一阶逻辑

4.1 一阶逻辑命题符号化

4.2 一阶逻辑合式公式及解释

5.1 一阶逻辑等值式与置换规则

5.2 一阶逻辑前束范式

5.3 一阶逻辑的推理理论

引言

- 命题逻辑主要研究命题和命题演算，其基本组成单位是原子命题，并把它看作不可再分解的。
- 命题逻辑存在局限性

  命题逻辑只考虑命题之间的真值关系，不考虑命题的内在联系和数量关系，因而有一些简单的推理无法判断.

例如 苏格拉底三段论:

“所有人都是要死的,苏格拉底是人,所以苏格拉底是要死的.”

p:所有人都是要死的, q:苏格拉底是人, r:苏格拉底是要死的

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

上式不是重言式, 所以无法判断推理的正确性.

4.1 一阶逻辑命题符号化

- 个体词
- 谓词
- 量词
- 一阶逻辑中命题符号化

个体词、个体域

个体词（个体）: 所研究对象中可以独立存在的具体或抽象的客体

- 个体常项：具体的事物，用a, b, c表示
- 个体变项：抽象的事物，用x, y, z表示

个体域（论域）: 个体变项的取值范围

- 有限个体域，如$\{a, b, c\}$, $\{1, 2\}$
- 无限个体域，如**N**, **Z**, **R**, …
- 全总个体域：宇宙间一切事物组成

谓词

谓词: 表示个体词性质或相互之间关系的词,用**F,G,H**表示。

谓词常项：F： …是人, $F(x)$： x是人

谓词变项：$F(x)$： x具有性质F

一元谓词: 表示事物的性质

多元谓词(n元谓词, $n\geq2$): 表示事物之间的关系

如 $L(x,y)$： x与y有关系L， $L(x,y)$： $x\geq y$， …

0元谓词: 不含个体变项的谓词, 即命题常项或命题变项。

说明

1. 当F,G,H是谓词常项时,0元谓词为命题

2. 任何命题均可以表示成0元谓词

如：F(x):x具有性质F

当x=2, 则F(2)是0元谓词,是命题变项,不是命题.

当x=2,F表示“是偶数”时, F(2)是0元谓词,是命题.

举例

(1) 2是有理数. F: "…是有理数", a: 2, $F(a)$.

(2) x是有理数. F: "…是有理数", $F(x)$.

(3) 小张和小苏是同学.

L: "… 和…是同学", a: 小张, b: 小苏, $L(a, b)$.

(4) x与氧气发生A反应.

L: "… 和a发生A反应 ", a: 氧气, $L(x, a)$.

说明: (1)(3)是0元谓词,也是命题; (2)(4)是一元谓词

量词

量词: 表示数量的词

- 全称量词∀: 表示任意的, 所有的, 一切的等
  - 如 $\forall x$ 表示对个体域中所有的x
- 存在量词∃: 表示存在, 有的, 至少有一个等
  - 如 $\exists x$ 表示在个体域中存在x

一阶逻辑中命题符号化

例 用0元谓词将命题符号化

要求：先将它们在命题逻辑中符号化，再在一阶逻辑中符号化.

(1) 墨西哥位于南美洲

在命题逻辑中, 设 p: 墨西哥位于南美洲

符号化为 p

在一阶逻辑中，设a：墨西哥，$F(x)$：x位于南美洲，符号化为$F(a)$

例(续)

(2) $\sqrt{2}$ 是无理数仅当$\sqrt{3}$ 是有理数

在命题逻辑中,设 p：$\sqrt{2}$ 是无理数, q：$\sqrt{3}$是有理数.

符号化为 $p \to q$

在一阶逻辑中, 设$F(x)$: x是无理数, $G(x)$: x是有理数

符号化为$F(\sqrt{2}) \to F(\sqrt{3})$

(3) 如果2>3， 则3<4

在命题逻辑中, 设 p：2>3， q：3<4. 符号化为 $p \to q$

在一阶逻辑中, 设 $F(x,y)$：$x>y$， $G(x,y)$：$x<y$,

符号化为 $F(2,3) \to G(3,4)$

例(续)

例 在一阶逻辑中将下面命题符号化

(1) 人都爱美; (2) 有人用左手写字

分别取(a) D为人类集合, (b) D为全总个体域 .

解: (a) (1) 设$G(x)$: x爱美, 符号化为 $\forall xG(x)$

(2) 设$G(x)$: x用左手写字, 符号化为 $\exists xG(x)$

(b) 设$F(x)$: x为人, $G(x)$: x用左手写字,

(1) $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

(2) $\exists x(F(x)\wedge G(x))$

这是两个基本公式, 注意它们的使用

讨论

在全总个体中：

(1) $\forall x\,(F(x)\rightarrow G(x))$翻译为"对于宇宙中一切个体而言,如果个体是人，则他呼吸."

(2) $\exists\,x\,(F(x)\wedge G(x))$翻译为"在宇宙中存在这样的个体，它是人且用左手写字."

其中，$F(x)$是特性谓词, 在全总个体域内，将一个事物从中区别出来, 即对每一个客体变元的变化范围加以限制。

讨论（续）

1. 以下符号化是不对的

(1)若译成$(\forall x)(F(x) \wedge G(x))$, 表示“宇宙中任何事物都是人并且要呼吸.”

(2) 若译成$(\exists x)(F(x) \rightarrow G(x))$, 表示“在宇宙中存在个体, 如果这个体是人, 则他用左手写字.”

2. 对于全称量词，特性谓词常作为蕴含式的前件；

对于存在量词，特性谓词常作为合取项

3. $(\forall x)P(x)$为T *iff* 个体域中所有 x 都使 $P(x)$ 为T.

$(\exists x)P(x)$为T *iff* 个体域中存在一个x使$P(x)$为T.

例(续)

例 在一阶逻辑中将下面命题符号化

(1) 正数都大于负数

(2) 有的无理数大于有的有理数

解 注意: 题目中没给个体域, 使用全总个体域

(1) 令$F(x)$: x为正数, $G(y)$: y为负数, $L(x,y)$: $x>y$

$$\forall x(F(x)\rightarrow\forall y(G(y)\rightarrow L(x,y)))$$

或 $\forall x\forall y((F(x)\wedge G(y))\rightarrow L(x,y))$ 两者等值

(2) 令$F(x)$: x是无理数, $G(y)$: y是有理数,

$L(x,y)$: $x>y$

$$\exists x(F(x)\wedge\exists y(G(y)\wedge L(x,y)))$$

或 $\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge L(x,y))$ 两者等值

例(续)

例 在个体域限制为(a)和(b)条件时，将下列命题符号化，并给出它们的真值.

(1) 对于任意的x,均有x^2-3x+2=(x-1)(x-2)

(2) 存在x,使得x+5=3.

其中：(a) 个体域D_1=N; (b) 个体域D_2=R.

解 (a)令$F(x,y)$:x=y,$f(x)$= x^2-3x+2, $g(x)$=(x-1)(x-2),$h(x)$:x+5

命题(1)符号化为$\forall xF(f(x),g(x))$,真值为1.

命题(2)符号化为$\exists xF(h(x),3)$,真值为0.

(b) 在D_2内,(1)与(2)的符号化相同, 但(1)和(2)都是真命题.

例(续)

例 将下列命题符号化,并讨论它们的真值.

(1) 所有的人都长着黑头发.

(2) 有的人登上过月球.

(3) 没有人登上过木星.

(4) 在美国留学的学生未必都是亚洲人.

解 采用全总个体域.M(x):x是人.

(1) 令$F(x)$:x长着黑头发，符号化形式为：

$$\forall x\ (M(x)\rightarrow F(x))$$

是假命题.

例(续)

(2) 有的人登上过月球.

令$G(x)$:x登上过月球，符号化形式为：

$\exists x(M(x)\wedge G(x))$

a:阿姆斯特朗，$M(a)\wedge G(a)$是真,所以是真命题.

(3) 没有人登上过木星.

令$H(x)$:x登上过木星,符号化形式为：

$\neg\exists x\ (M(x)\wedge F(x))$ 或者 $\forall x\ (M(x)\rightarrow\neg H(x))$

是假命题.

例(续)

(4) 在美国留学的学生未必都是亚洲人.

解 采用全总个体域.

令$F(x)$:x是在美国留学的学生,$G(x)$:x是亚洲人,

符号化形式为:

$\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ 或者 $\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

是真命题.

例 下列命题符号化.

(1) 兔子比乌龟跑得快.

(2) 有的兔子比乌龟跑得快.

(3) 并不是所有的兔子都比乌龟跑得快.

(4) 不存在跑得同样快的兔子.

解: $F(x)$: x是兔子, $G(x)$: x是乌龟, $H(x, y)$: x比y跑得快, $L(x, y)$: x和y跑得一样快.

(1) $\forall x(F(x) \rightarrow \forall y(G(y) \rightarrow H(x, y)))$

(2) $\exists x(F(x) \wedge \forall y(G(y) \rightarrow H(x, y)))$

(3) $\neg(\forall x)(\forall y)(F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y))$,另一种?

(4) $\neg(\exists x)(\exists y)(F(x) \wedge F(y) \wedge L(x, y))$, 另一种?

一阶逻辑中命题符号化(续)

几点注意:

(1) 1元谓词与多元谓词的区分

(2) 无特别要求,应使用全总个体域,引入特性谓词

(3)量词顺序一般不能随便颠倒

如, 个体域为实数集时, $H(x, y)$表示 $x+y=10$, 则命题“对于任意的x, 都存在y , 使得$x+y=10$” 的符号化形式为 $(\forall x)(\exists y)H(x, y)$, 为真命题.

若改变量词次序, $(\exists y)(\forall x)H(x, y)$, 不表示原命题, 且其表示的为假命题.

一阶逻辑中命题符号化(续)

(4)两个基本形式$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$和$\exists x(F(x)\wedge G(x))$的使用

(5) 否定的表示，如

“没有不呼吸的人”等同于“所有的人都呼吸”

“不是所有的人都喜欢吃糖”等同于“存在不喜欢吃糖的人”.

这导致命题的符号化不唯一.

4.2 一阶逻辑公式及其解释

- 合式公式(简称公式)
- 个体变项的自由出现和约束出现
- 解释与赋值
- 公式分类

  永真式，矛盾式，可满足式

字母表

定义 字母表包含下述符号：

(1) 个体常项：$a, b, c, \ldots, a_i, b_i, c_i, \ldots, i \geq 1$

(2) 个体变项：$x, y, z, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, i \geq 1$

(3) 函数符号：$f, g, h, \ldots, f_i, g_i, h_i, \ldots, i \geq 1$

(4) 谓词符号：$F, G, H, \ldots, F_i, G_i, H_i, \ldots, i \geq 1$

(5) 量词符号：$\forall, \exists$

(6) 联结词符号：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

(7) 括号与逗号：(,), ,

项

定义 项的定义如下：

(1) 个体常项和个体变项是项.

(2) 若$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是任意的$n$元函数，$t_1,t_2,\ldots,t_n$是任意的$n$个项，则$\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 是项.

(3) 所有的项都是有限次使用 (1), (2) 得到的.

个体常项、变项是项，由它们构成的n元函数和复合函数还是项

原子公式

定义 设$R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是任意的n元谓词，$t_1,t_2,\ldots, t_n$是任意的n个项，则称$R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$是原子公式.

原子公式是由项组成的n元谓词.

例如，$F(x,y)$, $F(f(x_1,x_2),g(x_3,x_4))$等均为原子公式

合式公式

定义 合式公式（简称公式）定义如下：

(1) 原子公式是合式公式.

(2) 若A是合式公式，则 $(\neg A)$也是合式公式

(3) 若A, B是合式公式，则$(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$也是合式公式

(4) 若A是合式公式，则$\forall xA$, $\exists xA$也是合式公式

(5) 只有有限次地应用(1)~(4)形成的符号串是合式公式.

如 $x\geq 0$, $\forall x\,(F(x)\rightarrow G(x))$, $\forall x\exists y(x+y=1)$

说明

1. 最外层括号可省略

2. 量词后面的括号不能省略，因为它表示了量词的**作用域.**

3. 谓词合式公式简称为谓词公式.

个体变项的自由出现与约束出现

定义 在公式$\forall xA$和$\exists xA$中，称x为指导变元，A为相应量词的辖域. 在$\forall x$和$\exists x$的辖域中，x的所有出现都称为约束出现，A中不是约束出现的其他变项均称为是自由出现.

例如, 在公式 $\forall x(F(x,y)\rightarrow G(x,z))$ 中,

$(F(x,y)\rightarrow G(x,z))$为$\forall x$的辖域，$x$为指导变元,

其中x的两次出现均为约束出现,

y与z均为自由出现.

闭式: 不含自由出现的个体变项的谓词公式.

例

例 指出下列公式中的指导变元，各量词的辖域，自由出现以及约束出现的个体变项。

(1) $\forall x(P(x,y)\rightarrow\exists yR(x,y))$

(2) $\forall x\forall y(P(x, y)\wedge Q(y, z))\wedge(\exists x)P(x, y)$

(3) $(\forall x)(P(x)\wedge(\exists x)Q(x, z)\rightarrow(\exists y)R(x, y))\vee Q(x, y)$

解 (1) $\forall x$的指导变元是x,辖域是$P(x,y)\rightarrow\exists yR(x,y)$,其中$x$是约束出现, $P(x,y)$中的y是自由出现.

量词$\exists$y的指导变元是y,辖域是$R(x,y)$,其中x是约束出现(在$\forall$的辖域中), y是约束出现.

注意：前件中的y是自由出现，后件中的y是约束出现.

(2) $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \wedge Q(y, z)) \wedge (\exists x) P(x, y)$

量词$\forall x$的指导变元是x, 量词$\forall y$的指导变元是y,它们的辖域都是$P(x, y) \wedge Q(y, z)$,其中x, y是约束出现, z是自由出现.

量词$\exists x$的指导变元是x,其辖域是P(x,y), 其中x是约束出现, y是自由出现。

注意：在整个公式中, 第一个x(在第一个$\forall$辖域中)和第二个x (在$\exists$辖域中)虽然符号相同,但不是同一个变量, 第一个和第二个y(在第二个$\forall$辖域中)是相同的，但第三个y却不同。

(3) $\forall x(P(x)\land\exists xQ(x, z)\rightarrow\exists yR(x, y))\lor Q(x, y)$

对于量词$\forall x$，指导变元是x,辖域是

$P(x)\land\exists xQ(x, z)\rightarrow\exists yR(x, y)$, x,y都是约束出现，z是自由出现。其中P(x)与$\exists yR(x, y)$中的x受$\forall x$约束，$Q(x, z)$中的x受$\exists x$约束。$R(x, y)$)中的y受$\exists y$约束。

对于量词$\exists x$，指导变元是x,其辖域是$Q(x, z)$。

对于量词$\exists y$，指导变元是y,其辖域是$R(x, y)$.

$Q(x, y)$中的x,y都是自由出现。

闭式

A是任意的公式，若A中不含自由出现的个体变项，则称A为封闭的公式，简称闭式。

如： $\forall x(P(x,y)\rightarrow\exists yR(x,y))$是闭式.

$\forall x\forall y(P(x, y)\wedge Q(y, z))\wedge(\exists x)P(x, y)$不是闭式.

说明：

$A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$表示含$x_1,x_2,\ldots,x_n$自由出现的公式,用Δ表示任意的量词. $\Delta x_1A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$是含$x_2,\ldots,x_n$自由出现的公式,记作$A_1(x_2,\ldots,x_n)$.类似得,

$\Delta x_2\Delta x_1A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$记作$A_2(x_3,\ldots,x_n),\ldots,$

$\Delta x_{n-1}\ldots\Delta x_2\Delta x_1A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$记作$A_{n-1}(x_n)$.

公式的解释与分类

给定闭式 $A=\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

取个体域N, $F(x)$: $x>2$, $G(x)$: $x>1$

代入得$A=\forall x(x>2\rightarrow x>1)$ 真命题

给定非闭式 $B=\forall xF(x,y)$

取个体域N, $F(x,y)$: $x\geq y$

代入得$B=\forall x(x\geq y)$ 不是命题

令$y=1$, $B=\forall x(x\geq 1)$ 假命题

令$y=0$, $B=\forall x(x\geq 0)$ 真命题

解释和赋值

定义 解释I由下面4部分组成：

(a) 非空个体域D_I

(b) 对每一个命题常项a 指定一个 $\bar{a}\in D_I$

(c) 对每一个函数符号f指定一个D_I上的函数 $\bar{f}$

(d) 对每一个谓词符号F指定一个D_I上的谓词 $\bar{F}$

(e) 对每一个自由出现的个体变项符号x指定一个赋值$\sigma(x)\in D_I$

将这样得到的公式记作A',称为A在I下的解释.

在给定的解释和赋值下, 任何公式都成为命题.

实例

例 给定解释 I 如下：

(a) 个体域 D=N

(b) $\bar{a}=2$

(c) $\bar{f}(x,y)=x+y,\ \bar{g}(x,y)=xy$

(d) 谓词 $\bar{F}(x,y):x=y$

以及赋值σ: $\sigma(x)=0,\ \sigma(y)=1,\ \sigma(z)=2$.

说明下列公式在 I 与σ下的涵义,并讨论真值

(1) $\forall xF(g(x,a),y)$

$\forall x(2x=1)$ 假命题

例(续)

(2) $\forall xF(f(x,a),y)\rightarrow\forall yF(x,f(y,a))$

$\forall x(x+2=1)\rightarrow\forall y(0=y+2)$ 真命题

(3) $\exists xF(f(x,y),g(x,z))$

$\exists x(x+1=2x)$ 真命题

(4) $\forall x\forall y\exists zF(f(x,y),z)$

$\forall x\forall y\exists z\ (x+y=z)$ 真命题

(5) $\exists x\forall y\forall zF(f(y,z),x)$

$\exists x\forall y\forall z\ (y+z=x)$ 假命题

> 例 给定解释 I 如下:
>
> (a) 个体域 D=N
>
> (b) $\bar{a}=2$
>
> (c) $\bar{f}(x,y)=x+y$, $\bar{g}(x,y)=xy$
>
> (d) 谓词 $\bar{F}(x,y): x=y$
>
> 以及赋值σ: $\sigma(x)=0$, $\sigma(y)=1$, $\sigma(z)=2$.

闭式只需要解释, 不需要赋值σ, 如(4),(5)

公式的分类

永真式(逻辑有效式):在任何解释和赋值下为真命题

矛盾式(永假式):在任何解释和赋值下为假命题

可满足式：存在成真的解释和赋值

如：(2)(3)(4)由于有成真赋值,因此是可满足式;(1)(5)由于有成假赋值,因此不是永真式.

说明:

永真式为可满足式，但反之不真

谓词公式的可满足性（永真性, 永假性)是不可判定的

代换

定义 设A_0是含命题变项$p_1, p_2, \ldots, p_n$的命题公式，$A_1, A_2, \ldots, A_n$是n个谓词公式，用A_i处处代替A_0中的p_i $(1 \le i \le n)$，所得公式A称为A_0的代换实例.

如 $F(x) \to G(x)$, $\forall x F(x) \to \exists y G(y)$是$p \to q$的代换实例

定理 重言式的代换实例都是永真式，矛盾式的代换实例都是矛盾式.

实例

例 判断下列公式的类型

(1) $\forall xF(x)\rightarrow\exists xF(x)$;

设I为任意的解释，令$\forall xF(x)$为真, 则$\exists xF(x)$必为真, 所以$\forall xF(x)\rightarrow\exists xF(x)$也为真. 是逻辑有效式.

(2) $\forall xF(x)\rightarrow(\forall x\exists yG(x,y)\rightarrow\forall xF(x))$;

是重言式 $p\rightarrow(q\rightarrow p)$ 的代换实例, 是逻辑有效式.因为

$p\rightarrow(q\rightarrow p) \Leftrightarrow \neg p\vee(\neg q\vee p) \Leftrightarrow 1$

例(续)

(3) $\forall xF(x)\to(\forall xF(x)\vee\exists yG(y))$；

是$p\to(p\vee q)$的代换实例，是可满足式.因为

$p\to(p\vee q)\Leftrightarrow\neg p\vee(\neg p\vee q)\Leftrightarrow\neg p\vee q$

(4) $\neg(F(x,y)\to R(x,y))\wedge R(x,y)$；

是矛盾式$\neg(p\to q)\wedge q$的代换实例，是矛盾式.

例(续)

(5) $\forall x\exists yF(x,y)\to\exists x\forall yF(x,y)$.

取解释I：个体域N，$F(x,y)$为$x=y$.

公式被解释为$\forall x\exists y(x=y)\to\exists x\forall y(x=y)$，其值为假.

解释I'：个体域N, $F(x,y)$为$x\le y$, 在I'下,公式被解释为

$\forall x\exists y(x\le y)\to\exists x\forall y(x\le y)$，其值为真.

是非逻辑有效式的可满足式.

例(续)

(6) $\exists x F(x,y)$

取解释I：个体域N，$F(x,y)$为$x<y$. 赋值σ_1：$\sigma_1(y)=1$.

在I和σ_1下，$\exists x(x<1)$，真命题.

取解释I'：个体域N, $F(x,y)$为$x<y$. 赋值σ_2：$\sigma_2(y)=0$.

在I和σ_2下，$\exists x(x<0)$，假命题

是非逻辑有效式的可满足式.

例（续）

例 证明下列公式是永真式.

(1) $\forall xF(x)\rightarrow\exists xF(x)$.

解 这是闭式,只需要解释.设I是任意的解释,个体域是D.假设后件$\exists xF(x)$为0,即不存在使$F(x)$为1的个体常量,那么所有个体x均使$F(x)$为0,从而$\forall xF(x)$为0,因此公式是永真.

例（续）

例 证明下列公式是永真式.

(2) $\forall xF(x)\rightarrow F(y)$

设I是任意的解释, σ是I下的任意一个赋值,个体域为D.令在I和σ下$\forall xF(x)$为1, 那么对于D中的任意个体x,$F(x)$为1,因此$F(\sigma(y))$也为1.从而公式为真.

(3) $\forall xF(x)\rightarrow F(c)$

类似(2)的证明

例（续）

例 证明下列公式是永真式.

(4) $F(y) \rightarrow \exists x F(x)$

设I是任意的解释, σ是I下的任意一个赋值,个体域为D.令在I和σ下前件$F(y)$为1, 即$F(\sigma(y))$为1,那么在D中存在$a=\sigma(y)$使$F(a)$为1,因此后件为1.从而公式为真.

(5) $F(c) \rightarrow \exists x F(x)$

类似(5)的证明.

学习基本要求

- 熟练掌握一阶谓词命题的符号化
- 清楚分辨量词的辖域及变元的约束出现和自由出现
- 了解谓词公式的解释和赋值
- 作业：
  - 习题4

    1, 3, 4, 5, 6,7, 8, 10, 11