数理逻辑

EXERCISE 1(习题1)

- 下列句子中，哪些是命题?在是命题的句子中，哪些是简单命题?哪些是真命题?哪些命题的真值现在还不知道?

  (1) 中国有四大发明。

  (2) $\sqrt{5}$是无理数.

  (3) 3 是素数或 4 是素数.

  (4) 2x+3<5,其中 x 是任意实数.

  (5) 你去图书馆吗?

  (6) 2与3是偶数.

  (7) 刘红与魏新是同学.

  (8) 这朵玫瑰花多美丽呀!

  (9) 吸烟请到吸烟室去!

  (10) 圆的面积等于半径的平方乘以p.

  (11) 只有 6 是偶数，3 才能是 2 的倍数.

  (12) 8 是偶数的充分必要条件是 8 能被 3 整除.

  (13) 2025 年元旦下大雪.

  答:

命题有：(1)(2)(3)(6)(7)(10)(11)(12)(13)

简单命题有：(1)(2)(7)(10)(13)

真命题有:(1)(2)(3)(10)(11)

命题真值不确定的有：(13)

- 将下列命题符号化

(1) 只要 2<1，就有3<2.

(2) 如果 2<1，则 3≥2.

(3) 只有 2<1，才有 3≥2.

(4) 除非 2<1，才有 3≥2.

(5) 除非 2<1，否则 3<2.

(6) 2<1 仅当 3<2.

答:

令 $p:2<1$，$q:3<2$,

$(1)p\to q;(2)p\to\neg q;(3)\neg q\to p;(4)\neg q\to p;(5)\neg q\to p;(6)p\to q;$

- 将下列命题符号化

(8)如果天下大雨，他就乘班车上班;

答:p→q，其中 p:天下大雨，q: 他乘班车上班.

(9)只有天下大雨，他才乘班车上班;

答:q→p，其中 p:天下大雨，q: 他乘班车上班.

(10)除非天下大雨，否则他不乘班车上班;

答:q→p 或者¬p→¬q，其中 p:天下大雨，q: 他乘班车上班.

(11)下雪路滑，他迟到了;

答:(p∧q)→r,其中 p:下雪，q:路滑，r:他迟到了.

(12)2 与 4 都是素数，这是不对的;

答:¬(p∨q)，其中 p:2 是素数，q:4 是素数.

- 求下列公式的成假赋值.

$(1)\neg(\neg p \wedge q) \vee \neg r$
$(2)(\neg q \vee r) \wedge (p \to q)$
$(3)(p \to q) \wedge (\neg(p \wedge r) \vee p)$

答:

(1) 0 1 1

(2) 1 0 0 ; 0 1 0; 1 1 0; 1 0 1

(3) 1 0 0 ; 1 0 1

EXERCISE 3(习题4)

- 0 元谓词符号化：小王学习过英语和法语。

  解：设 F(x):x 学习过英语, G(x):x 学习过法语.a:小王.
  0 元谓词符号为: $F(a) \wedge G(a)$

- 在一阶逻辑中，分别在(a),(b)时将下面命题符号化，并讨论各命题的真值.

  (1) 凡整数都能被 2 整除。
  (2) 有的整数能被 2 整除。

  (a)个体域为整数集合。
  (b)个体域为实数集合。

  解：设F(x): x是整数, G(x): x能被2整除。

  (a) (1)$\forall x G(x)$, 真值为 0,
  (2)$\exists x G(x)$, 真值为 1.
  (b) (1)$\forall x(F(x) \to G(x))$, 真值为 0,
  (2)$\exists x(F(x) \wedge G(x))$，真值为 1.

- 在一阶逻辑中将下列命题符号化:
  (1)没有不能表示成分数的有理数。
  (2)在北京卖菜的人不全是外地人。
  (3)乌鸦都是黑色的。
  (4)有的人天天锻炼身体。

  解:

(1)$F(x)$: x是有理数,$G(x)$: x能表示成分数.

$\neg\exists x(F(x) \wedge \neg G(x))\ or\ \forall x(F(x) \rightarrow G(x))$

(2)$F(x)$: x是在北京卖菜的人,$G(x)$: x是外地人.

$\neg\forall x(F(x) \rightarrow G(x))\ or\ \exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$

(3)$F(x)$: x是乌鸦,$G(x)$: x是黑的.

$\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$

(4)$F(x)$: x人,$G(x)$: x天天锻炼身体.

$\exists x(F(x) \wedge G(x))$

- 在一阶逻辑中将下列命题符号化.

  (1)所有的火车都比轮船跑得快。

  (2)有的火车比有的汽车快。

  (3)不存在比所有火车都快的汽车。

  (4)说凡是汽车就比火车慢是不对的。

  解:

  F(x):x 是火车,G(x):x 是轮船,L(x,y):x 比 y 跑得快，H(x):x 是汽车.R(x,y):x 比 y 慢.

  (1) $\forall x(F(x)\rightarrow\forall y(G(y)\rightarrow L(x,y)))$ or $\forall x\forall y((F(x)\wedge G(y))\rightarrow L(x,y))$

  (2) $\exists x(F(x)\wedge\exists y(H(x)\wedge L(x,y)))$ or $\exists x\exists y(F(x)\wedge H(x)\wedge L(x,y))$

  (3) $\neg\exists x(H(x)\wedge\forall y(F(x)\rightarrow L(x,y))$ or $\forall x(H(x)\rightarrow \neg\forall y(F(y)\rightarrow L(x,y)))$ or

  $\forall x(H(x)\rightarrow \exists y(F(y)\wedge\neg L(x,y)))$

  (4) $\neg(\forall x\forall y((H(x)\wedge F(y))\rightarrow R(x,y))$ or $\neg(\forall x\,(H(x)\rightarrow\forall y\,(F(y)\rightarrow R(x,y)))$

  or $\exists x\exists y(H(x)\wedge F(y)\wedge\neg R(x,y))$

- ⭐ Note：记住$\forall$对应$\rightarrow$, $\exists$对应$\wedge$

- 将公式翻译成自然语言,并判断各命题的真假,其中个体域为整数集 Z : $\exists x\forall y\forall z(x+y=z)$

  解：存在整数 x,对于所有 y,z,都有 x+y=z.假命题.

EXERCISE 4(习题)

- 给定解释 I 和 I 下的赋值s如下:

  (a) 个体域为实数集合R.

  (b) 特定元素$\overline{a} = 0$.

  (c) 函数$\overline{f}(x, y) = x - y, x, y \in R$

  (d) 谓词$\overline{F}(x, y) : x = y, \overline{G}(x, y) : x < y, x, y \in R$.

  (e) $\sigma(x) = 1, \sigma(y) = -1$.

  给出下列各式在I和σ下的解释,并讨论他们的真值.

  （2）$\forall y(\mathrm{F}(f(x,y),a) \to \forall x\mathrm{G}(x,y))$

  答：$\forall y((1\text{-}y)=0 \to \forall x(x<y))$,真值为 0.

  （3）$\exists x\mathrm{G}(x,y) \to \forall y\mathrm{F}(f(x,y),\mathrm{a})$

  答：$\exists x(x<-1) \to \forall y(1\text{-}y=0)$.真值为 0.

  （4）$\forall y\mathrm{G}(f(x,y),\mathrm{a}) \to \exists x\mathrm{F}(x,y)$.

  答：$\forall y(1\text{-}y<0) \to \exists x(x=-1)$.真值为 1.

  错误之处：只有自由出现时，才能将$\sigma(x)=1$, $\sigma(y)=-1$ 代入。

- 求下列各式的前束范式.

  (1) $\forall x F(x) \to \forall y G(x, y)$

  (2) $\forall x(F(x, y) \to \exists y G(x, y, z))$

  (5) $\exists x_1 F(x_1, x_2) \to (F(x_1) \to \neg x_2 G(x_1, x_2))$

  解:

  (1) $\forall x F(x) \to \forall y G(x, y) \Leftrightarrow \forall z F(z) \to \forall y G(x, y) \Leftrightarrow \exists z \forall y(F(z) \to G(x, y))$

  (2)

  $\forall x(F(x, y) \to \exists y G(x, y, z)) \Leftrightarrow \forall x(F(x, y) \to \exists u G(x, u, z)) \Leftrightarrow \forall x \exists u(F(x, y) \to G(x, u, z))$

  (5)

$$
\begin{gathered}
\exists x_1 F(x_1, x_2) \to (F(x_1) \to \neg \exists x_2 G(x_1, x_2)) \Leftrightarrow \\
\exists y_1 F(y_1, x_2) \to (F(x_1) \to \neg \exists y_2 G(x_1, y_2)) \Leftrightarrow \\
\exists y_1 F(y_1, x_2) \to (F(x_1) \to \forall y_2 \neg G(x_1, x_2)) \Leftrightarrow \\
\forall y_1 \forall y_2 (F(y_1, x_2) \to (F(x_1) \to \neg G(x_1, y_2)))
\end{gathered}
$$