我们比较熟悉关于数的计算公式，例如

$$(a+b)c$$

就是一个关于数的计算公式．如果令$a=1,b=2,c=3$，可以得到算式的结果为

$$(1+2)\times 3=9.$$

设n为正整数．从算式的角度看，接下来我们所要讨论的**n阶方阵的行列式**(简称为n阶行列式)，本质上就是**关于n阶方阵的所有元素的一个计算公式．**例如，我们将会了解到，当$n=2$时，若以$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$代表任意一个2阶方阵，则对应的2阶行列式就是计算公式

$$ad-bc.$$

随着n的增大，n阶行列式的计算公式也变得较为复杂，不容易为初学者所理解．所以与绝大多数课本讲授行列式的方式有所不同，我们不通过计算公式直接定义行列式，而是从三个相对更容易接受的公理出发，将满足这三个公理的方阵的运算定义为行列式，然后一步步推导出行列式的各种性质和计算公式．也就是说，我们以构建公理系统的方式阐明行列式这部分内容．希望这样的讲授顺序能使得初学者更清楚行列式的来龙去脉与内在涵义．

显然，由三个公理定义的行列式满足计算公式；同时容易验证，计算公式定义的行列式也满足三个公理．因此,公理定义的行列式与公式定义的行列式是一致的．

I 公理与性质

1.公理定义

对任意数域F和正整数n，我们将会证明：

存在且只存在一种F上的n阶方阵的运算$|\quad|$：$F^{n\times n}\to F$，满足公理 1，公理 2 与公理 3.

称这种运算为n阶方阵的**行列式**(简称为n阶行列式).

对任意n阶方阵A，记A的行列式为$|A|$．例如，对3阶方阵$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$，其行列式为$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

首先给出公理 1．单位阵I作为矩阵乘法的单位元，自然的应该与数的乘法单位元1对应.

公理 1(单位性质)：单位阵I的行列式是1，也就是

$$|I|=1.$$

以2阶方阵举例，由公理 1 知，

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$$

然后给出公理 2.

公理 2 (对换性质)：若交换方阵的任意两行，则其行列式变号，也就是

$$|E_{ij}A|=-|A|.$$

以2阶方阵举例，由公理 2 知，

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-1.$$

最后给出公理 3.

公理 3 (线性性质)：

3a. (倍乘性质)：第i行倍乘数k后的行列式=数k乘原行列式，也就是

$$|E_i(k)A| = k|A|.$$

以2阶方阵举例,

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

注意，区分方阵的行倍乘和方阵的数乘，举例.

3b. (分解性质)：第i行为向量(α + β)的方阵的行列式=分别以α和β为第i行且其他行不变的两个方阵的行列式的和.

以2阶方阵举例,

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}.$$

需要注意两点:

1. 公理是不加证明直接承认的．但由公理给出的定义是否有意义需要检验.
2. 因为线性性质，行列式成为关于行的线性运算．具体来说，如果固定一个n阶方阵A除第i行外的其他行，而将第i行作为变量，通过A的行列式，就给出一个将第i行向量对应到一个数的映射H．由行列式的线性性质，H是一个线性映射，因为对任意数k和n阶向量α, β，有

$$H(k\alpha) = kH(\alpha),$$
$$H(\alpha+\beta) = H(\alpha) + H(\beta).$$

2．性质

性质 1: 对角阵的行列式(简称对角行列式)为其主对角元的乘积.

证明：由公理 1 与 3a 知，对对角阵$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_{\mathrm{n}} \end{pmatrix}$，有

$$|\mathrm{D}| = \begin{vmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_{\mathrm{n}} \end{vmatrix} = d_1\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_{\mathrm{n}} \end{vmatrix} = d_1 \cdots d_{\mathrm{n}}\begin{vmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{vmatrix} = d_1 \cdots d_{\mathrm{n}}.$$ 举例

性质 2: 若方阵中存在两行相等，则其行列式为0.

证明：设方阵A的i, j行相等,有$E_{ij}A = A$，有$|E_{ij}A| = |A|$．又由公理 2 知，$|E_{ij}A| = -|A|$．所以$|A| = -|A| = 0$.

由倍乘性质和性质 2 可知

推论 2.1 (等比性质): 若方阵中存在两行成比例，则其行列式为0．举例

由分解性质和等比性质可证得初等行倍加变换不改变方阵的行列式.

性质 3 (倍加性质): 将方阵一行的k倍加到另一行上去，方阵的行列式不变，也就是说

$$|E_{ij}(k)A| = |A|.$$

举例: $\begin{vmatrix} a & b \\ c+ka & d+kb \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ ka & kb \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$

已知借助初等行变换的倍加和对换操作进行消元，任意方阵都可化为上阶梯阵．公理 2 与性质 3 说明了方阵作行倍加和行对换后行列式的值会怎样变化．由此，通过初等行变换，任意方阵的行列式都与其对应的上阶梯的行列式联系起来．接下来讨论上阶梯阵的行列式.

首先对含零行的上阶梯阵，有更普遍的结果.

性质 4: 任意方阵若有零行,则其行列式为0. (由分解性质，分解为两个行成比例的行列式)

举例: $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c-c & d-d \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & d \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -c & -d \\ c & d \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0.$

无零行的上阶梯方阵一定为上三角阵且对角元非零. 对一般的上三角阵，有以下结果.

性质 5: 上三角阵的行列式(简称上三角行列式)为其对角元的乘积.

证明：设

$$T = \begin{pmatrix} d_1 & * & \cdots & * \\ & d_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

为任意上三角阵.

若对任意d_i都有$d_i \neq 0$，则T为上阶梯阵. 通过行倍加可从最后一列的主元d_n开始，将T的主元上方的元素消元成0，既将T化为对角阵

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}.$$

由性质 1,

$$|D| = d_1 d_2 \cdots d_n.$$

由倍加性质知,

$$|T| = |D| = d_1 d_2 \cdots d_n.$$

若存在$d_i = 0$，则T可通过行倍加和行对换化为含零行的上阶梯阵U. 由性质 4 知,

$$|U| = 0.$$

因为行倍加不改变行列式，行对换只改变行列式的负号，所以

$$|T| = 0 = d_1 d_2 \cdots d_n.$$

推论 5.1： 设A为m阶方阵，B为n阶方阵，C为$m \times n$矩阵. 则

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A||B|.$$

证明：设A和B(经过行倍加和行对换)分别化为相应的上阶梯阵U_1和U_2，分别需要s次和t次行对换. 则

$$|A| = (-1)^s |U_1|,\ |B| = (-1)^t |U_2|.$$

对方阵$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$作初等行变换，对前$m$行重复$A$的消元过程，对后$n$行重复$B$的消元过程，经过$s+t$次行对换,有

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} U_1 & C' \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}$$

其中$\begin{pmatrix} U_1 & C' \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}$为上三角阵. 由性质 5 知,

$$\begin{vmatrix} U_1 & C' \\ 0 & U_2 \end{vmatrix} = |U_1||U_2|.$$

所以有

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = (-1)^{s+t}\begin{vmatrix} U_1 & C' \\ 0 & U_2 \end{vmatrix} = (-1)^{s+t}|U_1||U_2| = (-1)^s|U_1|(-1)^t|U_2| = |A||B|.$$

3. 运算律

讨论行列式与其他方阵运算的兼容性.

设A, B为任意的n阶方阵，k为任意数

- 与加法：无.

一般情形下，$|A+B| \neq |A|+|B|$，由分解性质很容易举出反例.

- 与数乘:

$$|kA| = k^n|A|.$$

对kA的每一行使用倍乘性质，一共使用n次倍乘性质，得到上式.

- 与乘法:

$$|AB|=|A||B|.$$

引理 6.1(初等矩阵乘A)：

$$|E_{ij}A| = -|A| = |E_{ij}||A|,\ |E_i(c)A| = c|A| = |E_i(c)||A|,\ c \neq 0,\ |E_{ij}(k)A| = |A| = |E_{ij}(k)||A|.$$

引理 6.2：A不可逆=> $\mathrm{r}(A) < n$=>$|A| = 0$.

证明：设A为不可逆方阵，则A不满秩，从而有A通过初等行变换化成的上阶梯方阵U也不满秩，存在零行， 所以有

$$|\mathrm{A}| = |\mathrm{U}| = 0.$$

定理 6: 设A, B为n阶方阵，则$|AB|=|A||B|$. (P58 定理 2.1)

证明： 当A为不可逆阵时．由$\mathrm{r(AB)} \le r(A) < \mathrm{n}$知，AB为不可逆阵，有$|\mathrm{AB}| = 0 = |A||B|$. 当A为可逆阵时，A可以写作一组初等矩阵的乘积$\mathrm{A} = E_k \cdots E_2E_1$，由引理 6.1 知,

$$|AB| = |E_k \cdots E_2E_1B| = |E_k||E_{k-1}\cdots E_2E_1B| = |E_k|\cdots|E_2||E_1||B| = |E_k\cdots E_2E_1||B| = |A||B|.$$

- 与逆矩阵:

推论 6.1: 设A为可逆阵，则

$$|A| \neq 0\text{且}|A^{-1}| = |A|^{-1}.$$

证明：由$A^{-1}A = \mathrm{I}$知,

$$|A^{-1}||A| = |A^{-1}A| = |I| = 1.$$

- 与矩阵的秩:

推论 6.2: 设A为n阶方阵，则

$$\mathrm{r}(A) = n \iff |A| \neq 0.$$

证明:

若$\mathrm{r}(A) = n$，则A为可逆阵，由推论 6.1 知，$|A| \neq 0$.

若$|A| \neq 0$. 假设$\mathrm{r}(A) < n$，由引理 6.2 知，$|A| = 0$，矛盾.

已知$\mathrm{r}(A) = n \iff A$可逆，所以有

推论 6.3: 设A为n阶方阵，则

$$A\text{可逆} \iff |A| \neq 0.$$

- 与转置:

引理 7.1(初等矩阵的转置)：$|E_{ij}^T| = |E_{ij}|$，$|E_i^T(c)| = |E_i(c)|$，$c \neq 0$，$|E_{ij}^T(k)| = |E_{ij}(k)|$.

定理 7: 设A为n阶方阵，则

$$|A^T|=|A|.$$

证明：　对A作初等行倍加和行对换可以对应于对A^T作初等列倍加和列对换．设$E_k \cdots E_2 E_1$为初等阵，U为上阶梯阵，使得

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = U,$$

则有$A^T E_1^T E_2^T \cdots E_k^T = U^T$．注意$U^T$主对角元上方全为 0，可称为下三角阵，类似上三角阵的行列式计算，可验证U^T的行列式为其主对角元的乘积．则有$|U| = |U^T|$，进一步有

$$|E_k \cdots E_2 E_1||A| = |E_k \cdots E_2 E_1 A| = |U| = |U^T| = \left|A^T E_1^T E_2^T \cdots E_k^T\right| = |A^T|\left|E_1^T E_2^T \cdots E_k^T\right|.$$

由引理 7.1 知，$|E_k \cdots E_2 E_1| = \left|E_1^T E_2^T \cdots E_k^T\right| \neq 0$，所以有

$$|A^T| = |A|.$$

注意，由定理 7，行列式的与行相关的性质都可以对应的转化为列的性质，如作列对换，行列式要变号；作列倍加，行列式不变；…… 等等．

II 计算与性质

1. 消元法

由性质 5，上阶梯方阵的行列式为其主对角元的乘积．任意方阵可由行倍加和行对换化为上阶梯阵，其中行倍加不改变行列式的值，行对换改变行列式的符号．因此任意方阵的行列式都可以通过其上阶梯阵的行列式求出，称这种求行列式的方法为消元法．（举例，P12　例 2）

2. 公式法

- 对2阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} = ad - bc.$$

- 对3阶行列式：

仿照2阶的情形，化成每行每列只有一个元素的行列式的和，得到3阶行列式公式如下，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

- 对n阶行列式：

设$(i_1, i_2, \cdots i_n)$为数$1,2,\cdots \mathrm{n}$按任意顺序的一个排列．通过对换，可以将$(i_1, i_2, \cdots i_n)$化为自然排列$(1,2,\cdots \mathrm{n})$．称排列$(i_1, i_2, \cdots i_n)$化为$(1,2,\cdots \mathrm{n})$所需的最少对换次数为此排列的**逆序数**，记为

$$\tau(i_1, i_2, \cdots i_n).$$

例如

$$\tau(1,3,2) = 1;$$

$$\tau(2,3,1) = 2.$$

注意到，3阶行列式公式中每项的值都是不同行不同列的元素的乘积，每项的符号由行标自然排列时列标排列的逆序数决定．当逆序数为偶数，表示对应的行列式通过偶数次列对换可以化成对角行列式，因此符号为正；同理，逆序数为奇数时，符号为负．

对n阶行列式，显然有类似的结论．

设方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

则有n阶行列式的计算公式:

$$|A|=\sum_{(j_1,j_2,\cdots j_n)\in Perm(1,2,\cdots \mathrm{n})}(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

其中$Perm(1,2,\cdots \mathrm{n})$为数$1,2,\cdots \mathrm{n}$的排列全体，共$\mathrm{n}!$个；$\tau(j_1,j_2,\cdots j_n)$为排列$(j_1,j_2,\cdots j_n)$的逆序数．

举例，零多的行列式．

3．代数余子式法

考虑3阶行列式的公式，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{12}(-1)\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

看出3阶行列式与第一行及相应的子式有密切关系．

对n阶方阵$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，考虑其行列式$|A|$，定义以下三个概念:

- 称去掉A的m个行m个列后，剩余部分组成的$(n-\mathrm{m})$阶方阵的行列式为A的**一个$(n-\mathrm{m})$ 阶子式**．举例
- 称去掉A的第i行第j列后剩余部分组成的$(n-1)$阶子式为A的**i,j位置的余子式**，记为

$$M_{ij}(A),$$

或在不引起混乱时,记为M_{ij}． 举例
- 称$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$为A的**i,j位置的代数余子式**．

在下面的讨论中，我们将看到，通过$|A|$与A_{ij}的关系，n阶行列式可以表示为一组$(n-1)$ 阶行列式的和．这样我们就可以将复杂的高阶行列式转化为较简答的低阶行列式．

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(对第1行应用分解性质，分解为n项的和)

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(将第j项的第j列作$j-1$次列对换后移动到第1列，保持其他列顺序不变)

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+(-1)^{j-1}\begin{vmatrix} a_{1j} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2j} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots \qquad +(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2n} & a_{21} & \cdots & a_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn} & a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} \end{vmatrix}$$

(由推论 5.1 和定理 7 知)

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+a_{1j}(-1)^{j-1}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots \qquad +a_{1n}(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} \end{vmatrix}$$

(显然$(-1)^{j-1}=(-1)^{1+j}$，已知$A_{1j}=(-1)^{1+j}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$)

$=a_{11}A_{11}+\cdots+a_{1j}A_{1j}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$.

上式总结为命题 8.

命题 8: 行列式$|A|$为其第1行元素乘对应位置的代数余子式的乘积的和，也就是

$$|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}.$$

称等式$|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$为$|A|$按第1行展开. 由代数余子式的定义知

$$|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}.$$

将命题 8 推广可以得到

定理 9: 行列式$|A|$为其第i行元素乘对应位置的代数余子式的乘积的和，也就是

$$|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}.$$

称等式$|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$为$|A|$按第$i$行展开.

证明:

将A第i行作行对换移动到第1行，保持其他行顺序不变，得B,

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{i-1}\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{i-1}|B|.$$

对B的第1行展开，可知

$$M_{1j}(B)=M_{ij}(A).$$

由推论 8.1,

$$|B|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(-1)^{1+j}M_{1j}(B)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(-1)^{1+j}M_{ij}(A).$$

因此,

$$|A|=(-1)^{i-1}\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(-1)^{1+j}M(A)_{ij}\right]$$

$$=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(-1)^{i-1}(-1)^{1+j}M(A)_{ij}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(-1)^{i+j}M(A)_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}.$$

由定理 7，$|A^T| = |A|$，所以关于行的结果可以推广出列的结果.

定理 9'：行列式$|A|$为其第j列元素乘对应位置的代数余子式的乘积的和，也就是

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$$

称等式$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$为$|A|$按第$j$列展开.

举例，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$，P16 例 6,例 7.

4.伴随矩阵

行列式的某一行(列)乘另一不同行(列)的代数余子式的乘积的和总为零，也就是

定理 10：对n阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

当$k \neq j$时，

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0;$$

当$l \neq j$时，

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{il} = 0.$$

证明：

将A的第i行用A的第k行替换，得到B.

按第k行展开有，

$$|B| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}.$$

由于B中两行相等，有

$$|B| = 0.$$

所以

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0.$$

同理可证列的情形.

受定理 9 和定理 10 的启发，对任意n阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

定义

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

为A的**伴随矩阵**，其中伴随矩阵中的第i行第j列的元素是A的行列式的第j行第i列位置的代数余子式. 举例

不难验证，伴随矩阵A^*与A的乘积具有很好的规律性.

定理 11: $AA^* = |A|I = A^*A$

将求方阵的伴随矩阵看作是方阵的一种运算，$(\quad)^*$，讨论其运算律:

设A为n阶方阵，$n \geq 2$,

- 与加法：无；
- 与数乘:

$$(kA)^* = k^{n-1}A^*;$$

- 与逆:

$$\text{若}A\text{可逆，则}A^* = |A|\ \ A^{-1},\ A^{-1} = |A|^{-1}A^*;$$

- 与乘法:

$$(AB)^* = B^*A^*$$

证明从略. A和B可逆时通过逆与乘法验证，不可逆时证明需要用特征方程的结果.

- 与秩:

$$\mathrm{r}(A^*) = \begin{cases} n, & \text{若 } \mathrm{r(A) = n} \\ 1 & \text{若 } \mathrm{r(A) = n-1} \\ 0 & \text{若 } \mathrm{r(A) < n-1} \end{cases};$$

证明:

(1) 若 $\mathrm{r(A) = n}$，有

$$|A| \neq 0.$$

由$AA^* = |A|I$知,

$$(|A|^{-1}A)A^* = I,$$

所以A^*可逆，有$\mathrm{r}(A^*) = \mathrm{n}$.

(2) 若$\mathrm{r(A) = n-1}$，首先有

$$|A| = 0.$$

由$AA^* = |A|I$知,

$$AA^* = 0,$$

有A^*的列为$AX = 0$的解，则

$$r(A^*) \leq n - r(A) = 1.$$

由$\mathrm{r(A) = n-1}$知，对A至少存在一个$\mathrm{n-1}$阶子式非零，因此

$$A^* \neq 0,$$

有

$$r(A^*) > 0.$$

所以$\mathrm{r}(A^*) = 1$.

(3) 若 $\mathrm{r(A) < n-1}$，则A的任意$\mathrm{n-1}$阶子式都为零，所以

$$A^* = 0,$$

$$\mathrm{r}(A^*) = 0.$$

- 与自身:

$$(A^*)^* = \begin{cases} |A|^{n-2}A, & \text{若 A 可逆;} \\ A & \text{若 } \mathrm{n = 2} \text{ 且 } \mathrm{r(A) = 1}; \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

- 与行列式:

对$AA^* = |A|I$左右两边取行列式得

$$|A^*| = |A|^{n-1}.$$

- 与转置:

$$(A^*)^T = (A^T)^*$$

证明从略. 不可逆时证明需要用特征方程的结果.

作为伴随矩阵的应用, 介绍 Cramer 法则(P23):

对n阶方阵A, 设$|A| \neq 0$. 对方程组

$$AX = b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \text{ 有}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}b = |A|^{-1}A^*b = |A|^{-1}\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n b_i A_{i1} \\ \sum_{i=1}^n b_i A_{i2} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n b_i A_{in} \end{pmatrix}.$$

形式上有解向量的第j个分量x_j, 为$|A|^{-1}$与将b替换A的第j列所得的行列式的乘积.

5. 归纳法与递推法

归纳法: 范德蒙行列式 P17 例 8

递推法: 三对角行列式 P21 例 11