I 矩阵的运算

1.定义(复习)

对任一数域F和任意正整数m, n,

- 称F上的一个m行n列的数表为数域F上的一个$m \times n$**矩阵**，其中数表中的的数称为矩阵的**元素**.
- 称F上的一个$m \times 1$矩阵为数域F上的一个m维**列向量**，数域F上的一个$1 \times \mathrm{n}$矩阵为数域F上的一个n维**行向量**.
- 称F上的一个$\mathrm{n} \times n$矩阵为数域F上的一个n阶**方阵**.

一般用大写字母作为矩阵的记号，记作

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

其中，对$i = 1,2,\cdots,m, j = 1,2,\cdots n$，称$a_{ij} \in F$为矩阵$A$的第$i$行第$j$列的元素，列向量$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$为矩阵$A$的第$j$个列向量或第$j$列，行向量$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$为矩阵$A$的第$i$个行向量或第$i$行. 为方便起见，(1)式也可记作

$$A = (a_{ij})_{m\times n}.$$

当只需要指明矩阵的行数与列数，而不需写出矩阵的元素时，也可用$A_{m\times n}$来记一个$m \times n$矩阵.

记数域F上的$m \times n$矩阵全体为$\mathrm{F}^{m\times n}$. 称实数域上的矩阵为**实矩阵**，复数域上的矩阵为**复矩阵**.

称两个矩阵和是**同型的**，如果两者行数相等且列数也相等；称两个同型矩阵是**相等的**，若两者对应位置的元素都相等. 注意，同型矩阵才考虑是否相等. 举例，对矩阵$A = (a_{ij})_{m\times n}$和矩阵$B = (b_{ij})_{m\times n}$，有

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij},\ i = 1,\cdots,m,\ j = 1,\cdots,n.$$

2. 加法

矩阵的加法可以看作是向量加法的推广.

对矩阵$A = (a_{ij})_{m\times n}$和矩阵$B = (b_{ij})_{m\times n}$，定义

$$A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

注意，同型矩阵之间才可以相加.

给出并验证矩阵加法的运算律(P50 加法运算律).

对任意的$\mathrm{A, B, C} \in \mathrm{F}^{m\times n}$，有

- 交换律：$\mathrm{A + B = B + A}$;
- 结合律：$\mathrm{(A + B) + C = A + (B + C)}$;
- 含幺：(唯一)存在零矩阵，记为0，使得$\mathrm{A} + 0 = 0$;

  同时由交换律知，$0 + \mathrm{A} = 0$;
- 含逆：对A, (唯一)存在A的负矩阵$-A$，使得$\mathrm{A} + (-\mathrm{A}) = 0$;

  容易验证，若$A = (a_{ij})_{m\times n}$，则$-A = (-a_{ij})_{m\times n}$.

由负矩阵可以给出矩阵的**减法**. 对任意的$\mathrm{A},\mathrm{B}\in \mathrm{F}^{m\times n}$，令

$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=\mathrm{A}+(-\mathrm{B}).$$

3. 数乘

矩阵的数乘可以看作是向量数乘的推广.

对矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$和$k\in \mathrm{F}$，定义$kA=\left(ka_{ij}\right)_{m\times n}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$

给出并验证矩阵数乘的运算律(P51 数乘运算律).

对任意的$\mathrm{A},\mathrm{B}\in \mathrm{F}^{m\times n}, k, l\in \mathrm{F}$，有

- 结合律：$k(lA)=(kl)A$;
- 含幺：对$1\in \mathrm{F}$，满足$1\mathrm{A}=\mathrm{A}$;
- 分配律 1：$(k+l)A=kA+lA$;
- 分配律 2：$k(A+B)=kA+kB$.

4. 乘法

复习数域F上的$m\times n$矩阵与n维列向量的乘法如下：

对任意的$A\in \mathrm{F}^{m\times n}, \beta\in \mathrm{F}^n$，设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

则定义A与γ的乘积是一个m维列向量如下

$$A\beta=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_1+a_{12}b_2+\cdots+a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1+a_{22}b_2+\cdots+a_{2n}b_n \\ \vdots \\ a_{m1}b_1+a_{m2}b_2+\cdots+a_{mn}b_n \end{pmatrix}.$$

注意做乘法时，A与γ的位置不能交换.

验证矩阵与列向量的乘法是一个线性运算，也就是满足：

对任意的$A\in \mathrm{F}^{m\times n}, \alpha,\beta\in \mathrm{F}^n, k\in F$，有

(1) $A(\alpha+\beta)=A\alpha+A\beta$;

(2) $A(k\alpha)=k(A\alpha)$.

接下来定义数域F上的$m\times n$矩阵与$n\times p$矩阵的乘法：

对任意的F上的矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$和$B=(b_{jk})_{n\times p}$，定义A与B的乘积是一个$m\times p$矩阵如下

$$AB=(c_{ik})_{m\times p},$$

其中

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}.$$

注意，只有矩阵A的列数等于矩阵B的行数时，才可以考虑A和B的乘法.

矩阵乘列向量可看作矩阵乘矩阵的特殊情形. 举例

矩阵乘矩阵可以看作是由矩阵乘列向量诱导而来．记$\mathrm{C}=\mathrm{AB}$．可以将矩阵C理解为矩阵A依次去乘B的每条列向量，将得到的结果向量依次为列向量组成的一个结果矩阵，也就是

$$C=AB=A\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1p}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2p}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{np}\end{pmatrix}=\left(A\begin{pmatrix}b_{11}\\b_{21}\\\vdots\\b_{n1}\end{pmatrix},A\begin{pmatrix}b_{12}\\b_{22}\\\vdots\\b_{n2}\end{pmatrix},\cdots,A\begin{pmatrix}b_{1p}\\b_{2p}\\\vdots\\b_{np}\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1p}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2p}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\c_{m1}&c_{m2}&\cdots&c_{mp}\end{pmatrix},$$

其中对$k=1,\cdots,p$，有

$$A\begin{pmatrix}b_{1k}\\b_{2k}\\\vdots\\b_{nk}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{1k}\\c_{2k}\\\vdots\\c_{mk}\end{pmatrix}.$$

设A的第j列为α_j，第i行为$\overline{\alpha_i}$；B的第k列向量为β_k，第j行为$\overline{\beta_j}$；C的第k列向量为γ_k，第i行为$\overline{\gamma_i}$．由上式知，

$$A\beta_k=\gamma_k$$

也就是矩阵A乘B的第k列，得到C的第k列．写成相应的向量形式，得
对$k=1,\cdots,p$，有

$$\sum_{j=1}^{n}b_{jk}\alpha_j=\gamma_k,$$

也就是说，

命题 1: 矩阵$C=AB$的第k列等于A的列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$以$B$的第$k$列元素$b_{1k},b_{2k},\cdots,b_{nk}$为系数的线性组合．

由此C的列向量组可以被A的列向量组表示，“被表示的秩不大”，因此有

推论 1.1: 对$C=AB$，有$\mathrm{r}(C)\le\mathrm{r}(A)$)．

若考虑行向量的情形，容易验证

$$\overline{\alpha_i}B=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})\mathrm{B}=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})\begin{pmatrix}\overline{\beta_1}\\\overline{\beta_2}\\\vdots\\\overline{\beta_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{i1}b_{11}&a_{i2}b_{12}&\cdots&a_{in}b_{1p}\\+&+&&+\\a_{i1}b_{21}&a_{i2}b_{22}&\cdots&a_{in}b_{2p}\\+&+&&+\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\+&+&&+\\a_{in}b_{n1}&a_{i2}b_{n2}&\cdots&a_{in}b_{np}\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\overline{\beta_j}=\overline{\gamma_i}$$

也就是说，

命题 2: 矩阵$C=AB$的第i行等于B的行向量组$\overline{\beta_1},\overline{\beta_2},\cdots,\overline{\beta_n}$以$A$的第$i$行元素$a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$为系数的线性组合．

由此C的行向量组可以被A的行向量组表示，“被表示的秩不大”，将在后面的讨论中证明，矩阵行向量组的秩等于列向量组的秩等于矩阵的秩．因此有

推论 2.1: 对$C=AB$，有$\mathrm{r}(C)\le\mathrm{r}(\mathrm{B})$)．

给出并验证矩阵乘法的运算律．

对任意的正整数$\mathrm{m},\mathrm{n},\mathrm{p},\mathrm{q}$，数域F上的矩阵$A_{m\times n},B_{n\times p},C_{p\times q}$，和$k\in\mathrm{F}$，有

- 结合律：$(AB)\mathrm{C}=A(BC)$;
- 对矩阵数乘的交换律：$k(AB)=(kA)B=A(kB)$;
- 对矩阵加法的分配律：$\mathrm{A(B+C)=AB+AC,(B+C)A=BA+CA}$;
- 含幺：存在单位阵$I_m=\begin{pmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{pmatrix}_{m\times m}$和$I_n=\begin{pmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{pmatrix}_{n\times n}$，使得对$A_{m\times n}$，有

$$I_m A = A = A I_n.$$

注意,

- 矩阵乘法没有交换律. AB一般不等于BA. 举例
- 矩阵乘法没有消去律. 由AB = AC不能推出B = C.

最后给出三个与方阵有关的概念.

(1) 称n阶方阵$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & d_j & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$为n阶**对角阵**. 称$D_{n\times n}$的1,1位置到n, n位置的连线为**主对角线**, 称主对角线上的元素为**主对角元**. 显然对于对角阵, 除主对角元外的其他元素一定都为0, 而主对角元可能为零也可能不为零.

命题 3: 对角阵的乘积仍为对角阵. 举例

(2) 若n阶方阵$A = (a_{ij})_{n\times n}$满足当$i > j$时, $a_{ij} = 0$, 则称A为n阶**上三角阵**. 由定义知, 上三角阵的主对角线左下方元素一定为零, 主对角线右上方元素和主对角元可能为零也可能不为零, 具有如下形式

$$A = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \ddots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}.$$

命题 4: 上三角阵的乘积仍为上三角阵. 举例

(3) 对n阶方阵A,

- 定义n个A的乘积为A的**幂**, 记为A^n;
- 定义$F(A) = A^n + a_{n-1}\ A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I$为以矩阵$A$为变量的$n$次**矩阵多项式**. 举例

设B为一个非方阵, 显然B与B的乘积无定义, 因此, 不讨论一般矩阵的幂与多项式.

5. 转置

对$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$, 称$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n\times m}$ 为A的**转置矩阵**.

举例, 行列向量互为转置

给出并验证矩阵乘法的运算律.

对任意的$A, B \in F^{m\times n}, k, l \in F$, 有

- 自反律: $(A^T)^T = A$;
- 与矩阵加法的分配律: $(A+B)^T = A^T + B^T$;
- 与矩阵数乘的交换律: $(kA)^T = kA^T$;
- 与矩阵乘法的反分配律: $(AB)^T = B^T A^T$, 进一步, $(A_1 A_2 \cdots A_k)^T = A_k^T \cdots A_2^T A_1^T$;

注意, A总可以与A^T作乘法, 进一步有, $AA^T \in F^{m\times m}$, $A^T A \in F^{n\times n}$.

借助矩阵的转置与乘法的关系，命题 2 可看作命题 1 的推论. 由$C = AB$知，$C^T = B^T A^T$. 由命题 1 知，C^T的第i列等于B^T的列向量组以A^T的第i列为系数的线性组合. C^T的第i列对应C的第i行，B^T的列向量组对应B的行向量组，A^T的第i列对应A的第i行. 所以C的第i行等于B的行向量组以A的第i行为系数的线性组合.

最后给出一个与方阵有关的概念.

设$A = (a_{ij})_{n\times n}$,

- 若A满足$A^T = A$，也就是对任意$i, j = 1, \cdots n$，有$a_{ij} = a_{ji}$，则称A为**对称阵**;
- 若A满足$A^T = -A$，也就是对任意$i, j = 1, \cdots n$，有$a_{ij} = -a_{ji}$，则称A为**反对称阵**;
- 若A满足$A^T A = I$，则称A为**正交阵.**

验证：对任意n阶方阵A，$\frac{1}{2}(A + A^T)$为对称阵，$\frac{1}{2}(A - A^T)$为反对称阵，且

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T),$$

也就是说任意n阶方阵都可以表示成一个对称阵和一个反对称阵的和.

正交阵对应标准正交基保持两两正交性的旋转变换，因为其列向量长度为 1 且两两正交; 行列式为正负 1，表示保持手性或反转手性.

命题 5: 设α为任意列向量，则$\alpha\alpha^T$是对称阵. 举例

6. 分块矩阵

把一个$m \times n$矩阵按行的方向分成s块，在列的方向分成t块，得到A的$s \times t$**分块矩阵**，记作

$$A = (\overline{A_{kl}})_{s\times t}$$

其中称$\overline{A_{kl}}(k = 1,2,\cdots s;\ \ l = 1,2,\cdots t)$为A的**子块**. 分块矩阵可以看作是以子块为元素的矩阵.

例如，设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

首先按行的方向将A分成3块，不妨令第1,2行作为第1块，第3行作为第2块，第4,5行作为第3块,得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ - & - & - & - \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ - & - & - & - \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

然后按列的方向将A分成2块，不妨令第1,2列作为第1块，第3,4行作为第2块,得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 3 & 4 \\ 1 & 1 & | & 1 & 1 \\ - & - & + & - & - \\ 5 & 6 & | & 7 & 8 \\ - & - & + & - & - \\ 2 & 3 & | & 4 & 5 \\ 3 & 4 & | & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

这样就得到了A的一个3×2分块矩阵，其中的子块，如

$$\overline{A_{32}} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

接下来给出分块矩阵形式下的矩阵运算.

- 分块矩阵的加法:

设$\mathrm{A}=(\overline{A_{kl}})_{s\times t}$, $\mathrm{B}=(\overline{B_{kl}})_{s\times t}$, 且A与B的对应子块都是同型矩阵, 则

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}=(\overline{A_{kl}}+\overline{B_{kl}})_{s\times t}.$$

例如,

$$\begin{pmatrix}1&2&|&3\\5&6&|&7\\-&-&+&-\\2&3&|&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&|&1\\1&-1&|&0\\-&-&+&-\\3&4&|&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&|&4\\6&5&|&7\\-&-&+&-\\5&7&|&5\end{pmatrix}.$$

- 分块矩阵的数乘:

设$\mathrm{A}=(\overline{A_{kl}})_{s\times t}$, 对任意数c, 有

$$\mathrm{cA}=(\mathrm{c}\overline{A_{kl}})_{s\times t}.$$

例如,

$$2\begin{pmatrix}1&2&|&3\\5&6&|&7\\-&-&+&-\\2&3&|&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&|&6\\10&12&|&14\\-&-&+&-\\4&6&|&8\end{pmatrix}.$$

- 分块矩阵的乘法:

设$A=(\overline{A_{uv}})_{r\times s},B=(\overline{B_{vw}})_{s\times t}$, 且对$u=1,2,\cdots r$; $v=1,2,\cdots s$; $w=1,2,\cdots t$, $\overline{A_{uv}}\ \ \overline{B_{vw}}$都有意义, 则有

$$\mathrm{AB}=\mathrm{C}=(\overline{C_{uw}})_{r\times t},$$

其中

$$\overline{C_{uw}}=\sum_{v=1}^{s}\overline{A_{uv}}\ \ \overline{B_{vw}}.$$

注意, 分块矩阵可以作乘法的条件是:

前一个矩阵分块的列数等于后一个矩阵分块的行数;

对应的子块可以相乘, $\overline{A_{uv}}\ \ \overline{B_{vw}}$都有意义.

举例:

(1)

$$\begin{pmatrix}1&2&|&3\\5&6&|&7\\-&-&+&-\\2&3&|&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&|&0\\1&|&2\\-&+&-\\3&|&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&|&7\\32&|&19\\-&+&-\\17&|&10\end{pmatrix};$$

(2) 矩阵A乘列向量α得到Aα, 从分块矩阵的角度看, 就是先将A按行向量分块, 将α看作是只有一个子块的分块矩阵, 再将两者作分块矩阵的乘法.

(3) 从分块矩阵的观点, 命题 1 可理解为先A按列分块, 再将B按元素分块, 最后做两者的分块矩阵的乘法, 例如

$$\begin{pmatrix}1&|&2&|&3\\5&|&6&|&7\\2&|&3&|&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&|&0\\-&+&-\\1&|&2\\-&+&-\\3&|&1\end{pmatrix}=\left(1\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}3\\7\\4\end{pmatrix}\quad 0\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}3\\7\\4\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}12&7\\32&19\\17&10\end{pmatrix}.$$

(4) P82 例 1 计算$AB=$?

$$A=\begin{pmatrix}1&&&&\\&1&&&\\-1&2&1&&\\1&1&&1&\\-2&&&&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}3&2&&1&\\1&3&&&1\\-1&&&&\\&-1&&&\\&&-1&&\end{pmatrix}$$

III 矩阵的秩与逆矩阵

1. 逆矩阵.

设A为n阶方阵，若存在n阶方阵B，使得$AB=BA=I$，则称A为**可逆矩阵**，B为A的**逆矩阵**，记作$A^{-1}=B$.

注意，$AB=I$<=>$BA=I$，在下面的讨论中将给出证明.

举例，(1) $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$不可逆. 假设存在$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，使得$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，则有

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\0&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}，矛盾.$$

命题 6: 若方阵A可逆，则逆唯一.　(P64 2.2)

证明：设B,C都为A的逆矩阵，则有

$$\mathrm{B}=\mathrm{BI}=\mathrm{B}(\mathrm{AC})=(\mathrm{BA})\mathrm{C}=\mathrm{IC}=\mathrm{C}.$$

给出并验证与逆矩阵相关的运算律.

对任意的两个可逆阵A和B，$\mathrm{k}\in\mathrm{F}$且$\mathrm{k}\neq0$，有

- 自反律：$(A^{-1})^{-1}=A$;
- 对矩阵加法，无;
- 对矩阵数乘的分配律：$(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}$;
- 对矩阵乘法的反分配律：$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$，这说明可逆阵的乘积仍可逆;

  进一步，$(A_1A_2\cdots A_n)^{-1}={A_n}^{-1}\cdots{A_2}^{-1}{A_1}^{-1}$;
- 对矩阵转置的交换律：$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$.

可逆阵与方程组的联系:

命题 7: 设A为n阶方阵，则

$$A可逆\ \Longleftrightarrow\ AX=b有唯一解.$$

证明: (=>) 若A可逆，有$X=A^{-1}AX=A^{-1}b$，由命题 6 逆唯一，所以解唯一.

(<=) 若$AX=b$有唯一解，则$\mathrm{r(A)=n}$. 将会在后面明，$\mathrm{r(A)=n}$ <=> A可逆.

由命题 7 的证明可知，若齐次方程组$AX=0$的系数阵A为可逆阵，则$AX=0$只有零解；若非齐次方程组$AX=b$的系数阵A为可逆阵，则$AX=b$有唯一解，且要求这个唯一解就等价于求A 的逆矩阵A^{-1}.

对可逆矩阵这个概念将主要研究三个问题:

首先，如何判定一个方阵是否是可逆的?

1. 作为系数矩阵，考察齐次方程组的解，见命题 7;

2. 计算矩阵的秩，后面会讲到

秩等于方阵阶数 <=> 方阵可逆;

3. 计算行列式，后面会讲到

行列式非零<=> 方阵可逆.

然后，如何求一个可逆阵的逆矩阵?

1. 如果一个具体给出的方阵存在逆矩阵，则逆矩阵可用初等变换法求出:

设A为可逆阵，求A 的逆矩阵A^{-1}. 将A与单位阵I并列，得到矩阵(A|I)，通过矩阵消元，将A化为简化上阶梯阵(将证明若A为可逆阵，则A所化成的简化上阶梯阵一定是单位阵)，则(A|I)中右侧的I就化为A^{-1}，也就是说

$$(A|I) \rightarrow (I|A^{-1}).$$

初等变换法的原理将在下一节初等矩阵中说明.

2. 如果方阵没有具体给出，只用抽象的记号代表，则求逆矩阵的方法非常多样:

(1) 根据定义与运算律，如$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

(2) 由方阵多项式给出的方程可以用来判定可逆并形式上求逆，见 P67 例 3;

(3) 伴随矩阵，后面会讲到;

(4) 分块矩阵求逆

举例(P86 例 5):

设A为m阶可逆阵，B为n阶可逆阵，C为m × n矩阵. 证明分块矩阵$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$可逆，并求出逆矩阵.

证明:

设分块矩阵$\begin{pmatrix} D & E \\ F & G \end{pmatrix}$，其中$D$为m阶方阵，$E$为m × n矩阵，$F$为n × m矩阵，G为n阶方阵，满足

$$\begin{pmatrix} D & E \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = I = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

由分块矩阵的乘法可得，有

$$\mathrm{DA} = I_m \ , \quad DC + EB = 0 \ ,$$
$$FA = 0 \ , \quad CF + GB = I_n \ .$$

由$DA = I_m$，得

$$D = A^{-1};$$

由A可逆且$FA = 0$，得

$$F = 0;$$

由$CF + GB = I_n$且$F = 0$，得$GB = I_n$，从而有

$$G = B^{-1};$$

由$DC + EB = 0$且$D = A^{-1}$，得

$$E = -A^{-1}CB^{-1}.$$

所以，$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$可逆，且

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

最后考虑该如何应用逆矩阵?

1. 求解方程组.

设A为可逆阵，则方程组AX = b的解存在且唯一，就是

$$X = A^{-1}b$$

2. 求解矩阵方程.

举例(P77 例 5): 设A为已知方阵，A可逆且$(A-2I)$可逆，B为未知矩阵且满足$ABA^T = 2BA^T + I$. 求B.

解:

由$ABA^T = 2BA^T + I$可得,

$$(A-2I)BA^T = I,$$

由A可逆知，A^T也可逆；对上式先左乘$(A-2I)$的逆，再右乘A^T的逆，得

$$B = (A-2I)^{-1}(A^T)^{-1},$$

由逆与矩阵乘法的运算律可得,

$$B = (A^T(A-2I))^{-1}.$$

2. 初等距阵

矩阵消元过程中需要用到对矩阵行向量组的三种基本操作，分别是行对换，行倍乘(所乘数非零)，行倍加，统称为**初等行变换**. 相应的也可以给出对矩阵列向量组的三种基本操作，分别是列对换，列倍乘(所乘数非零)，列倍加，统称为**初等列变换**

行对换是指将矩阵的两行交换位置；列对换是指将矩阵的两列交换位置. 将n阶单位阵I的第i行与第j行交换位置，得到**n阶方阵$\boldsymbol{E_{ij}}$**；容易验证，若将n阶单位阵I的第i 列与第j 列交换位置，也得到**n阶方阵$\boldsymbol{E_{ij}}$**.

行倍乘是指将矩阵的某一行数乘上某个非零数；列倍乘是指将矩阵的某一列数乘上某个非零数,. 将n阶单位阵I的第i行数乘上非零数c，得到**n阶方阵$\boldsymbol{E_i(c)}$**；容易验证，若将n阶单位阵I的第i列数乘上非零数c，也得到n阶方阵$E_i(c)$.

行倍加是指将矩阵的某一行数乘上某个数加到另一行上，注意前一行并不改变；列倍加是指将矩阵的某一列数乘上某个数加到另一列上，注意前一列并不改变. 将n阶单位阵I的第i行数乘上某数k加到第j行，可以得到n阶方阵$E_{ij}(k)$；容易验证，若将n阶单位阵I的第j列数乘上某数k加到第i列，也得到n阶方阵$E_{ij}(k)$.

将初等行变换和初等列变换统称为**初等变换**. 称三种方阵E_{ij}，$E_i(c)$，$E_{ij}(k)$为**初等矩阵**或**初等变换阵**. 可以验证，对一个矩阵，作初等行变换等价于左乘相应的初等阵；作初等列变换等价于右乘相应的初等阵. (P72，结论及例 2). 举例

命题 8: 初等变换阵都是可逆阵，其逆矩阵和转置矩阵都是初等变换阵.

将初等矩阵的部分结果小结如下:

初等变换	对换	倍乘	倍加
初等变换阵	E_{ij}=单位阵交换i, j行=单位阵交换i, j列	$E_i(c)$=单位阵第i行乘c=单位阵第i列乘c，其中$c \neq 0$	$E_{ij}(k)$=单位阵第i行乘k加到第j行上=单位阵第j列乘k加到第i列上
对A作初等行变换	$E_{ij}A$	$E_i(c)A$	$E_{ij}(k)A$
对A作初等列变换	AE_{ij}	$AE_i(c)$	$AE_{ij}(k)$
逆矩阵	$(E_{ij})^{-1} = E_{ij}$	$(E_i(c))^{-1} = E_i(c^{-1})$	$(E_{ij}(k))^{-1} = E_{ij}(-k)$
转置矩阵	$(E_{ij})^T = E_{ij}$	$(E_i(c))^T = E_i(c)$	$(E_{ij}(k))^T = E_{ji}(k)$

幂矩阵	$(E_{ij})^m = \begin{cases} I & m为偶数 \\ E_{ij} & m为奇数 \end{cases}$	$(E_i(c))^m = E_i(c^m)$	$(E_{ij}(k))^m = E_{ij}(mk)$

在本节最后，初步讨论初等变换与矩阵行向量组的秩(简称行秩)及列向量组的秩(简称列秩)的关系:

命题 9: 初等行变换不改变矩阵的行秩，初等列变换不改变矩阵的列秩. (P123 定理 3.5)

证明：分别验证 3 种初等行变换，通过转置可知初等列变换的情形.

在接下来的讨论中将会看到，通过初等变换，可以将不容易研究的一般矩阵转化为保持某些性质和不变量的更容易研究的矩阵.

3. 矩阵的秩

进一步讨论初等变换与矩阵的行秩及列秩的关系:

定理 10: 设P是任意m阶可逆阵，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是任意$m$维列向量组，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与$P\alpha_1,P\alpha_2,\cdots,P\alpha_n$有相同的相关性.

证明：设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，有$PA=(P\alpha_1,P\alpha_2,\cdots,P\alpha_n)$. 求$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的相关性，也就是求解$AX=0$. 由$P$可逆知，$AX=0$与$(PA)X=0$同解，也就是说$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与$P\alpha_1,P\alpha_2,\cdots,P\alpha_n$有相同的相关性.

由定理 10，若P是可逆阵，则$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$的列向量组与$PA=(P\alpha_1,P\alpha_2,\cdots,P\alpha_n)$的列向量组具有相同的相关性. 设$B=A^T$，$Q=P^T$，则$Q$也为可逆阵且$(PA)^T=A^TP^T=BQ$. B的行向量组对应A的列向量组，BQ的行向量组对应PA的列向量组. 因此B的行向量组与BQ的行向量组具有相同的相关性. 由A和P的任意性知，B和Q也是任意的. 所以有

定理 10': 设Q是任意m阶可逆阵，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$是任意$m$维行向量组，则$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$与$\beta_1Q,\beta_2Q,\cdots,\beta_2Q$有相同的相关性.

推论 10.1: 初等行变换不改变矩阵列向量组的相关性. (P123 定理 3.6)

证明：左乘初等阵，由定理 10 可推知.

推论 10.1': 初等列变换不改变矩阵行向量组的相关性.

证明：右乘初等阵，由定理 10'可推知.

由推论 10.1 知，初等行变换不改变列秩. 由推论 10.1'知，初等列变换不改变行秩. 再结合命题 9 可知,

定理 11: 初等变换不改变矩阵的行秩和列秩. (P126 定理 3.7)

接下来说明矩阵的行秩与列秩相等.

推论 11.1: 矩阵的行秩等于列秩(等于矩阵的秩). (P126 定理 3.8)

证明：任意矩阵A都可以通过初等行变换化成一个上阶梯阵，不妨记为U. 由定理 11，A的行秩等于U的行秩，A的列秩等于U的列秩. 因为U为上阶梯阵，所以U的行秩等于主元个数等于U的列秩. 因此A的行秩等于A的行秩.

由于矩阵的行秩等于列秩，所以也等于矩阵的秩. 初等变换不改变矩阵的秩.

下面的定理给出逆矩阵，方程组，秩，初等阵，向量组的联系.

定理 12: 对方阵A，以下命题等价:

(1) A可逆;

(2) $AX=0$只有零解;

(3) $\mathrm{r(A)=n}$;

(4) A经过初等行变换可化为单位阵;

(5) A的列向量组线性无关;

(6) A的行向量组线性无关;

(7) $AX=b$只有唯一解.

证明:

(1)=>(2). 若A可逆, 对$AX=0$左右同乘A^{-1}有$\mathrm{X}=A^{-1}0=0$, 推出$AX=0$只有零解.

(2)=>(3). 若$AX=0$只有零解, 则$r(A)=n$.

(3)=>(4). 若$r(A)=n$, 设A经过初等行变换可化为简化上阶梯方阵R. 由推论 11.2, 初等行变换不改变矩阵的秩, 因此$r(R)=r(A)=n$, 而简化上阶梯方阵中只有单位阵有n个主元, 因此只有单位阵的秩为n, 所以$R=I$, 即A经过初等行变换可化为单位阵.

(4)=>(1). 若A经过初等行变换可化为单位阵, 可记为$E_k\cdots E_2E_1A=I$, 则$A={E_1}^{-1}{E_2}^{-1}\cdots{E_k}^{-1}$, 既等于初等行变换阵的逆的乘积. 令$E=E_k\cdots E_2E_1$, 有$EA=AE=I$, 推出$A$可逆.

(5), (6),(7)显然与(3)等价.

定理 12 给出了除定义外, 判定方阵可逆的部分方法(P78 例 6), 以后还可以通过行列式是否为零判断. 其(4)=>(1)的证明过程也隐含了证明若$BA=I$, 则$AB=I$的方法:

若$BA=I$. 对$AX=0$有$BAX=0$, 有$\mathrm{X}=0$, 也就是说$X=0$只有零解. 若$AX=0$只有零解, 则$r(A)=n$. 若$r(A)=n$, 则A经过初等行变换可化为单位阵, 可记为$E_k\cdots E_2E_1A=I$. 容易验证, 对每个初等阵E_i, 都存在另一个初等阵${E_i}^{-1}$, 使得$E_i{E_i}^{-1}=I={E_i}^{-1}E_i$. 则

$$A=IA={E_1}^{-1}{E_2}^{-1}\cdots{E_k}^{-1}E_k\cdots E_2E_1A={E_1}^{-1}{E_2}^{-1}\cdots{E_k}^{-1}I={E_1}^{-1}{E_2}^{-1}\cdots{E_k}^{-1},$$

令令$E=E_k\cdots E_2E_1$, 有$EA=AE=I$. 由$BA=I=EA$知,

$$B=BI=BAE=IE=E.$$

所以有$AB=AE=I$.

推论 12.1: 可逆阵经过初等行变换可化为单位阵. (P75 定理 2.4)

推论 12.2: 可逆阵等于一组初等阵的乘积. (P75 推论 1)

由推论 12.1 和 12.2 就可以知道初等变换法求逆矩阵的原理: 对具体的A, 通过初等行变换$(A|I)\to(I|A^{-1})$, 每一步初等行变换都相当于左乘一个相应的初等变换阵, 使得$E_k\cdots E_2E_1A=I$, 从而有$A^{-1}=E_k\cdots E_2E_1$. (P76 例 4)

给出并验证与矩阵的秩有关的运算律和结果, 这体现了秩与其他矩阵运算和性质的兼容性.

- 与矩阵的型:

  对$A_{m\times n}$, 有$r(A)\le min\{m,n\}$.

  上式也给出了矩阵的行秩与列秩的上限.

- 与加法:

  (1) 设A与B为同型矩阵,

  $$\mathrm{r}(A+B)\le r(A)+r(B).$$

  证明: 从列向量的角度考虑, A的列和B的列组成的向量组的秩不超过$r(A)+r(B)$, 而$A+B$的列一定可以被A的列和B的列组成的向量组表示, 被表示的秩不大, 所以$\mathrm{r}(A+B)\le r(A)+r(B)$.

  (2) 设A为$m\times n$矩阵, B为$n\times p$矩阵, 且$\mathrm{AB}=0$,

  $$r(A)+r(B)\le n.$$

证明：容易验证，B的列是$AX=0$的解向量全体的一个子组，而$AX=0$的解向量全体的秩为$n-r(A)$. 子组的秩不超过整个向量组的秩．因此有$r(B)\le n-r(A)$.

- 与数乘:

$$r(kA)=\begin{cases}0 & k=0\\ r(A) & k\neq 0\end{cases}$$

- 与转置:

$$r(A)=r(A^T)=r(AA^T)=r(A^TA).$$

其中$r(A)=r(AA^T)$的证明将在后面章节中讨论向量正交的时候给出.

- 与乘法:

对任意的矩阵$A_{m\times n}$和$B_{n\times p}$,

(1) $r(AB)\le min\{r(A),r(B)\}$.

证明：AB的列可由A的列表示，AB的行可由B的行表示，被表示的秩不大.

(2) $r(A_1A_2\cdots A_k)\le min\{r(A_1),r(A_2),\cdots r(A_k)\}$.

证明与(1)同理.

(3) $r(AB)+n\ge r(A)+r(B)$.

证明：在分块矩阵与秩的关系中给出证明.

(4) 设P, Q可逆，以下乘法有意义，则有$\mathrm{r(PAQ)=r(PA)=r(AQ)=r(A)}$.

证明：由推论 12.2，可逆阵等于一组初等阵的乘积，再由定理 7，初等变换不改变矩阵的秩.

- 与逆矩阵:

若A可逆，则$r(A)=r(A^{-1})$.

证明：设A为n阶可逆阵．因为A与A^{-1}都可逆，由定理 12，$r(A)=r(A^{-1})=n$.

- 与分块矩阵:

(1) 对分块矩阵$\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}0 & A\\ B & 0\end{pmatrix}$，容易验证下式成立:

$$r\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}=r(A)+r(B)=r\begin{pmatrix}0 & A\\ B & 0\end{pmatrix}.$$

(2) 对分块矩阵$\begin{pmatrix}A & 0\\ I_n & B\end{pmatrix}$，有

$$r\begin{pmatrix}A & 0\\ I_n & B\end{pmatrix}=n+r(AB).$$

证明:

首先证明$r\begin{pmatrix}A & 0\\ I & B\end{pmatrix}\ge n+r(AB)$.

因为

$$\begin{pmatrix}I & -A\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & 0\\ I & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & -B\\ 0 & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -AB\\ I & 0\end{pmatrix},$$

由(1)知,

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix}0 & -AB\\ I & 0\end{pmatrix}=n+r(AB)$$

由矩阵乘法与秩的关系知,

$$r\begin{pmatrix}A & 0\\ I & B\end{pmatrix}\ge r\begin{pmatrix}0 & -AB\\ I & 0\end{pmatrix}=n+r(AB).$$

然后证明$r\begin{pmatrix}A & 0\\ I & B\end{pmatrix}\le n+r(AB)$.

因为

$$\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -AB \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & B \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ I & B \end{pmatrix},$$

同理可得

$$r\begin{pmatrix} A & 0 \\ I & B \end{pmatrix} \le r\begin{pmatrix} 0 & -AB \\ I & 0 \end{pmatrix} = n + r(AB).$$

(3) 对分块矩阵$\begin{pmatrix} A & 0 \\ P & B \end{pmatrix}$，其中$P$为任意n阶可逆阵，有

$$r\begin{pmatrix} A & 0 \\ P & B \end{pmatrix} = n + r(AB).$$

证明:

容易验证，$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$为可逆阵，其逆矩阵为$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$.

因为

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ P & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ I & P^{-1}B \end{pmatrix}$$

由乘法与秩的关系知,

$$r\begin{pmatrix} A & 0 \\ P & B \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} A & 0 \\ I & P^{-1}B \end{pmatrix}$$

由(2)知,

$$r\begin{pmatrix} A & 0 \\ I & P^{-1}B \end{pmatrix} = n + r(AP^{-1}B)$$

仍由乘法与秩的关系知，$r(AP^{-1}B) = r(AB)$，所以有

$$r\begin{pmatrix} A & 0 \\ P & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ I & P^{-1}B \end{pmatrix} = n + r(AB).$$

(4) 对分块矩阵$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$，其中C为任意n阶方阵，有

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} \ge r(A) + r(B).$$

证明:

不妨设A为$\mathrm{m} \times \mathrm{n}$矩阵，B为$\mathrm{n} \times \mathrm{p}$矩阵.

若A为零矩阵，则

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ \mathrm{C} & \mathrm{B} \end{pmatrix} = \mathrm{r}(\mathrm{C} \quad \mathrm{B}) \ge r(B) = r(A) + r(B).$$

若A非零矩阵.

设矩阵A的列向量组的一个极大无关组为

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s,$$

其中$\mathrm{s} = \mathrm{r}(\mathrm{A})$. 将$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$扩维得到分块矩阵$\begin{pmatrix} \mathrm{A} \\ \mathrm{C} \end{pmatrix}$的列向量组的一个子组

$$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s.$$

因为$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s$是由无关组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$扩维得到，所以无关.

设分块矩阵$\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{B} \end{pmatrix}$的列向量组的一个极大无关组为

$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t,$$

其中$t = r(B)$. 设存在系数$k_1, k_2, \cdots, k_s, l_1, l_2, \cdots, l_t$，使得

$$k_1\gamma_1 + k_2\gamma_2 + \cdots + k_s\gamma_s + l_1\beta_1 + l_2\beta_2 + \cdots + l_t\beta_t = 0.$$

因为$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$的前m个分量都为0，由上式线性组合前m个分量为0知,

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0.$$

由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$无关知,

$$k_1=k_2=\cdots=k_s=0.$$

所以有

$$l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_t\beta_t=0.$$

由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$无关知,

$$l_1,l_2,\cdots,l_t=0.$$

因此$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$是无关的，所以有$r\begin{pmatrix}A & 0\\ C & B\end{pmatrix}\geq s+t=r(A)+r(B)$.

注意:

a) 在(4)中，若$\mathrm{C}=I_n$，可知

$$r\begin{pmatrix}A & 0\\ I_n & B\end{pmatrix}\geq r(A)+r(B),$$

由(2)知

$$r\begin{pmatrix}A & 0\\ I_n & B\end{pmatrix}=n+r(AB),$$

所以有

$$n+r(AB)\geq r(A)+r(B).$$

b) 对分块矩阵$\begin{pmatrix}A & 0\\ C & B\end{pmatrix}$，其中C为任意n阶方阵，$r\begin{pmatrix}A & 0\\ I_n & B\end{pmatrix}$与$r\begin{pmatrix}A & 0\\ C & B\end{pmatrix}$的大小关系是不确定的.

举一个$r\begin{pmatrix}A & 0\\ I_n & B\end{pmatrix}<r\begin{pmatrix}A & 0\\ C & B\end{pmatrix}$的例子:

设$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，则有

$$r\begin{pmatrix}A & 0\\ C & B\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}=3,$$

$$r\begin{pmatrix}A & 0\\ I & B\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}=2.$$