一、填空题(共 6 题，每题 3 分，共 18 分)

1. 计算 $\begin{vmatrix} 0 & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & 0 \\ \boldsymbol{a} & 0 & 0 & \boldsymbol{b} \\ 0 & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} & 0 \\ \boldsymbol{c} & 0 & 0 & \boldsymbol{d} \end{vmatrix} =$________________.

2. 设 $A=(a_{ij})$是三阶可逆矩阵，$|A|$为其行列式，A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式，且满足

$A_{ij}+a_{ij}=0(i,j=1,2,3)$，则$|A|$=___________.

3. 设α 为3×1矩阵，若$\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，则$\alpha^T\alpha=$_______.

4. 若线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2=-a_1 \\ x_2+x_3=a_2 \\ x_3+x_4=-a_3 \\ x_4+x_1=a_4 \end{cases}$ 有解，则常数a_1,a_2,a_3,a_4应满足条件__________。

5. 设二次型 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)=\boldsymbol{x}_1^2+\boldsymbol{x}_2^2+\boldsymbol{x}_3^2+4\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2+4\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_3+4\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_3$，则二次型 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)$的规范型为_

6. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为$2,-2,1$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$，其中$\boldsymbol{I}$ 为 3 阶单位阵，则行列式

$|\boldsymbol{B}|=$ _____________.

二、选择题

1. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关的充要条件是（　　）

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 均不为零向量

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中任意两个向量的分量不成比例

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中任意向量不能由其余$m-1$向量线性表示

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 有一部分向量线性无关.

2. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 是 4 阶方阵，若 $(1,0,1,0)^T$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，则

$A^*x=0$的基础解系可为（　　）

(A) α_1,α_2　(B) α_1,α_3　(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　(D) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

3. 设 A 是 3 阶方阵, 将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B，再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C，则满足 $AQ=C$

的可逆矩阵Q为（　　）

（A）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.　　　（B）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

（C）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.　　　（D）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. 设A为$m\times n$矩阵，则线性方程组为$Ax=b$有解的充分条件是（　　）

(A) A的秩小于A的行数　　　(B) A是列满秩的

(C) A是行满秩的　　　(D) A的秩小于A的列数

5. 设λ_1,λ_2是方阵A的两个不同的特征值，ξ,η是A的分别属于λ_1,λ_2的特征向量，则（　　）

（A）对任意$k_1\neq 0,k_2\neq 0$，$k_1\xi+k_2\eta$都是A的特征向量

（B）存在常数$k_1\neq 0,k_2\neq 0$，使得$k_1\xi+k_2\eta$是A的特征向量

（C）当$k_1\neq 0,k_2\neq 0$时，$k_1\xi+k_2\eta$不可能是A的特征向量

（D）存在唯一的一组常数$k_1\neq 0,k_2\neq 0$，使得$k_1\xi+k_2\eta$是A的特征向量

6. 设二次型$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)$在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 下的标准型为$2\boldsymbol{y}_1^2+\boldsymbol{y}_2^2-\boldsymbol{y}_3^2$，其中

$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ 若$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$, 则 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)$在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准型为

(A) $2\boldsymbol{y}_1^2-\boldsymbol{y}_2^2+\boldsymbol{y}_3^2$　　(B) $2\boldsymbol{y}_1^2+\boldsymbol{y}_2^2-\boldsymbol{y}_3^2$

(C) $2\boldsymbol{y}_1^2-\boldsymbol{y}_2^2-\boldsymbol{y}_3^2$　　(D) $2\boldsymbol{y}_1^2+\boldsymbol{y}_2^2+\boldsymbol{y}_3^2$

下列两题为多选题

7. 线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵是4×5 矩阵，且$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关，则下列正确的是(　　)

(A) 齐次线性方程组$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X}=0$ 只有零解；

(B) 齐次线性方程组$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=0$ 必有非零解；

(C) 任意$\boldsymbol{b}$，线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 必有无穷多解；

(D) 任意$\boldsymbol{b}$，线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 必有唯一解；

(E) 线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$有解，且有无穷多解.

8. 设$\boldsymbol{A}$ 和$\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵，且$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$相似，则下列正确的是（ ）

(A) $\boldsymbol{A}^T$ 与 $\boldsymbol{B}^T$相似 (B) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$相似

(C) $\boldsymbol{A}^2$ 与 $\boldsymbol{B}^2$相似 (D) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^T$相似

(E) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$相似

三、计算题

1.(6 分) 设$|\boldsymbol{D}_n|=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \boldsymbol{a} \end{vmatrix}$，其中对角线上元素都是$a$，未写出的元素都是 0; 计算$|\boldsymbol{D}_n|$

2.(4 分) 设方阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=0$，证明$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$可逆，并求$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})^{-1}$.

3.(6 分)求向量组$\alpha_1=(1,0,1,0)^T,\alpha_2=(2,1,-3,7)^T,\alpha_3=(4,1,-1,7)^T$,

$\alpha_4=(3,1,0,3)^T,\alpha_5=(4,1,3,-1)^T$的秩及其一个极大线性无关组，并用它们表示其余向量。

4.(8 分) 已知R^3的两组基为$\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T$，$\alpha_3=(0,0,1)^T$；$\beta_1=(1,0,1)^T,\beta_2=(0,1,-1)^T$，$\beta_3=(1,2,0)^T$

求基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵；若$\gamma$在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标为

（$1,-2,-$ $)^T$，求γ在基β_1,β_2,β_3下的坐标.

四、证明题

设$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_p$是齐次线性方程组$Ax=0$的一个基础解系，向量β满足$A\beta\neq0$，证明：向量组

$\beta,\xi_1+\beta,\xi_2+\beta,\ldots,\xi_p+\beta$线性无关。

五、解方程组

已知方程组$\begin{cases} 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1 \end{cases}$ 其系数矩阵的秩为 2，

求：

(1) a,b 的值；

(2) 这个方程组的一个基础解系及其一般解。

六、化二次型为标准型

已知实二次型$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)=(1-\boldsymbol{a})\boldsymbol{x}_1^2+(1-\boldsymbol{a})\boldsymbol{x}_2^2+2\boldsymbol{x}_3^2+2(1+\boldsymbol{a})\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2$的秩为 2.

(1). 求实数$\boldsymbol{a}$的值；(2). 利用正交变换法将二次型变成标准型，并写出相应的正交矩阵.