一、填空题

1.$(1,1,1)^T$ **2.** $-\frac{1}{6}(A-\mathrm{I})$ **3.** $(1,2,1,2)^T+\mathrm{k}(0,1,-2,-1)^T$ **4.** $\frac{3}{2}$ **5.** $\frac{1}{3}$ **6.** -8

二、选择题

DACBAB

三、计算题

1. $\prod_{\mathrm{k}=0}^{n} a_k-\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_j\right)$

2. $(2I-A^*)BA^2=3A$

$\Rightarrow B=3(2I-A^*)^{-1}A^{-1}=3[A(2I-A^*)]^{-1}=3[2A-|A|I]^{-1}$

$$=3[\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}]^{-1}=3\begin{pmatrix}1&4&6\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=3\begin{pmatrix}1&-4&10\\0&1&-4\\0&0&1\end{pmatrix}$$

3. $\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\-1&2&2&1\\1&0&4&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&4&0\\0&1&3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, 秩为3, 极大线性无关组$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4\}$, $\alpha_3=4\alpha_1+3\alpha_2$.

4. $\begin{pmatrix}3&5\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}T$, $\begin{pmatrix}3&5&1&1\\-1&-1&1&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&1&0\\2&3&0&1\end{pmatrix}$, 过渡矩阵$T=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$,

$\gamma_{\mathbf{B_1}}=T\gamma_{\mathbf{B_2}}=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, $\gamma_{\mathbf{B_2}}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

四、证明题

证: 设$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$. 左乘A可得$k_1\mathrm{A}\alpha_1+k_2\mathrm{A}\alpha_2+k_3\mathrm{A}\alpha_3=-2k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+2k_3\alpha_2+k_3\alpha_3=0$. 两式消掉$k_3\alpha_3$得, $3k_1\alpha_1-2k_3\alpha_2=0$. 因为$\alpha_1,\alpha_2$为不同特征值对应的特征向量, 所以$\alpha_1,\alpha_2$无关, 从而有$k_1=k_3=0$, 进而有$k_1=k_2=k_3=0$. 所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$无关.

五、解方程组

$$\begin{pmatrix}1&1&-4&1&6\\1&0&4&-1&-1\\2&1&a-1&b-3&b+6\\-2&-1&0&b-2&b-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-4&1&6\\0&-1&8&-2&-7\\0&-1&a+7&b-5&b-6\\-2&-1&0&b-2&b-2\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-4&1&6\\0&1&-8&2&7\\0&-1&a+7&b-5&b-6\\0&1&-8&b&b+10\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-4&1&6\\0&1&-8&2&7\\0&0&a-1&b-3&b+1\\0&0&0&b-2&b+3\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-4&1&6\\0&1&-8&2&7\\0&0&a-1&-1&-2\\0&0&0&b-2&b+3\end{pmatrix}$$

当$a=1$时, $\begin{pmatrix}1&1&-4&1&6\\0&1&-8&2&7\\0&0&0&1&2\\0&0&0&b-2&b+3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-4&1&6\\0&1&-8&2&7\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&b+3-2(b-2)\end{pmatrix}\rightarrow$

$\begin{pmatrix}1&1&-4&1&6\\0&1&-8&2&7\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&-b+7\end{pmatrix}$, 当$b\neq 7$时, 方程组无解; 当$b=7$时, 方程组有无穷多解, $\begin{pmatrix}1&1&-4&1&6\\0&1&-8&2&7\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow$

$\begin{pmatrix}1&1&-4&0&4\\0&1&-8&0&3\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&4&0&1\\0&1&-8&0&3\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，基础解系为$X_1=\begin{pmatrix}-4\\8\\1\\0\end{pmatrix}$, 非齐次特解为$X_0=\begin{pmatrix}1\\3\\0\\2\end{pmatrix}$,

通解为$X=\begin{pmatrix}1\\3\\0\\2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-4\\8\\1\\0\end{pmatrix}$.

当$a\neq 1$时,若$b=2$, 则方程组无解; 当$b\neq 2$时, 方程组有唯一解.

六、化二次型为标准型

(1) $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&1&-2\\2&-2&c\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-2\\-1&1&-2\\0&0&c-4\end{pmatrix}$, 所以$c=4$.

(2) $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&-2\\1&\lambda-1&2\\-2&2&\lambda-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&\lambda&0\\1&\lambda-1&2\\-2&2&\lambda-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&0&0\\1&\lambda-2&2\\-2&4&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-6)$

A的特征值为$\lambda_1=0$（二重），$\lambda_2=6$（一重）.

$\lambda_1=0$时, $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 基础解系$X_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$, 标准正交化,

$\beta_1=X_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\beta_2=X_2-\frac{(X_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{2}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\eta_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}$, $\eta_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$,

$\lambda_2=6$时, $\lambda I-A=\begin{pmatrix}5&1&-2\\1&5&2\\-2&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&5&2\\5&1&-2\\-2&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&5&2\\0&-24&-12\\0&12&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$, $X_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$,

$\eta_3=\frac{X_3}{|X_3|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$. 所以$f(x_1,x_2,x_3)$标准型为$6y_3^2$, 正交变换阵为$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$.

(3) $f(x_1,x_2,x_3)$的规范型为z_3^2.