I 向量空间

1. 向量空间(实向量)

设V为一个向量组，也就是一个同维数向量组成的集合.

若对$\forall\alpha,\beta\in V$，有

$$\alpha+\beta\in V,$$

则称V**关于向量加法封闭**;

若对任意数k，$\forall\alpha\in V$，有

$$\mathrm{k}\alpha\in V.$$

则称V**关于向量数乘封闭.**

称V为一个**向量空间**，若V关于向量加法和向量数乘都封闭.

例: (1) n维实向量全体$\mathbf{R}^n$为一个向量空间，称为**n维实向量空间;**

(2) $\{0\}$，**零向量空间**;

(3) 对$\forall \mathrm{k},\forall\alpha\in\mathbf{R}^n$，$\{\mathrm{k}\alpha\}$为一个向量空间;

(4) $AX=0$的全部解向量构成的集合称为$AX=0$的**解向量空间**.

不难看出，任何非零向量空间都有无穷多个向量.

设$\mathrm{V}_1,\mathrm{V}_2$为两个向量空间，称映射

$$\mathrm{T}:\ \mathrm{V}_1\to\mathrm{V}_2$$

为**线性变换**，若T满足以下两条:

对$\forall\alpha,\beta\in\mathrm{V}_1$，$\forall\mathrm{k}\in\mathbf{R}$,

$$T(\alpha+\beta)=T(\alpha)+T(\beta);$$

$$kT(\alpha)=T(k\alpha).$$

例: 投影; 照镜子; 线性方程组$AX=b$.

许多科学问题可以归结为对线性变换的研究. 核心，从线性变换的角度看待线性方程组.

2.基

称向量空间的一个极大无关组为此向量空间的一组**基**.

因为基为极大无关组，所以基中的向量是无关的且可以表示向量空间里的任意向量.

举例来说,

(1) 对n维实向量空间$\mathbf{R}^n$，由于任意n个无关的n维向量都可以构成一个$\mathbf{R}^n$的极大无关组，因此任意n个无关的n维向量构成$\mathbf{R}^n$的一组基，如$\mathbf{R}^n$的自然基;

(2) 任意两个不成比例的2维实向量是$\mathbf{R}^2$的一组基.

通过基来研究线性变换. 要描述清楚线性变换

$$\mathrm{T}:\ \mathrm{V}_1\to\mathrm{V}_2,$$

就是要知道任意V_1中的向量在T作用下的结果. 但非零向量空间都有无穷多个向量，不可能完整的列出每个V_1中的向量在T作用下的结果. 借助基可以很好的解决这个问题. 只需给出要给定V_1的一组基

$$\{v_1,v_2,\cdots,v_n\},$$

然后给出这组基在T作用下的结果

$$\{T(v_1),T(v_2),\cdots,T(v_n)\}.$$

对任意的$v\in\mathrm{V}_1$，设

$$v=k_1v_1+k_2v_2+\cdots+k_nv_n.$$

由线性变换的性质知,

$$T(v) = k_1 T(v_1) + k_2 T(v_2) + \cdots + k_n T(v_n).$$

这样就清楚了每个V_1中的向量在T作用下的结果.

3.坐标

为表示其他向量与基的关系，给出坐标的概念.

首先回忆一个定理.

定理 1: 若向量β可由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性表示且$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$是无关的，则$\beta$由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$唯一线性表示.

定理中的唯一性由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$的无关性得到，其根本原因是因为对0向量的表示只有系数全为0一种.

设V为一个向量空间，$\mathbf{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$为V的一组基．对任意$\beta \in V$，由定理 1 知，存在唯一一组系数$k_1, k_2, \cdots, k_n$使得

$$\beta = \ k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_n \alpha_n = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)(k_1, k_2, \cdots, k_n)^T.$$

称

$$(k_1, k_2, \cdots, k_n)$$

为β关于基$\mathbf{B}$的**坐标**，记为

$$\beta_{\mathbf{B}} = (k_1, k_2, \cdots, k_n).$$

举例来说，对n维实向量空间$\mathbf{R}^n$，若有

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbf{R}^n,$$

则$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$就是n维向量α关于$\mathbf{R}^n$自然基下的坐标.

注意:

(1) 同一个向量在不同基下有不同的坐标(P159 例 1);

(2) 用坐标表示向量时需指明是哪一组基下的坐标，若未指明，默认是自然基下的坐标.

4. 过渡矩阵

为了表示清楚基与基的联系，给出过渡矩阵的概念.

设$\mathbf{B_1} = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$与$\mathbf{B_2} = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$为$\mathbf{R}^n$的两组基．将$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$用$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$表示，则存在系数$a_{ij}$，使得

$$\beta_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, \alpha_i,\ \ j = 1,2, \cdots n.$$

设矩阵$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，有

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A.$$

称A为旧基$\mathbf{B_1}$到新基$\mathbf{B_2}$的**过渡矩阵**. (P163 例 3)

定理 2: 过渡矩阵A可逆.

证明:

由$\mathrm{r}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \mathrm{r}(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = n$知,

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)与(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)可逆.$$

由$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A$知，$A$可写作的可逆阵乘积，所以$A$可逆.

接下来给出一个向量在一组基下的坐标到另一组基下的坐标的**坐标变换**. (P163 例 3)

设$\gamma_{\mathbf{B_1}} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$\gamma_{\mathbf{B_2}} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$，则

$$\gamma = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\ (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)(b_1, b_2, \cdots, b_n)^T.$$

由$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A$知,

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\ (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A(b_1, b_2, \cdots, b_n)^T.$$

由$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$可逆知,

$$A(b_1, b_2, \cdots, b_n)^T = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T,$$

从而有

$$(b_1, b_2, \cdots, b_n)^T = A^{-1}(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T.$$

II 标准正交基

1. 向量内积

对两个向量$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$, 定义

$$(\alpha, \beta) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

为α与β的**内积**.

内积的定义对行列向量都适用, 但若设α, β为列向量, 则有$(\alpha, \beta) = \alpha^T\beta$, 因此内积可以看作是矩阵乘法的特殊情形.

因为平方项的和为零等价于每一项都为零, 由内积的定义有

命题 1: $(\alpha, \alpha) = 0$等价于$\alpha = 0$.

由此可以证明,

命题 2:

$$r(A) = r(A^TA).$$

证明:

若$AX = 0$, 则

$$A^TAX = 0.$$

若$A^TAX = 0$, 有

$$X^TA^TAX = (AX)^TAX = (AX, AX) = 0,$$

则

$$AX = 0.$$

因此$AX = 0$等价于$A^TAX = 0$, 即$AX = 0$与$A^TAX = 0$同解, 两者的基础解系也一致. 设$AX = 0$的基础解系向量数为s_1, $A^TAX = 0$的基础解系向量数为s_2, 则有

$$n = s_1 + r(A) = s_2 + r(A^TA),\ 且 s_1 = s_2.$$

所以

$$r(A) = r(A^TA).$$

内积的运算律与性质:

设$\alpha, \beta \in \mathbf{R}^n$,

- 与自身: 交换, $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$;
- 与加法: 分配, $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$;
- 与数乘: $(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta) = (\alpha, k\beta)$;
- $(\alpha, \alpha) \geq 0$且等号成立等价于$\alpha = 0$;
- 定义向量的**长度**为

$$|\alpha| = \sqrt{(\alpha, \alpha)},\quad \text{(P166 定义 4.4)}$$

则有

  - $|k\alpha| = |k||\alpha|$;

■ $|\alpha+\beta| \le |\alpha| + |\beta|$;

- Cauchy-Schwarz 不等式(P166 定理 4.3):

$$|(\alpha, \beta)| \le |\alpha||\beta|.$$

- 定义向量的**角度**(P166 定义 4.5)为

$$\langle\alpha, \beta\rangle = \arccos\frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha||\beta|}.$$

在二维和三维空间中，由$(\alpha, \beta) = |\alpha||\beta|\cos\langle\alpha, \beta\rangle$知，$\alpha$在$\beta$上的投影为

$$|\alpha|\cos\langle\alpha, \beta\rangle = \frac{(\alpha, \beta)}{|\beta|}.$$

因此在n维空间中，也自然的称

$$|\alpha|\cos\langle\alpha, \beta\rangle = \frac{(\alpha, \beta)}{|\beta|}$$

为α在β上的投影.

定理 3: 对非零向量$\alpha, \beta \in \mathbf{R}^n$，有

$$\langle\alpha, \beta\rangle = \frac{\pi}{2} \quad <=> \quad (\alpha, \beta) = 0.$$

对$\alpha, \beta \in \mathbf{R}^n$，若

$$(\alpha, \beta) = 0,$$

则称向量α与β是**正交**的.

2. 标准正交基

对$\alpha, \beta \in \mathbf{R}^n$，若

$$(\alpha, \beta) = 0,$$

则称向量α与β是**正交**的. 若向量空间中的一组向量满足各个向量长度为1且两两正交，则称这组向量为**标准正交的.**

定理 4: 向量空间中两两正交且不含零向量的向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$是无关的. (P168 定理 4.5)

推论 4.1: 标准正交向量组是无关的.

由此可以定义标准正交基. 若向量空间中的一组基是标准正交的，则称这组基为此向量空间的一组**标准正交基**.

首先考虑对标准正交基的刻画. 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbf{R}^n$满足

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \ne j \end{cases}, \mathrm{i}, \mathrm{j} = 1,2, \cdots \mathrm{n} \tag{1}$$

由$(\alpha_i, \alpha_i) = 1$知，α_i的长度为1；由$i \ne j$时$(\alpha_i, \alpha_j) = 0$知，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$两两正交. 这组向量是标准正交的. 由定理 4 知，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$是无关的，则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$为$\mathbf{R}^n$的一组基. 因此，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$为$\mathbf{R}^n$的一组标准正交基. 反过来，容易验证，任意一组标准正交基都满足(1)式.

然后考虑如何给出$\mathbf{R}^n$**中**的任意一个向量在$\mathbf{R}^n$的标准正交基下的坐标. P169 例 1

3. 标准正交化(施密特正交化方法)

施密特正交化方法是将向量空间中的一组无关向量转化为一组标准正交向量组的方法，分成两大步. 以三个向量组成的无关组为例

- 正交化:

对无关组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$，令

$$\beta_1 = \alpha_1, \qquad \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2 , \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1, \qquad \beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3 , \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3 , \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2.$$

其中β_2可看作是取α_2减去α_2在β_1上的投影后剩下的部分，β_3可看作是取α_3减去α_3在β_1上的投影及α_3在β_2上的投影后剩下的部分.

标准化：令

$$\gamma_i = \frac{\beta_i}{|\beta_i|},$$

若$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbf{R}^3$，则 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$为标准正交基. (P172，例 2)

4. 正交阵

对方阵A，若

$$A^T A = I,$$

则称A为**正交阵.**

例如

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

为正交阵，因为

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

由定义可以直接验证，

命题 5: A为正交阵 <=> 列向量组为标准正交基 <=> 行向量组为标准正交基. (P173 定理 4.6)

命题 6: 若A为正交阵，则A可逆且

$$A^{-1} = A^T.$$

对正交阵，其逆，转置和乘积仍为正交阵.

命题 7: 若A, B为正交阵，则$A^{-1} = A^T$与AB都为正交阵.