2.3 关系表示

集合A上二元关系的表示有多种：

- 集合：列出有序对或谓词
- 表格
- 0-1矩阵
- 关系图

关系矩阵(matrix)

设$A=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$, $R\subseteq A\times A$, 则R的**关系矩阵**

$$M(R)=(r_{ij})_{n\times n},$$

其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & if <x_i,y_j>\in R\\ 0 & if <x_i,y_j>\notin R\end{cases}$$

$$(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n)$$

例如, $A=\{a,b,c\}$, $R_1=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>\}$,

$R_2=\{<a,b>,<a,c>,<b,c>\}$, 则

$$M(R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},M(R_2)=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

关系矩阵的性质

- R的集合表达式与R的关系矩阵一一对应.
- $M(R^{-1}) = (M(R))^T$. (T表示矩阵的转置)
- $M(R_1 \circ R_2) = M(R_2) \bullet M(R_1)$.

  (•表示这样的矩阵“乘法”, 其中加法使用逻辑∨, 乘法使用逻辑∧.)

$$\mathrm{M}(\boldsymbol{R_1}) = (\boldsymbol{a})_{n\times p}, \mathrm{M}(\boldsymbol{R_2}) = (\boldsymbol{b})_{m\times n}, \mathrm{M}(\boldsymbol{R_1} \circ \boldsymbol{R_2}) = (\boldsymbol{c})_{m\times p},$$

$$c_{ij} = 1 \Leftrightarrow \exists t(b_{it} = 1 \land a_{tj} = 1)$$

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^{n} b_{it} a_{tj}$$

注意：此处的加法是逻辑加,即析取

例2.4

例2.4 设$A=\{a,b,c\}$,

$R_1=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>\}$,

$R_2=\{<a,b>,<a,c>,<b,c>\}$,

用$M(R_1)$, $M(R_2)$确定$M(R_1^{-1})$, $M(R_2^{-2})$, $M(R_1 \circ R_1)$,

$M(R_1 \circ R_2)$, $M(R_2 \circ R_1)$,

并且求出它们的集合表达式.

例2.4的解

R_1={<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>},

R_2={<a,b>,<a,c>,<b,c>},

解:

$$M(R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},M(R_2)=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$M(R_1^{-1})=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},M(R_2^{-1})=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}.$$

R_1^{-1}={<a,a>, <a,b>,<b,a>, <c,b>},

R_2^{-1}={<b,a>,<c,a>,<c,b>},

例2.4的解 续1

R_1={<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>}, R_2={<a,b>,<a,c>,<b,c>},

解(续):

$$M(R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},M(R_2)=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$M(R_1\circ R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$R_1 \circ R_1$ = {<a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,a>,<b,b>}.

例2.4的解 续2

$R_1=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>\}$，$R_2=\{<a,b>,<a,c>,<b,c>\}$,

解(续):

$$M(R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},M(R_2)=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$M(R_1\circ R_2)=M(R_2)\bullet M(R_1)$$

$$=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$R_1\circ R_2=\{<a,a>,<a,c>\}$.

例2.4的解 续3

R_1={<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>}, R_2={<a,b>,<a,c>,<b,c>},

解(续):

$$M(R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},M(R_2)=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$M(R_2\circ R_1)=M(R_1)\bullet M(R_2)$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$R_2\circ R_1$ = {<a,b>,<a,c>,<b,b>,<b,c>}.

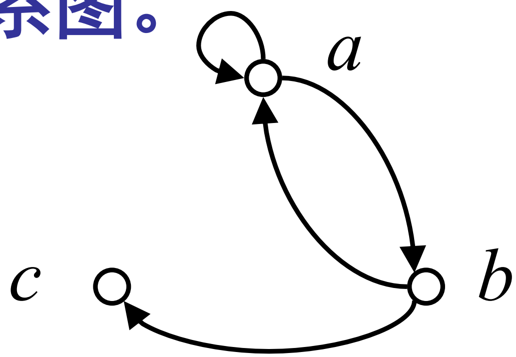
关系图(graph)

设$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, $R\subseteq A\times A$, 则A中元素以“∘”表示(称为顶点), R中元素以“→”表示(称为有向边); 若x_iRx_j, 则从顶点x_i向顶点x_j引有向边$\langle x_i,x_j\rangle$, 该图称为R的**关系图$G(R)$**.

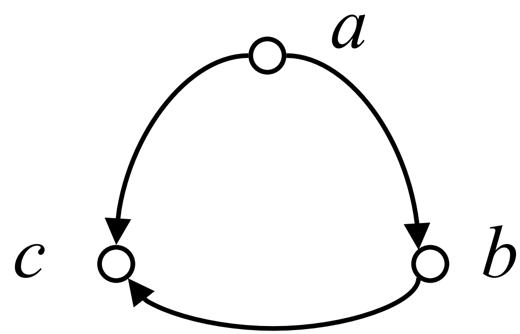
例1

$A=\{a,b,c\}, R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle\}, R_2=\{\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle,\langle b,c\rangle\}$, 画出$\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2,\mathrm{R}_1^{-1},\mathrm{R}_2^{-1},R_1\circ R_1,R_1\circ R_2,R_2\circ R_1$的关系图。

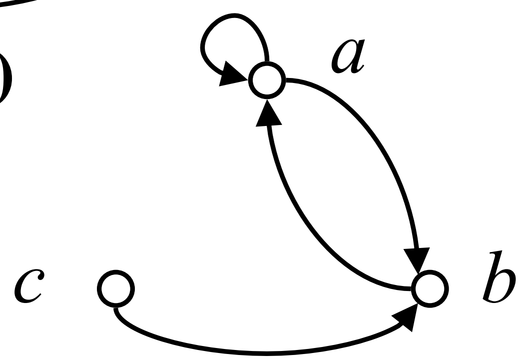
解



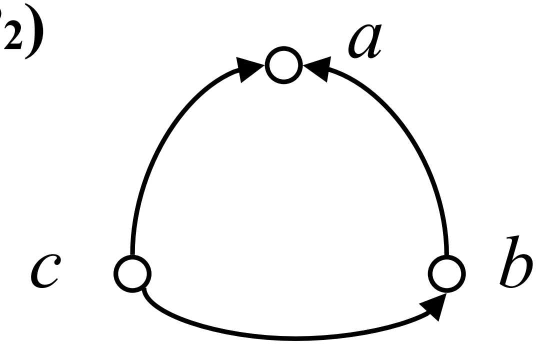
$G(R_1)$



$G(R_2)$



$\mathrm{G}(\mathrm{R}_1^{-1})$



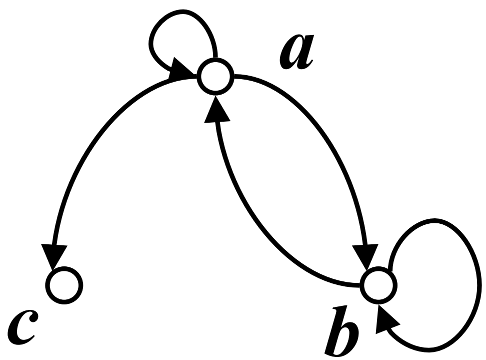
$\mathrm{G}(\mathrm{R}_2^{-1})$

例1 续

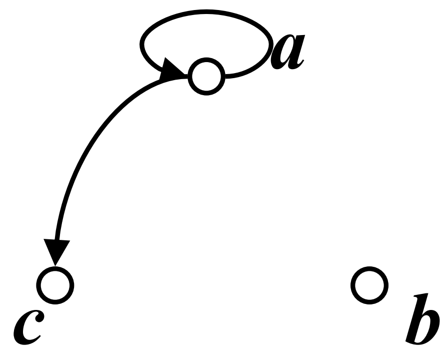
$R_1 \circ R_1 = \{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle\}$.

$R_1 \circ R_2 = \{\langle a,a\rangle,\langle a,c\rangle\}$.

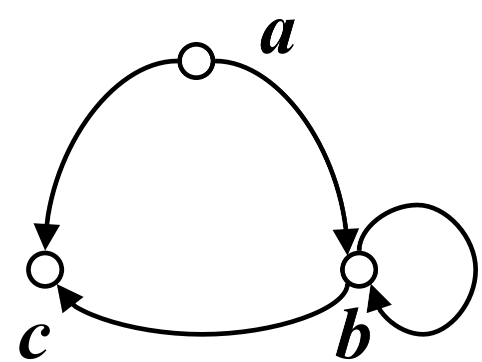
$R_2 \circ R_1 = \{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle\}$.



$G(R_1 \circ R_1)$



$G(R_1 \circ R_2)$



$G(R_2 \circ R_1)$

关系矩阵,关系图的讨论

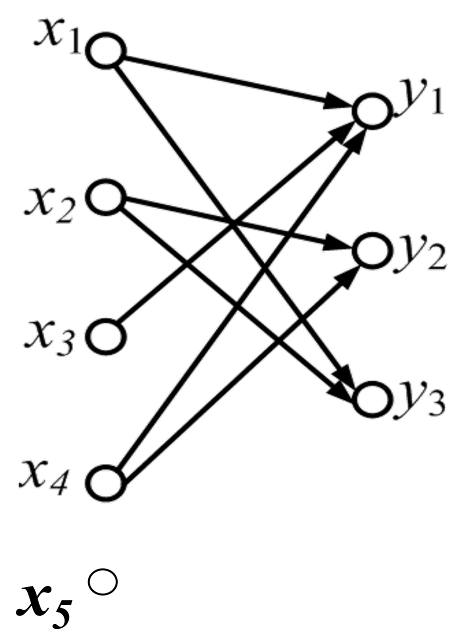
- 当A中元素标定次序后, $R \subseteq A \times A$的关系图$G(R)$与R的集合表达式一一对应。
- 对于$R \subseteq A \times B$, $|A|=n,|B|=m$, 关系矩阵$M(R)$是$n \times m$阶的.
- 关系图$G(R)$中的边都从A中元素指向B中元素.

例2

例 设 $A=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$， $B=\{y_1, y_2, y_3\}$，

$R=\{<x_1, y_1>, <x_1, y_3>, <x_2, y_2>, <x_2, y_3>, <x_3, y_1>, <x_4, y_1>, <x_4, y_2>\}$，写出关系矩阵$M_R$和关系图

$$M(R)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



2.4 关系性质

对于集合上的关系，可以利用关系的性质进行分类。下面我们将介绍几种重要的性质。

- 自反性(reflexivity)
- 反自反性(irreflexivity)
- 对称性(symmetry)
- 反对称性(antisymmetry)
- 传递性(transitivity)

1. 自反性

在一些关系中，一个元素总是和其自身有关系。

$x \le x$，$\langle x,x \rangle \in R$,

例如，令R为定义在人类集合上的关系,

$\langle x, y \rangle \in R$当且仅当$x$和$y$有相同的母亲和父亲。

所以，对每一个x来说， $x\ R\ x$.

1.自反性(reflexivity)

- 设R⊆A×A, R是**自反**的(reflexive),如果

$$\forall x(\, x \in A \rightarrow xRx \,)$$

- R是**非自反**的$\Leftrightarrow \exists x(\, x \in A \wedge \neg xRx)$
- **定理10**: R是自反的

$\Leftrightarrow I_A \subseteq R$

$\Leftrightarrow R^{-1}$是自反的

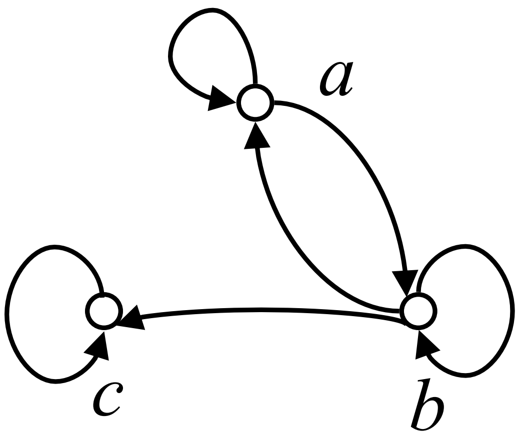
$\Leftrightarrow M(R)$主对角线上的元素全为1

$\Leftrightarrow G(R)$的每个顶点处均有环

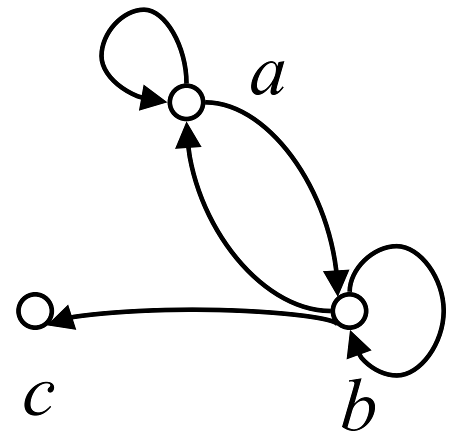
注意：A上的自反关系是对A中的每个元素都有xRx

例

下图表示的二元关系中，哪个是自反的？



自反的



非自反的

例3 哪些关系是自反的？

例 考虑A={1,2,3,4}上的关系

$R_1=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>,<3,4>,<4,1>,<4,4>\}$

$R_2=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>\}$

$R_3=\{<1,1>,<1,2>,<1,4>,<2,1>,<2,2>,<3,3>,<4,1>,<4,4>\}$

$R_4=\{<2,1>,<3,1>,<3,2>,<4,1>,<4,2>,<4,3>\}$

$R_5=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<2,2>,<2,3>,<2,4>,<3,3>,<3,4>,<4,4>\}$

$R_6=\{<3,4>\}$

其中哪些是自反的？

2.反自反性(irreflexivity)

- 设R⊆A×A, 说R是反自反的(irreflexive), 如果

  $\forall x(x \in A \rightarrow \neg xRx)$.

- R是非反自反的$\Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge xRx)$
- 定理11: R是反自反的

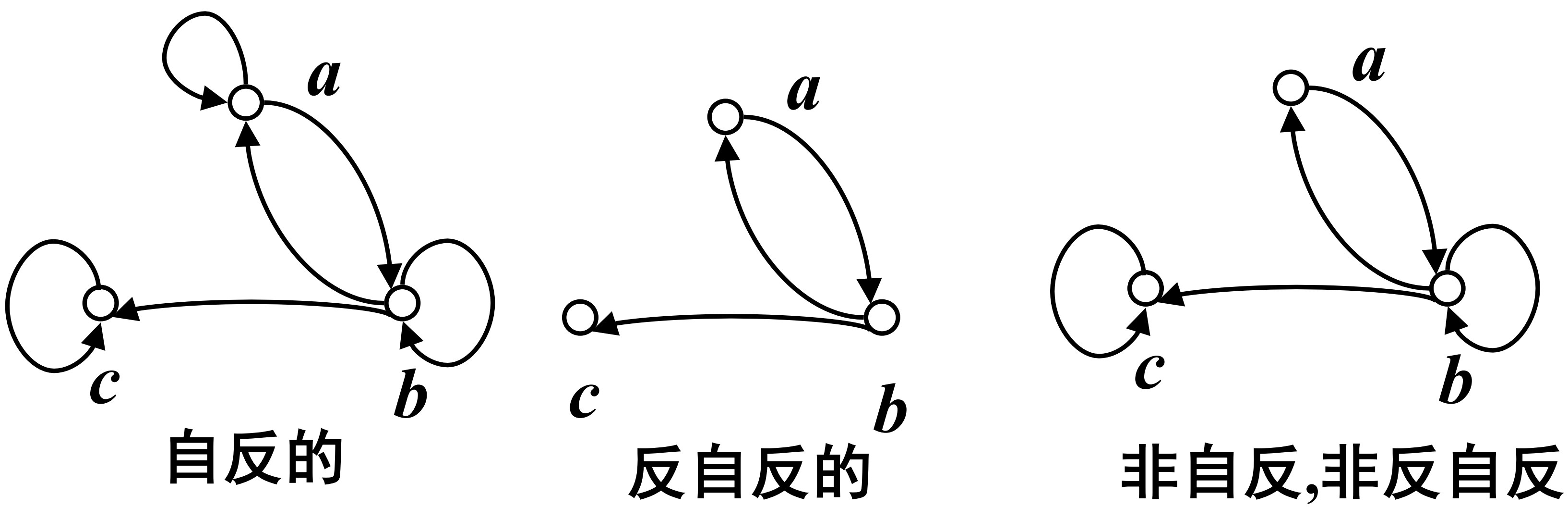
  $\Leftrightarrow I_A \cap R = \emptyset$

  $\Leftrightarrow R^{-1}$是反自反的

  $\Leftrightarrow M(R)$主对角线上的元素全为0

  $\Leftrightarrow G(R)$的每个顶点处均无环.

例 下面的哪个关系是反自反的?



- 自反且反自反的关系：∅上的空关系
- 自反和反自反不是对立的，因为有一个关系同时有这两种性质或同时不具有这两种性质

对称性与反对称性

- 在一些关系中，x和y相关，当且仅当y和x相关。例如，定义在同一个学校学生集合上的关系R，$<x, y> \in R$, 当x与y同一个专业。
- 还有一些关系中，如果x相关于$y(x\neq y)$，那么y不相关于x。例如，定义在同一个学校学生集合上的关系R，$<x, y> \in R$, 当x比y的成绩高。

3. 对称性(symmetry)

- 设$R \subseteq A \times A$, 说R是**对称**的(symmetric),如果

$$\forall x \forall y(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \rightarrow yRx)$$

- R**非对称**$\Leftrightarrow \exists x \exists y(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge \neg yRx)$
- **定理12**: R是对称的

$\Leftrightarrow R^{-1}=R$

$\Leftrightarrow R^{-1}$是对称的

$\Leftrightarrow M(R)$是对称的

$\Leftrightarrow G(R)$的任何两个顶点之间若有边,

则必有两条方向相反的有向边

例4 哪些关系是对称的？

例 考虑$A=\{1,2,3,4\}$上的关系

$R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,4\rangle\}$

$R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$

$R_3=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,4\rangle\}$

$R_4=\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,3\rangle\}$

$R_5=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,4\rangle\}$

$R_6=\{\langle 3,4\rangle\}$

其中哪些是对称的？

4. 反对称性(antisymmetry)

- 设$R\subseteq A\times A$, 说R是反对称的(antisymmetric),若

  $\forall x\forall y(x\in A\wedge y\in A\wedge xRy\wedge yRx\rightarrow x=y)$.

  $\forall x\forall y(x\in A\wedge y\in A\wedge xRy\wedge x\neq y\rightarrow \neg yRx)$.

- R非反对称$\Leftrightarrow\exists x\exists y(x\in A\wedge y\in A\wedge xRy\wedge yRx\wedge x\neq y)$
- 定理13: R是反对称的

  $\Leftrightarrow R^{-1}\cap R\subseteq I_A$

  $\Leftrightarrow R^{-1}$是反对称的

  $\Leftrightarrow$ 在$M(R)$中, $\forall i\forall j(i\neq j\wedge r_{ij}=1\rightarrow r_{ji}=0)$

  $\Leftrightarrow$ 在$G(R)$中, $\forall x_i\forall x_j(i\neq j)$,

  若有$<x_i,x_j>$, 则必没有$<x_j,x_i>$.

例5 哪些关系是反对称的？

例 考虑A={1,2,3,4}上的关系

$R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,4\rangle\}$

$R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$

$R_3=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,4\rangle\}$

$R_4=\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,3\rangle\}$

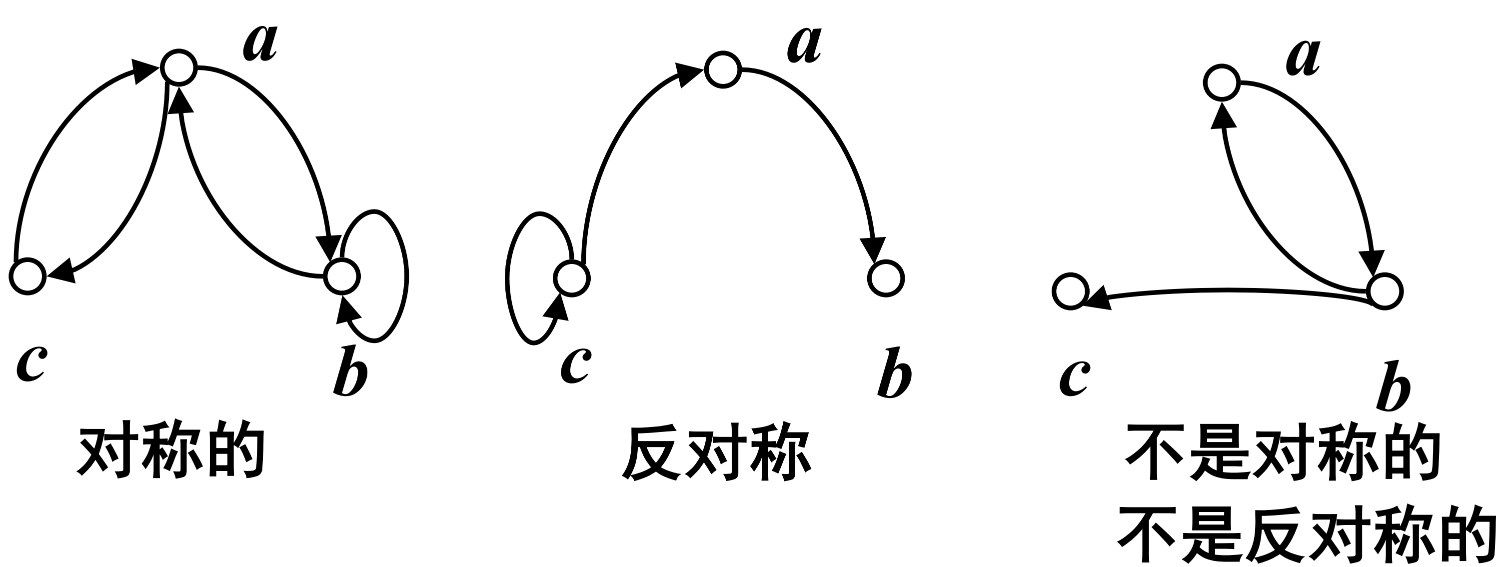
$R_5=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle,$
$\langle 3,4\rangle,\langle 4,4\rangle\}$

$R_6=\{\langle 3,4\rangle\}$

其中哪些是反对称的？

对称 / 反对称的讨论

- 对称与反对称的概念**不是对立的**，因为一个关系可以同时有这两种性质（如I_A），也可以两种性质都没有，如下图中的右图表示的关系
- 对称且反对称的关系：空关系，$R \subseteq I_A$



5. 传递性

令R是定义在本校学生集合上的关系，

$\langle x, y\rangle \in R$当且仅当$x$比$y$的成绩高。

假设$\langle x, y\rangle \in R$且$\langle y, z\rangle \in R$, 那么$x$比$y$成绩高，$y$比$z$成绩高，即$x$比$z$成绩高。故 $\langle x, z\rangle \in R$。

即R具有传递性，如下面定义。

3. 传递性(transitivity)

- 设R⊆A×A, 说R是传递的(transitive), 如果
$\forall x\forall y\forall z(x\in A\wedge y\in A\wedge z\in A\wedge xRy\wedge yRz\rightarrow xRz)$.
- R非传递$\Leftrightarrow$
$\exists x\exists y\exists z(x\in A\wedge y\in A\wedge z\in A\wedge xRy\wedge yRz\wedge\neg xRz)$
- 定理14: R是传递的

$\Leftrightarrow$ $R\circ R\subseteq R$ $\Leftrightarrow$ R^{-1}是传递的

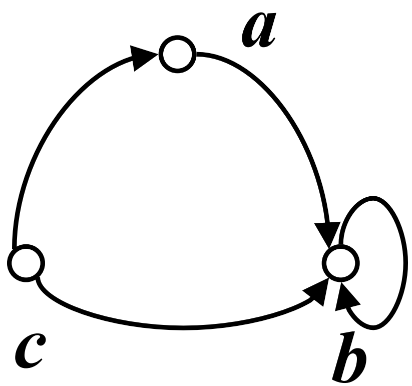
$\Leftrightarrow$ 在M($R\circ R$)中, $\forall i\forall j$,

若$r_{ij}'=1$,则$M(R)$中相应的元素$r_{ij}=1$.

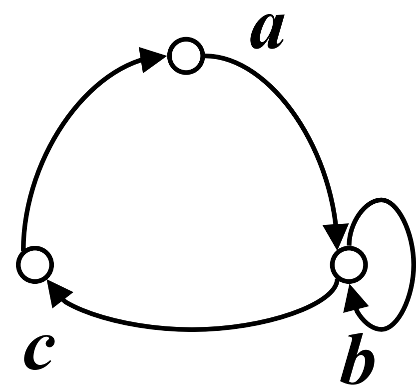
$\Leftrightarrow$ 在$G(R)$中, $\forall x_i\forall x_j\forall x_k$,

若有有向边$\langle x_i,x_j\rangle$,$\langle x_j,x_k\rangle$, 则必有有向边$\langle x_i,x_k\rangle$.

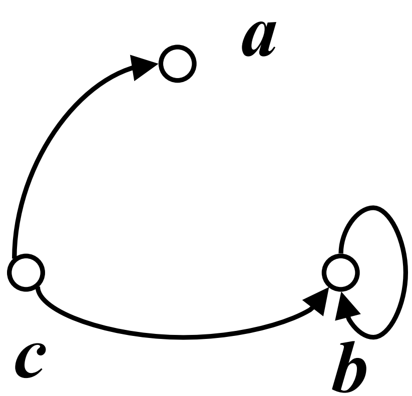
例6 下列关系中哪些是传递的？



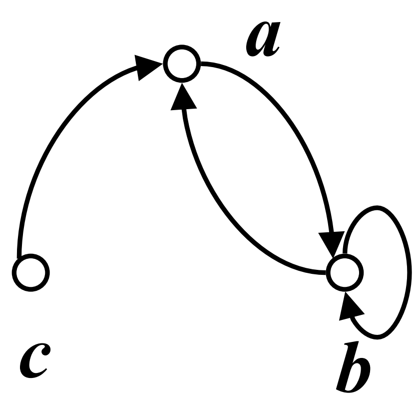
传递的



不是传递的



传递的



不是传递的

例7 哪些关系是传递的？

例 考虑$A=\{1,2,3,4\}$上的关系

$R_1=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>,<3,4>,<4,1>,<4,4>\}$

$R_2=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>\}$

$R_3=\{<1,1>,<1,2>,<1,4>,<2,1>,<2,2>,<3,3>,<4,1>,<4,4>\}$

$R_4=\{<2,1>,<3,1>,<3,2>,<4,1>,<4,2>,<4,3>\}$

$R_5=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<2,2>,<2,3>,<2,4>,<3,3>,$
$<3,4>,<4,4>\}$

$R_6=\{<3,4>\}$

其中哪些是传递的？

关系性质的判别方法（总结）

R	自反	反自反	对称	反对称	传递
表达式	$(\forall x)(x\in A\rightarrow xRx)$	$(\forall x)\ (x\in A \rightarrow <x,x>\notin R)$	$(\forall x)(\forall y)(x\in A\wedge y\in A\wedge xRy\rightarrow yRx)$	$(\forall x)(\forall y)(x\in A\wedge y\in A\wedge xRy\wedge yRx \rightarrow x=y)$	$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x\in A \wedge y\in A \wedge z\in A \wedge xRy \wedge yRz\rightarrow xRz)$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若$r_{ij}=1$, 且$i\neq j$, 则$r_{ji}=0$	对$M(R)^2$中1所在位置, M(R)中相应位置都是1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边, 是一对方向相反的边(无单边)	如果两点之间有边, 是一条有向边(无双向边)	如果顶点 x_i 连通到x_k, 则存在$<x_i, x_k>$

关系性质的判别方法（总结）

R	自反	反自反	对称	反对称	传递
充要	$I_A \subseteq R$	$I_A \cap R = \emptyset$	$R^{-1} = R$	$R^{-1} \cap R \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
R^{-1}	R^{-1}是自反的	R^{-1}是反自反的	R^{-1}是对称的	R^{-1}是反对称的	R^{-1}是传递的

特殊关系的性质

在$N = \{0,1,2,\ldots\}$ 上:

$\leq=\{<x,y>\mid x\in N\wedge y\in N\wedge x\leq y\}$	自反,反对称,传递
$\geq=\{<x,y>\mid x\in N\wedge y\in N\wedge x\geq y\}$	自反,反对称,传递
$<=\{<x,y>\mid x\in N\wedge y\in N\wedge x<y\}$	反自反,反对称,传递
$>=\{<x,y>\mid x\in N\wedge y\in N\wedge x>y\}$	反自反,反对称,传递
$\mid=\{<x,y>\mid x\in N\wedge y\in N\wedge x\mid y\}$	反对称,传递 $\neg(0\mid 0)$
$I_N=\{<x,y>\mid x\in N\wedge y\in N\wedge x=y\}$	自反,对称,反对称, 传递
$E_N=\{<x,y>\mid x\in N\wedge y\in N\}=N\times N$	自反,对称,传递
$\varnothing$	反自反,对称,反对称,传递

例8

例8: A={a,b,c}，判断下列关系的性质。

$R_1=\{<a,a>,<a,b>,<b,c>,<a,c>\}$,

$R_2=\{<a,a>,<a,b>,<b,c>,<c,a>\}$,

$R_3=\{<a,a>,<b,b>,<a,b>,<b,a>,<c,c>\}$,

$R_4=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<c,c>\}$,

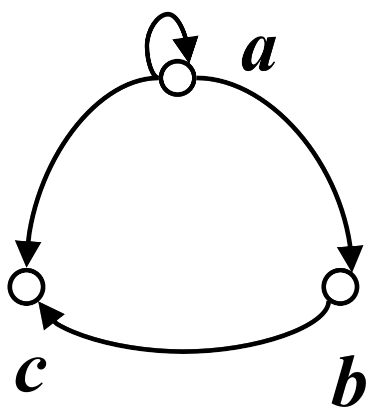
$R_5=\{<a,a>,<a,b>,<b,b>,<c,c>\}$,

$R_6=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<a,a>\}$。

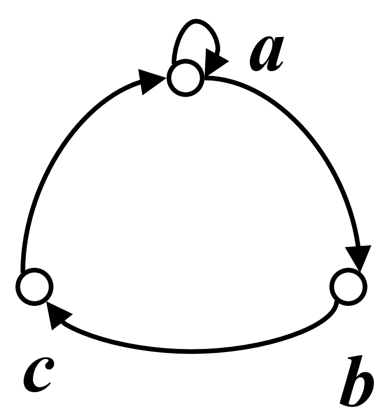
例8的解

$R_1=\{<a,a>,<a,b>,<b,c>,<a,c>\}$ 反对称,传递

$R_2=\{<a,a>,<a,b>,<b,c>,<c,a>\}$ 反对称



$G(R_1)$

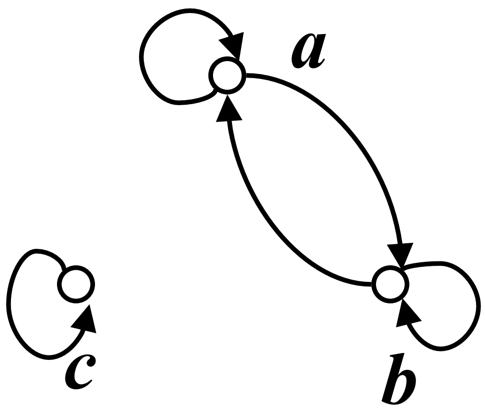


$G(R_2)$

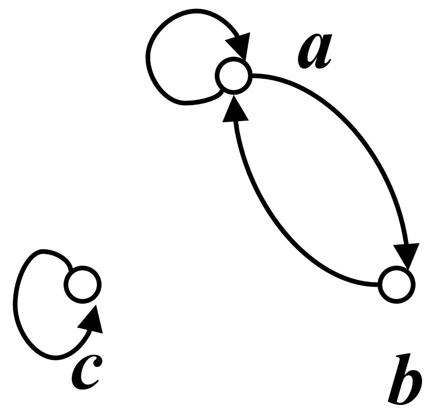
例8的解 续1

$R_3=\{<a,a>,<b,b>,<a,b>,<b,a>,<c,c>\}$自反,对称,传递

$R_4=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<c,c>\}$对称



G(R_3)

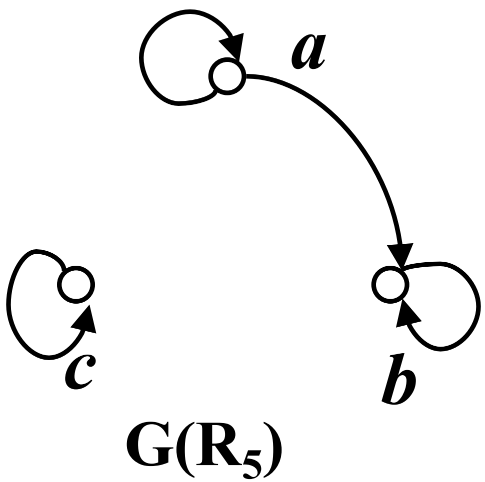


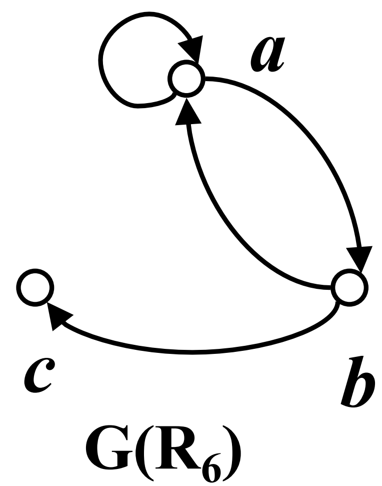
G(R_4)

例8的解 续2

$R_5=\{<a,a>,<a,b>,<b,b>,<c,c>\}$ 自反,反对称,传递

$R_6=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<a,a>\}$不具有5种中的任何一种.





关系性质的等价描述总结

设关系R是集合A上的二元关系，

1. R是自反的当且仅当$I_A \subseteq R$
2. R是反自反的当且仅当$I_A \cap R = \varnothing$
3. R是对称的当且仅当$R = R^{-1}$
4. R是反对称的当且仅当$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$
5. R是传递的当且仅当$R \circ R \subseteq R$

定理2.15: 设R_1, $R_2 \subseteq A \times A$都具有某种性质.

下表中成立的,给出证明;不成立的,给出反例.

	自反	反自反	对称	反对称	传递
R_1^{-1}, R_2^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×
$\sim R_1$, $\sim R_2$	×	×	√	×	×

定理15 (1)的证明（一）

(1) R_1, R_2自反⇒ $R_1 \circ R_2$自反.

证明R在A上自反

任取x, $x \in A$ ⇒ ………… ⇒ $<x, x> \in R$

前提　推理过程　结论

证明:$\forall x$,

$x \in A$

$\Rightarrow xR_2x \wedge xR_1x$

$\Rightarrow x\ R_1 \circ R_2\ x$

$\therefore R_1, R_2$自反⇒ $R_1 \circ R_2$自反.

定理15 (1)的证明（二）

(1) R_1,R_2自反$\Rightarrow R_1\circ R_2$自反.

R在A上自反 $\Leftrightarrow I_A \subseteq R$

证明: R_1,R_2自反

$\therefore I_A \subseteq R_1$， $I_A \subseteq R_2$，

则$I_A \cup (R_1 \circ R_2) = (I_A \cup R_1) \circ (I_A \cup R_2) = R_1 \circ R_2$

错误用法

$\therefore I_A \subseteq R_1 \circ R_2$

故 R_1,R_2自反$\Rightarrow R_1\circ R_2$自反.

定理15 (2)的证明

(2) R_1,R_2反自反$\Rightarrow R_1\cap R_2$反自反.

证明R在A上反自反

任取x, $x\in A \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \langle x, x\rangle\notin R$

方法一: R_1,R_2反自反, $\forall x \in A$,

$\langle x,x\rangle \notin R_1$, $\langle x,x\rangle \notin R_2 \Rightarrow \langle x,x\rangle \notin R_1 \cap R_2$,

故 R_1,R_2反自反$\Rightarrow R_1\cap R_2$反自反.

方法二:

$I_A\cap R_1=\varnothing$, $I_A\cap R_2=\varnothing$,则

$I_A\cap(R_1 \cap R_2)=\varnothing$,所以$R_1\cap R_2$反自反.

定理15 (3)的证明

(3) R_1,R_2对称$\Rightarrow$ R_1-R_2对称.

证明R在A上对称
任取 $<x, y>\in R$ $\Rightarrow$ ……………… $\Rightarrow$ $<y, x>\in R$
前提 推理过程 结论

证明:R_1,R_2对称, $\forall<x,y>\in R_1-R_2$,

$x(R_1-R_2)y$

$\Leftrightarrow xR_1y \wedge \neg(xR_2y)$

$\Leftrightarrow yR_1x \wedge \neg(yR_2x)$

$\Leftrightarrow y(R_1-R_2)x$

$\therefore$ R_1,R_2对称 $\Rightarrow$ R_1-R_2对称.

定理15 (3)的证明 续

(3) R_1, R_2 对称⇒ R_1-R_2对称.

R在A上对称⇔ $R=R^{-1}$

证明: R_1,R_2对称 ⇔ $R_1=R_1^{-1}$， $R_2=R_2^{-1}$,

$(R_1-R_2)^{-1} = (R_1 \cap \sim R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap (\sim R_2)^{-1}$

$= R_1^{-1} \cap \sim(R_2^{-1}) = R_1 \cap \sim R_2 = (R_1-R_2)$.

即 $(R_1-R_2)^{-1} = (R_1-R_2)$.

∴ R_1,R_2对称 ⇒ R_1-R_2对称

注意：需要先证明$(\sim R)^{-1}=\sim(R)^{-1}$.

定理15 (3)的证明 续

R_1对称$\Rightarrow \sim R_1$对称.

证明: $\forall <x,y> \in \sim R_1$,

$$x(\sim R_1)y \Leftrightarrow x(E_A - R_1)y$$

$\Leftrightarrow <x,y> \in E_A \wedge <x,y> \notin R_1$

$\Leftrightarrow <y,x> \in E_A \wedge <y,x> \notin R_1$

$\Leftrightarrow <y,x> \in (E_A - R_1) \Leftrightarrow <y,x> \in \sim R_1$

$\therefore R_1$对称$\Rightarrow \sim R_1$对称

定理15 (4)的证明

(4) R_1反对称⇒ R_1^{-1}反对称.

证明 R在A上反对称
任取 $\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in R$ ⇒ ……………… ⇒ $x=y$
前提 推理过程 结论

证明: $\forall x,y \in A$,

$\langle x, y\rangle \in R_1^{-1} \wedge \langle y, x\rangle \in R_1^{-1}$

$\Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in R_1 \wedge \langle x, y\rangle \in R_1$

$\Rightarrow x=y$ （ R_1反对称）

故 R_1反对称⇒ R_1^{-1}反对称.

定理15(证明(4)，续)

(4) R_1反对称⇒ R_1^{-1}反对称.

R在A上反对称 ⇔ $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$.

证明: R_1在A上反对称

⇔ $R_1\cap R_1^{-1}\subseteq I_A$.

$R_1^{-1}\cap(R_1^{-1})^{-1}= R_1^{-1}\cap R_1\subseteq I_A$.

故 R_1反对称⇒ R_1^{-1}反对称.

定理15(证明(5))

(5) R_1,R_2传递$\Rightarrow$ $R_1\cap R_2$传递.

证明 R在A上传递

任取$<x, y>$，$<y, z>$

$<x,y>\in R$ $\wedge$ $<y, z>\in R$ $\Rightarrow$…………… $\Rightarrow$ $<x,z>\in R$

前提 推理过程 结论

证明:$\forall x,y,z\in A$, R_1,R_2传递

$x(R_1\cap R_2)y \wedge y(R_1\cap R_2)z$

$\Leftrightarrow xR_1y \wedge xR_2y \wedge yR_1z \wedge yR_2z$

$\Leftrightarrow xR_1y \wedge yR_1z \wedge xR_2y \wedge yR_2z$

$\Rightarrow xR_1z \wedge xR_2z \Leftrightarrow x(R_1\cap R_2)z$

$\therefore$ R_1,R_2传递$\Rightarrow$ $R_1\cap R_2$传递.

定理15(证明(5))

(5) R_1,R_2传递$\Rightarrow R_1\cap R_2$传递.

$R\circ R\subseteq R \Leftrightarrow R$在$A$上传递.

证明: R_1,R_2传递 $\Leftrightarrow R_1\circ R_1 \subseteq R_1,\ R_2\circ R_2 \subseteq R_2$

$$(R_1\cap R_2)\circ(R_1\cap R_2)$$

$$\subseteq ((R_1\cap R_2)\circ R_1)\cap((R_1\cap R_2)\circ R_2)$$

$$\subseteq (R_1\circ R_1\cap R_2\circ R_1)\cap(R_1\circ R_2\cap R_2\circ R_2)$$

$$\subseteq R_1\circ R_1\cap R_2\circ R_2$$

$$\subseteq R_1\cap R_2$$

$\therefore R_1,R_2$传递$\Rightarrow R_1\cap R_2$传递.

总结

- 关系矩阵, 关系图
- 自反, 反自反, 对称, 反对称, 传递

- 作业：P55/习题二 15, 17, 18,19, 22, 23