关系

- 许多情况下集合的元素之间存在某种关系
- 集合的元素之间的关系被表示成一种结构, 这种结构叫做关系
- 关系可以解决一些计算机领域的问题
- 用两个元素构成的有序对表示集合的元素之间的关系. 比如 5>3可表示成<5,3>,<4,2>表示成4>2.
- 有序对的集合称为二元关系

有序对(ordered pair)

- **有序对:**

  $<a,b> = \{ \{a\}, \{a,b\} \}$

  其中, a是第一元素, b是第二元素.

  a,b可以相同也可以不同

- **定理2.1 有序对公理:** $<a,b>=<c,d> \Leftrightarrow a=c \wedge b=d$
- **推论:** $a \neq b \Rightarrow <a,b> \neq <b,a>$

思考: 可以如下定义有序对吗?

$$<a,b>=\{a,\{b\}\}$$

定理2.1的证明--引理1

引理1: $\{x,a\}=\{x,b\} \Leftrightarrow a=b$

证明: $(\Leftarrow)$ 显然.

$(\Rightarrow)$ 分两种情况.

(1) $x=a$. $\{x,a\}=\{x,b\} \Rightarrow \{a,a\}=\{a,b\}$

$\Rightarrow \{a\}=\{a,b\} \Rightarrow a=b$.

(2) $x\neq a$. $a\in\{x,a\}=\{x,b\} \Rightarrow a=b$.

定理2.1的证明--引理2

引理2: 若$A=B\neq\varnothing$, 则

(1) $\cup A=\cup B$

(2) $\cap A=\cap B$

证明: (1) $\forall x,\ x\in\cup A \Leftrightarrow \exists z(z\in A \wedge x\in z)$

$\Leftrightarrow \exists z(z\in \mathrm{B} \wedge x\in z) \Leftrightarrow x\in\cup B.$

(2) $\forall x,\ x\in\cap A \Leftrightarrow \forall z(\ z\in A \rightarrow x\in z\ )$

$\Leftrightarrow \forall z(\ z\in B \rightarrow x\in z\ ) \Leftrightarrow x\in\cap B.$

定理2.1的证明

定理1: $<a,b>=<c,d> \Leftrightarrow a=c \land b=d$

证明: ($\Leftarrow$) 显然.

($\Rightarrow$) 由引理2,

$<a,b>=<c,d> \Leftrightarrow \{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$

$\Rightarrow \bigcup\{\{a\},\{a,b\}\}=\bigcup\{\{c\},\{c,d\}\}$

$\Rightarrow \{a,b\}=\{c,d\}.$ (1)

$\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$

$\Rightarrow \bigcap\{\{a\},\{a,b\}\}=\bigcap\{\{c\},\{c,d\}\} \Rightarrow \{a\}=\{c\}$

$\Leftrightarrow a=c.$ (2)

由(1)(2)及引理1, 得$b=d$.

推论的证明

推论: $a \neq b \Rightarrow \langle a,b\rangle \neq \langle b,a\rangle$

证明: (反证)

$\langle a,b\rangle = \langle b,a\rangle \Leftrightarrow a=b$,

与 $a \neq b$ 矛盾.

有序n元组(ordered triple)

有序$n(\geq 2)$元组:

$<a_1,a_2,\ldots,a_n>=<<a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}>,a_n>$

定理2.2: $<a_1,a_2,\ldots,a_n>=<b_1,b_2,\ldots,b_n>$

$$\Leftrightarrow a_i = b_i,\ i=1,2,\ldots,n.$$

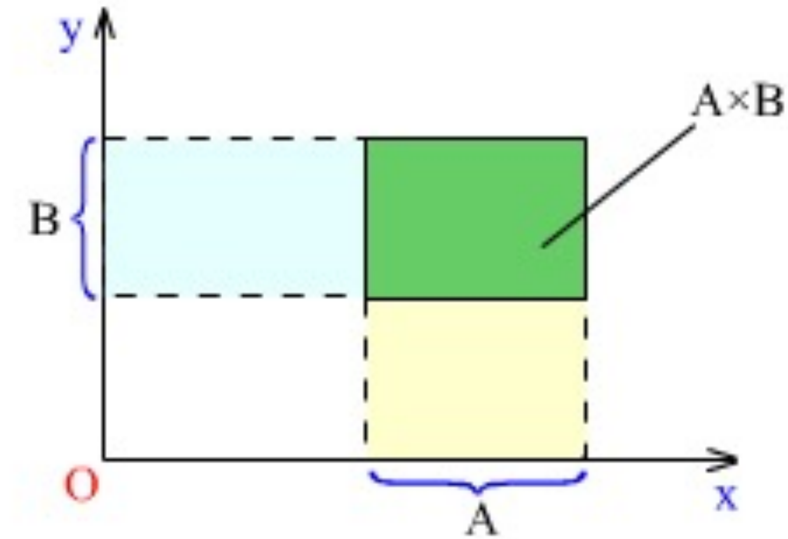
例： $<a,b,c>=<<a,b>,c>$有序3元组

注意： $<a_1,a_2,\ldots,a_n>\neq<a_1,<a_2,\ldots,a_n>>$

卡氏积(Cartesian product)

- **卡氏积:**

  $A \times B=\{<x,y>|x \in A \wedge y \in B\}$.



- **令*A*为某大学所有学生的集合,*B*为该大学所有课程的集合，*A*和*B*的笛卡尔积表示什么？**

求A×B, B×A, A×A, B×B

例: $A=\{\varnothing,a\}$, $B=\{1,2,3\}$.

$A\times B=\{<\varnothing,1>,<\varnothing,2>,<\varnothing,3>,<a,1>,<a,2>,<a,3>\}$.

$B\times A=\{<1,\varnothing>,<1,a>,<2,\varnothing>,<2,a>,<3,\varnothing>,<3,a>\}$.

$A\times A=\{<\varnothing,\varnothing>,<\varnothing,a>,<a,\varnothing>,<a,a>\}$.

$B\times B=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,1>,<2,2>,<2,3>,$

$<3,1>,<3,2>,<3,3>\}$.

卡氏积的性质

(1) $A\times B = B\times A=\varnothing \Leftrightarrow A=\varnothing \lor B=\varnothing$.

(2) 非交换：$A\neq B$, $A\neq \varnothing$,$B\neq\varnothing$ 时, $A\times B\neq B\times A$

(3) 非结合：$A\neq B$, $A\neq \varnothing$,$B\neq\varnothing$ 时, $(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$

(4) 分配律：对于并或交运算

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$

$$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$$

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

$$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$$

思考：$A\cup(B\times C)=(A\cup B)\times(A\cup C)$成立吗？

卡氏积非交换性(反例)

非交换 $A \neq B$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$: $\mathbf{A \times B \neq B \times A}$

反例: $\mathbf{A=\{1\}}$, $\mathbf{B=\{2\}}$.

$\mathbf{A \times B=\{<1,2>\}}$,

$\mathbf{B \times A=\{<2,1>\}}$.

卡氏积非结合性(反例)

非结合 $A \neq B,\ A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$: $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$

反例: $A=B=C=\{1\}$.

$$(A \times B) \times C = \{<<1,1>,1>\},$$

$$A \times (B \times C) = \{<1,<1,1>>\}.$$

卡氏积分配律的证明

$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

证明: $\forall\langle x,y\rangle$,

$\langle x,y\rangle\in A\times(B\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in(B\cup C)\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$

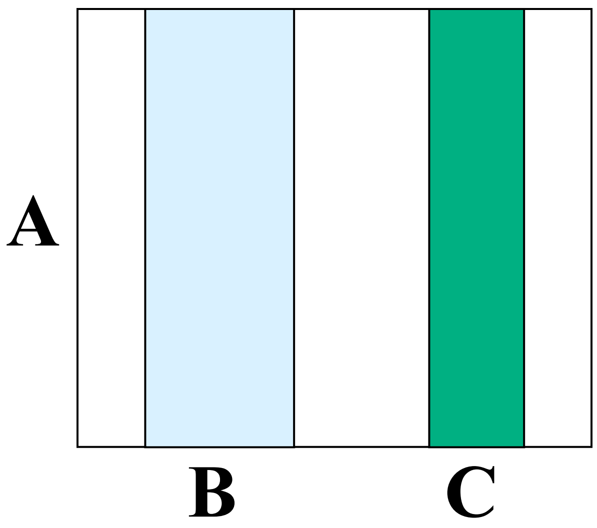
$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow(\langle x,y\rangle\in A\times B)\vee(\langle x,y\rangle\in A\times C)$

$\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in(A\times B)\cup(A\times C)$

$\therefore A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C).$

卡氏积分配律图示



$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

例2.1

例2.1: 设A,B,C,D是任意集合,

(1) 若$A\neq\varnothing$, 则$A\times B\subseteq A\times C \Leftrightarrow B\subseteq C$.

(2) $A\subseteq C \wedge B\subseteq D \Rightarrow A\times B\subseteq C\times D$,并且

当$(A=B=\varnothing)\vee(A\neq\varnothing\wedge B\neq\varnothing)$时,其逆成立

证明: (1) ($\Rightarrow$) 若$B=\varnothing$, 则$B\subseteq C$.

若$B\neq\varnothing$, 由$A\neq\varnothing$得$\exists x$, $x\in A$,

$\forall y$, $y\in B\Rightarrow\langle x,y\rangle\in A\times B \Rightarrow \langle x,y\rangle\in A\times C$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge y\in C \Rightarrow y\in C$.

$\therefore B\subseteq C$

例2.1续

(续): ($\Leftarrow$) 已知$B\subseteq C$.

若$B=\varnothing$,则$A\times B=\varnothing\subseteq A\times C$.

若$B\neq\varnothing$,则$C\neq\varnothing$, 又$A\neq\varnothing$,

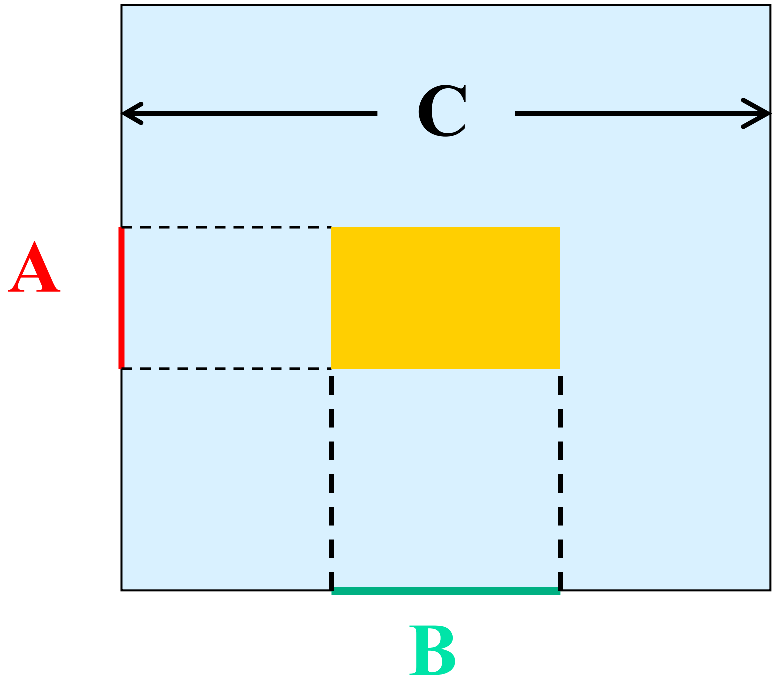
则$A\times B\neq\varnothing$, $A\times C\neq\varnothing$

$\forall\langle x,y\rangle$, $\langle x,y\rangle\in A\times B \Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B$

$\Rightarrow x\in A \wedge y\in C \Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in A\times C$

$\therefore A\times B\subseteq A\times C$.

例2.1的图示



例2.1证明$A\subseteq C \wedge B\subseteq D \Rightarrow A\times B\subseteq C\times D$

证 当$A=\varnothing$或$B=\varnothing$时，$A\times B=\varnothing$，显然成立.

否则，$A\times B\neq\varnothing$，则

$\forall \langle x,y\rangle$，$\langle x,y\rangle\in A\times B$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B$

$\Rightarrow x\in C\wedge y\in D$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in C\times D$.

所以$A\times B\subseteq C\times D$

例2.1 (续)

当$(A=B=\varnothing)\vee(A\neq\varnothing\wedge B\neq\varnothing)$时,

$A\times B\subseteq C\times D \Rightarrow A\subseteq C\wedge B\subseteq D$.

证　当$A=B=\varnothing$时,显然$A\subseteq C\wedge B\subseteq D$

当$A\neq\varnothing\wedge B\neq\varnothing$时,则$A\times B\neq\varnothing$,

又$A\times B\subseteq C\times D$, 则$C\times D\neq\varnothing$.

$\forall x,y,\ \ x\in A\wedge y\in B$

$\Rightarrow<x,y>\in A\times B\Rightarrow<x,y>\in C\times D\Rightarrow x\in C\wedge y\in D$

从而$A\subseteq C\wedge B\subseteq D$

n维卡氏积

- n维卡氏积:

  $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{ <x_1,x_2,\ldots,x_n> \mid$

  $x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \ldots \wedge x_n \in A_n \}$

- $A^n = A \times A \times \ldots \times A$
- $|A_i|=n_i ,i =1,2,\ldots,n \Rightarrow |A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| =\pi_{i=1}^{n} n_i$
- n维卡氏积性质与2维卡氏积类似.

n维卡氏积(性质)

- $A\times B\times C=\varnothing \Leftrightarrow A=\varnothing \vee B=\varnothing \vee C=\varnothing$.
- 非交换: $A\times B\times C\neq B\times C\times A$
  (A,B,C均非空,且互不相等)
- 非结合: (非2元运算)
- 分配律: 例如
  $A\times B\times (C\cup D)=(A\times B\times C)\cup(A\times B\times D)$

作业

- **作业：p53　2, 4, 7，8**