第3章 命题逻辑的推理理论

- 推理的形式结构
- 判断推理是否正确的方法
- 推理定律与推理规则
- 构造证明

  直接证明法, 附加前提证明法, 归缪法

3.1 推理的形式结构

推理举例:

(1) 正项级数收敛当且仅当部分和有上界.

(2) 若$A\cup C\subseteq B\cup D$，则$A\subseteq B$且$C\subseteq D$.

推理: 从前提出发推出结论的思维过程

上面(1)是正确的推理，而(2)是错误的推理.

证明: 描述推理正确的过程.

推理的种类

推理一般分为两类

- 演绎推理
  - 前提和结论存在必然联系的推理
- 归纳推理
  - 前提和结论不存在必然联系的推理

古典的数理逻辑主要研究演绎推理

一、推理的形式结构

定义 若对于每组赋值，或者$A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k$均为假，或者当$A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k$为真时, B也为真, 则称由前提$A_1, A_2, \ldots, A_k$推出结论B的推理是有效的或正确的, 否则推理不正确（无效）. 称B为有效的结论.

定理3.1 “$A_1, A_2, \ldots, A_k$ 推B”的推理正确

当且仅当 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$为重言式.

推理的形式结构: $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$ 或

前提： $A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论： B

若推理正确，则记作：$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$.

关于推理的形式结构的说明

1. 由前提$A_1,A_2, \ldots, A_k$推出结论B的推理是否正确与前提的排列顺序无关。

2. 前提是由有限个公式组成，设前提的集合为Γ，由Γ推出B的推理记为$\Gamma \vdash B$或$\{A_1,A_2, \ldots, A_k\} \vdash B$.

若推理正确,记为$\Gamma \models B$,否则记为$\Gamma \not\models B$.

$\{A_1,A_2, \ldots, A_k\} \models B$ 等同于 $A_1, A_2, \ldots, A_k \Rightarrow B$

$\{A_1,A_2, \ldots, A_k\} \vdash B$ 等同于 $A_1, A_2, \ldots, A_k \to B$

常使用以下形式：

前提： $A_1, A_2, \ldots , A_k$

结论： B

3. 设前提$A_1,A_2,\ldots,A_k$中共出现n个命题变元,对于任意一组赋值,前提和结论不出现$A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k$为真而B为假时,推理就是正确的.

4. 推理正确不一定结论B为真.

判断推理是否正确的方法

- 真值表法
- 等值演算法
- 主析取范式法

判断推理是否正确

- 构造证明法　　证明推理正确

说明：用前3个方法时采用形式结构

“$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$”

用构造证明时, 采用

“前提: $A_1, A_2, \ldots, A_k$, 结论: B”.

实例

例 判断下面推理是否正确

(1) 若今天是1号，则明天是5号. 今天是1号. 所以明天是5号.

解 设 p：今天是1号，q：明天是5号.

推理的形式结构为：$((p\to q)\wedge p) \to q$

证明（用等值演算法）

$$((p\to q)\wedge p)\to q$$

$$\Leftrightarrow \neg((\neg p\vee q)\wedge p)\vee q$$

$$\Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee q \Leftrightarrow 1$$

得证推理正确

实例 (续)

(2) 若今天是1号，则明天是5号．明天是5号．所以今天是1号.

解 设p：今天是1号，q：明天是5号.

推理的形式结构为: $((p \to q) \wedge q) \to p$

证明（用主析取范式法）

$$((p \to q) \wedge q) \to p \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge q \to p \Leftrightarrow \neg ((\neg p \vee q) \wedge q) \vee p$$

$$\Leftrightarrow \neg q \vee p \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow m_0 \vee m_2 \vee m_3$$

结果不含m_1, 故01是成假赋值，所以推理不正确.

实例 (续)

直接观察判断:

推理的形式结构为: $((p\to q)\wedge q)\to p$

证明 令前提$(p\to q)\wedge q$ 为1,考察p的取值（若不能为0,则推理有效）

$\because (p\to q)\wedge q$ 为1

$\therefore p\to q$为1, q为1

$\therefore p$即可为1也可为0。

所以推理无效.

或者令结论B为0，考察前提是否为0.若前提为0,则推理正确,否则错误。
此方法本质上是真值表。

实例 (续)

(3) 一份统计表格的错误或者是由于材料不可靠，或者是由于计算有错误；这份统计表格的错误不是由于材料不可靠，所以这份统计表格是由于计算有错误。

解 设各命题变元为

p：统计表格的错误是由于材料不可靠。

q：统计表格的错误是由于计算有错误

推理的形式结构为：

前提：$(p \vee q), \neg p$

结论：q

实例 (续)

p	q	$p\vee q$	$\neg p$	$(p\vee q)\wedge\neg p$
0	0	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	0	0

从真值表看出 $(p\vee q)\wedge\neg p \Rightarrow q$

(自行写出判断过程，使用等值演算和主范式)

实例 (续)

(4) 如果张老师来了，这个问题可以得到解答，如果李老师来了，这个问题也可以得到解答，总之张老师或李老师来了，这个问题就可得到解答.

解：p：张老师来了。q: 李老师来了。

r: 这个问题可以得到解答.

推理的形式化：

前提： $(p\rightarrow r),(q\rightarrow r),(p\vee q)$

结论： r

(自行写出判断过程，使用真值表、等值演算和主范式)

二、推理定律—重言蕴涵式

$A \Rightarrow (A \lor B)$ 附加律

$(A \land B) \Rightarrow A$ 化简律

$(A \to B) \land A \Rightarrow B$ 假言推理

$(A \to B) \land \neg B \Rightarrow \neg A$ 拒取式

$(A \lor B) \land \neg B \Rightarrow A$ 析取三段论

$(A \to B) \land (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$ 假言三段论

$(A \leftrightarrow B) \land (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$ 等价三段论

$(A \to B) \land (C \to D) \land (A \lor C) \Rightarrow (B \lor D)$ 构造性二难

$(A \to B) \land (\neg A \to B) \Rightarrow B$ 构造性二难（特殊形式）

$(A \to B) \land (C \to D) \land (\neg B \lor \neg D) \Rightarrow (\neg A \lor \neg C)$ 破坏性二难

推理定律 (续)

说明:

1. 任何的等值式 $A \Leftrightarrow B$ 产生两个推理定律 $A \Rightarrow B$ 和 $B \Rightarrow A$.

2. A,B,C,D等是元语言符号。

3. 将具体的公式代入某条推理定律，就得到这条定律的一个代换实例.

如: $p \Rightarrow p \vee q$, $p \to q \Rightarrow (p \to q) \vee r$

3. 2 自然推理系统

推理系统的形式系统 I

$I=<A(I), E(I), A_x(I), R(I)>$

$A(I)$：非空的字母表

$E(I)$：$A(I)$中符号构造的合式公式集

$A_x(I)$： $E(I)$中一些特殊公式组成的公理集

$R(I)$：推理规则集

$<A(I), E(I)>$是I的形式语言系统

$<A_x(I), R(I)>$是I的形式演算系统

三. 推理系统

推理系统分为两类：

1. 自然推理体系

无约定的公理，从任意给定的前提出发，应用系统中的推理规则进行推演。得到的结论可能是重言式，也可能不是重言式.

2. 公理推理体系

从公理集出发，应用系统中的推理规则进行推演。得到的结论是重言式.

三. 推理系统

定义 自然推理系统 P 如下:

1. 字母表

(1) 命题变项符号: $p, q, r, \ldots, p_i, q_i, r_i, \ldots (i \geq 1)$.

(2) 联结词符号: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.

(3) 括号与逗号: (,), , .

2. 合式公式 见合式公式定义

3. 推理规则

推理规则

(1) 前提引入规则

(2) 结论引入规则

(3) 置换规则

(4) 假言推理规则

$$\frac{A\to B \quad A}{\therefore B}$$

(5) 附加规则

$$\frac{A}{\therefore A\vee B}$$

(6) 化简规则

$$\frac{A\wedge B}{\therefore A}$$

(7) 拒取式规则

$$\frac{A\to B \quad \neg B}{\therefore \neg A}$$

(8) 假言三段论规则

$$\frac{A\to B \quad B\to C}{\therefore A\to C}$$

推理规则(续)

(9) 析取三段论规则

$$\frac{A \vee B \qquad \neg B}{\therefore A}$$

(10)构造性二难推理规则

$$\frac{A \to B \qquad C \to D \qquad A \vee C}{\therefore B \vee D}$$

(11) 破坏性二难推理规则

$$\frac{A \to B \qquad C \to D \qquad \neg B \vee \neg D}{\therefore \neg A \vee \neg C}$$

(12) 合取引入规则

$$\frac{A \qquad B}{\therefore A \wedge B}$$

证明

证明:描述推理过程的命题公式序列，其中每个命题公式或者是已知的前提，或者是由前面的命题公式应用推理规则得到的结论(中间结论或推理中的结论).

前提： $A_1, A_2, \ldots, A_k$, 结论： B

公式序列$C_1,C_2,\ldots,C_l$.其中C_i是由某些A_i或者序列中前面的公式应用推理规则得到的, C_l=B.**则称公式序列$C_1,C_2,\ldots,C_l$是由$A_1, A_2, \ldots, A_k$推出B的证明**。

四. 构造证明

1. 直接证明法

2. 附加前提证明法

3. 归谬法

1. 直接证明法

直接证法

由一组前提，利用推理规则，推演得到有效结论。

例 构造下面推理的证明：

若明天是星期一或星期三，我就有课. 若有课，今天必备课. 我今天没备课. 所以，明天不是星期一和星期三.

解 设 p：明天是星期一，q：明天是星期三，

r：我有课，s：我备课

推理的形式结构为

前提：$(p\vee q)\to r$，$r\to s$，$\neg s$

结论：$\neg p\wedge\neg q$

直接证明法 (续)

证明

① $r \to s$　　前提引入

② $\neg s$　　前提引入

③ $\neg r$　　①②拒取式

④ $(p \vee q) \to r$　　前提引入

⑤ $\neg(p \vee q)$　　③④拒取式

⑥ $\neg p \wedge \neg q$　　⑤置换

2. 附加前提证明法

欲证明

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论：$C \rightarrow B$

等价地证明

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k, C$

结论：B

理由：

$$(A_1 \land A_2 \land \ldots \land A_k) \rightarrow (C \rightarrow B)$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \land A_2 \land \ldots \land A_k) \lor (\neg C \lor B)$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \land A_2 \land \ldots \land A_k \land C) \lor B$$

$$\Leftrightarrow (A_1 \land A_2 \land \ldots \land A_k \land C) \rightarrow B$$

附加前提证明法 (续)

例 构造下面推理的证明:

2是素数或合数. 若2是素数，则$\sqrt{2}$ 是无理数. 若$\sqrt{2}$是无理数，则4不是素数. 所以，如果4是素数，则2是合数.

用附加前提证明法构造证明

解 设 p：2是素数，q：2是合数，

r：$\sqrt{2}$是无理数，s：4是素数

推理的形式结构

前提：$p\lor q$, $p\to r$, $r\to\neg s$

结论：$s\to q$

附加前提证明法 (续)

证明

① s	附加前提引入
② $p\rightarrow r$	前提引入
③ $r\rightarrow\neg s$	前提引入
④ $p\rightarrow\neg s$	②③假言三段论
⑤ $\neg p$	①④拒取式
⑥ $p\vee q$	前提引入
⑦ q	⑤⑥析取三段论

请用直接证明法证明之

3. 归谬法(反证法)

欲证明

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论：B

将$\neg B$加入前提，若推出矛盾，则得证推理正确.

理由:

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee B$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B)$$

$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B$为矛盾式当且仅当

$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B)$为重言式

归谬法 (续)

例 构造下面推理的证明

前提：$\neg(p\wedge q)\vee r$, $r\rightarrow s$, $\neg s$, p

结论：$\neg q$

证明（用归谬法）

① q　　结论否定引入

② $r\rightarrow s$　　前提引入

③ $\neg s$　　前提引入

④ $\neg r$　　②③拒取式

归谬法 (续)

⑤ $\neg(p\wedge q)\vee r$	前提引入
⑥ $\neg(p\wedge q)$	④⑤析取三段论
⑦ $\neg p\vee\neg q$	⑥置换
⑧ $\neg p$	①⑦析取三段论
⑨ p	前提引入
⑩ $\neg p\wedge p$	⑧⑨合取

请用直接证明法证明之

消解证明法

- 归谬法的一种
- 准备工作：将前提和结论的否定等值演算为合取范式，以合取范式中的析取项作为前提，若能得到空式，则推理正确.

例 前提：$q\rightarrow p, q\leftrightarrow s, s\leftrightarrow t, t\wedge r$

结论：$p\wedge q\wedge s$

解 先求前提中各式和结论否定的合取范式.

$q\rightarrow p \Leftrightarrow \neg q\vee p$, $q\leftrightarrow s \Leftrightarrow (q\vee\neg s)\wedge(\neg q\vee s)$,

$s\leftrightarrow t \Leftrightarrow (s\vee\neg t)\wedge(\neg t\vee s)$, $t\wedge r$, $\neg(p\wedge q\wedge s) \Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee\neg s$

消解证明法

前提：$\neg q\vee p,\ q\vee\neg s,\ \neg q\vee s,\ s\vee\neg t,\ t\vee\neg s,\ t,\ r,\ \neg p\vee\neg q\vee\neg s$

证明：

(1) $\neg t\vee s$	前提引入
(2) t	前提引入
(3) s	(1)(2)归结
(4) $q\vee\neg s$	前提引入
(5) q	(3)(4)归结
(6) $\neg q\vee p$	前提引入
(7) p	(5)(6)归结
(8) $\neg p\vee\neg q\vee\neg s$	前提引入
(9) $\neg q\vee\neg s$	(7)(8)归结
(10) $\neg s$	(5)(9)归结
(11) λ	(3)(10)归结

实例

例 证明 $(p\vee q)\wedge(p\to r)\wedge(q\to s)\Rightarrow s\vee r$

证明

① $p\vee q$	前提引入
② $\neg p\to q$	① 置换
③ $q\to s$	前提引入
④ $\neg p\to s$	② ③ 假言三段论
⑤ $\neg s\to p$	④ 置换
⑥ $p\to r$	前提引入
⑦ $\neg s\to r$	⑤⑥ 假言三段论
⑧ $s\vee r$	⑦置换

例 证明 $(w\vee r)\to v$, $v\to c\vee s$, $s\to u$, $\neg c\wedge\neg u\Rightarrow\neg w$

证：(1) $\neg c\wedge\neg u$	前提引入
(2) $\neg u$	(1) 化简
(3) $s\to u$	前提引入
(4) $\neg s$	(2)(3) 拒取式
(5) $\neg c$	(1)化简
(6) $\neg c\wedge\neg s$	(4)(5)合取
(7) $\neg(c\vee s)$	(6)置换
(8) $(w\vee r)\to v$	前提引入
(9) $v\to c\vee s$	前提引入
(10) $(w\vee r)\to c\vee s$	(8)(9) 假言三段论
(11) $\neg(w\vee r)$	(7)(10)拒取式
(12) $\neg w\wedge\neg r$	(11) 置换
(13) $\neg w$	(12) 化简

实例（续）

例 构造下面推理的证明

若明天是星期一或星期三，我就有课。若有课，今天一定备课. 我今天没备课. 所以，明天不是星期一和星期三.

解 设 p：明天是星期一，q：明天是星期三，

r：我有课， s：我今天备课

证明的形式结构为

前提：$(p\vee q)\rightarrow r$，$r\rightarrow s$，$\neg s$

结论：$\neg p\wedge\neg q$

前提：$(p\vee q)\rightarrow r, r\rightarrow s, \neg s$，结论：$\neg p\wedge\neg q$

证明

① $r\rightarrow s$	前提引入
② $\neg s$	前提引入
③ $\neg r$	① ②拒取式
④ $(p\vee q)\rightarrow r$	前提引入
⑤ $\neg(p\vee q)$	③ ④拒取式
⑥ $\neg p\wedge\neg q$	⑤置换

请再用归谬法证明

实例（续）

例 证明 $p\to q, \neg(q\vee r)\Rightarrow\neg p$

证明 ① $p\to q$ 前提引入

② p 附加前提引入

③ q ①②假言推理

④ $\neg(q\vee r)$ 前提引入

⑤ $\neg q\wedge\neg r$ ④置换

⑥ $\neg q$ ⑤化简

⑦ $q\wedge\neg q$(矛盾或永假） ③⑥合取引入

请再用直接证明法

实例（续）

例 证明 $p\rightarrow(q\rightarrow r), \neg s\vee p, q \Rightarrow s\rightarrow r$

证明 (1) s 附加前提引入

(2) $\neg s\vee p$ 前提引入

(3) p (1)(2)析取三段论

(4) $p\rightarrow(q\rightarrow r)$ 前提引入

(5) $q\rightarrow r$ (3)(4)假言推理

(6) q 前提引入

(7) r (5)(6)假言推理

试试直接证明法和归谬法

实例（续）

例 设有下列情况，结论是否有效?

(a)或者是天晴或者是下雨。

(b)如果是天晴，我去看电影。

(c)如果我去看电影，我就不看书。

结论：如果我在看书，则天在下雨。

解： 设 p：天晴，q: 下雨，

s: 我看电影，r: 我看书。

推理的形式结构为

前提： $\neg(p\leftrightarrow q), p\rightarrow s, s\rightarrow\neg r$

结论： $r\rightarrow q$

前提：$\neg(p\leftrightarrow q), p\rightarrow s, s\rightarrow\neg r$，结论：$r\rightarrow q$

证明

(1) r	附加前提引入
(2) $s\rightarrow\neg r$	前提引入
(3) $\neg s$	(1)(2)拒取式
(4) $p\rightarrow s$	前提引入
(5) $\neg p$	(3)(4)拒取式
(6) $\neg(p\leftrightarrow q)$	前提引入
(7) $\neg p\leftrightarrow q$	(6)置换
(8) $(\neg p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow\neg p)$	(7)置换
(9) $\neg p\rightarrow q$	(8)化简
(10) q	(5)(9)假言推理

前提：$p\vee q, p\to s, s\to\neg r$，结论：$r\to q$

证明 (1) r 附加前提引入

(2) $s\to\neg r$ 前提引入

(3) $\neg s$ (1)(2)拒取式

(4) $p\to s$ 前提引入

(5) $\neg p$ (3)(4)拒取式

(6) $p\vee q$ 前提引入

(7) q (5)(6)假言推理

思考题

1. 证明下面推理

如果小张守第一垒并且小李向B队投球，则A队将获胜。或者A队未取胜，或者A队成为联赛第一名。A队没有成为联赛的第一名。小张守第一垒。因此，小李没向B队投球。

2. 证明 $\neg p\vee q, r\rightarrow\neg q \Rightarrow p\rightarrow\neg r$（请分别直接法，归谬法，附加证明法证明）

3. 证明 $\neg p\vee(\neg q\vee r), q\rightarrow(r\rightarrow s), p \Rightarrow q\rightarrow s$

4. 用推理规则说明$p\rightarrow q, \neg(q\vee r), p\wedge r$是否能同时为真？即是否相容。

作业

习题3

6(1)(4)(6), 7, 10, 14, 15, 16, 18