一、填空题

1. n阶行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix} =$________。

2. 设n阶方阵A满足$3A^2-2A=10I$，则$(A-2I)^{-1}=$________。

3. 设$\alpha=(1,2,3)^T,\beta=(1,-1,1)^T,A=\alpha\beta^T$，则$A^{100}=$________。

4. 设矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，$B$满足$BA=B+2I$，则$|B|=$________。

5. 设A是5×4矩阵，$r(A)=2,\xi_1=(1,2,0,1)^T,\xi_2=(2,1,1,3)^T$是方程组$Ax=b$的两个解，$\xi_3=(1,0,1,0)^T$是对应齐次线性方程组$Ax=0$的一个解，则$Ax=b$的一般解为________。

6.设3阶实对称方阵A满足$A^2=A$，且$r(A)=2$，则A的特征值为______，$|A+I|=$______。

二、选择题

1. 齐次线性方程组$Ax=0$有非零解的充要条件是(　)

(A) A的列向量组线性相关　　(B) A的行向量组线性相关

(C) A的行向量中有一个为零向量　　(D) A为方阵且其行列式为零

2. 已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，向量$\beta_1$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，向量$\beta_2$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，则对于任意常数$k$必有(　)

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$线性无关　　(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$线性相关

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$线性无关　　(D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$线性相关

3. 设A为3阶方阵，将A的第二列加到第一列得B，再交换B的第二行与第三行得单位矩阵I，记$P_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，则$A=$(　)

(A) P_1P_2　(B) $P_1^{-1}P_2$　(C) P_2P_1　(D) $P_2P_1^{-1}$

4. 设矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & t \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，若存在矩阵$B\neq O$使得$AB=O$，则$t=$(　)

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) -2

5. 设λ_1,λ_2是矩阵A的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为α_1,α_2，则$\alpha_1, A(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关的充要条件是（　）

(A) $\lambda_1 \neq 0$　　(B) $\lambda_2 \neq 0$　　(C) $\lambda_1 = 0$　　(D) $\lambda_2 = 0$

6. 设$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,则$A$与$B$（　）

(A)合同且相似　(B)合同但不相似　(C)不合同，但相似　(D)既不合同，也不相似

注：以下两题均为多选题

7. 设A、B均是n阶可逆方阵，则下列叙述正确的是（　）

(A) $|AB|=|B||A|$　　(B) $(AB)^T=A^TB^T$　　(C) $|A^*|=|A|^{n-1}$

(D) $(AB)^*=B^*A^*$　　(E) $A+B$也可逆　　(F) $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$

8. 设A是$m\times n$矩阵，$r(A)=m(m<n)$，B是n阶方阵，下列哪些成立？（　）

(A) A中任一m阶子式不等于0　　(B) A中存在m列线性无关

(C) $|A^TA|=0$　　(D)若$AB=O$，则$B=O$

(E)若$r(B)=n$，则$r(AB)=m$　　(F) $Ax=0$仅有零解

三、计算题

1. 设向量组$\alpha_1=(2,1,1,2)^T,\alpha_2=(1,0,1,0)^T,\alpha_3=(1,1,0,2)^T,\alpha_4=(1,1,1,1)^T,\alpha_5=(-1,1,0,0)^T$

求向量组的秩及其一个极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组线性表出。

2. 已知R^3的两组基为$B_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$及$B_2=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$，其中

$\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T,\alpha_3=(0,0,1)^T$

$\beta_1=(1,0,1)^T,\beta_2=(0,1,-1)^T,\beta_3=(1,2,0)^T$

(1) 求从基B_1到基B_2的过渡矩阵A；

(2) 已知α在基B_1下的坐标为$(1,-2,-1)^T$，求α在基B_2下的坐标。

3. (6 分) 已知 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ a & 4 & b\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$ 是可对角化的，$\lambda=2$ 是 A 的二重特征值，求 a,b。

四、证明题

设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_p$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，α_0 不是 $Ax=0$ 的解，证明：向量组 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_p$ 线性无关。

五、 设 $A=\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & 1 & a\\ a & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$，

(1) 求 $|A|$；

(2) 已知线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解，求 a 并求 $Ax=b$ 的通解。

六、 已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & a\\ 0 & a & -1\end{pmatrix}$，且 $r(A)=2$，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^T(A^TA)x$，

(1) 求实数 a 的值；

(2) 用正交变换法将 f 化为标准型，并写出相应的正交矩阵 Q；

(3) 写出规范型。