已知η_1,η_2,η_3是非齐次方程组$AX=b$的三个解，其中$\mathrm{r}(A)=3$，$\eta_1+\eta_2=(1,3,-1,4)^T$，$\eta_2+\eta_3=(2,4,3,0)^T$，求$AX=b$的通解.

$\because\ n=r+s,\ n=4,\ r=3$

$\therefore\ s=1.$

$\because\ A\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)=b$

又 $A\big((\eta_1+\eta_2)-(\eta_2+\eta_3)\big)=0$

$\therefore$ $AX=b$的通解为

$\frac{1}{2}(1,3,-1,4)^T+k(-1,-1,-4,4)^T,\ \forall k$

设$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & -1 & -1\\ 0 & 3 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$,

(1) 计算A^T, B^T, $(A+B)^T$, $(3A)^T$, $(AB)^T$;

(2) 验证$(A+B)^T=A^T+B^T$, $(3A)^T=3A^T$, $(AB)^T=B^TA^T$;

(3) 验证$r(A)=r(A^T)=2$, $r(B)=r(B^T)=3$, $r(AB)=r(A)=2$.

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}$$

其它略.

设α为3维列向量，若$\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，计算α与$\alpha^T\alpha$.

$\alpha=(1,-1,1)^T$ 或 $(-1,1,-1)^T$

$\alpha^T\alpha=3$

设3阶方阵$A=\alpha\beta^T$,其中$\alpha=(1,2,3)^T$,$\beta=(0,1,-1)^T$,

(1) 计算$A,\beta^T\alpha$;

(2) 计算A^{100}. （ 提示$A^{100}=(\alpha\beta^T)^{100}=\alpha(\beta^T\alpha)^{99}\beta^T$ ）

(1) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 3 & -3\end{pmatrix}$. $\beta^T\alpha=-1$

(2) $A^{100}=\alpha(\beta^T\alpha)^{99}\beta^T=(-1)^{99}\alpha\beta^T$

$=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & -3 & 3\end{pmatrix}$

证明方阵$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$可逆并求出其逆矩阵.

法1: 设 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

有 $\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\Rightarrow$ $a=-2$, $b=1$, $c=\frac{3}{2}$, $d=-\frac{1}{2}$

法2: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

设A为3阶方阵，将A的第三行加到第一行得B,再将B的第一列的(-2)倍加到第3列得C，已知$\mathrm{C}=\begin{pmatrix}7&2&-4\\0&4&5\\6&0&-5\end{pmatrix}$，计算$B$和$A$.

已知 $E_{31}(1)A=B$ ，$BE_{31}(-2)=C$.

且 $(E_{31}(1))^{-1}=E_{31}(-1)$. $(E_{31}(-2))^{-1}=E_{31}(2)$

$$B=C(E_{31}(-2))^{-1}=CE_{31}(2)=\begin{pmatrix}7&2&10\\0&4&5\\6&0&7\end{pmatrix}$$

$$A=(E_{31}(1))^{-1}B=E_{31}(-1)B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\6&0&7\end{pmatrix}$$

设$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&2\\1&1&1&-1\\1&0&-2&-6\end{pmatrix}$，$AX=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，$AB=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}$. 验证 $r(A)=4$. ∴ A可逆.

(1) 证明A可逆，并求A^{-1};

(2) 求X和B.

$$(A|I)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&3&4&1&0&0&0\\2&3&1&2&0&1&0&0\\1&1&1&-1&0&0&1&0\\1&0&-2&-6&0&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&3&4&1&0&0&0\\0&-1&-5&-6&-2&1&0&0\\0&-1&-2&-5&-1&0&1&0\\0&-2&-5&-10&-1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&3&4&1&0&0&0\\0&1&5&6&2&-1&0&0\\0&0&3&1&1&-1&1&0\\0&0&5&2&3&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&3&4&1&0&0&0\\0&1&5&6&2&-1&0&0\\0&0&1&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\0&0&0&\frac{1}{3}&\frac{4}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{5}{3}&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&3&4&1&0&0&0\\0&1&5&6&2&-1&0&0\\0&0&1&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\0&0&0&1&4&-1&-5&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&3&0&-15&4&20&-12\\0&1&5&0&-22&5&30&-18\\0&0&1&0&-1&0&2&-1\\0&0&0&1&4&-1&-5&3\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&0&0&-12&4&14&-9\\0&1&0&0&-17&5&20&-13\\0&0&1&0&-1&0&2&-1\\0&0&0&1&4&-1&-5&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&22&-6&-26&17\\0&1&0&0&-17&5&20&-13\\0&0&1&0&-1&0&2&-1\\0&0&0&1&4&-1&-5&3\end{array}\right)=(I|A^{-1})$$

$$X=A^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}=(0,1,1,-1).\quad B=A^{-1}\begin{pmatrix}1&&&\\&2&&\\&&3&\\&&&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22&-12&-78&68\\-17&10&60&-52\\-1&0&6&-4\\4&-2&-15&12\end{pmatrix}$$

设n阶方阵A满足$A^2-A-6I=O$，证明:

(1) $(A+I)$可逆;

(2) $(A-3I)$与$(A+2I)$不都可逆.

1) 由知，$(A+I)(A-2I)+2I-6I=0$

$(A+I)\left[\frac{1}{4}(A-2I)\right]=I$. $\therefore A+I$可逆, $(A+I)^{-1}=\frac{1}{4}(A-2I)$

2) 由知. $(A-3I)(A+2I)=0$.

若 $A-3I$可逆. 则$(A+2I)=(A-3I)^{-1}(A-3I)(A+2I)=0$ 不可逆.

同理若 $A+2I$可逆. 则 $(A-3I)=0$ 不可逆.

设$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$，若$B$满足$2BA^2=A^{-1}BA^2+3A$，求$B$.

$$2BA^2-A^{-1}BA^2=3A$$

$$(2I-A^{-1})BA^2=3A$$

$$(2I-A^{-1})B=3AA^{-1}A^{-1}=3A^{-1}$$

$$A(2I-A^{-1})B=3I$$

$$(2A-I)B=3I$$

$$B=3(2A-I)^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}3&-12&30\\0&3&-12\\0&0&3\end{pmatrix}$$

$$2A-I=\begin{pmatrix}1&4&6\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$(2A-I)^{-1}=\begin{pmatrix}1&-4&10\\0&1&-4\\0&0&1\end{pmatrix}$$

设P是一个m阶可逆阵，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是一组$m$维向量，$n \le m$. 证明：若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$无关，则$P\alpha_1,P\alpha_2,\cdots,P\alpha_n$也无关.

反证法：假设$P\alpha_1,\cdots,P\alpha_n$相关.

则∃不全为0的系数$k_1,\cdots,k_n$. s.t.

$$k_1P\alpha_1+\cdots+k_nP\alpha_n=0 .$$

对上式左乘P的逆矩阵P^{-1}，得

$$P^{-1}k_1P\alpha_1+\cdots+P^{-1}k_nP\alpha_n=P^{-1}0$$

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=0 .$$ 则$\alpha_1,\cdots\alpha_n$相关.

与$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$无关矛盾. 所以…….

$E_3(-2)$

对三阶初等矩阵$E_{23}, E_3(-1)$和$E_{12}(3)$,

(1) 分别计算三者的转置矩阵，逆矩阵和99次幂;

(2) 验证(1)中的所有结果仍为三阶初等矩阵.

(1) $E_{23}^T = E_{23}$. $(E_3(-1))^T = E_3(-1)$, $(E_{12}(3))^T = E_{21}(3)$

$E_{23}^{-1} = E_{23}$, $(E_3(-1))^{-1} = E_3(-1)$, $(E_{12}(3))^{-1} = E_{12}(-3)$

$(E_{23})^{99} = E_{23}$, $(E_3(-1))^{99} = E_3(-1)$. $(E_{12}(3))^{99} = E_{12}(3\times 99)$

$(E_3(-2))^T = E_3(-2)$. $(E_3(-2))^{-1} = E_3(-\frac{1}{2})$

$(E_3(-2))^{99} = E_3((-2)^{99})$

(1) 设A为3阶方阵．先将A的第一行乘(3)加到第三行得B；再将B的第二行与第三行交换得到C．已知C是可逆阵．证明：A也为可逆阵．

(2) 设A为3阶方阵．先将A的第一行乘(3)加到第三行得B；再将B的第二列与第三列交换得到单位阵．证明A可逆，并求出A的逆矩阵．

(1) $E_{23}E_{13}(3)A = C$ ， $A^{-1}(E_{13}(3))^{-1}(E_{23})^{-1} = C^{-1}$

$A^{-1} = C^{-1}E_{23}E_{13}(3)$

(2) $E_{13}(3)AE_{23} = C$ $A = (E_{13}(3))^{-1}CE_{23}^{-1}$

$A^{-1} = E_{23}C^{-1}E_{13}(3)$