(一)

1. 设$\alpha_1=(1,2,1,3)$，$\alpha_2=(1,1,0,1)$，$\alpha_3=(1,4,3,7)$,
   1) 计算的α_1和α_2线性组合$2\alpha_1+\alpha_2, 3\alpha_1-\alpha_2$;
   2) 说明α_3是否可以由α_1和α_2表示;
   3) 说明$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是否是相关的.
2. 对方程组$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+2x_4=2 \\ x_2-x_3-x_4=1 \\ x_1+x_2-x_3+3x_4=1 \\ x_1-x_2+x_3+5x_4=-1 \end{cases}$,
   1) 写出其向量形式与矩阵形式;
   2) 计算其系数距阵A与列向量$\beta=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}$的乘积;
3. 证明：$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$相关.
4. 证明：向量组$\alpha_1=(1,0,0)$，$\alpha_2=(1,1,0)$，$\alpha_3=(1,1,1)$是无关的.
5. 对矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&-1&-1\\-1&1&2\\0&3&5\end{pmatrix}$,
   1) 写出A的第 2 行第 3 列的元素，第 4 行和第 1 列;
   2) 先作倍加变换，将A的第 3 行乘(2)加到第 2 行，得到矩阵B，再作对换变换，对换B的第 2 行与第 1 行,得到C，写出矩阵B和C;
   3) 通过高斯消元法，将A化为上阶梯阵U和简化上阶梯阵R;
   4) 对齐次方程组$AX=0$，说明是否有非零解.
6. 对矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&-1&-1\\-1&1&a\\0&3&5\end{pmatrix}$，若A所化成的上阶梯阵只有两个主元，计算$a$的取值.
7. 对方程组$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+2x_4=2 \\ x_2-x_3-x_4=1 \\ x_1+x_2-x_3+3x_4=1 \\ x_1-x_2+x_3+5x_4=-1 \end{cases}$,
   1) 通过高斯消元法，将其增广矩阵化为上阶梯阵;
   2) 指明方程组的主未知量和自由未知量;
   3) 通过对自由未知量赋值，求出方程组的一个解.

(二)

8. 写出 3 个相关的向量，要求数字 1 到 9 都要用到，并给出这 3 个向量的两个不同的极大无关组.

9. 证明:
   (1) 若一组向量包含一个相关的子组，则这组向量相关;
   (2) 若一组向量无关，则任意子组也无关;
10. 判断以下向量组是相关的还是无关的，并说明理由.
   (1) $\alpha_1=(1,0,4,0,1),\alpha_2=(0,1,8,1,2),\alpha_3=(0,2,3,0,5)$;
   (2) $\alpha_1=(1,0,4),\alpha_2=(0,1,8),\alpha_3=(0,2,3),\alpha_4=(1,7,2)$;
   (3) $\alpha_1=(1,2,4,1),\alpha_2=(1,8,1,2),\alpha_3=(2,3,0,5),\alpha_4=(2,4,8,2)$.
11. 判断：若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$中的任意$\mathrm{n}-1$个向量都无关，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$无关．若正确，证明之．若错误，举一个反例.
12. 举出m维实向量空间$\mathbf{R}^{\mathrm{m}}$中的两个不同的极大无关组，并说明$\mathbf{R}^{\mathrm{m}}$中包含无穷多个不同的极大无关组.
13. 设一组m维向量S中有且至多有r个向量无关，证明：若存在S的一个包含r个向量的子组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$可以表示$S$，则$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$是$S$的极大无关组.
14. 设$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\cdots\beta_m=\alpha_m+\alpha_1$．证明:
   (1) 当m为偶数时，$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_m$一定相关;
   (2) 当m为奇数时，$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_m$相关等价于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$相关.

(三)

15. (1) 任意写出两个秩为 3 但不等价的 4 维向量组;
   (2) 任意写出秩为 2 的 3 个 3 维向量，并将这 3 个向量扩维成 3 个无关的 4 维向量.
16. 设$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$，求$r(A)$，并判断$AX=0$是否有唯一解.
17. 设向量组$\alpha_1=(1,2,1,3)^T$，$\alpha_2=(-1,-1,0,-1)^T$，$\alpha_3=(1,4,3,7)^T$，$\alpha_4=(-1,-2,1,-1)^T$，$\alpha_5=(1,3,6,9)^T$．求向量组的秩及其一个极大无关组，并将其余向量用极大无关组表示.
18. 证明：若m维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$可以表示任意一个m维向量，则$\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=m$.
19. 设 4 维向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$依次为矩阵$A$的列向量，$r(A)=3$且$AX=0$有解$X=(1,0,0,1)^T$，求$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的一个极大无关组.
20. 求解下列方程组
   (1) $\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3+2x_4=2\\ x_2-x_3-x_4=1\\ x_1+x_2-x_3+3x_4=1\\ x_1-x_2+x_3+5x_4=-1\end{cases}$
   (2) $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3-x_4=1\\ x_1-x_2-2x_3-5x_4=3\\ x_2+2x_3+2x_4=-1\\ x_1+x_2+2x_3=5\end{cases}$
21. 讨论a,b取何值时，以下线性方程组无解，有无穷多解，并且在有解时求其解

(1) $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+2x_4=2 \\ x_2-x_3-x_4=1 \\ x_1+x_2-x_3+3x_4=a \\ x_1-x_2+x_3+5x_4=b \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=1 \\ x_1-x_2-2x_3-5x_4=3 \\ x_2+(a+1)x_3+bx_4=b-3 \\ x_1+x_2+2x_3+(b-2)x_4=b+3 \end{cases}$

22. 已知向量$\alpha_1=(1,2,3,4)^T$,$\alpha_2=(1,1,1,1)^T$是4元非齐次线性方程组$AX=\mathrm{b}$的2个解向量，且系数矩阵A的秩$r(A)=3$，写出方程组$AX=\mathrm{b}$的通解.

(四)

23. 设4×3矩阵$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & a \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$，向量$\mathrm{b}=\begin{pmatrix} 4 \\ d-5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$，求$\mathrm{a},\mathrm{d}$的取值范围,使得方程组$AX=\mathrm{b}$有唯一解.

24. 设$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$，$\mathrm{B}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，计算:

(1) $3\mathrm{A},2\mathrm{B},3\mathrm{A}+2\mathrm{B}$;

(2) $\mathrm{AB},\mathrm{BA},\mathrm{AB}-\mathrm{BA}$;

(3) 记$A^2=AA$，I为单位阵,计算$A^2-3A+2I$;

25. 设$AB=C$，$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & 7 & 8 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

(1) 求C;

(2) 将C的第4列用A的列向量组线性表示;

(3) 验证C的第3行等于B的行向量组以A的第3行的元素为系数的线性组合.

26. 举例说明：存在非零矩阵A, B, C，使得AB = AC，但$\mathrm{B}\neq\mathrm{C}$.

27. 设$\alpha=(1,2)^{\mathrm{T}}$．将$\alpha$看作$2\times 1$矩阵，$\alpha^{\mathrm{T}}=(1,2)$看作是$1\times 2$矩阵，令$\mathrm{A}=\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$．计算A和$(x_1,x_2)\ A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

28. 已知$AB=0$，即矩阵A与B的乘积为零矩阵，且$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$，$r(A)=1$，求$AX=0$的通解.

29. 设$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}B=\begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix}$，求$B$.

30. 设$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}B=B\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，求$B$.

31. 设$E_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\k&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $E_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$, 计算:

(1) E_1A, E_2A, E_3A;

(2) AE_1, AE_2, AE_3.

(五)

32. 已知η_1,η_2,η_3是非齐次方程组$AX=b$的三个解，其中$r(A)=3$, $\eta_1+\eta_2=(1,3,-1,4)^T$, $\eta_2+\eta_3=(2,4,3,0)^T$，求$AX=b$的通解.

33. 设$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&-1&-1\\0&3&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\-1&0&1\\1&2&3\end{pmatrix}$,

(1) 计算A^T, B^T, $(A+B)^T$, $(3A)^T$, $(AB)^T$;

(2) 验证$(A+B)^T=A^T+B^T$, $(3A)^T=3A^T$, $(AB)^T=B^TA^T$;

(3) 验证$r(A)=r(A^T)=2$, $r(B)=r(B^T)=3$, $r(AB)=r(A)=2$.

34. 设α为3维列向量，若$\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，计算$\alpha$与$\alpha^T\alpha$.

35. 设3阶方阵$A=\alpha\beta^T$,其中$\alpha=(1,2,3)^T$,$\beta=(0,1,-1)^T$,

(1) 计算$A,\beta^T\alpha$;

(2) 计算A^{100}. （提示$A^{100}=(\alpha\beta^T)^{100}=\alpha(\beta^T\alpha)^{99}\beta^T$）

36. 证明方阵$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$可逆并求出其逆矩阵.

37. 设A为3阶方阵，将A的第三行加到第一行得B,再将B的第一列的(-2)倍加到第3列得C,

已知$C=\begin{pmatrix}7&2&-4\\0&4&5\\6&0&-5\end{pmatrix}$, 计算$B$和$A$.

(六)

38. 设$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&2\\1&1&1&-1\\1&0&-2&-6\end{pmatrix}$, $AX=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}$.

(1) 证明A可逆，并求A^{-1};

(2) 求X和B.

39. 设n阶方阵A满足$A^2-A-6I=O$，证明:

(1) $(A+I)$可逆;

(2) $(A-3I)$与$(A+2I)$不都可逆.

40. 设$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$, 若$B$满足$2BA^2=A^{-1}BA^2+3A$，求$B$.

41. 设P是一个m阶可逆阵，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是一组$m$维向量，$\mathrm{n}\le m$. 证明：若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$无关，则$P\alpha_1,P\alpha_2,\cdots,P\alpha_n$也无关.

42. 对三阶初等矩阵$E_{23},E_3(-1)$和$E_{12}(3)$,

 (1) 分别计算三者的转置矩阵，逆矩阵和99次幂；

 (2) 验证(1)中的所有结果仍为三阶初等矩阵.

43. 设A为3阶方阵. 先将A的第一行乘(3)加到第三行得B；再将B的第二行与第三行交换得到C. 已知C是可逆阵. 证明：A也为可逆阵.

44. 设A为3阶方阵. 先将A的第一行乘(3)加到第三行得B；再将B的第二列与第三列交换得到单位阵. 证明A可逆，并求出A的逆矩阵.

(七)

45. 设A是3阶方阵，将A的第1列与第2列对换得B，再把B的第2列加到第3列得C. 求可逆阵Q，使得$\mathrm{AQ}=\mathrm{C}$.

46. 设$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$，且$\mathrm{r(A)}=2$，求$a$的值.

47. 设A和B为同阶方阵，证明：若AB可逆，则A可逆且B可逆.

48. 设$A_{m\times n}$，$B_{n\times m}$，且$\mathrm{n}<\mathrm{m}$，证明：$\mathrm{(AB)X}=0$有非零解.

49. 设A为$\mathrm{m}\times 3$矩阵，B为$3\times \mathrm{p}$矩阵. 若$r(A)=2$，$r(B)=3$，证明$r(AB)=2$.

50. 设$A_{m\times n}B_{n\times p}=C_{m\times p}$且$r(A)=n$. 证明：$r(C)=r(B)$

51. 设分块矩阵$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}B&0\\\mathrm{C}&D\end{pmatrix}$，且$B$和$D$可逆.

 (1) 证明A可逆，并求A^{-1}；

 (2) 根据(1)计算$\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&2\\2&0&0&1\end{pmatrix}$的逆矩阵.

(八)

52. 计算以下方阵的行列式：

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2&0\\1&0&0\\0&0&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2&0\\1&0&0\\0&0&6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2&3\\1&0&0\\0&4&6\end{pmatrix}$$

53. 设α_1,β_1,β_2均为2维行向量，且方阵$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\beta_1\end{pmatrix}$，方阵$\mathrm{B}=\begin{pmatrix}\alpha_1,\\-\beta_2\end{pmatrix}$. 若$|A|=-4$，$|B|=1$，求$|A+B|$.

54. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$均为4维列向量，且方阵$\mathrm{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1)$，方阵$\mathrm{B}=(\alpha_1,\alpha_3,-\alpha_2,\beta_2)$. 若$|A|=-4$，$|B|=1$，求$|A+B|$.

55. 设$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{pmatrix}$，将$A$的第三行与第一行对换得到$B$，再将$B$的第二列的$(-2)$倍加到第3列得$C$，计算$|A|$，$|B|$，$|C|$.

56. 设A,B为3阶方阵，且$|A|=2,|B|=-1$，计算行列式$\begin{vmatrix}0&2A\\-B&AB\end{vmatrix}$.（提示，$\begin{vmatrix}A&C\\0&B\end{vmatrix}=|A||B|$）

57. 设A,B为3阶方阵，且$|A|=-3,|B|=2$，根据行列式的运算律，计算行列式

(1) $\left|\frac{1}{3}A^TB^{-1}\right|$;

(2) $\left|\left(\frac{1}{3}A^3B^{-2}\right)^{-2}\right|$.

58. 根据行列式的计算公式，计算行列式$\begin{vmatrix}a&0&0&b\\0&a&b&0\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}$.

59. 设n阶方阵$A=\begin{pmatrix}a_1+\lambda_1&a_1&a_1&\cdots&a_1\\a_2&a_2+\lambda_2&a_2&\cdots&a_2\\a_3&a_3&a_3+\lambda_3&\cdots&a_3\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_n&a_n&a_n&\cdots&a_n+\lambda_n\end{pmatrix}$，求$|A|$.

（提示，$\begin{vmatrix}a_1+\lambda_1&a_1\\a_2&a_2+\lambda_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&a_1\\a_2&a_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1&a_1\\0&\lambda_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda_1&0\\a_2&a_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{vmatrix}$）

60. 设A为n阶方阵，$A^TA=I$，且$|A|<0$，求$|A+I|$.

（九）

61. 设$A=\begin{pmatrix}7&2&-4\\0&4&5\\6&0&-5\end{pmatrix}$，$A^*$为$A$的伴随矩阵，

(1) 利用代数余子式计算$|A|$，A^*，并验证$AA^*=|A|I$;

(2) 计算$\mathrm{r}(A^*)$和$|A^*|$;

(3) 若A可逆，利用A^*计算A^{-1}，并求$|A^{-1}|$；若不可逆，说明理由.

62. 设A为3阶方阵，且$|A|=2$，求行列式$\left|(2\mathrm{A})^{-1}-\frac{1}{2}A^*\right|$.

63. 设α,β,γ为3维列向量，3阶行列式$|\alpha-\beta,\beta-\gamma,\gamma-2\alpha|=4$，计算$|\alpha,\beta,\gamma|$.

64. 设A为n阶可逆方阵，证明：$(A^*)^T=(A^T)^*$.

65. 设n阶方阵$A=\begin{pmatrix}a&0&\cdots&0&1\\1&a&\ddots&\vdots&1\\\vdots&0&\ddots&0&\vdots\\1&\vdots&\ddots&a&1\\1&0&\cdots&0&a\end{pmatrix}$，其中$a$为任意常数，求$|A|$.

66. 设$A=(a_{ij})_{3\times3}$为非零方阵，且A的代数余子式A_{ij}满足$A_{ij}+a_{ij}=0$，$i,j=1,2,3$. 求$|A|$.

(十)

67. 已知R^3的两组基为$B_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$及$B_2=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$，其中

$$\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T,\alpha_3=(0,0,1)^T,$$
$$\beta_1=(1,0,1)^T,\beta_2=(0,1,-1)^T,\beta_3=(1,2,0)^T.$$

计算:

(1) 从基$\mathbf{B_1}$到基$\mathbf{B_2}$的过渡矩阵A;

(2) 已知γ在基$\mathbf{B_1}$下的坐标为$(1,-2,-1)^T$，求γ在基$\mathbf{B_2}$下的坐标;

(3) 已知σ在基$\mathbf{B_2}$下的坐标为$(5,7,-4)^T$，求σ在基$\mathbf{B_1}$下的坐标.

68. 已知R^3的两组基为$\mathbf{B_1}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$及$\mathbf{B_2}=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$，其中

$$\alpha_1=(1,2,1)^T,\alpha_2=(2,3,3)^T,\alpha_3=(3,7,1)^T,$$

从基B_1到基B_2的过渡矩阵$A=\begin{pmatrix}-27 & -71 & -41\\ 9 & 20 & 9\\ 4 & 12 & 8\end{pmatrix}$，计算

(1) β_1,β_2,β_3在自然基下的坐标;

(2) 已知γ在基$\mathbf{B_1}$下的坐标为$(-2,1,1)^T$，求γ在自然基下的坐标和在基$\mathbf{B_2}$下的坐标.

69. 已知R^3的两组基为$B_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$及$B_2=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$，其中$\alpha_1=(1,1,0),\alpha_2=(1,0,1),\alpha_3=(0,2,1),\beta_1=(0,1,2),\beta_2=(0,1,0),\beta_3=(2,1,0)$. 求一个向量$\gamma$，使得$\gamma$在基$B_1$下的坐标与$\gamma$在基$B_2$下的坐标相等.

70. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$R^3$的一组基，求$\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3$到$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$过渡矩阵.

71. 设$\alpha_1=(1,2,1,3),\alpha_2=(-1,-1,0,-1),\alpha_3=(-1,-2,1,-1)$.

(1) 计算内积，验证

$(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_3)+(\alpha_2,\alpha_3)$且$(2\alpha_1,\alpha_3)=2(\alpha_1,\alpha_3)$;

(2) 计算$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的长度;

(3) 计算α_1,α_2间的夹角$<\alpha_1,\alpha_2>$及α_2,α_3间的夹角$<\alpha_2,\alpha_3>$的余弦值.

(十一)

72. 设$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ -2 & 4 & 2\\ -1 & 1 & 5\end{pmatrix}$，求$A$的特征值及对应的特征向量.

73. 设$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ -1 & 3 & 1\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}$，求$A$的特征值，并说明其代数重数与几何重数.

74. 设$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & a\end{pmatrix}$有特征值$\lambda_1=2$(二重)，$\lambda_2=0$,

(1) 求a;

(2) 求A的关于λ_1和λ_2的特征向量.

75. 设A为n阶方阵，证明: A的特征值都不为零等价于A为可逆阵.

76. 设A为3阶方阵，有一个代数重数为3的特征值且$|A|=8$，求

$$2A^2+3A-(2A)^{-1}$$

的一个特征值.

77. 设P为3阶可逆阵，且$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，求A的特征值.

78. 设A的关于特征值λ的特征向量为X，且$\lambda\neq 0$，A^*为A的伴随矩阵，验证:

X为A^*的关于特征值$\lambda^{-1}|A|$的特征向量.

(十二)

79. 设$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$.

(1) 通过A的每个特征值的代数重数等于几何重数来验证A可对角化;

(2) 求可逆阵P和对角阵D，使得$P^{-1}AP=D$.

80. 设$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$，多项式$f(x)=x^2-4x+1$,

(1) 证明$f(A)$可对角化;

(2) 求可逆阵P和对角阵D，使得$P^{-1}f(A)P=D$.

81. 设$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，计算$A^{99}$. (提示，若有$P^{-1}AP=D$，则有$P^{-1}A^{99}P=D^{99}$)

82. 已知$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\a&4&b\\-3&-3&5\end{pmatrix}$是可对角化的，$\lambda=2$是A的二重特征值(代数重数为 2)，求$a,b$.

83. 判断下列矩阵是否相似并给出理由:

(1) $\begin{pmatrix}1&1\\-1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}1&1\\-1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$.

84. 证明: 若A为可逆矩阵，则AB与BA相似.

85. 设α,β为n维非零的正交列向量(也就是说，$\beta^T\alpha=0$)，且$A=\alpha\beta^T$.

证明: A的特征值全为0，且A不可对角化.

(十三)

86. 已知$\mathbf{B}=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$为$\mathbf{R}^3$的一组基，其中$\alpha_1=(1,2,0),\alpha_2=(-1,0,1),\alpha_3=(0,1,-1)$，用施密特(Schmidt)正交化方法，由$\mathbf{B}$构造$\mathbf{R}^3$的一组标准正交基.

87. 设$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&1&1&1\\2&3&4&5\\3&4&5&6\end{pmatrix}$，求与A的行向量正交的向量全体.

88. 已知$\alpha_1=(1,2,1,3),\alpha_2=(-1,-1,0,-1),\alpha_3=(-1,-2,1,-1)$为无关向量组,

(1) 用施密特(Schmidt)正交化方法，由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$构造一组标准正交向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3$;

(2) 求向量β_4，使得β_1,β_2,β_3与β_4构成$\mathbf{R}^4$的一组标准正交基.

89. 设A为3阶正交阵，且$|A|<0$，求行列式

$$\left|(2\mathrm{A})^{-1}+2A^T-\frac{1}{2}A^*\right|.$$

90. 证明：若A为正交阵，则A的伴随矩阵A^*也为正交阵.

91. 设α为n维列向量，$\alpha^T\alpha=1$，$B=I-2\alpha\alpha^T$，证明:

(1) B是对称阵;

(2) B是正交阵.

92. 设$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，求正交阵$Q$，使得$Q^TAQ$为对角阵.

93. 设$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&c\end{pmatrix}$，$\mathrm{r}(A)=1$，求正交阵$Q$，使得$Q^TAQ$为对角阵.

(十四)

94. 通过正交变换$X=QY$，将二次型

$$f={x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2+{x_4}^2+2x_1x_2-2x_1x_4-2x_2x_3-2x_3x_4$$

化为标准型，并写出相应的正交变换阵Q.

95. 已知$f(x_1,x_2,x_3)=2{\mathrm{x}_1}^2+3{\mathrm{x}_2}^2+3{\mathrm{x}_3}^2+2a\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3$，通过正交变换$(x_1,x_2,x_3)^T=Q(y_1,y_2,y_3)^T$可化为标准型${\mathrm{y}_1}^2+2{\mathrm{y}_2}^2+5{\mathrm{y}_3}^2$，计算参数$a$及正交阵$Q$.

96. 求参数a,b，使得下列二次型正定,

(1) $2{\mathrm{x}_1}^2+1{\mathrm{x}_2}^2+2a\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2$;

(2) $4{\mathrm{x}_1}^2+2{\mathrm{x}_2}^2+b{\mathrm{x}_3}^2+4\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2+2\mathrm{x}_1\mathrm{x}_3$.

97. 已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$的秩为1,

(1) 求c的值;

(2) 利用正交变换法，将二次型$f(x_1,x_2,x_3)$化为标准型，并写出相应的正交变换阵;

(3) 求$f(x_1,x_2,x_3)$的规范型.

98. 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=a{\mathrm{x}_1}^2+a{\mathrm{x}_2}^2+(a-1){\mathrm{x}_3}^2+2\mathrm{x}_1\mathrm{x}_3-2\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3$,

(1) 求$f(x_1,x_2,x_3)$对应的实对称阵的所有特征值;

(2) 若二次型$f(x_1,x_2,x_3)$的规范形为${y_1}^2+{y_2}^2$，求a的值;

(3) 利用正交变换法将$f(x_1,x_2,x_3)$化为标准型，并写出相应的正交变换阵.

99. 利用范德蒙行列式，计算行列式

$$\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\a&a-1&a-2&\cdots&a-n\\a^2&(a-1)^2&(a-2)^2&\cdots&(a-n)^2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a^n&(a-1)^n&(a-2)^n&\cdots&(a-n)^n\end{vmatrix}.$$

100. 利用递推公式，证明

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & & & \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2\cos\theta & 1 \\ & & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix} = \cos n\theta.$$