一、 填空题

1. （6 分）设 A 是 3 阶方阵，且 $|A|=3$，A^* 为 A 的伴随矩阵，则 $|3A^{-1}|=$_________，

$|A^*|=$________, $|3A^*-7A^{-1}|=$_________.

2. （3 分）设 α=$(1,-2,3)^T$，β=$(-1,\frac{1}{2},0)$，$A=\alpha\beta$，求 $|A^{100}|=$__________.

3. （3 分）设向量 α=$\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量，则 $k=$_________.

4. （3 分）设 A 为 3 阶实对称矩阵，向量 $\xi_1=(1,2,5)^T$，$\xi_2=(k,2k,3)^T$ 分别对应于特征值 2 和 3 的特征向量，则 $k=$_________.

5. （3 分）设 η_1,η_2,η_3 为四元非齐次线性方程组的三个解向量，方程组系数矩阵的秩为 3，$\eta_1+\eta_2=(3,4,5,6)^T,\eta_3=(1,2,3,4)^T$，则该方程组的通解为___________.

二、选择题

1. 设 B,P 为 n 阶矩阵，且 P 可逆，则下列运算不正确的是（　　　　）;

A. $|B|=|P^{-1}BP|$；　　B. $|2E-B|=|2E-P^{-1}BP|$；

C. $|2E-B|=|2E-(P^{-1}BP)^T|$；　　D. $P^{-1}BP=B$.

2．设 A,B,C 为同阶方阵，下列结论成立的有（　　）.

（A）$AB=BA$；　　（B）$(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$；

（C）若 $AC=BC$，则 $B=C$；　　（D）$(A+B)^T=A^T+B^T$.

3. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，则线性方程组为 $Ax=b$ 有解的充分条件是（ ）

A. A 是行满秩的；　B. A 是列满秩的；　C. A 的秩小于 A 的行数；　D. A 的秩小于 A 的列数

4. 设 A 为 n 阶实对称矩阵，P 是 n 阶可逆矩阵。已知 n 维列向量 α 是 A 的属于 λ 的特征向量，则矩阵 $(P^{-1}AP)^T$ 的属于特征值 λ 的特征向量是（　　　　）

A. $P^{-1}\alpha$；　B. $P^T\alpha$；　C. $P\alpha$；　D. $(P^{-1})^T\alpha$

5. 设α,β,γ线性无关，α,β,δ线性相关，下列哪个成立（　　　　）

A.　α必可由β,γ,δ线性表示；　　　B.　β必可由α,γ,δ线性表示；

C.　δ必可由α,β,γ线性表示；　　　D.　δ必不可由β,γ,δ线性表示；

6. 设A为n($n\geq 2$)阶可逆矩阵，交换A的第一行与第二行得到矩阵B，A^*,B^*分别为A,B的伴随矩阵，则（　　　）

A.　交换A^*的第一列与第二列得到B^*；B.　交换A^*的第一行与第二行得到B^*；

C.　交换A^*的第一列与第二列得到$-B^*$；D. 交换A^*的第一行与第二行得到$-B^*$。

三、计算题

1. （6 分）计算行列式$\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

2. （6 分）设矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，矩阵$X$满足$A^*X=A^{-1}+2X$，其中$A^*$是$A$的伴随矩阵，求矩阵$X$。

3. （8 分）已知R^3的两组基为$B_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\},B_2=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$，其中$\alpha_1=(1,1,1)^T$，$\alpha_2=(0,1,1)^T,\alpha_3=(0,0,1)^T$，$\beta_1=(1,0,1)^T,\beta_2=(0,1,-1)^T,\beta_3=(1,2,0)^T$.

（i）求基B_1到基B_2的过渡矩阵A；

（ii）已知α在基B_1下的坐标为$(1,-2,-1)^T$，求α在基B_2下的坐标。

4. （8 分） 求向量组$\alpha_1=(1,0,1,0)^T,\alpha_2=(2,1,-3,7)^T,\alpha_3=(4,1,-1,7)^T$，$\alpha_4=(3,1,0,3)^T,\alpha_5=(4,1,3,-1)^T$的秩及其一个极大线性无关组，并把其余向量用找到的极大线性无关组线性表出。

四、证明题

若 A 为 n 阶方阵，且 $4A^2-I=O$，证明：

（1）A 的特征值只能为 $\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$；（2） $r(2A+I)+r(2A-I)=n$。

五、解方程组

设方程组

$$\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3\\ x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda\end{cases},$$

问 λ 为何值时，此方程组有唯一解、无解或有无穷多解？并在有无穷多解时，求其通解。

六、化二次型为标准型

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$ 的秩为 2， 求 c，并用正交变换把 f 化为标准型，写出相应的正交矩阵。