在科学研究与实践中，将一个实际问题转化为线性问题加以研究是很常见的. 线性问题往往可以通过对相应的线性方程组进行求解来加以解决. 大约在 4000 年前，古巴比伦人就知道如何解两个二元一次线性方程组成的线性方程组. 在公元一世纪左右成书的《九章算术》中，我国古代数学家采用分离系数的方法表示线性方程组，相当于现在的矩阵方法，并给出了世界上最早的完整的线性方程组的解法，其思想与高斯消元法一致，但时间远早于西方. 西方直到 17 世纪才由莱布尼兹提出完整的线性方程组的解法. 值得一提的是，前面章节介绍的行列式的概念，就是莱布尼茨为了研究线性方程组才提出的. 得益于历代数学家的不懈努力，线性方程组的求解方法已经非常成熟了.

本课程中，线性方程组不仅可以看作是核心的研究对象，同时也是我们研究线性代数中其他问题的重要工具. 在中学的数学课程里，我们已经学习过如何求解一些特殊类型的线性方程组，比如方程个数和未知量个数都为2或者3的线性方程组. 在本章中，我们将对方程个数和未知量个数都是任意有限多个的线性方程组展开讨论，学习线性方程组的一般性理论，理解线性方程组的表示形式，掌握解的存在性与唯一性的判定方法，并最终学会如何求解线性方程组.

1. 线性方程组的三种形式

在本节中，我们将分别从方程本身、向量表示和矩阵运算的角度给出线性方程组的表达形式，并且讨论在这些形式下，线性方程组的解所具有的不同含义.

1.1 基本形式

我们称由一次多项式给出的方程为**线性方程**，由线性方程构成的方程组为**线性方程组**；称一组满足线性方程组的未知量的取值为此线性方程组**一个解**；称线性方程组的全部解构成的集合为此线性方程组的**解集**.

例如

$$\begin{cases} -x+2y=0 \\ 2x-y-3=0 \end{cases}$$

就是由多项式$-x+2y$和$2x-y-3$给出的关于未知量x,y的二元线性方程组. 一般地，更习惯将常数项写在等号的右边，写成

$$\begin{cases} -x+2y=0 \\ 2x-y=3 \end{cases}$$

的形式. 借助一些解析几何的知识, 我们可以知道, 此方程组中的这两个方程对应的平面直角坐标系中的两条直线, 而方程组的解集就对应这两条直线在平面中的交点. (图1).

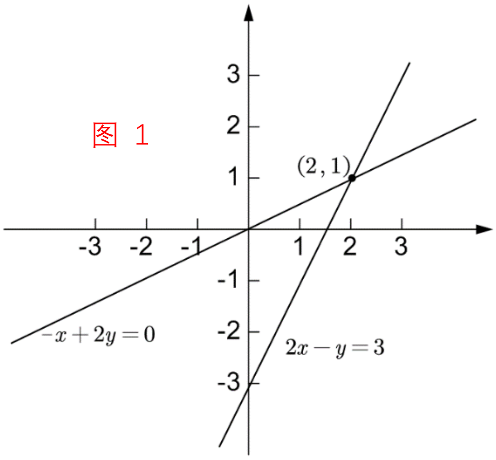
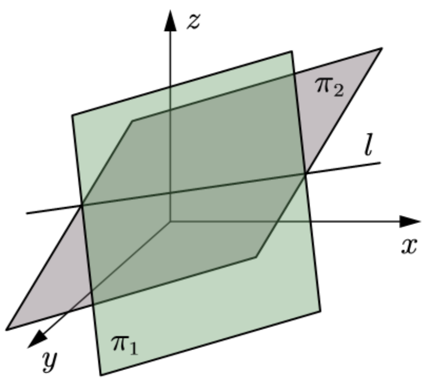


图 1

再举一个例子. 考虑以下这个有两个方程的三元线性方程组

$$\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 2x+y+3z=6 \end{cases}.$$

在(三维)空间直角坐标系中, 方程$x+2y+z=4$与$2x+y+3z=6$分别对应平面π_1和π_2. 这两个平面相交于一条直线l. 显然直线l上的点就与方程组解集中的解一一对应.



我们可以将有m个方程的n元线性方程组的**基本形式**表达为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1}$$

其中$x_1,\cdots,x_n$为n个未知量, a_{ij}为第i个方程第j个未知量的系数, b_i为第i个方程的常数项, $i=1,\cdots,m, j=1,\cdots,n$.

我们该如何理解基本形式下方程组的解呢?

对线性方程组, 我们单纯考虑其中的未知量时可以把这些未知量看作是自由变量. 有多少个自由变量, 相应的“自由度”就是多少. 而方程组中的每一条方程都对这些自由变量施加限制条件, 每施加一个限制条件, “自由度”就会减1. 由于直线可以由一个自由变量自由变化得到, 所以认为直线的“自由度”为1; 而平面可以由两个自由变量自由变化得到, 所以认为平面的“自由度”为2; 相应的, 可以由n个自由变量自由变化得到的几何对象的“自由度”应该为n. 一个点的“自由度”可以认为是0.

在上面的例子$\begin{cases} -x+2y=0 \\ 2x-y=3 \end{cases}$中, 两个未知量$x,y$的“自由度”为$2$, 第一个方程$-x+2y=0$对$x,y$施加了一个限制条件, 使得“自由度”由$2$减$1$变为$1$, 得到一条“自由度”为$1$的直线. 第二个方程$2x-y=3$也对$x,y$施加了另一个限制条件, 得到另一条 “自由度”为$1$的直线. 对两条直线取交集, 也就是把两个限制条件都施加到x,y上, 得到了自由度为0的一个点, 对应此线性方程组的唯一一组解.

同样的, 在上面的例子$\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 2x+y+3z=6 \end{cases}$中, 三个未知量$x,y,z$的“自由度”为$3$, 第一个方程$x+2y+z=4$对$x,y,z$施加了一个限制条件, 使得“自由度”由$3$减$1$变为$2$, 得到一个“自由度”为$2$的平面. 第二个方程$2x+y+3z=6$再对$x,y,z$施加了另一个限制条件, 得到另一个 “自由度”为$2$的平面. 对两个平面取交集, 也就是把两个限制条件都施加到x,y,z上, 得到了自由度为1的一条直线. 此直线上的点与此线性方程组的解一一对应, 因此线性方程组有无穷多组解.

将上面的想法推而广之, 基本形式(1)就是对n个自由度的未知量$x_1,\cdots,x_n$, 依次施加m个线性方程所给出的限制条件. 每个方程都对应一个“自由度”为$n-1$的几何对象, 方程组的解集就是这m个“自由度”为$n-1$的几何对象的交集: 若交集非空, 则有解; 若交集为空集, 则无解.

在(1)中, 若$b_1=b_2=\cdots=b_m=0$, 则称线性方程组(1)是**齐次的**; 否则, 也就是存在某个$b_k\neq 0$, 则称线性方程组(1)是**非齐次的.** 例如,

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+2x_4=2 \\ x_2-x_3-x_4=1 \\ x_1+x_2-x_3+3x_4=1 \\ x_1-x_2+x_3+5x_4=-1 \end{cases}$$

是非齐次的有4个方程的4元线性方程组; 又如

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+3x_3=0 \end{cases}$$

是齐次的有2个方程的3元线性方程组.

不难看出, 未知量全部取零总可以构成齐次线性方程组的一个解, 称为**零解**. 因此

“齐次线性方程组总是有零解的.”

对齐次线性方程组，若未知量个数多于方程个数，也就是说初始的“自由度”大于限制条件的个数，那么解集的“自由度”会大于0，至少包含多个解，所以

“对齐次线性方程组，若未知量个数多于方程个数，则必有非零解.”

1.2 向量形式

我们先定义数域上的向量，然后给出线性方程组的向量形式.

实数域$\mathbf{R}$和复数域$\mathbf{C}$是我们经常讨论的数域. 在几何上，实数域与一条直线(实数轴)对应，复数域与一个平面对应. 因为对任意复数$a+bi$ ($a,b\in\mathbf{R}$，i为虚数单位)，都存在唯一一个二元实数组(a,b)与之对应，而每个二元实数组都与坐标平面上的点一一对应.

设m为一正整数，$\mathbf{F}$为一数域，$a_1,a_2,\cdots a_m\in\mathbf{F}$. 称一个有序m元数组$(a_1,a_2,\cdots a_m)$为数域$\mathbf{F}$上的一个**m维向量**. 一般用小写希腊字母$\alpha,\beta,\gamma$作为向量的记号. 例如，记

$$\alpha=(a_1,a_2,\cdots a_m),$$

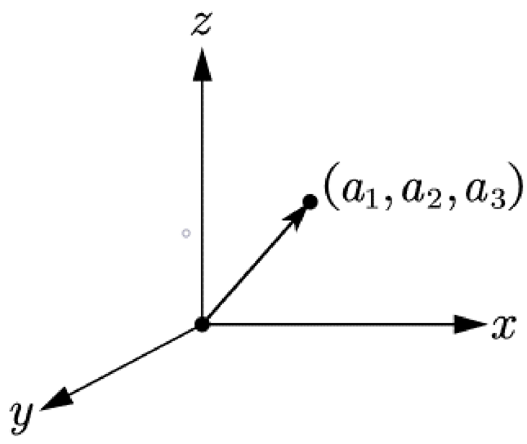
其中对$i=1,\cdots,m$，称a_i为向量α的**第i个分量**.

若一个向量写作行的形式，如(1,2,3)，则称其为**行向量**；若一个向量写作列的形式，如$\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$，则称其为**列向量**. 列向量也可记为行向量加上标T的形式，如$\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=(4,5,6)^T$.

我们称各分量都为实数的向量为**实向量**，称m维实向量全体为**m维实向量空间**，简称m维空间，记为$\mathbf{R}^m$.称各分量为0的向量为**零向量**，也记为$\mathbf{0}$.

今后如无特别说明，我们讨论的向量一般都是实向量.

注意，以上定义的向量和通常意义下的向量(有方向有大小的量)是一致的. 以$\mathbf{R}^3$为例，在三维空间中给定一个直角坐标系. 设$\alpha=(a_1,a_2,a_3)\in\mathbf{R}^3$，通过直角坐标系，$(a_1,a_2,a_3)$也唯一对应三维空间中的一个点. 则向量α的长度就是原点到点(a_1,a_2,a_3)的



距离，而方向就是原点到点(a_1,a_2,a_3)的射线方向. 更高维向量的方向和大小可以由更偏向代数的方法给出，我们将在后面的学习中讨论到。

称两个同维向量是**相等**的，若两者对应分量都相等. 接下来我们定义向量的两种运算. 对$\forall\alpha,\beta\in\mathbf{R}^m$和$\forall k\in\mathbf{R}$，设

$$\alpha=(a_1,a_2,\cdots a_m),\beta=(b_1,b_2,\cdots b_m).$$

先给出**加法**运算，定义α,β的和为

$$\alpha+\beta=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots a_m+b_m).$$

再给出**数乘**运算，定义k数乘α为

$$k\alpha=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_m).$$

在二维平面中可以验证，两个二维向量的和就是这两个向量按平行四边形法则进行合成，而用数k数乘一个二维向量就是将这个向量保持方向在一条直线上，大小放缩k倍. 将这种合成和放缩推广到更高维的向量上，就得到了一般意义下的向量的加法和数乘运算.

接下来讨论向量加法和数乘的运算律和性质.

对$\forall\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}^m$和$k,l\in\mathbf{R}$，有以下八条成立

（1） $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;
（2） $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;
（3） 存在零向量0，使得$0+\alpha=\alpha$;
（4） 对向量α，存在负向量$-\alpha$，使得$-\alpha+\alpha=0$，且容易验证$-\alpha=(-1)\alpha$;
（5） 对$1\in\mathbf{R}$，有$1\alpha=\alpha$;
（6） $k(l\alpha)=(kl)\alpha$;
（7） $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$;
（8） $k(\alpha+\beta)=k\alpha+l\beta$.

作为补充性质，容易验证：$0\alpha=0,k0=0$；若$k\alpha=0$，则有$k=0$或$\alpha=0$.

在初步介绍了向量这个工具之后，我们接下来给出线性方程组的向量形式.

举例来说，不难看出线性方程组$\begin{cases}-x+2y=0\\2x-y=3\end{cases}$与向量方程$\begin{pmatrix}-x+2y\\2x-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$同解，并且由

$$\begin{pmatrix}-x+2y\\2x-y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

知，

$$x\binom{-1}{2}+y\binom{2}{-1}=\binom{0}{3}.$$

把x看作向量$(-1,2)^T$的系数，y看作向量$(2,-1)^T$的系数，则原方程组的求解问题也就转化为以下问题：向量$(-1,2)^T$和$(2,-1)^T$以怎样的系数加和起来可以等于向量$(0,3)^T$？显然2倍的向量$(-1,2)^T$加1倍的向量$(2,-1)^T$等于向量$(0,3)^T$.（图 2）

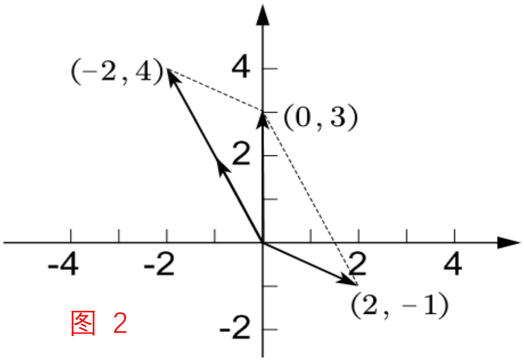


图 2

对一般的线性方程组(1)，同样有

$$x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix}+\cdots+x_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\end{pmatrix},$$

则

$$\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix},$$

也就有

$$x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix}+\cdots+x_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix},\qquad(2)$$

称式(2)为线性方程组(1)的**向量形式**.

若对$j=1,\cdots,n$，令$\alpha_j=\left(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj}\right)^T$，又令$b=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^T$，则线性方程组(1)的向量形式可简记为

$$\sum_{j=1}^{n}x_j\alpha_j=b,$$

称b为**结果向量**；若线性方程组(1)为齐次的，则可记为

$$\sum_{j=1}^{n} x_j\alpha_j = 0.$$

我们该如何理解向量形式下线性方程组的解呢？显然，方程组$\sum_{j=1}^{n} x_j\alpha_j = b$的一个解，与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$加和出结果向量$b$的一组系数是一一对应的. 具体来说，设线性方程组(1)有一组解$x_1 = k_1, x_2 = k_2,\cdots,x_n = k_n$，则向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$以$k_1,k_2,\cdots,k_n$为系数加和起来就等于向量$b$，也就是$\sum_{j=1}^{n} k_j\alpha_j = b$；相对的，如果向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$以某组系数$l_1,l_2,\cdots,l_n$加和起来等于向量$b$，那么令$x_1 = l_1, x_2 = l_2,\cdots$，$x_n = l_n$，就得到线性方程组(1)的一组解.

下面一系列定义和定理可以帮助我们更清楚的描述以上想法.

对$\alpha_i \in \mathbf{R}^m$，$k_i \in \mathbf{R}, i = 1\cdots n$，称$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n$为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$以$k_1,k_2,\cdots,k_n$为系数的**线性组合**；若向量$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n$，则称$\beta$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$以$k_1,k_2,\cdots,k_n$为系数的**线性表示**. 若有且仅有一组系数$k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n$，则称向量$\beta$由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$**唯一线性表示**.

定理 1: $AX = b$有解等价于b可由A的列$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示.

推论 1.1: $AX = b$有唯一解等价于b由A的列$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$唯一线性表示.

推论 1.1': $AX = 0$有唯一解等价于0由A的列$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$唯一线性表示.

1.3 矩阵形式

我们先定义数域上的矩阵，然后给出线性方程组的矩阵形式.

对任意正整数m,n，称数域$\mathbf{F}$上的一个m行n列的数表为数域$\mathbf{F}$上的一个$m\times n$**矩阵**，其中数表中的数称为矩阵的**元素**. 例如，实数域上的2行3列的数表

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

就是实数域上的一个2×3矩阵.

显然数域$\mathbf{F}$上的$m\times 1$矩阵与数域$\mathbf{F}$上的m维列向量一一对应，数域$\mathbf{F}$上的$1\times n$矩阵为$\mathbf{F}$上的n维行向量一一对应. 在以后的学习中会看到，单纯讨论向量时没有必要区分行向量与列向量，只有在同时讨论与矩阵有关的向量时才区分行向量与列向量.

一般用大写字母作为矩阵的记号，记一个$m\times n$矩阵A为

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

其中，对$i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots n$，称$a_{ij}\in\mathbf{F}$为矩阵$A$的第$i$行第$j$列的元素，列向量$\left(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj}\right)^T$为矩阵$A$的第$j$个列向量或第$j$列，行向量$(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$为矩阵$A$的第$i$个行向量或第$i$行. 为方便起见，矩阵$A$也可记作$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$. 当只需要指明矩阵的形状(也就是矩阵的行数与列数)而不需具体写出矩阵的元素时，也可用$A_{m\times n}$来表示一个$m\times n$矩阵.

记$\mathbf{F}$上的$m\times n$矩阵全体为$\mathbf{F}^{m\times n}$. 称实数域上的矩阵为**实矩阵**，复数域上的矩阵为**复矩阵**. 今后如无特别说明，我们讨论的矩阵都是实矩阵.

称两个矩阵和是**同型的**，如果两者行数相等且列数也相等. 称两个同型矩阵是**相等的**，若两者对应位置的元素都相等. 注意，同型矩阵才考虑是否相等.

举例：对矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$和矩阵$B=(b_{ij})_{m\times n}$，有

$$A=B\quad <=>\quad a_{ij}=b_{ij},\ 对i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n.$$

先复习下的$m\times n$矩阵与n维列向量的**乘法.**

对任意的$A\in\mathbf{R}^{m\times n},\gamma\in\mathbf{R}^n$，设

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix},\gamma=\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix},$$

则A与γ的乘积是一个m维列向量如下

$$A\gamma=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}c_1+a_{12}c_2+\cdots+a_{1n}c_n\\ a_{21}c_1+a_{22}c_2+\cdots+a_{2n}c_n\\ \vdots\\ a_{m1}c_1+a_{m2}c_2+\cdots+a_{mn}c_n\end{pmatrix}.$$

注意做乘法时，A与γ的位置不能交换.

我们举一个应用矩阵与列向量乘法的例子. 设甲工厂生产第一种产品的成本单价为1元，第二种产品的成本单价为3元；乙工厂生产第一种产品的成本单价为2元，第二种产品的成本单价为2元. 现在需要第一种产品5件，第二种产品4件，且只能由一家工厂生产. 问由哪一家工厂生产的成本更低?

由题意得成本矩阵$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$，和订单向量$\begin{pmatrix}5\\ 4\end{pmatrix}$，将两者做乘法得

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}17\\ 18\end{pmatrix}.$$

也就是说，甲工厂的成本为17元，乙工厂的成本为18元，所以甲工厂的成本更低.

将上面这个例子改造下，就能看出线性方程组的矩阵形式的初步想法. 设甲工厂生产第一种产品的成本单价为1元，第二种产品的成本单价为3元；乙工厂生产第一种产品的成本单价为2元，第二种产品的成本单价为2元. 现在需要第一种产品x件，第二种产品y件，且只能由一家工厂生产. 已知甲工厂的成本为17元，乙工厂的成本为18元. 问x, y的取值是多少?

我们可以写出x, y所满足的线性方程组，

$$\begin{cases} x + 3y = 17 \\ 2x + 2y = 18' \end{cases}$$

也可以利用矩阵与列向量乘法将x, y的关系表示如下:

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}17\\ 18\end{pmatrix},$$

显然两者是有着内在的对应关系的.

我们用下面的例子来具体说明这种线性方程组和矩阵的对应关系，这个例子中的线性方程组在上一节向量形式中也被讨论过. 不难发现，线性方程组

$$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

与向量的方程

$$\begin{pmatrix}-x + 2y\\ 2x - y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 3\end{pmatrix}$$

同解，其中

$$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x + 2y\\ 2x - y\end{pmatrix},$$

所以方程组$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$与方程$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 3\end{pmatrix}$同解. $\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$的求解问题转化成以下问题:

矩阵$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$乘上怎样的列向量等于向量$\begin{pmatrix}0\\ 3\end{pmatrix}$?

将以上想法推广到一般情形. 对一般的方程组(1), 同样有

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix},$$

以及

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

也就有,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \tag{3}$$

我们称(3)式为方程组(1)的**矩阵形式**.

若令

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

则(1)的矩阵形式可简记为

$$AX = b.$$

对方程组(1), 称A为**系数矩阵**, X为**未知向量,** b为**结果向量**. 齐次线性方程组可记作$AX = 0$. 非齐次线性方程组可记作$AX = b$, 其中$b \neq 0$. 称

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

为非齐次线性方程组$AX = b$的**增广矩阵**. 显然齐次线性方程组与其系数矩阵一一对应, 非齐次线性方程组与其增广矩阵一一对应.

从向量空间的角度看，$m\times n$型矩阵与n维列向量的乘法给出了一个n维向量从n维向量空间到m维向量空间的映射. 具体来说，对任意的$A\in\mathbf{R}^{m\times n},\gamma\in\mathbf{R}^n$，矩阵$A$给出的映射$f$：$\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$，将$n$维向量$\gamma$对应到$m$维向量$f(\gamma)=A\gamma$. 容易验证这个映射满足:

对任意的$\alpha,\beta\in\mathbf{R}^n,k\in\mathbf{R}$，有

(1) $f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$;

(2) $f(k\alpha)=kf(\alpha)$,

我们称这样的映射为**线性映射**.

从线性方程组的矩阵形式$AX=b$出发看待方程组的解，就是考虑A所给出的线性映射f，将哪些向量映射到了结果向量b. 或者说，方程组$AX=b$的解集就是b在映射f下的原像集$f^{-1}(b)$: 方程组$AX=b$有解等价于原像集$f^{-1}(b)$非空集; 方程组$AX=b$有唯一解等价于原像集$f^{-1}(b)$里只有一个元素; 方程组$AX=b$无解等价于原像集$f^{-1}(b)$是空集.

2. 线性方程组的可解性判断

本节将讨论线性方程组的解的存在与唯一性的判定条件. 从向量的线性相关性入手，引出极大线性无关组的概念，进而定义向量组的秩和矩阵的秩，最终建立起线性方程组的解的存在与唯一性与系数阵和增广阵的秩的等价关系.

2.1 线性相关性

一组向量的线性相关性是指这组向量彼此间的线性表示关系及与这些线性表示关系有关的性质. 线性相关性与方程组的求解问题有着密切联系.

本节以及之后讨论的**向量组**都是指一组同维且不全为零的向量，不讨论**零向量组**(全部由零向量组成的向量组).

容易验证，二维平面中的两个不共线的向量可以表示任意一个二维向量; 三维空间中三个不共面的向量，可以表示任意一个的三维向量. 这种向量”不共线”和”不共面”的性质该怎么样推广到高维的向量空间里呢? 我们需要借助代数的方法.

设$\alpha_1,\alpha_2\in\mathbf{R}^2$. 与$\alpha_1$共线的向量都具有$k_1\alpha_1$，$k_1\in\mathbf{R}$的形式. 因此，若$\alpha_1,\alpha_2$不共线，则$\alpha_2$不能写成$k_1\alpha_1$的形式. 保持$\alpha_1,\alpha_2$的对称性可得，若$\alpha_1,\alpha_2$不共线，则对$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=0$，必有$k_1=k_2=0$; 反之，若对$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=0$，必有$k_1=k_2=0$成立，则$\alpha_1,\alpha_2$必然不共线.

类似的，设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbf{R}^3$. 与$\alpha_1,\alpha_2$共面的向量都具有$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$，$k_1,k_2\in\mathbf{R}$的形式. 因此，若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$不共面，则$\alpha_3$不能写成$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$的形式. 保持$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的对称性可得，若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$不共面，则对$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$，必有$k_1=k_2=k_3=0$. 反之，若对$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$，必有$k_1=k_2=k_3=0$成立，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$必然不共面.

继续应用上面这种代数方法，就得到了"不共线"和"不共面" 这两个概念在高维的向量空间上的推广.

称一组同维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是**线性无关**的，若只有全为 0 的系数$k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得$k_1\mathrm{\alpha}_1+k_2\mathrm{\alpha}_2+\cdots+k_n\mathrm{\alpha}_n=0$成立. 称一组同维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是**线性相关**的，若存在不全为 0 的系数$k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得$k_1\mathrm{\alpha}_1+k_2\mathrm{\alpha}_2+\cdots+k_n\mathrm{\alpha}_n=0$成立.

线性相关与线性无关的概念描述了一组向量如何线性表示零向量. 任何一组向量都可以以全为零的系数线性表示零向量. 若这组向量只能以全为零的系数线性表示零向量，则为线性无关的；若还可以以不全为零的系数线性表示零向量，则为线性相关的. 因此向量线性相关与线性无关是线性相关性中的重要部分.

接着给出几个向量线性相关和线性无关的基本性质:

- 含有零向量的向量组一定线性相关.
- 对单个向量α，若$\alpha=0$，则线性相关；若$\alpha\neq0$，则线性无关.
- 对两个非零向量α,β，有α,β线性相关等价于存在数k，使得$\alpha=k\beta$. 例如，$(1,2)$与$(2,4)$是线性相关的，因为$(2,4)=2(1,2)$.
- $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关等价于$AX=0$只有唯一解(只有零解).
- $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关等价于$AX=0$有无穷多解(有非零解).

称一个向量组中的一部分向量为这个向量组的一个**子组**.

- 若一组向量包含一个线性相关的子组，则这组向量线性相关.
- 若一组向量线性无关，则任意子组也线性无关.

设m为任意正整数. 在m维实向量空间$\mathbf{R}^{\mathrm{m}}$中，有一个非常重要的线性无关子组. 称$\mathbf{R}^{\mathrm{m}}$的子组

$$(1,0,\cdots,0),(0,1,\cdots,0),\cdots,(0,0,\cdots,1)$$

为R^{m}的**自然基**. 显然R^{m}的自然基是线性无关的且可以线性表示任意一个m维向量.

2.2 线性表示

再给出三个与向量线性表示有关的定理，可用来判定一组向量是线性相关的.

定理 1：当$n\geq2$时，一组向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关等价于存在$j$，$1\leq j\leq n$，使得$\alpha_j$可由其余$\mathrm{n}-1$个向量线性表示.

称一组向量$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$可由另一组向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$**线性表示**，若$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$中的每个向量都可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示.

定理 2: 设$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示，若$t>s$，则$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性相关.

证明：设$\sum_{j=1}^{t} l_j\beta_j=0$，其中$\beta_j=\sum_{i=1}^{s} k_{ij}\alpha_i$. 按定义要证明 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性相关，就是证明$l_1,l_2,\cdots,l_t$可以不全为零. 有

$$0=\sum_{j=1}^{t} l_j\beta_j=\sum_{j=1}^{t} l_j(\sum_{i=1}^{s} k_{ij}\alpha_i)=\sum_{i=1}^{s}(\sum_{j=1}^{t} k_{ij}l_j)\alpha_i,$$

考虑方程组$(k_{ij})_{s\times t}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=0$，由于未知量个数多于方程个数，必有非零解$\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{pmatrix}$. 对$j=1,2\cdots t$，令$l_j=u_j$，则满足$\sum_{j=1}^{t} l_j\beta_j=0$且$l_1,l_2,\cdots,l_t$不全为零. □

定理 2 可以记为“少的线性表示多的，则多的线性相关”. 由定理 2 可以引出与向量个数有关的两个重要结果.

推论 2.1: 设$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示，若$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性无关，则$t\le s$.

推论 2.1 是定理 2 的逆否命题，说明线性表示t个线性无关向量最少需要t个向量.

推论 2.2: 任意(包括无穷多个)m维向量的向量组中最多有m个线性无关向量.

证明：假设在任意一组m维向量中，存在线性无关向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,m<n$. 由于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$m$维向量，则都可由$\mathrm{R}^m$的自然基线性表示. 自然基有$m$个向量，由定理 2，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关，矛盾. 所以命题得证. □

推论 2.2’: 任意大于m个m维向量都是线性相关的. 举例

显然推论 2.2’也可以用来判定一组向量线性相关.

下面定理给出了一组线性无关向量添入一个新的向量变线性相关的等价条件，将在本节和向量坐标问题中有重要应用.

定理 3: 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关. 则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$线性相关等价于$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$唯一线性表示.

证：由定理 1，充分性显然. 下证必要性.

若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$线性相关，则存在不全为零的$k_1,k_2,\cdots,k_n,k_{n+1}$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n+k_{n+1}\beta=0.$$

若$k_{n+1}=0$，则存在不全为零的$k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0.$$

与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关矛盾. 因此$k_{n+1}\neq 0$，有

$$\beta=\frac{1}{k_{n+1}}(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n),$$

说明β可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示. 表示的唯一性可由线性无关的条件推出，留作练习.

2.3 极大线性无关组

对一组向量S(可以包含无穷多个向量)，若存在一个线性无关的子组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$，使得$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$可线性表示全体，也就是可线性表示向量组$S$中的任意一个，则称$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$为这组向量的一个**极大线性无关组**.

例如，向量组$(1,0),(0,1),(1,1)$中任意两个向量都构成一个极大线性无关组. 又例如，$\mathbf{R^m}$的自然基就是$\mathbf{R^m}$的一个极大线性无关组.

讨论极大线性无关组的原因有二：一是为研究方程组解的结构做准备(定义基础解系时会用到)；二是通过极大线性无关组可以很容易描述清楚一组向量的线性表示关系(以后会讲到，借助向量的坐标来描述).

注意到一组线性无关的向量的极大线性无关组是唯一存在的，就是其自身； 而一组线性相关的向量的极大线性无关组不唯一.

接下来说明任意向量组(包括无穷多个向量组成的向量组)都存在极大线性无关组.

定理 4： 任意向量组存在极大线性无关组.

证明：不妨此组向量是m维的，并记此组向量为S. 由本章最开始对向量组的约定知，S中包含非零向量，已知一个非零向量构成的向量组是线性无关的. 设S中最多有r个线性无关向量，由推论 2.2 知，$r\leq m$. 则存在S中一个线性无关子组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$. 对任意的$\beta\in \mathrm{S}$且$\beta\notin\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$，由$r$的定义知，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$是线性相关的. 由定理 3 知，$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示. 则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关且可以线性表示S中的全体向量，由定义知，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是S的极大线性无关组.

□

最后说明对一组给定的向量组，其极大线性无关组的向量个数是唯一确定的.

定理 5： 一组向量的任意两个极大线性无关组的向量个数是相等的.

证明：一组向量的任意两个极大线性无关组可以相互线性表示，由推论 2.1 给出的向量个数的限制，两者向量个数只能相等. □

由定理 4 证明和定理 5 可以知道极大线性无关组为什么被称为是“极大”的.

命题 6: 对任意一组向量S, 设S中有且至多有r个线性无关的向量, 则

(1) S的任意多于r个向量的子组都线性相关;
(2) S的任意一个由r个线性无关向量组成的子组是S的一个极大线性无关组; (由定理 4 的证明知)
(3) S的任意一个极大线性无关组有r个线性无关向量. (由定理 5 知)

由极大线性无关组的定义还知道,一组向量的任意两极大线性无关组可以相互线性表示. 我们称可以相互线性表示的向量组是**等价的**. 例如,一组向量的极大线性无关组都是等价的.

2.4 秩和解的判定

称一组向量(包含无穷多个向量的情形)的极大线性无关组的向量个数为这组向量的**秩**. 记向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$的秩为$\mathrm{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, 或$\mathrm{r}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$. 举例.

将命题 6 中“设S中最多有r个线性无关向量”等价的改为“设S的秩为r”, 结果显然仍成立.

由于$\mathbf{R}^{\mathrm{m}}$的自然基为$\mathbf{R}^{\mathrm{m}}$的一个极大线性无关组, 且$\mathbf{R}^{\mathrm{m}}$的自然基有m个向量, 所以$\mathrm{r}(\mathbf{R}^{\mathrm{m}}) = m$.

给出向量的秩与向量相(无)关的关系.

命题 7: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性无关等价于$\mathrm{r}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = n$.

命题 7': $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性相关等价于$\mathrm{r}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = r < n$.

给出线性表示与秩的关系.

定理 8: 设$\mathrm{r}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = r_1$, $\mathrm{r}(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t) = r_2$. 若$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表示, 则$r_2 \le r_1$.

证明: 不妨设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$的极大线性无关组为$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r_1}$, $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$的极大线性无关组为$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{r_2}$. 则$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{r_2}$可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r_1}$线性表示. 因为$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{r_2}$是线性无关的, 由推论 2.1 得到, $r_2 \le r_1$.

□

定理 8 可简记为“被线性表示的秩不大”, 从证明不难看出, 对向量个数无穷多的情形, 结果仍然成立.

推论 8.1: m维向量组的秩小于等于m.

推论 8.2: 等价向量组的秩相等.

推论 8.3: 设一组向量S的秩为r, 则S中任意一个包含r个向量且可线性表示S的子组都是一个极大线性无关组.

证明: 被线性表示的秩不大, 因此这个子组的秩大于等于r; 又子组的秩不会超过原向量组S的秩, 因此这个子组的秩为r, 所以是线性无关的. 线性无关又线性表示全部, 所以这个子组是一个极大线性无关组. □

综合定义、命题 6 (2)和推论 8.3 可知

定理 9: 一组向量S, 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r \in \mathrm{S}$, 若以下三个条件中有任意两个成立:

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关;

(2) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$可线性表示S;

(3) $\mathrm{r(S) = r}$;

则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$为S的一个极大线性无关组.

对任意一个$m\times n$矩阵A, 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$依次为$A$的列向量. 称$A$的列向量组的秩为**矩阵$A$的秩,** 记为$r(A)$. 也就是说

$$r(A) = r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n).$$

可以证明阵行向量组的秩等于列向量组的秩, 也就等于矩阵的秩.

给出矩阵的秩与方程组的 2 求解问题之间的联系.

定理 10: 设A为一个$m\times n$矩阵,

(1) $AX=b$有解 <=> $r(A)=r(A|b)$;
(2) $AX=b$无解 <=> $r(A)=r(A|b)-1$;
(3) $AX=b$有唯一解 <=> $r(A)=r(A|b)=n$;
(4) $AX=b$有无穷多解 <=> $r(A)=r(A|b)<n$.

证明:

(1) $AX=b$有解 <=> $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$可以线性表示$b$<=>$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b$是等价向量组<=>$\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b)$<=>$r(A)=r(A|b)$.

(2) 为(1)的补命题, 所以成立.

(3) $AX=b$有唯一解 <=> $AX=b$有解且A的列$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关 <=> $r(A)=r(A|b)$且$r(A)=n$.

(4) 为(1)的补命题. ▯

下面两个推论的正明留作练习，由读者自己完成，

推论 10.1: 设A为一个$m\times n$矩阵，则

(1) $AX=0$有唯一解 $<=>$ $\mathrm{r(A)=n}$;

(2) $AX=0$有非零解 $<=>$ $\mathrm{r(A)<n}$.

推论 10.2: 设A为一个$n\times n$矩阵，则$AX=b$有唯一解 $<=>$ $r(A)=n$.

3. 线性方程组的求解方法

本节我们先回顾中学学过的求解线性方程组的高斯消元法，并给出高斯消元法的矩阵形式，由之引出计算矩阵的秩的方法；然后通过定义基础解系，给出了求解齐次线性方程组的一般方法；最后讨论非齐次线性方程组与同系数的齐次线性方程组的解之间的关系，给出了求解非齐次线性方程组的一般方法.

3.1 高斯消元法

高斯消元法是求解一个具体的线性方程组的方法.

举例:

(1)用消元法求解方程组$\begin{cases} y+2z=-1 \\ 2x-y+z=2 \\ -x+2y=0 \end{cases}$.

解:

$$\begin{cases} y+2z=-1 \\ 2x-y+z=2 \\ -x+2y=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{交换 1,3 行}} \begin{cases} -x+2y=0 \\ 2x-y+z=2 \\ y+2z=-1 \end{cases} \xrightarrow{\text{第 1 行乘}(-1)} \begin{cases} x-2y=0 \\ 2x-y+z=2 \\ y+2z=-1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{第 1 行乘}(-2)\text{加到第 2 行}} \begin{cases} x-2y=0 \\ 3y+z=2 \\ y+2z=-1 \end{cases} \xrightarrow{\text{交换 2,3 行}} \begin{cases} x-2y=0 \\ y+2z=-1 \\ 3y+z=2 \end{cases} \xrightarrow{\text{第 2 行乘}(-3)\text{加到第 3 行}}$$

$$\begin{cases} x-2y=0 \\ y+2z=-1 \\ -5z=5 \end{cases} \xrightarrow{\text{第 3 行乘}(-\frac{1}{5})} \begin{cases} x-2y=0 \\ y+2z=-1 \\ z=-1 \end{cases} \xrightarrow{\text{第 3 行乘}(-2)\text{加到第 2 行}} \begin{cases} x-2y=0 \\ y=1 \\ z=-1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行乘 2 加到第 1 行}} \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=-1 \end{cases}$$

此方程组的解唯一.

若把消元的过程以增广矩阵$(\mathrm{A|b})$形式写出，则有

$$\begin{pmatrix}0&1&2&-1\\2&-1&1&2\\-1&2&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{1,3}}\begin{pmatrix}-1&2&0&0\\2&-1&1&2\\0&1&2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{E_1(-1)}\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\2&-1&1&2\\0&1&2&-1\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{E_{1,2}(-2)}\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\0&3&1&2\\0&1&2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{2,3}}\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\0&1&2&-1\\0&3&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{2,3}(-3)}$$
$$\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\0&1&2&-1\\0&0&-5&5\end{pmatrix}\xrightarrow{E_3(-\frac{1}{5})}\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\0&1&2&-1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{3,2}(-2)}\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{E_{2,1}(2)}\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}.$$

(2) 对方程组$\begin{cases}y+2z=-1\\-x+2y=0\end{cases}$, 其增广矩阵

$$\begin{pmatrix}0&1&2&-1\\-1&2&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{1,2}}\begin{pmatrix}-1&2&0&0\\0&1&2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{E_1(-1)}\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\0&1&2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{2,1}(2)}\begin{pmatrix}1&0&4&-2\\0&1&2&-1\end{pmatrix}.$$

显然此方程组的解不唯一, 除(1)中的解外, 还有其他解.

若一个矩阵非零行在上, 零行在下, 且每行第一个非零元左下方全为0, 则称这个矩阵为**上阶梯阵**, 称每行第一个非零元为此上阶梯阵的**主元**, 称主元所在的列为此上阶梯阵的**主列**, 称不是主列的列称为**自由列**. 称主元上方元素全为0, 且主元为1的上阶梯阵为**简化上阶梯阵.**

练习: 将以下矩阵化成上阶梯阵和简化上阶梯阵.

(1) $\begin{pmatrix}1&-1&1&-1&5\\-1&2&2&1&-4\\1&0&4&1&4\\2&0&8&1&9\end{pmatrix}$. (2) $\begin{pmatrix}1&1&2&-1&1\\1&-1&-2&-5&3\\0&1&a+1&b&b-1\\1&1&2&b-2&b+3\end{pmatrix}$

矩阵形式的高斯消元法的要点:

- 消元的对象: 齐次, 系数矩阵; 非齐次, 增广矩阵.
- 消元的手段− 三种初等行变换:

对换(交换第i行与第j行);

倍乘(将数c数乘到第i行);

倍加(第i行的k倍加到第j行上, 注意第i行不改变).

- 消元的目标 1: 上阶梯阵. 从上阶梯阵可以判断方程组有无解.
- 消元的目标 2: 简化上阶梯阵. (若有解)从简化上阶梯阵可以读出方程组的解.
- 消元的原理: 消元改变了方程组, 但不改变方程组的解. 通过消元, 将不容易求解的方程组变成容易求解的方程组.

对一个非齐次且有无穷多解的方程组, 并不能直接从消元后的方程组中得到所有解. 一般线性方程组的求解问题有待后续讨论解的结构加以解决.

对一个未知量个数多于方程个数齐次方程组, 显然其系数矩阵的列数大于行数, 因此系数矩阵化成的简化上阶梯阵必然存在自由列. 而对自由列所对应的未知量任意赋值, 都可以得到方程组的一组非零解. 可以将这一结论推广到一般的齐次方程组上, 也就可以印证我们之前得到的一个结论.

命题: 未知量个数多于方程个数的齐次方程组必有非零解.

通过 2.4 节的讨论我们可以看出, 方程组的解的存在性和唯一性, 与方程组的系数矩阵和增广矩阵的秩, 有着非常密切的关联. 由定义知道, 一个矩阵的秩就是其列向量组的秩, 因此计算一个矩阵的秩就等价于计算一组有限个向量的秩.

计算一组(有限个)向量的线性相关性, 就是计算这组向量的秩和一个极大线性无关组, 并用这个极大线性无关组线性表示出其余向量. 先从理论上给出计算向量的线性相关性的方法, 有三个要点:

对一组向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, 设矩阵A依次以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为列向量, 也就是$\mathrm{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$.

首先, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$之间的任意一个线性表示关系与$AX=0$的一个解一一对应. 例如,设$n=3$, 若有线性表示关系$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$, 则对应$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示零向量的一组系数$1,1,-1$(因为$\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0$), 进而对应$AX=0$的一个解$\mathrm{X}=(1,1,-1)^T$.

然后, 初等行变换不改变矩阵列向量组的线性相关性. 具体来说, 对矩阵A作任意初等行变换(对换,倍乘,倍加)得到矩阵B, 设B的列向量依次为$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$. 已知$AX=0$与$BX=0$的解相同, 则$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$以相同的系数线性表示零向量. 如果将$\beta_j$与$\alpha_j$对应, 则在此对应关系下, $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$之间有一致的线性表示关系, 进而有一致的极大线性无关组. 例如, 设$n=3$, 若对$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$有极大线性无关组$\alpha_1,\alpha_2$和线性表示关系$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$, 则对$\beta_1,\beta_2,\beta_3$同样有极大线性无关组$\beta_1,\beta_2$和线性表示关系$\beta_3=\beta_1+\beta_2$.

最后, 对一个简化上阶梯阵R, 显然主列是相应的自然基的一个子组, 因此是线性无关的, 而其余列都可以由主列线性表示. 所以R的主列就构成了R的列向量组的一个极大线性无关组. 而任何一个矩阵都可以通过初等行变换化为简化上阶梯阵. 不妨设R就是A所化成的简化上阶梯阵, 则R的主列所对应的A的列, 就构成了A的列向量组的一个极大线性无关组, 且可由R的主列对其余列的线性表示对应得到A的其他列如何由极大线性无关组线性表示.

以下面的例子具体来说明计算一组向量的线性相关性的方法.

例：求向量组$\alpha_1=(1,0,1,0)^T$，$\alpha_2=(2,1,-3,7)^T$，$\alpha_3=(4,1,-1,7)^T$，$\alpha_4=(3,1,0,3)^T$，$\alpha_5=(4,1,3,-1)^T$，的秩及一个极大线性无关组，并用他们线性表示其余向量.

解：通过消元法，将矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_5)$化为简化上阶梯阵$R=\begin{pmatrix}1&0&2&0&0\\0&1&1&0&-1\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$.

此简化上阶梯阵有3个主元，所在的第1,2,4列为主列，构成R的列向量组的一个极大线性无关组，对应的得到$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$为$A$的列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_5$的一个极大线性无关组，由此知道$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_5)=3$. 观察$R$中的第3列可以被第1,2,4列以系数2,1,0线性表示，对应得到$\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2$；$R$中的第5列可以被第1,2,4列以系数$0,-1,2$线性表示，对应得到$\alpha_5=-\alpha_2+2\alpha_4$.

不难验证下面给出的矩阵的秩和上阶梯阵的关系.

命题 11: 设矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$消元得到上阶梯阵$U$，进一步消元得到简化上阶梯阵$R$，则

$$r(A)=U\text{的主元个数}=U\text{的非零行数}=R\text{的主元个数}=R\text{的非零行数}.$$

3.2 齐次线性方程组$AX=0$的求解

若$AX=0$有非零解，设Y为$AX=0$的一个非零解，则对任意数k，显然kX也为$AX=0$的解. 由k的任意性知，$AX=0$有无穷多解. 设$X_1,X_2\cdots,X_s$是$AX=0$的解向量全体的一个极大线性无关组，则称$X_1,X_2\cdots,X_s$为$AX=0$的一个**基础解系**.

命题 1: 设$X_1,X_2\cdots,X_s$为$AX=0$的一个基础解系，则

Y为$AX=0$的一个解 <=> 存在系数$c_1,c_2\cdots,c_s$使得$Y=c_1X_1+c_2X_2+\cdots+c_sX_s$.

证明： (=>) 若Y为$AX=0$的一个解，由极大线性无关组的定义知，$X_1,\cdots,X_s$可以线性表示任意$AX=0$的解，则$X_1,\cdots,X_s$可线性表示Y.

(<=) 若存在系数$c_1,c_2\cdots,c_s$使得$Y=c_1X_1+c_2X_2+\cdots+c_sX_s$，易证$AY=c_1AX_1+c_2AX_2+\cdots+c_sAX_s=0$，则$Y$为$AX=0$的一个解. □

设$X_1,X_2\cdots,X_s$为$AX=0$的一个基础解系，称线性组合

$$k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_sX_s$$

其中$k_1,k_2\cdots,k_s$为任意系数，为齐次方程组$AX=0$的**通解**.

由命题 1 知，$AX=0$的解都具有$AX=0$的通解的形式，且具有通解形式的向量都是$AX=0$的解. 因此要求出$AX=0$的全部解，也就是给出$AX=0$的通解. 而要给出$AX=0$的通解，就是要给出$AX=0$的任意一个基础解系.

设A为$m\times n$型矩阵，考虑方程组$AX=b$. 若$r(A)=n$，则$AX=0$只有零解，并不存在基础解系. 在$r(A)=r<n$的前提下，借助下面的例子，我们给出得到方程组$AX=0$的一个基础解系的方法.

设

$$A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 5 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 3 & -3\end{pmatrix},$$

则A通过初等行变换可化成的简化上阶梯阵

$$R=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

容易看到R有$r=2$个主元. 我们称主元所在的列为**主列**，主列所对应的未知量为主未知量，其余的未知量的为自由未知量. R的两个主元分别在第1,2列，对应X中的2个主未知量x_1,x_2. 已知未知量一共有$n=4$个，主未知量有2个，则自由未知量分别为x_3,x_4，其个数为

$$s=n-r=4-2=2.$$

通过简化上阶梯阵R，得到与$AX=0$同解的方程组$RX=0$. 在$RX=0$中不难看出，当自由未知量取值确定后，主未知量取值也就确定了. 令自由未知量x_3,x_4依次取1，其余取0，就得到主未知量x_1,x_2的两组取值，进而得到$s=2$个解向量，依次为

$$X_1=(-2,1,1,0)^T,\qquad X_2=(4,-5,0,1)^T.$$

下面说明X_1,X_2为$AX=0$的一个基础解系. 首先，因为X_1,X_2的第三个和第四个分量是(1,0)和(0,1)，可看作是$\mathbf{R}^2$的自然基，只能以全为0的系数表示零向量，所以X_1,X_2是线性无关的.

然后说明X_1,X_2以线性表示$AX=0$的全部解向量. 对$AX=0$的任意一个解$\alpha=(a_1,a_2,a_3,a_4)^T$，可知$\alpha$在自由未知量处的取值为$x_3=a_3,x_4=a_4$. 令

$$\beta=a_3X_1+a_4X_2.$$

显然β为$AX=0$的一个解，且在自由未知量处的取值与α相同. 由于自由未知量的取值决定了主未知量的取值，因此

$$\beta=\alpha,$$

也就是说，α可以被X_1, X_2线性表示.

所以X_1, X_2为$AX=0$的一个基础解系. 方程组$AX=0$的通解就是

$$\mathrm{X}=k_1(-2,1,1,0)^T+k_2(4,-5,0,1)^T.$$

以上讨论中有一个非常重要的结果，归纳如下

定理 2: 对$m\times n$矩阵A，若$r(A)=r<n$，则方程组$AX=0$的基础解系存在且向量个数为$s=n-r$.

3.3 非齐次线性方程组$AX=b$的求解

$AX=0$的解与$AX=b$的解是密切联系的. 通过下面两个命题给出这种联系.

命题 3: $AX=b$的任意两个解的差是$AX=0$的一个解.

证明: 设向量α,β是$AX=b$的任意两个解，也就是$A\alpha=b, A\beta=b$.

则有

$$A(\alpha-\beta)=A\alpha-A\beta=b-b=0.$$ □

命题 4: $AX=b$的任意一个解与$AX=0$的任意一个解的和为$AX=b$的一个解.

证明: 设向量α为$AX=b$的任意一个解，向量γ为$AX=0$的任意一个解. 有$A(\alpha+\gamma)=A\alpha+A\gamma=b+0=b$，所以$\alpha+\gamma$为$AX=b$的一个解. □

推论 4.1: 若$AX=b$有多个解，则$AX=b$有无穷多解.

证明: 若$AX=b$有两个不同的解，由命题 3 知$AX=0$有非零解，从而有无穷多解，由命题 4 知$AX=b$有无穷多解.

仿照齐次方程组的通解，给出非齐次方程组的通解如下.

设$\mathrm{AX}=\mathrm{b}$为非齐次方程组，称$\mathrm{AX}=\mathrm{b}$的一个给定的解为$\mathrm{AX}=\mathrm{b}$的一个**特解**.

定理 5: 设$X_1, X_2\cdots, X_s$为$AX=0$的一个基础解系，X_0为$\mathrm{AX}=\mathrm{b}$的一个特解，则

Z为$AX=b$的一个解 <=> 存在系数$\mathrm{c}_1, c_2\cdots, \mathrm{c}_s$使得$Z=X_0+c_1\mathrm{X}_1+c_2\mathrm{X}_2+\cdots+c_s\mathrm{X}_s$.

证明: (<=) 若存在系数$\mathrm{c}_1, c_2\cdots, \mathrm{c}_s$使得$\mathrm{Z}=X_0+c_1\mathrm{X}_1+c_2\mathrm{X}_2+\cdots+c_s\mathrm{X}_s$，由命题 4 知，Z为$AX=b$的解.

(=>) 若Z为$AX=b$的一个解，由命题 3 知，$(\mathrm{Z}-X_0)$为$X=0$的一个解，因为$\mathrm{X}_1,\cdots,\mathrm{X}_s$可以线性表示任意$AX=0$的解，则存在系数$\mathrm{c}_1, c_2\cdots, \mathrm{c}_s$，使得$\mathrm{Z}-X_0=c_1\mathrm{X}_1+c_2\mathrm{X}_2+\cdots+c_s\mathrm{X}_s$，进而有$Z=X_0+c_1\mathrm{X}_1+c_2\mathrm{X}_2+\cdots+c_s\mathrm{X}_s$. □

设$X_1, X_2 \cdots, X_s$为$AX=0$的一个基础解系，X_0为$AX=b$的一个特解，称线性组合

$$X_0+k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_sX_s$$

其中$k_1, k_2 \cdots, k_s$为任意系数，为非齐次方程组$AX=b$的**通解**.

由定理 5 知，非齐次方程组$AX=b$的解都具有$AX=b$的通解的形式，且具有$AX=$ b的通解形式的向量都是$AX=b$的解，而要给出$AX=b$的通解，就是要给出$AX=b$的一个特解和$AX=0$的一个基础解系.

对一个有解的非齐次方程组$AX=b$，其中A为$m\times n$型矩阵，结合下面的例子，说明给出$AX=b$的一个特解的方法.

设

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&2\\0&-1&-2&-2\\3&2&1&1\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-1\end{pmatrix},$$

则非齐次方程组$AX=b$所对应的增广矩阵为

$$(A|b)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&-2&-2&-1\\3&2&1&1&-1\end{pmatrix}.$$

通过矩阵的高斯消元法，$(A|b)$可化为一个上阶梯阵

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

由之不难看出，$r(A)=r(A|b)<n$，满足非齐次方程组有无穷多解的判定条件. 继续化简，得到的简化上阶梯阵为

$$(R|b')=\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

其中不难发现，

$$R=\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&2&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

就是A通过矩阵的高斯消元法所化成的简化上阶梯阵.

因为R有$r=2$个主元，对应未知向量$X=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$中的2个主未知量x_1,x_2，其余$n-r=2$个未知量x_3,x_4为自由未知量. 通过简化上阶梯阵$(R|b')$，得到与$AX=b$同解的方程组$RX=b'$. 在$RX=b'$中不难看出，自由未知量的取值唯一决定了主未知量的取值. 当自由未知量取值确定后，主未知量取值也就确定了. 令自由未知量全部取0，就得到非齐次方程组$AX=b$的一个解向量$X_0=(-1,1,0,0)^T$，也就是$AX=b$的一个特解.

需要注意的是，自由未知量全取 0 只是为了运算简单. 如果令自由未知量取任意其它值，同样可以得到$AX=b$的其它特解.

在求$AX=b$的特解的过程中我们观察到了A的秩$r(A)$小于n. 在 2.3 节中我们已经知道，只有在$r(A)$小于n时，$AX=0$才会存在非零解，进而存在一个基础解系. 在 3.2 节中已经学习了如何求$AX=0$的一个基础解系：令自由未知量依次取1，其余取0，得到主未知量的值，进而依次得到$AX=0$的一个基础解系的解向量

$$X_1=(1,-2,0,1)^T,\qquad X_2=(1,-2,1,0)^T.$$

由 3.3 节中非齐次方程组的解的结构知，$AX=b$的通解为

$$(-1,1,0,0)^T+k_1(1,-2,0,1)^T+k_2(1,-2,1,0)^T,$$

其中k_1,k_2为任意常数.