一、填空题

1. $-(\boldsymbol{ad}-\boldsymbol{bc})^2$　2. -1　3. 3　4. $a_1+a_2+a_3+a_4=0$　5. $\boldsymbol{z}_1^2-\boldsymbol{z}_2^2-\boldsymbol{z}_3^2$　6. 21

二、选择题

1-6. CDDCCA

下列两题为多选题

7. ABCE　8. ABCE

三、计算题

1. a^n-a^{n-2}　2. $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})^{-1}=-\dfrac{1}{4}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})$.

3. $$\begin{pmatrix}1&2&4&3&4\\0&1&1&1&1\\1&-3&-1&0&3\\0&7&7&3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&4&3&4\\0&1&1&1&1\\0&-5&-5&-3&-1\\0&7&7&3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&4&3&4\\0&1&1&1&1\\0&0&0&2&4\\0&0&0&-4&-8\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&4&3&4\\0&1&1&1&1\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&4&0&-2\\0&1&1&0&-1\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&0&0\\0&1&1&0&-1\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

一个极大线性无关组：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$；向量组的秩：3

$\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2;\alpha_5=-\alpha_2+2\alpha_4$

4. 设从基$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$到基$\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3$的过渡矩阵为$A$，则它满足：

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&1\\1&1&0&0&1&2\\1&1&1&1&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&1\\0&1&0&-1&1&1\\0&1&1&0&-1&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&1\\0&1&0&-1&1&1\\0&0&1&1&-2&-2\end{array}\right)$$

$$\therefore A=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\1&-2&-2\end{pmatrix}$$

$\gamma=\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3=(1,-1,-2)^T$

设γ在β_1,β_2,β_3下的坐标为$(x_1,x_2,x_3)^T$，则$\gamma=x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3$，代入，解方程组得

$x_1=5, x_2=7, x_3=-4$，所以γ在β_1,β_2,β_3下的坐标为$(5,7,-4)^T$

四、证明题

设$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{\boldsymbol{p}}$是齐次线性方程组$Ax=0$的一个基础解系，向量$\beta$满足$A\beta\neq 0$，证明：向量组$\beta,\xi_1+\beta,\xi_2+\beta,\ldots,\xi_{\boldsymbol{p}}+\beta$线性无关。

证明：设$\boldsymbol{l}\beta+\boldsymbol{l}_1(\xi_1+\beta)+\boldsymbol{l}_2(\xi_2+\beta)+\cdots+\boldsymbol{l}_{\boldsymbol{p}}(\xi_{\boldsymbol{p}}+\beta)=0$，

即$(\boldsymbol{l}+\boldsymbol{l}_1+\cdots+\boldsymbol{l}_{\boldsymbol{p}})\beta+\boldsymbol{l}_1\xi_1+\boldsymbol{l}_2\xi_2+\cdots+\boldsymbol{l}_{\boldsymbol{p}}\xi_{\boldsymbol{p}}=0$----------------------（1）

等号左右两边前面同乘A得：$(\boldsymbol{l}+\boldsymbol{l}_1+\cdots+\boldsymbol{l}_{\boldsymbol{p}})\boldsymbol{A}\beta+\boldsymbol{l}_1\boldsymbol{A}\xi_1+\boldsymbol{l}_2\boldsymbol{A}\xi_2+\cdots+\boldsymbol{l}_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{A}\xi_{\boldsymbol{p}}=0$

$\because \xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{\boldsymbol{p}}$是齐次线性方程组$Ax=0$的一个基础解系

$\therefore \boldsymbol{A}\xi_1=0,\boldsymbol{A}\xi_2=0,\ldots,\boldsymbol{A}\xi_{\boldsymbol{p}}=0$

于是，$(\boldsymbol{l}+\boldsymbol{l}_1+\cdots+\boldsymbol{l}_{\boldsymbol{p}})\boldsymbol{A}\beta=0 \quad \because \boldsymbol{A}\beta\neq 0 \therefore \boldsymbol{l}+\boldsymbol{l}_1+\cdots+\boldsymbol{l}_{\boldsymbol{p}}=0$--------（2）

代入（1）式得：$\boldsymbol{l}_1\xi_1+\boldsymbol{l}_2\xi_2+\cdots+\boldsymbol{l}_{\boldsymbol{p}}\xi_{\boldsymbol{p}}=0$

$\because \xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{\boldsymbol{p}}$是齐次线性方程组$Ax=0$的一个基础解系$\therefore \xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{\boldsymbol{p}}$线性无关

$\therefore \boldsymbol{l}_1=0,\boldsymbol{l}_2=0,\ldots,\boldsymbol{l}_{\boldsymbol{p}}=0$代入（2）式得：$\boldsymbol{l}=0$

综上可证：向量组$\beta,\xi_1+\beta,\xi_2+\beta,\ldots,\xi_{\boldsymbol{p}}+\beta$线性无关。

五、解方程组

已知方程组$\begin{cases} 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1 \end{cases}$其系数矩阵的秩为 2，

求：

(1) a,b的值；

(2) 这个方程组的一个基础解系及其一般解。

解：(1) $\because r(A)=2, A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 3 & b \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 \\ a & 1 & 3 & b \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 1-a & 3-a & b-a \end{pmatrix}$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & -5\\ 0 & 0 & 4-2a & 4a-5+b\end{pmatrix}$$

$\therefore 4-2a=0, 4a-5+b=0 \therefore a=2, b=-3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}4 & 3 & 5 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 3 & -3 & 1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1 & -5 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -2 & -4 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right),$$

特解 $\xi_0=\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$，一个基础解系：$\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \xi_2=\begin{pmatrix}4\\ -5\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，

方程组的一般解：$\xi=\xi_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2=\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}4\\ -5\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，其中 k_1, k_2 为任意常数。

六、化二次型为标准型

已知实二次型 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)=(1-\boldsymbol{a})\boldsymbol{x}_1{}^2+(1-\boldsymbol{a})\boldsymbol{x}_2{}^2+2\boldsymbol{x}_3^2+2(1+\boldsymbol{a})\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2$ 的秩为 2.

(1). 求 $\boldsymbol{a}$ 的值；(2). 利用正交变换法将二次型变成标准型，并写出相应的正交矩阵.

解：（1）设二次型对应的矩阵为 A

$$\because A=\begin{pmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -2a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}, r(A)=2$$

$\therefore a=0$

（2）$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 0\\ -1 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2\lambda=0$$

$\therefore \lambda_1=2$（二重根）$\lambda_2=0$（单根）

$(2I-A)x=0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \therefore \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{施密特正交化得：} \xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(0I - A)x = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \therefore \xi_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{单位化得：} \eta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

可取正交矩阵 $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，令 $x = Qy$ 得标准型：$2y_1^2 + 2y_2^2$