一、填空题

1. $9,9,\frac{8}{3}$　　2. 0　　3. $1$或$-2$　　4. $-3$　5. $x=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-2\end{pmatrix}$

二、选择题

DDABCC

三、计算题

1. $\begin{vmatrix}-a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\end{vmatrix}$ = $\begin{vmatrix}0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n\\ n+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\end{vmatrix}$ ( 后 n 列 加 到 第 一 列 )=

$$(-1)^{n+2}(n+1)\prod_{i=1}^{n}a_i=(-1)^n(n+1)\prod_{i=1}^{n}a_i$$

2. 解：$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=4$，根据 $A^*X=A^{-1}+2X$，两边左乘 A，得

$$AA^*X=AA^{-1}+2AX;$$

$$|A|X=I+2AX;$$

$$(4I-2A)X=I;$$

$$X=(4I-2A)^{-1}$$

$$4I-2A=\begin{bmatrix}2 & -2 & 2\\ 2 & 2 & -2\\ -2 & 2 & 2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

其中，$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$;

所以，$X=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$.

3. 解 (i) 设 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A$.

把两组基向量代入上式，得

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}A;$$

过度矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -2\end{pmatrix}$$

(ii) 根据定理 4.2，得$\alpha$在基$B_2$下的坐标

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}1\\ -2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2 & -1\\ -1 & -3 & -2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 7\\ -4\end{pmatrix}.$$

4. 解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -3 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 7 & 7 & 3 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -5 & -5 & -3 & -1\\ 0 & 7 & 7 & 3 & -1\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

所以，向量组的秩为3； $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为一个极大线性无关组；$\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_5=-\alpha_2+2\alpha_4$.

四．证：(1) 设$A$的特征值为$\lambda$，根据 $4A^2-I=O$得

$4\lambda^2-1=0$，从而有 $(2\lambda+1)(2\lambda-1)=0$

所以 $\lambda=-\frac{1}{2}$或$\lambda=\frac{1}{2}$.

(2) 根据$4A^2-I=O$，得

$(2A+I)(2A-I)=O$，从而有

$$n=r(2I)=r[2A+I-(2A-I)]\le r(2A+I)+r(2A-I)\le n$$

五．解：

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1+\lambda & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda\\ 0 & -\lambda & -\lambda^2-2\lambda & -\lambda(\lambda+1)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+3) & (\lambda+3)(\lambda-1)\end{pmatrix}$$

1) $\lambda\ne 0$且$\lambda\ne -3$ 时有唯一解；
2) $\lambda=0$时无解；
3) $\lambda=-3$时有无穷解。

当$\lambda=-3$时，$(A,b)\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & -3\\ 0 & -3 & 3 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

所以通解为$(x_1,x_2,x_3)^T=(-1,-2,0)^T+k(1,1,1)^T$，其中$k$为任意常数。

六．

解：二次型矩阵$A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\ 1 & 5 & -2\\ 2 & -2 & c\end{pmatrix}$，　因为$r(A)=2$,所以$|A|=0$，得$c=2$.

由$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-5 & -1 & -2\\ -1 & \lambda-5 & 2\\ -2 & 2 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-6)^2\lambda=0$得 $\lambda_1=6$(二重根)，　$\lambda_2=0$(单根)

解齐次线性方程组$(6I-A)x=0$,得基础解系 $\xi_1=(1,1,0)^T,\xi_2=(2,0,1)^T$,

施密特正交化得 $\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T,\eta_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T$.

解齐次线性方程组$(0I-A)x=0$得基础解系 $\xi_3=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)^T$，单位化得$\eta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T$,

取正交矩阵$Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，令$x=Qy$，得标准型：

$f(y_1,y_2,y_3)=6{y_1}^2+6{y_2}^2$.