一、填空题

1. 若向量$\alpha=(3,2,1)^T,\beta=(4,1,2)^T,\gamma=(-1,-2,1)^T$，则$2\alpha-\beta+\gamma=$________。

2. 若n阶方阵A满足$A^2+2A+3I=O$，则$(A+3I)^{-1}=$________。

3. 已知$\alpha_1=(1,2,1,2)^T,\alpha_2=(1,1,3,3)^T$是四元非齐次线性方程组$Ax=b$的两个解，且系数矩阵的秩$r(A)=3$，则方程组$Ax=b$的一般解$\xi=$________。

4. 设A,B均为n阶方阵，$|A|=3,|B|=2,|A^{-1}+B|=1$，则$|A+B^{-1}|=$________。

5. 设3阶方阵$A=(a_{ij})_{3\times3}$，且伴随矩阵$A^*=A^T$，若$2a_{11}=a_{12}=a_{13}>0$，则$a_{11}=$________。

6. 设3阶方阵$A=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\0&2&0\\-1&-2&0\end{pmatrix}$，方阵$B$与$A$相似，则$|B-3I|=$________。

二、选择题

1. 设$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&-3\\3&4&a\end{pmatrix}$，若$Ax=0$有非零解，则$a=$（ ）

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

2. 已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，向量$\beta_1$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，向量$\beta_2$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，则对于任意常数$k$必有（ ）

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$ 线性无关　(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$线性相关

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$线性无关　(D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$线性相关

3. 设A为3阶方阵，B为2阶方阵，C为3×2矩阵，且$|A|=3,|B|=2$，则$\begin{vmatrix}O&B\\A&C\end{vmatrix}=$（ ）

(A) 3　(B) 2　(C) 6　(D) -6

4. 设A为3阶方阵，将A的第一列加到第三列得B，再将B的第三行的-1倍加到第一行得C，记$P=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则一定有（ ）

(A) $A=PCP^T$　(B) $A=PCP^{-1}$　(C) $A=PCP$　(D) $A=P^{-1}CP$

5. 记$r(M)$表示矩阵M的秩，$r(M_1,M_2)$表示分块矩阵(M_1,M_2)的秩。则对任意n阶方阵A,B，下列一定成立的是（　）

(A) $r(A,AB)=r(A)$　　(B) $r(A,BA)=r(A)$

(C) $r(A,B)=\begin{cases} r(A),若r(A)\ge r(B) \\ r(B),若r(A)<r(B) \end{cases}$　　(D) $r(A,B)=r(A^T,B^T)$

6. 设A为3阶方阵，已知存在可逆矩阵P，使得$PAP^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，则下列对角阵中与$A$相似的是（　）

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

三、计算题

1. 计算下列$n+1$阶行列式的值，其中$a_0,a_1,\cdots,a_n$均不为0。

$$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

2. 已知矩阵B满足$2BA^2=A^*BA^2+3A,$，其中$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$A^*$为$A$的伴随矩阵，求矩阵$B$。

3. 设向量组

$\alpha_1=(1,-1,1)^T,\alpha_2=(-1,2,0)^T,\alpha_3=(1,2,4)^T,\alpha_4=(-1,1,1)^T$，

求此向量组的秩及其一个极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组线性表出。

4. 已知$B_1=\{\alpha_1,\alpha_2\}$，$B_2=\{\beta_1,\beta_2\}$是$R^2$中的两组基，其中

$\alpha_1=(1,1)^T,\alpha_2=(1,-1)^T$；$\beta_1=(3,-1)^T,\beta_2=(5,-1)^T$

(1) 求基B_1到基B_2的过渡矩阵；

(2) 若R^2中的向量γ在基B_1下的坐标为$(3,4)^T$，求γ在基B_2下的坐标。

四、证明题

设α_1,α_2是3阶方阵A分别对应于特征值$-2,1$的特征向量，向量α_3满足$A\alpha_3=2\alpha_2+\alpha_3$，证明：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关。

五、解方程组

讨论a,b取何值时，以下非齐次线性方程组无解、有无穷多解、有唯一解，并且在有无穷多解时求出它的一般解。

$$\begin{cases} x_1+x_2-4x_3+x_4=6 \\ x_1+4x_3-x_4=-1 \\ 2x_1+x_2+(a-1)x_3+(b-3)x_4=b+6 \\ -2x_1-x_2+(b-2)x_4=b-2 \end{cases}$$

六、二次型

已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$的秩为$1$，

(1)求c的值；

(2)利用正交变换法，将二次型$f(x_1,x_2,x_3)$化为标准型，并写出相应的正交矩阵；

(3)写出其规范型。