C)
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{M} \leqslant \mathcal{H}^{\frac{\ln 2}{\ln 3}}(C) \leqslant 1$$

因此,$\mathcal{H}^{\frac{\ln 2}{\ln 3}}(C)$ 有限且不为 0. Cantor 集的 Hausdorff 维数为 $\frac{\ln 2}{\ln 3}$.
tips: 在前文中应该叙述清楚 Hausdorff 维数的定义和性质. □

### 4.3 Minkowski 维数与 Hausdorff 维数的关系

**命题 3.** *说明 $A$ 的 Hausdorff 维数小于等于 $A$ 的下 Minkowski 维数.*

*证明.* 设 $\exists F \in \mathbb{R}^n$ , $\exists s$ , 使得 $0 \leq \mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta\to 0}\mathcal{H}^s_{\delta}(F)$. 如果 F 能被 $N_{\delta}(F)$ 个直径为 $\delta$ 的集覆盖, 则由 Minkowski 维数的定义得:

$$\mathcal{H}^s_{\delta}(F) \leqslant N_{\delta}(F)\delta^s$$

只要 $\delta$ 足够小, 对不等式两边取对数, 就有 $\ln N_{\delta}(F) + s\ln\delta \geq 0$, 因此 $s \leqslant \frac{\ln N_{\delta}(F)}{-\ln\delta}$. 所以

$$\dim_H F \leqslant \underline{\dim}_B F \leqslant \overline{\dim}_B F$$

证毕 [2]. □

# 参考文献

[1] 实变函数论. 人民教育出版社, 1961.

[2] K.J. Falconer. *分形几何: 数学基础及其应用*. 图灵数学 · 统计学丛书. 人民邮电出版社, 2007.

[3] Elias M Stein and Rami Shakarchi. *Real analysis: measure theory, integration, and Hilbert spaces*. Princeton lectures in analysis. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2005.

# 附录

## 回答以下关于 Hausdorff 外测度的几个问题

1. 设 $A$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子集, $s \geqslant 0$, 写出 $A$ 的 Hausdorff 外测度 [1]$\mathcal{H}^s(A)$ 的定义.
2. 说明 Hausdorff 外测度满足单调性和次可数可加性.
3. 证明 $\mathcal{H}^s(A) = 0$ 当且仅当对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\mathbb{R}^n$ 中的子集 $E_1, E_2, \cdots$, 满足 $A \subset \cup_i E_i$ 且 $\sum_i (\operatorname{diam}(E_i))^s < \varepsilon$.[2]

## 回答以下关于 Hausdorff 可测集的几个问题

1. 设 $A, B \subset \mathbb{R}^n$, 且 $d(A, B) > 0$[3]. 说明 Hausdorff 外测度满足以下度量外测度性质

$$\mathcal{H}^s(A \cup B) = \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$$

2. 模仿 Lebesgue 可测集的定义, 写出 Hausdorff 测度意义下的可测集.
3. 利用 Hausdorff 外测度的度量外测度性质说明所有 Borel 集都是 Hausdorff 可测的.

## 回答以下关于 Hausdorff 维数的几个问题

1. 设 $A$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子集, 写出 $A$ 的 Hausdorff 维数的定义.
2. 计算 Cantor 集的 Hausdorff 维数.
3. 进一步假设 $A$ 是有界集, 写出 $A$ 的上、下 Minkowski 维数的定义。说明 $A$ 的 Hausdorff 维数小于等于 $A$ 的下 Minkowski 维数.

[01] 注意, 有些文献中会把外测度直接称为测度.

[2] $\operatorname{diam}(E)$ 是集合 $E$ 的直径.

[03] $d$ 是两个集合之间的距离。