



IMT Atlantique
Bretagne-Pays de la Loire
École Mines-Télécom

FOCUS PHYSIQUE

MÉCANIQUE DES FLUIDES

CHAPITRE 1

DESSINE MOI UNE PARTICULE FLUIDE

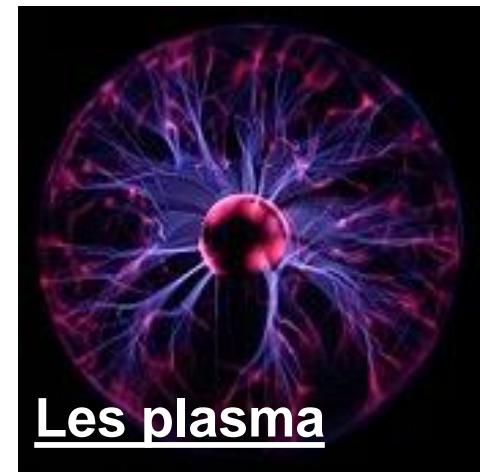


CHAPITRE 1 : DESSINE MOI UNE PARTICULE FLUIDE

3

1.1 Les fluides

Les fluides regroupent trois états de la matière caractérisés par la mobilité des particules (en opposition au solide)

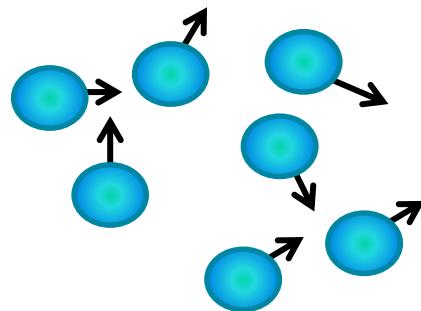


	liquide	gaz	plasma
Interaction inter-particule	Non-négligeable	Quasi-négligeable	Non-négligeable
caractéristiques	Interface, dense	dispersifs	Ionisé, >99% de la matière

1.1 Les fluides

Que partagent en commun ces trois états fluides?

Dynamique particulaire



Au niveau microscopique, les particules peuvent se déplacer sur plusieurs distances atomiques/moléculaires

Les particules ont un mouvement désordonné et échangent continuellement de l'énergie entre elles par des collisions ou des interactions à distance

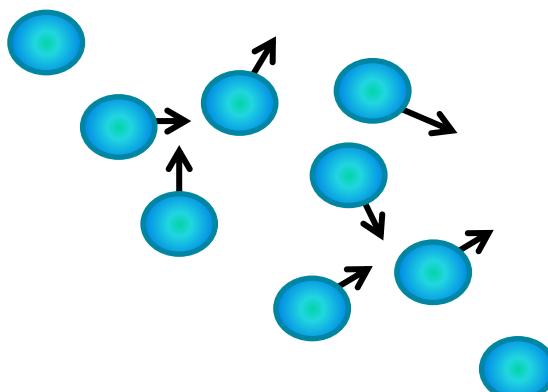
CHAPITRE 1 : DESSINE MOI UNE PARTICULE FLUIDE

5

1.2 Du micro au macro

Comment décrire un fluide?

Dynamique particulaire



$10^{-10} - 10^{-9}\text{m}$

?

Ecoulements



10^{-2}m

10^6m

Microscopique

Macroscopique

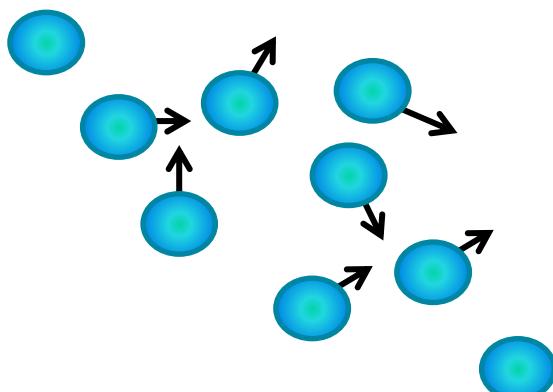
CHAPITRE 1 : DESSINE MOI UNE PARTICULE FLUIDE

6

1.2 Du micro au macro

Comment décrire un fluide?

Dynamique particulaire



$10^{-10} - 10^{-9}\text{m}$

?

Mésoscopique
Échelle intermédiaire

Microscopique

Ecoulements



10^{-2}m

10^6m

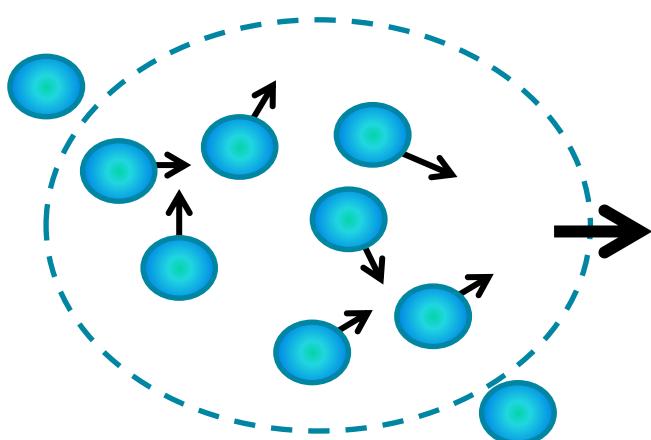
CHAPITRE 1 : DESSINE MOI UNE PARTICULE FLUIDE

7

1.2 Du micro au macro

Comment décrire un fluide?

Dynamique particulaire

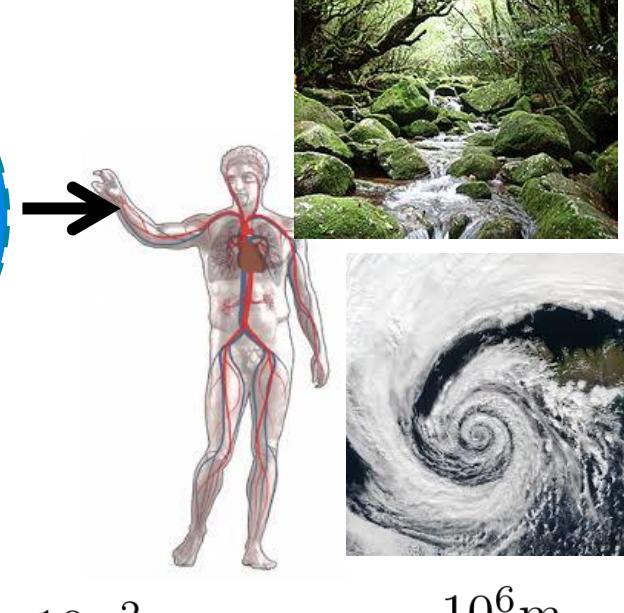


$10^{-10} - 10^{-9}\text{m}$

Particule fluide



Ecoulements



Microscopique

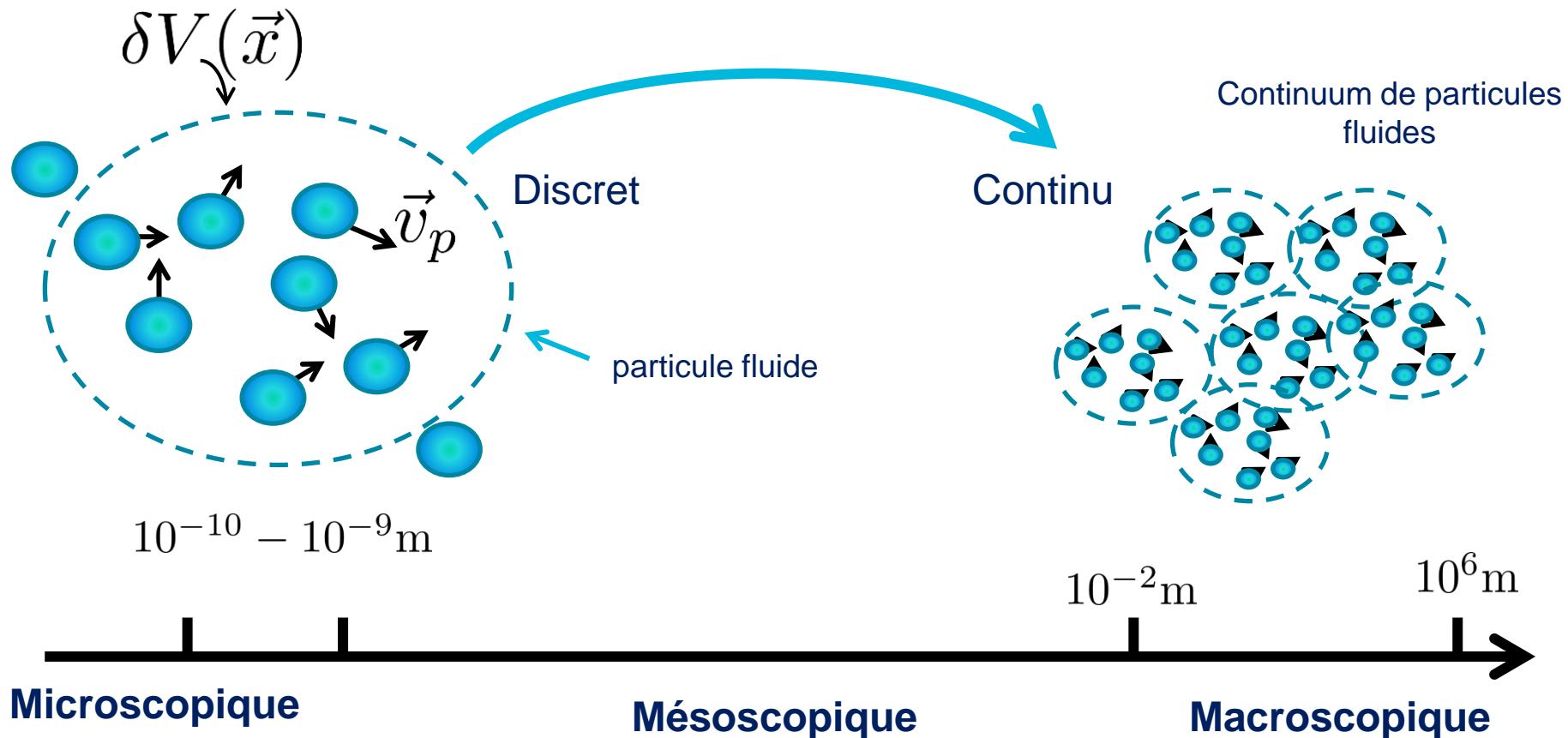
Mésoscopique

Macroscopique

CHAPITRE 1 : DESSINE MOI UNE PARTICULE FLUIDE

8

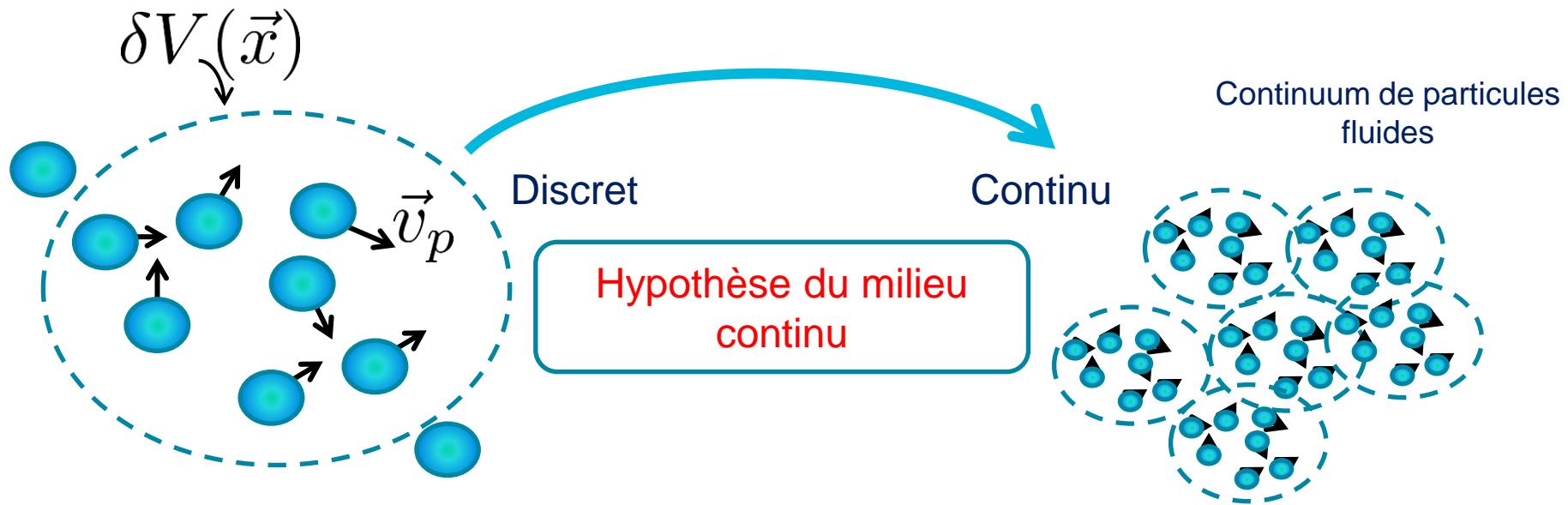
1.2 Du micro au macro



CHAPITRE 1 : DESSINE MOI UNE PARTICULE FLUIDE

9

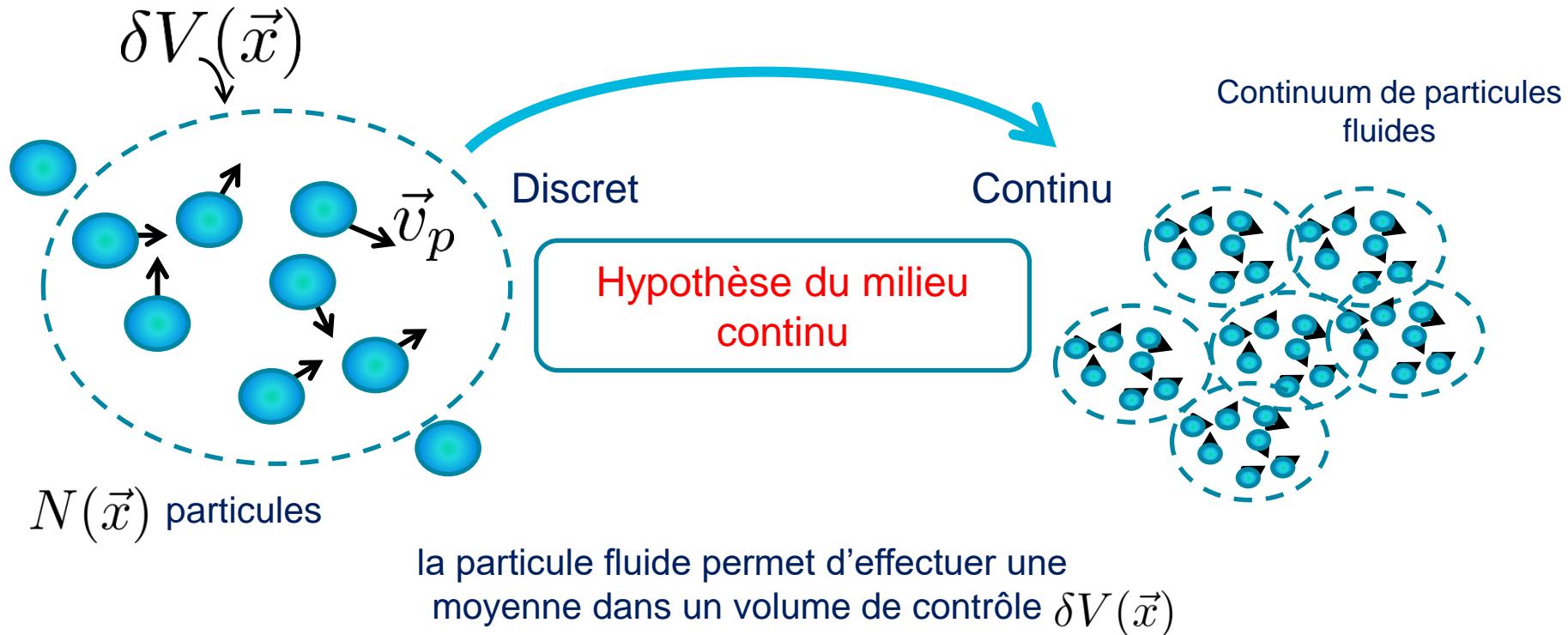
1.2 Du micro au macro



CHAPITRE 1 : DESSINE MOI UNE PARTICULE FLUIDE

10

1.2 Du micro au macro



Vitesse particulaire

$$\vec{v}_p$$

Masse des particules

$$\delta m$$

$$\vec{u}(\vec{x}) = \frac{1}{N} \sum \vec{v}_p$$

$$\rho(\vec{x}) = \frac{1}{\delta V} \sum \delta m$$

Champ de vitesse local

$$\vec{u}(\vec{x})$$

Champ de densité massique

$$\rho(\vec{x})$$

CHAPITRE 1 : DESSINE MOI UNE PARTICULE FLUIDE

11

1.2 Du micro au macro

Champ de vitesse local

$\vec{u}(\vec{x})$: Il est continu et différentiable

$\frac{\partial}{\partial x}$

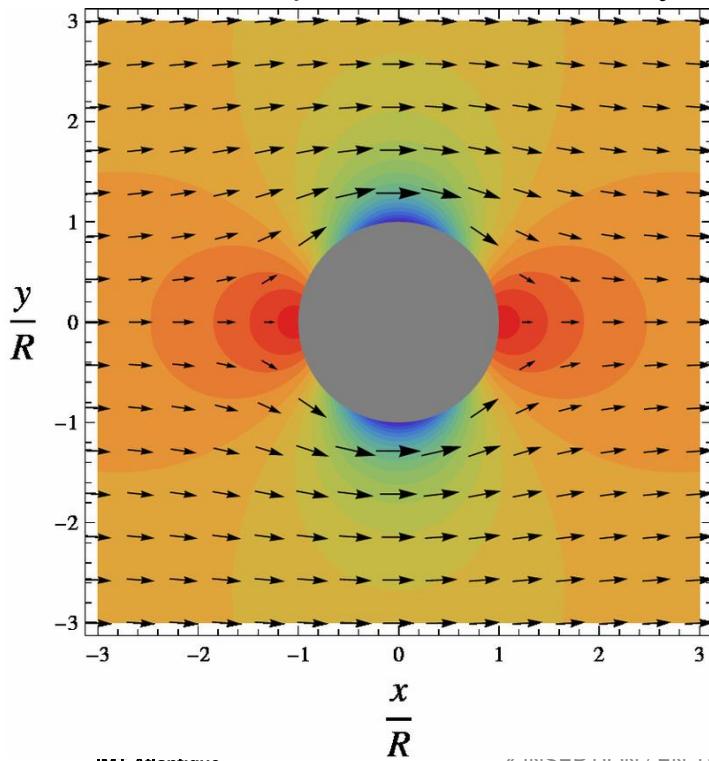
cinématique

$\vec{u}(\vec{x}, t)$: il dépend du temps

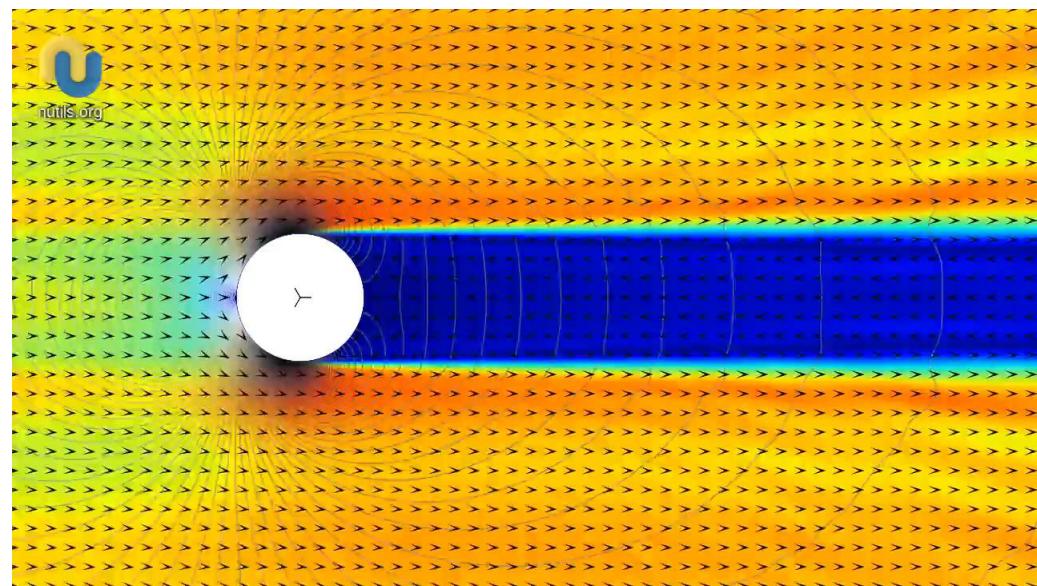
$\frac{\partial}{\partial t}$

dynamique

Ecoulement potentiel autour d'un cylindre



Ecoulement réel autour d'un cylindre



CHAPITRE 1 : DESSINE MOI UNE PARTICULE FLUIDE

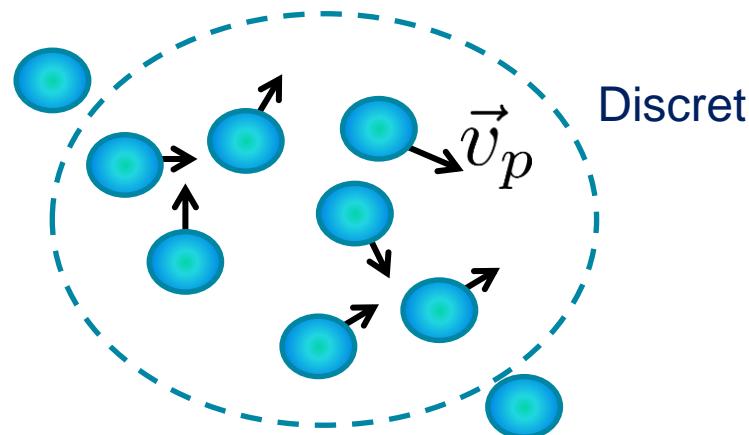
12

1.3 Dynamique de l'écoulement

Mécanique des fluides: prédire la vitesse de l'écoulement $\vec{u}(\vec{x})$

Principe fondamental de la dynamique (une particule)

$$\frac{d}{dt}(\delta m \vec{v}_p) = \sum f_v$$



CHAPITRE 1 : DESSINE MOI UNE PARTICULE FLUIDE

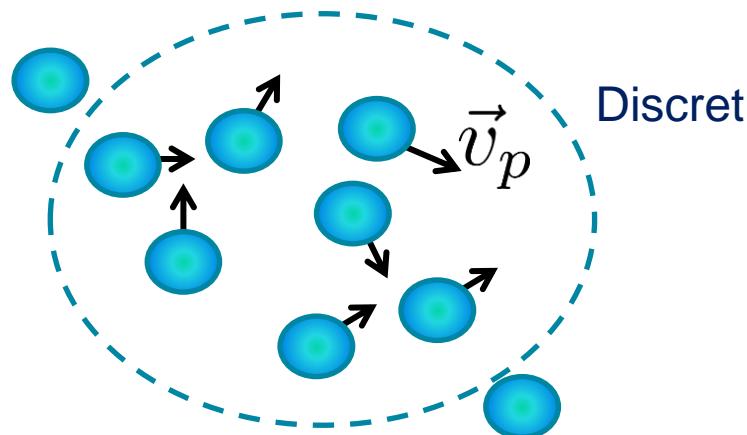
13

1.3 Dynamique de l'écoulement

Mécanique des fluides: prédire la vitesse de l'écoulement $\vec{u}(\vec{x})$

Principe fondamental de la dynamique (une particule)

$$\frac{d}{dt}(\delta m \vec{v}_p) = \sum f_v$$



Pour les effets spéciaux

Visuellement convaincant, physiquement insatisfaisant



CHAPITRE 1 : DESSINE MOI UNE PARTICULE FLUIDE

14

1.3 Dynamique de l'écoulement

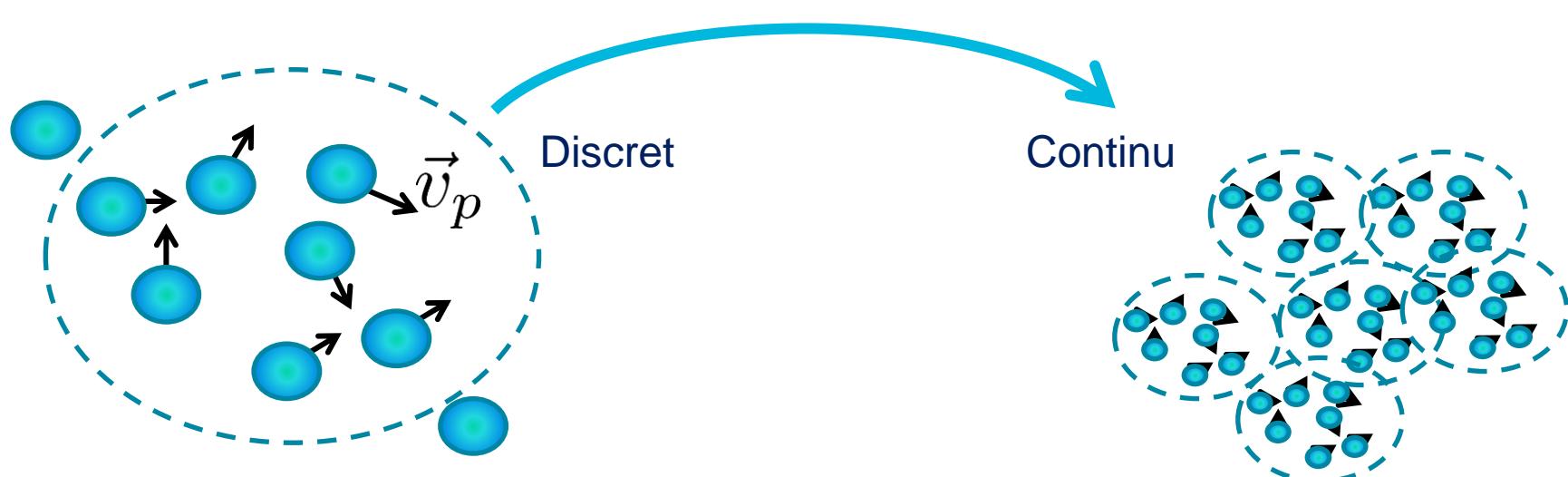
Mécanique des fluides: prédire la vitesse de l'écoulement $\vec{u}(\vec{x})$

Principe fondamental de la dynamique (une particule)

$$\frac{d}{dt}(\delta m \vec{v}_p) = \sum f_v$$

Équations de Navier-Stokes

1. Conservation de la masse
2. Conservation de la quantité de mouvement
3. + Bilan des forces



1.3 Dynamique de l'écoulement

Mécanique des fluides: prédire la vitesse de l'écoulement $\vec{u}(\vec{x})$

Equations de Navier-Stokes

Hypothèses (que l'on vérifiera pendant tout le cours):

- 1) Incompressible: la densité volumique ne varie pas dans le temps et dans l'espace.
- 2) La rhéologie du fluide est newtonienne (pas d'élasticité, ni d'effet mémoire..etc)

1.3 Dynamique de l'écoulement

Mécanique des fluides: prédire la vitesse de l'écoulement $\vec{u}(\vec{x})$

Equations de Navier-Stokes

Hypothèses (que l'on vérifiera pendant tout le cours):

- 1) Incompressible: la densité volumique ne varie pas dans le temps et dans l'espace.
- 2) La rhéologie du fluide est newtonienne (pas d'élasticité, ni d'effet mémoire..etc)

Conservation de la masse ρ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

1.3 Dynamique de l'écoulement

Mécanique des fluides: prédire la vitesse de l'écoulement $\vec{u}(\vec{x})$

Equations de Navier-Stokes

Hypothèses (que l'on vérifiera pendant tout le cours):

- 1) Incompressible: la densité volumique ne varie pas dans le temps et dans l'espace.
- 2) La rhéologie du fluide est newtonienne (pas d'élasticité, ni d'effet mémoire..etc)

Conservation de la masse ρ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

Equation bilan de la quantité de mouvement $\rho \vec{u}$

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla p + \vec{f}_p + \rho \nu \Delta \vec{u}$$

CHAPITRE 1 : DESSINE MOI UNE PARTICULE FLUIDE

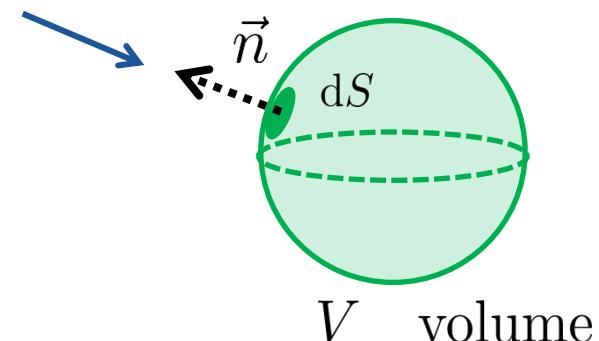
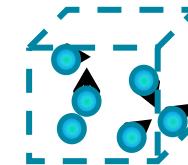
18

1.3 Dynamique de l'écoulement

Conservation de la masse

On considère la masse M associée à une densité volumique

$$\rho(\vec{x}) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{M(V)}{V}$$



CHAPITRE 1 : DESSINE MOI UNE PARTICULE FLUIDE

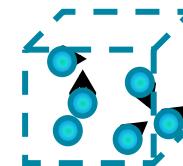
19

1.3 Dynamique de l'écoulement

Conservation de la masse

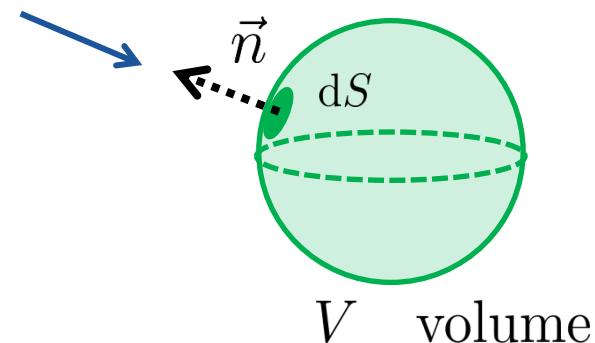
On considère la masse M associée à une densité volumique

$$\rho(\vec{x}) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{M(V)}{V}$$



L'équation de bilan global dans le volume V

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_V \rho dV \right) + \Phi_q = P$$



Variation temporelle
<0: diminution
>0: accumulation

Flux
<0: entrant
>0: sortant

Création/destruction
< 0: puits
>0: source

Apport externe

Apport interne

CHAPITRE 1 : DESSINE MOI UNE PARTICULE FLUIDE

20

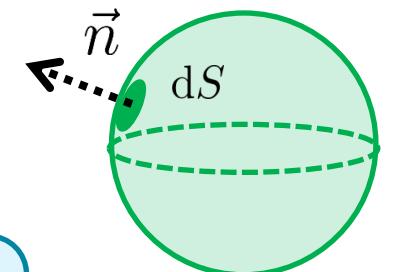
1.3 Dynamique de l'écoulement

Conservation de la masse

On considère une densité de flux « advection » $\vec{q} = \rho \vec{u}$ telle que le flux total

$$\Phi_q = \oint_S \vec{q} \cdot \vec{n} dS = \iiint ? dV$$

$$\vec{q} = \rho \vec{u}$$



Théorème de Green-Ostrogradsky (pour une surface fermée, connexe)

$$\oint \vec{q} \cdot \vec{n} dS = \iiint (\nabla \cdot (\rho \vec{u})) dV$$

1.3 Dynamique de l'écoulement

Conservation de la masse

L'équation de bilan global dans le volume V

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_V \rho dV \right) + \Phi_q = P \underset{\substack{|| \\ 0}}{\quad} \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{Pas de création de} \\ \text{masse} \\ \hline \end{array}$$

On obtient alors

$$\iiint \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) \right) dV = 0, \quad \forall V$$

Donc

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

CHAPITRE 1 : DESSINE MOI UNE PARTICULE FLUIDE

22

1.3 Dynamique de l'écoulement

Conservation de la masse

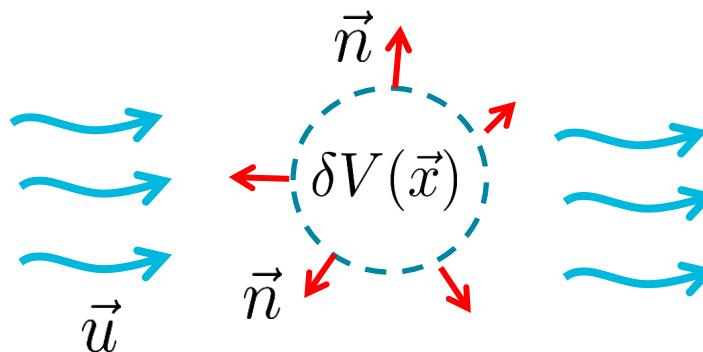
La divergence locale $\nabla \cdot \rho \vec{u}(\vec{x})$: bilan des flux entrants/sortant dans δV

Green-Ostrogradsky

$$\iiint_{\delta V} \nabla \cdot (\rho \vec{u}) \, dV = \oint_{\delta S} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS$$

Flux q

Flux massique à travers la surface $q = \rho \vec{u} \cdot \vec{n}$



CHAPITRE 1 : DESSINE MOI UNE PARTICULE FLUIDE

23

1.3 Dynamique de l'écoulement

Conservation de la masse

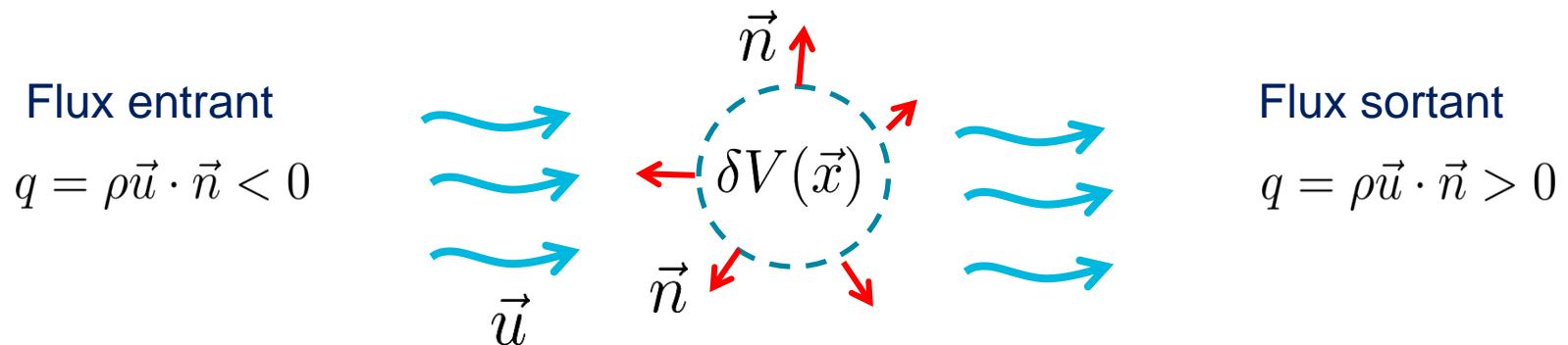
La divergence locale $\nabla \cdot \rho \vec{u}(\vec{x})$: bilan des flux entrants/sortant dans δV

Green-Ostrogradsky

$$\iiint_{\delta V} \nabla \cdot (\rho \vec{u}) \, dV = \oint_{\delta S} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS$$

Flux q

Flux massique à travers la surface $q = \rho \vec{u} \cdot \vec{n}$



1.3 Dynamique de l'écoulement

Si le fluide est incompressible

La divergence locale

$$\nabla \cdot \rho \vec{u}(\vec{x}) = 0$$

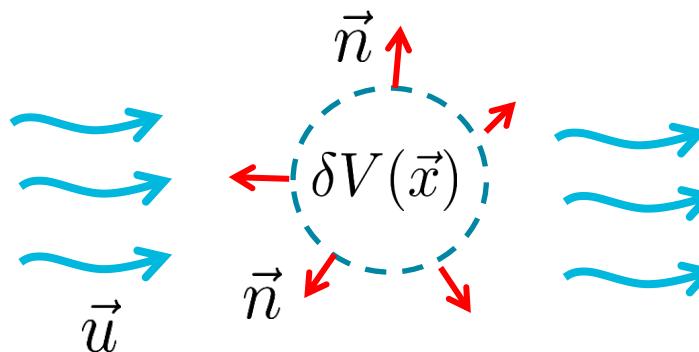
**Les flux entrants et sortant se compensent
Il n'y a pas d'accumulation de masse**

$$\oint_{\delta S} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS = Q_{m, \text{entrant}} + Q_{m, \text{sortant}} = 0$$

Flux massique à travers la surface $q = \rho \vec{u} \cdot \vec{n}$

Flux entrant

$$q = \rho \vec{u} \cdot \vec{n} < 0$$



Flux sortant

$$q = \rho \vec{u} \cdot \vec{n} > 0$$

1.3 Dynamique de l'écoulement

Mécanique des fluides: prédire la vitesse de l'écoulement $\vec{u}(\vec{x})$

Equations de Navier-Stokes

Equation bilan de la densité volumique de quantité de mouvement $\rho\vec{u}$

Opérateur d'advection

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla p + \rho \nu \Delta \vec{u} + \vec{f}_p$$

Conservation de la quantité de
mouvement

Somme des forces $\sum F$

1.3 Dynamique de l'écoulement

Mécanique des fluides: prédire la vitesse de l'écoulement $\vec{u}(\vec{x})$

Equations de Navier-Stokes

Equation bilan de la densité volumique de quantité de mouvement $\rho\vec{u}$

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla p + \rho \nu \Delta \vec{u} + \vec{f}_p$$



Conservation de la quantité de
mouvement

Somme des forces $\sum F$

$$\frac{D}{Dt} (\rho \vec{u})$$

Dérivée dans le repère de la particule fluide (Lagrangienne)

1.3 Dynamique de l'écoulement

Mécanique des fluides: prédire la vitesse de l'écoulement $\vec{u}(\vec{x})$

Equations de Navier-Stokes

Equation bilan de la densité volumique de quantité de mouvement $\rho\vec{u}$

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla p + \rho \nu \Delta \vec{u} + \vec{f}_p$$

Conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{D}{Dt} (\rho \vec{u})$$

Dérivée dans le repère de la particule fluide (Lagrangienne)

Somme des forces $\sum F$

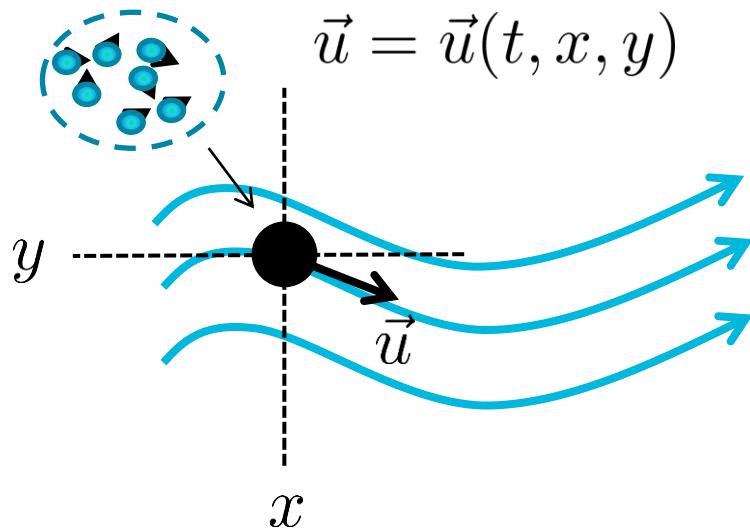
Force de pression $-\nabla p$

Force visqueuse $\rho \nu \Delta \vec{u}$

Force potentielle \vec{f}_p

1.4 Transport et advection

Equation de transport

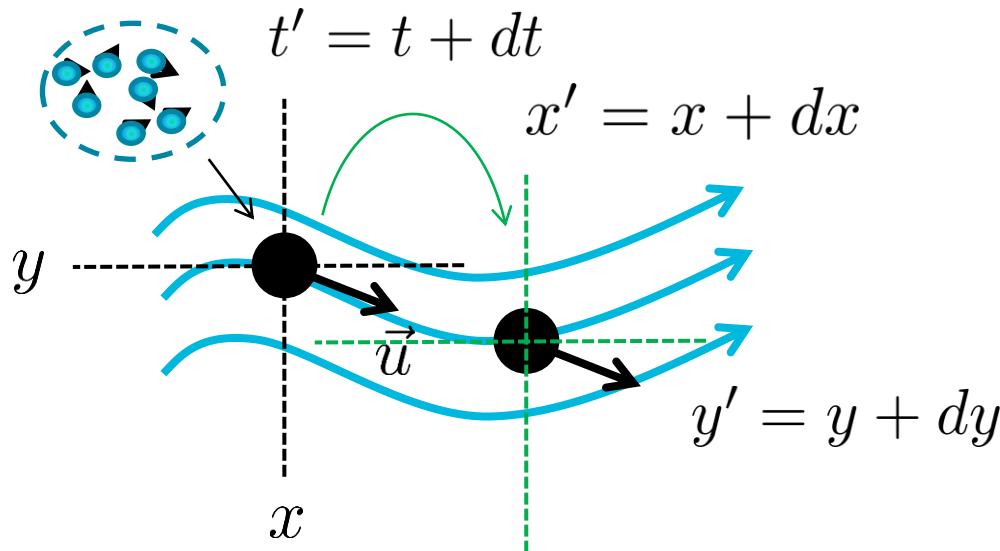


CHAPITRE 1 : DESSINE MOI UNE PARTICULE FLUIDE

29

1.4 Transport et advection

Equation de transport

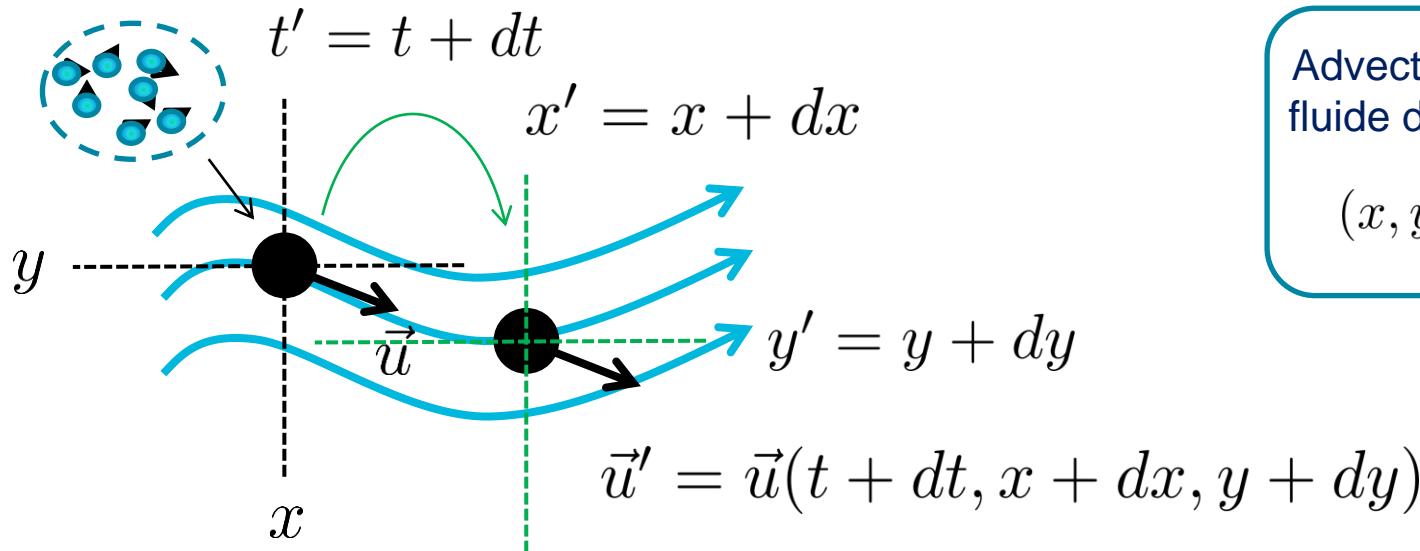


Advection de la particule
fluide de la position (2D)

(x, y) à (x', y')

1.4 Transport et advection

Equation de transport

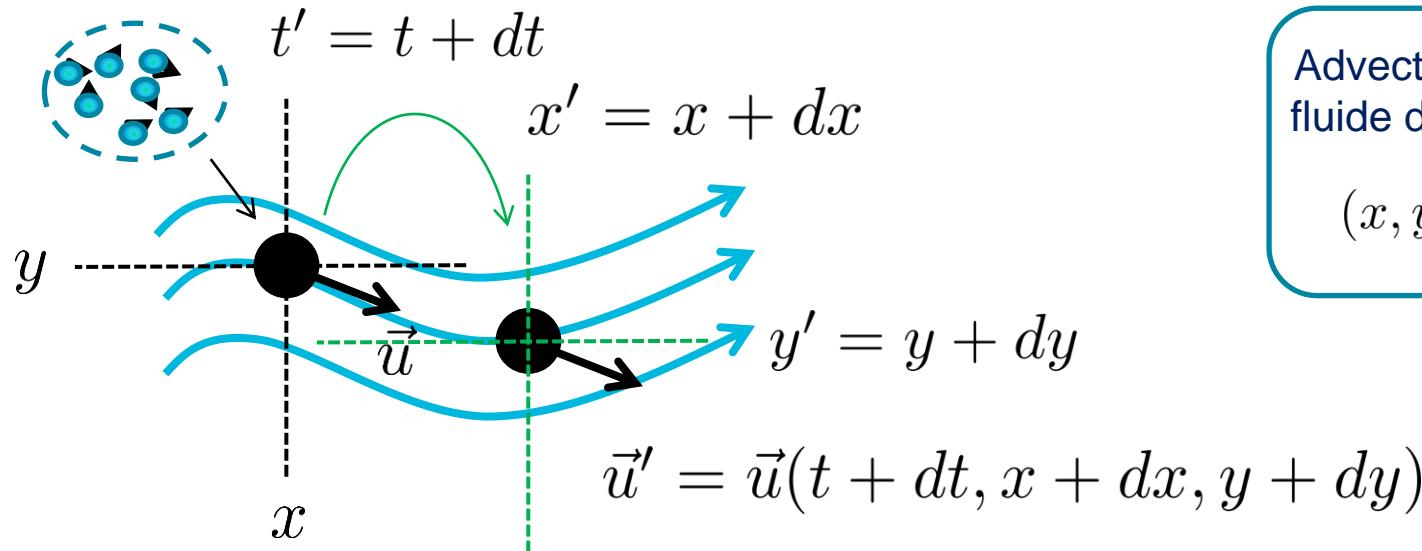


Advection de la particule
fluide de la position (2D)

(x, y) à (x', y')

1.4 Transport et advection

Equation de transport



Advection de la particule
fluide de la position (2D)

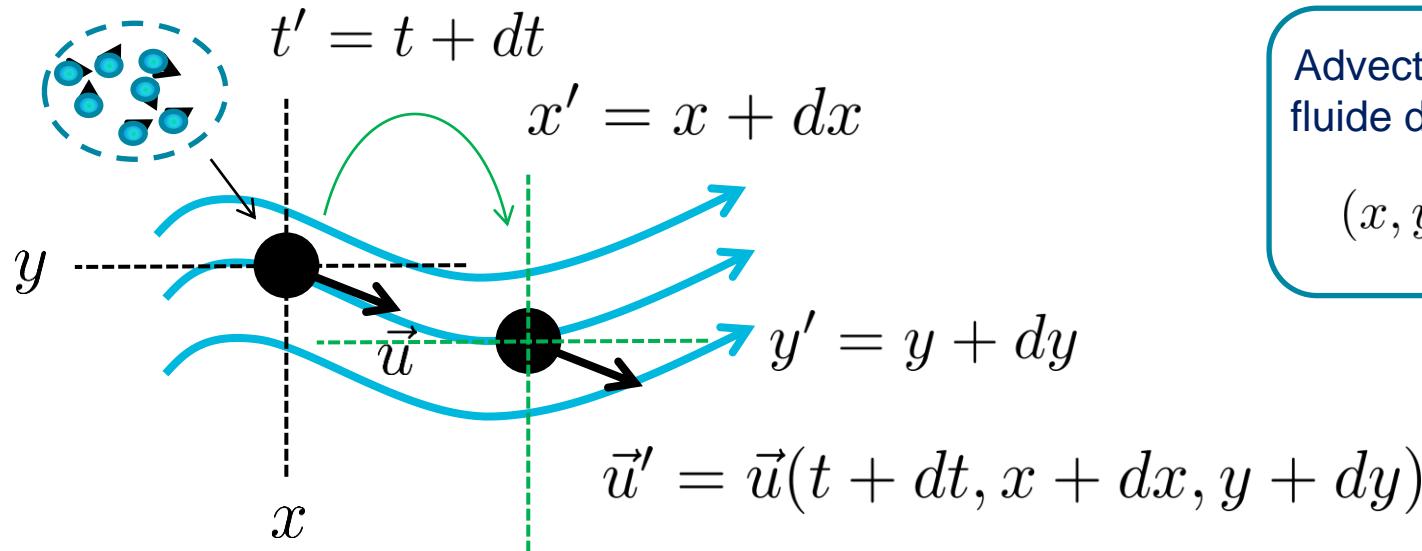
(x, y) à (x', y')

Variation de la vitesse (*différentielle de u pour chaque composante*)

$$d\vec{u} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} \right)_{(x,y)} dt + \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{u} \right)_{(t,y)} dx + \left(\frac{\partial}{\partial y} \vec{u} \right)_{(t,x)} dy$$

1.4 Transport et advection

Equation de transport



Advection de la particule
fluide de la position (2D)

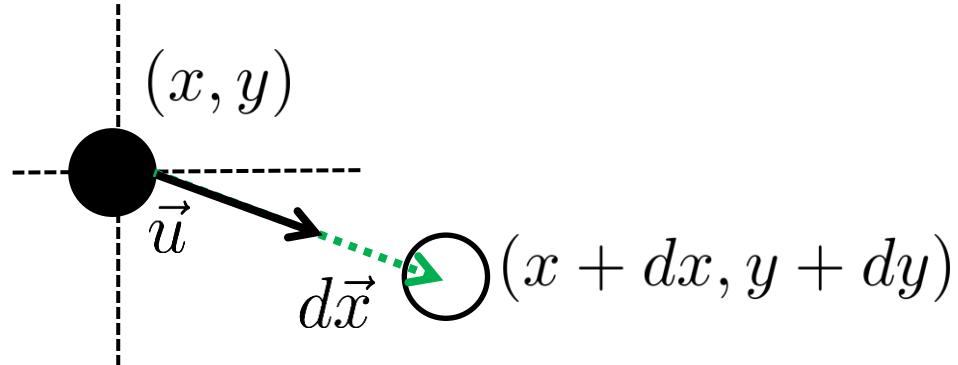
(x, y) à (x', y')

Variation de la vitesse (*différentielle de u pour chaque composante*)

$$d\vec{u} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} \right)_{(x,y)} dt + \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{u} \right)_{(t,y)} dx + \left(\frac{\partial}{\partial y} \vec{u} \right)_{(t,x)} dy$$

1.4 Transport et advection

Equation de transport

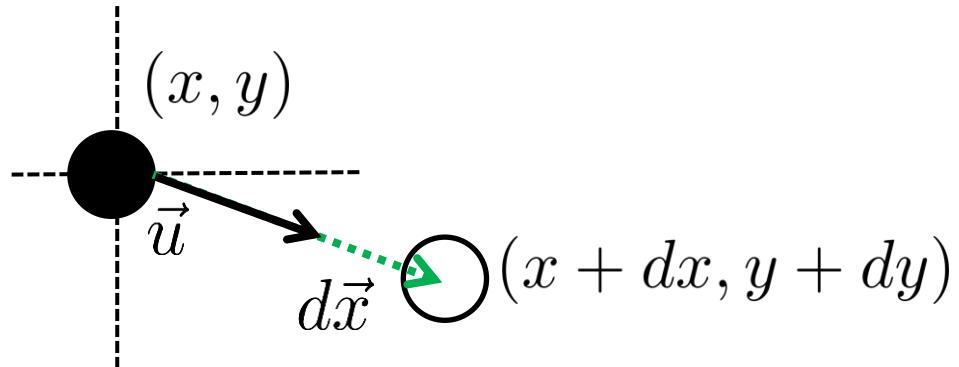


Variation spatiale dans la direction \vec{u}

$$d\vec{x} = \vec{u}(x, y, t)dt$$

1.4 Transport et advection

Equation de transport



Variation spatiale dans la direction \vec{u}

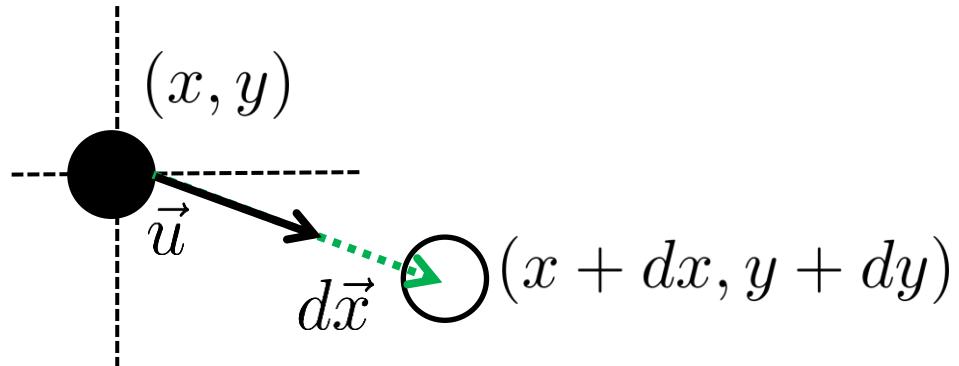
$$d\vec{x} = \vec{u}(x, y, t)dt$$

Variation spatiale de la vitesse (différentielle spatiale de u)

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{u} \right)_{(t,y)} dx + \left(\frac{\partial}{\partial y} \vec{u} \right)_{(t,x)} dy = d\vec{x} \cdot \nabla \vec{u} = dt (\vec{u} \cdot \nabla \vec{u})$$

1.4 Transport et advection

Equation de transport



Variation spatiale dans la direction \vec{u}

$$d\vec{x} = \vec{u}(x, y, t)dt$$

Variation spatiale de la vitesse (différentielle spatiale de u)

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{u} \right)_{(t,y)} dx + \left(\frac{\partial}{\partial y} \vec{u} \right)_{(t,x)} dy = d\vec{x} \cdot \nabla \vec{u} = dt (\vec{u} \cdot \nabla \vec{u})$$

Avec $(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = u_x \frac{\partial}{\partial x} \vec{u} + u_y \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}$

1.4 Transport et advection

Equation de transport

Finalement la variation de quantité de mouvement pendant une durée dt

$$\rho d\vec{u} = \left[\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} \right)_{(x,y)} + \rho \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{u} \right)_{(t,y)} u_x + \rho \left(\frac{\partial}{\partial y} \vec{u} \right)_{(t,x)} u_y \right] dt$$

1.4 Transport et advection

Equation de transport

Finalement la variation de quantité de mouvement pendant une durée dt

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} dt = \left[\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} \right)_{(x,y)} + \rho \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{u} \right)_{(t,y)} u_x + \rho \left(\frac{\partial}{\partial y} \vec{u} \right)_{(t,x)} u_y \right] dt$$

L'écoulement a transporté
la particule fluide:
Dérivée particulaire

$$\rho \frac{D}{Dt} \vec{u} = \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$$

Instationnaire

Advection
/convection

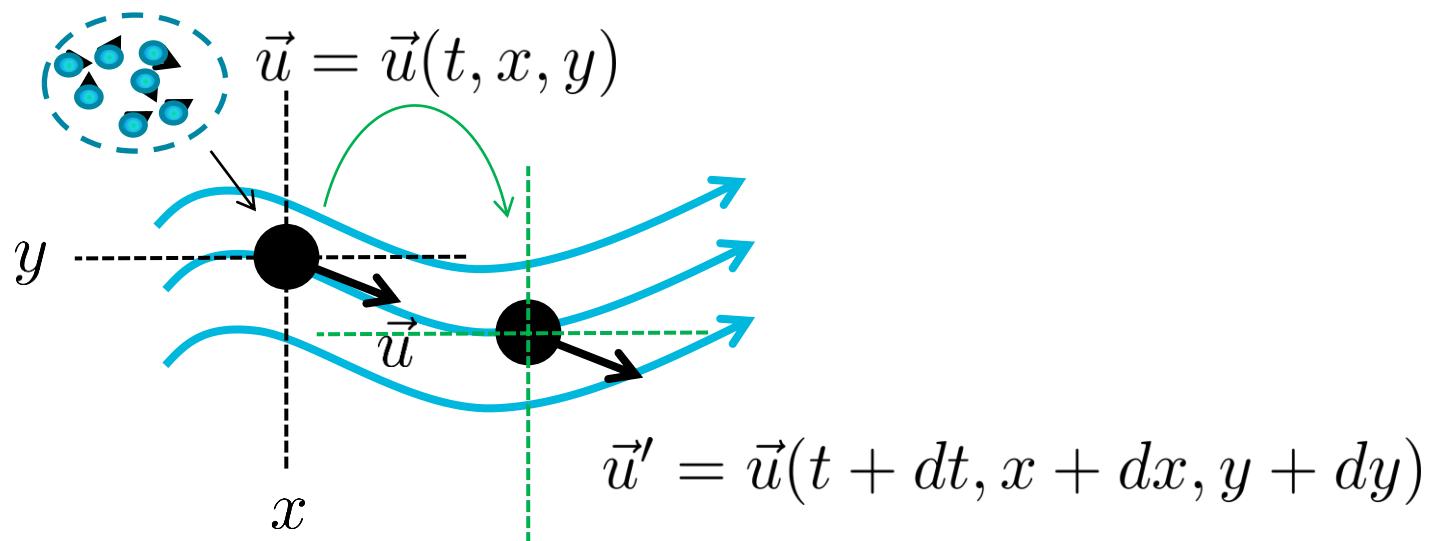
1.4 Transport et advection

Equation de transport

$$\rho \frac{D}{Dt} \vec{u} = \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$$

Dérivée à la « Newton » le long d'une trajectoire:
Incalculable en pratique

Dérivées d'un champ de vecteur:
Facilement estimable

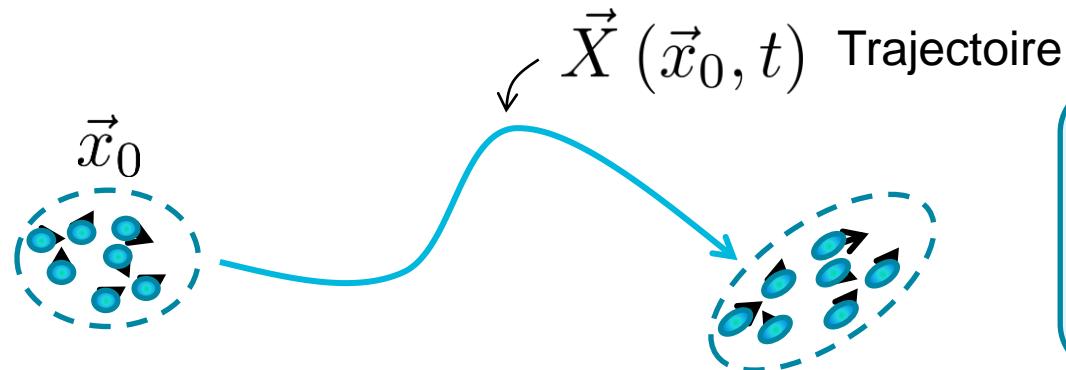


1.4 Transport et advection

Equation de transport

$$\rho \frac{D}{Dt} \vec{u} = \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$$

Dérivée particulaire: Point de vue lagrangien



$$\vec{u}(\vec{x}_0, t) = \vec{u}\left(\vec{X}(\vec{x}_0, t), t\right)$$

La dérivée quantifie les variations d'une particule fluide le long de sa trajectoire qui ne dépend que la position initiale et du temps

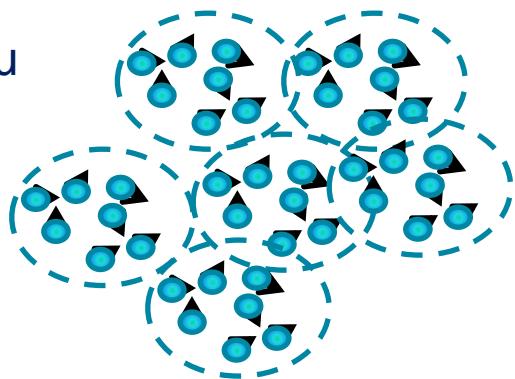
1.4 Transport et advection

Equation de transport

$$\rho \frac{D}{Dt} \vec{u} = \boxed{\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}}$$

Dérivée d'un champ continu : **Point de vue Eulérien**

Continu



$$\vec{u}(x, y, z, t)$$

La dérivée agit localement sur une variable spatiale ou temporelle alors que les autres variables sont constantes

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} \right)_{(x_i)} + u_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \vec{u} \right)_{(t, x_j)}$$

CHAPITRE 1 : DESSINE MOI UNE PARTICULE FLUIDE

41

1.4 Transport et advection

Equation de transport

$$\rho \frac{D}{Dt} \vec{u} = \boxed{\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}}$$

Point de vue lagrangien

Je suis la
trajectoire
d'un véhicule

Point de vue Eulérien

J'étudie la vitesse
des véhicules
passant
localement



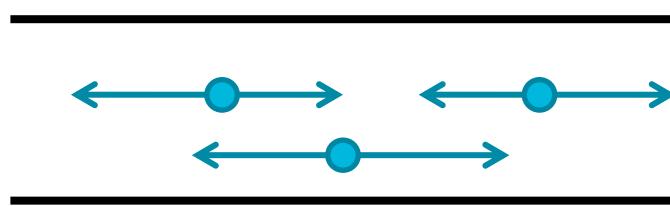
CHAPITRE 1 : DESSINE MOI UNE PARTICULE FLUIDE

42

1.4 Transport et advection

Equation de transport $\rho \frac{D}{Dt} \vec{u} = \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$

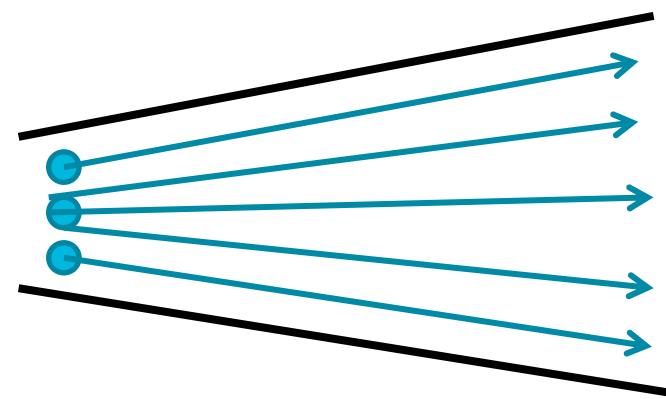
Deux exemples où $\frac{D}{Dt} \vec{u} \neq 0$



Pression variable dans le temps
dans une canalisation

Ecoulement instationnaire et
uniforme

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \neq \vec{0} \quad \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = \vec{0}$$



Conduite divergente

Ecoulement
stationnaire et non-uniforme

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0} \quad \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \neq \vec{0}$$

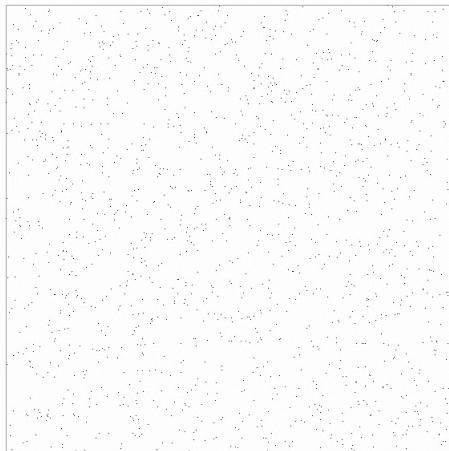
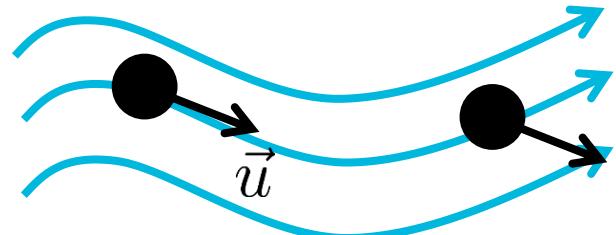
1.4 Transport et advection

Equation de transport

$$\frac{D}{Dt} \vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$$



« La vitesse est transportée par elle-même »
-terme non-linéaire
-source de chaos, d'instabilité



1.5 Bilan des forces

Mécanique des fluides: prédire la vitesse de l'écoulement $\vec{u}(\vec{x})$

Equations de Navier-Stokes

Equation bilan de la quantité de mouvement $\rho\vec{u}$

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla p + \vec{f}_p + \rho \nu \Delta \vec{u}$$

Conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{D}{Dt} (\rho \vec{u})$$

Somme des forces $\sum F$

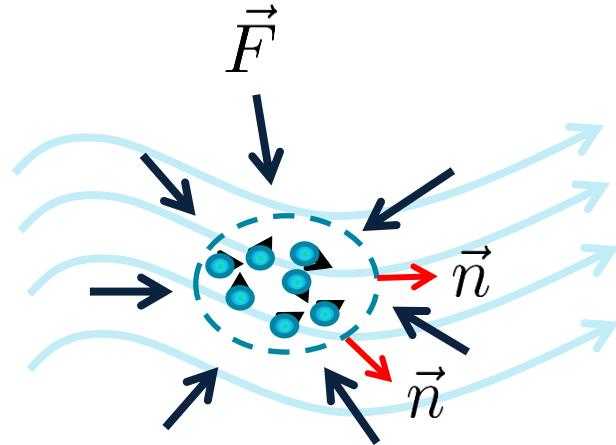
Force de pression $-\nabla p$

Force potentielle \vec{f}_p

Force visqueuse $\nu \Delta \vec{u}$

1.5 Bilan des forces

Bilan des forces

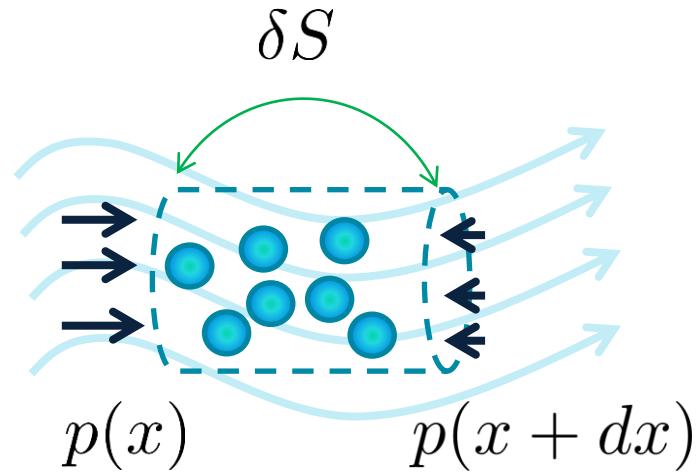


La pression est localement isotrope

$$\vec{F} = - \iint_{\delta S} p(t, x, y) \vec{n} dS$$

1.5 Bilan des forces

Bilan des forces

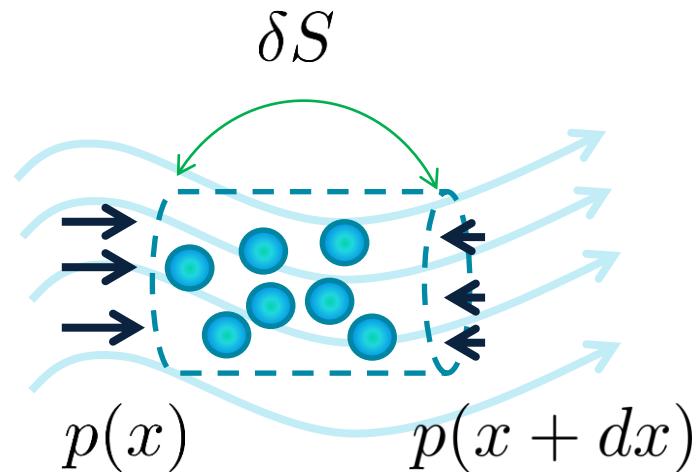


La pression

$$\vec{F} = - \iint_{\delta S} p(t, x, y) \vec{n} dS$$

1.5 Bilan des forces

Bilan des forces



La pression dans la direction x

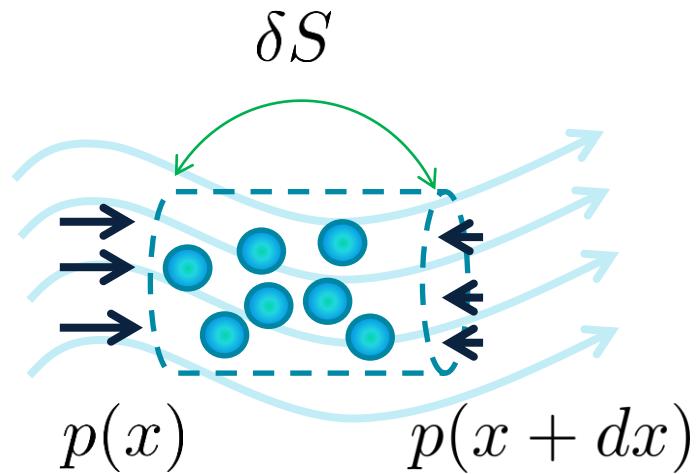
$$F_x = - [p(x + dx) - p(x)] \delta S$$

Si $p(x) > p(x + dx)$

Alors $F_x > 0$

1.5 Bilan des forces

Bilan des forces



Si $p(x) > p(x + dx)$

Alors $F_x > 0$

La pression dans la direction x

$$F_x = - [p(x + dx) - p(x)] \delta S$$

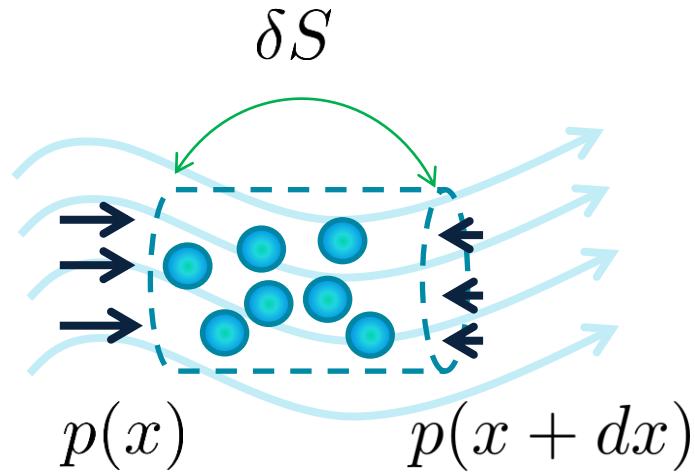
$$F_x = - \left[\frac{\partial}{\partial x} p \right] dx \delta S$$

Force volumique

Élément de volume

1.5 Bilan des forces

Bilan des forces



La pression dans la direction x

$$F_x = - [p(x + dx) - p(x)] \delta S$$

$$F_x = - \left[\frac{\partial}{\partial x} p \right] dx \delta S$$

 Force volumique
agissant sur la particule
fluide

 Élément de volume

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = \boxed{-\nabla p} + \vec{f}_p + \rho \nu \Delta \vec{u}$$

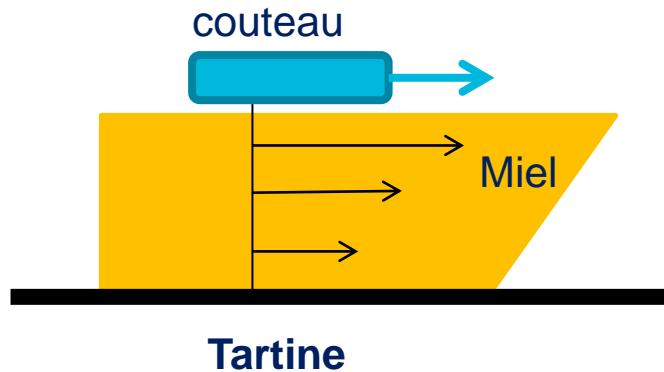
1.5 Bilan des forces

La viscosité

Expérience quotidienne

Lorsqu'un fluide visqueux (miel) est étalé sur une tartine avec un couteau

- 1) Le fluide résiste au mouvement
- 2) Le mouvement est communiqué tangentiellement dans l'épaisseur du miel



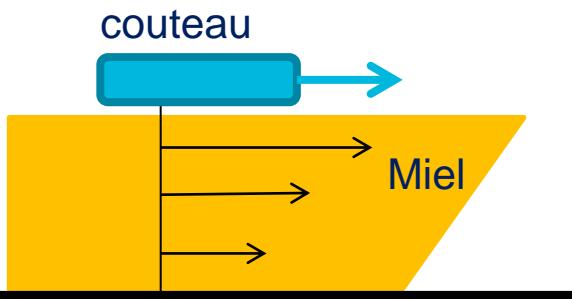
CHAPITRE 1 : DESSINE MOI UNE PARTICULE FLUIDE

51

1.5 Bilan des forces

La viscosité

Force de frottement entre les particules fluides



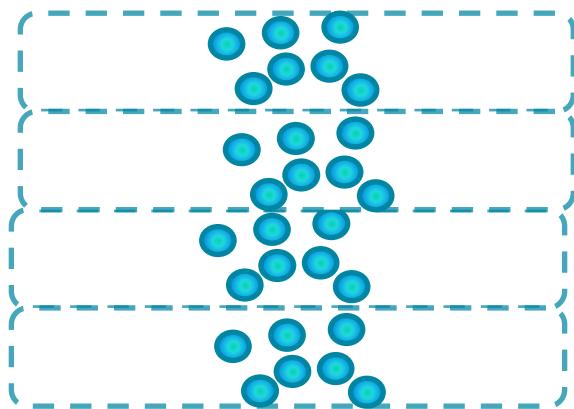
Tartine



1.5 Bilan des forces

La viscosité

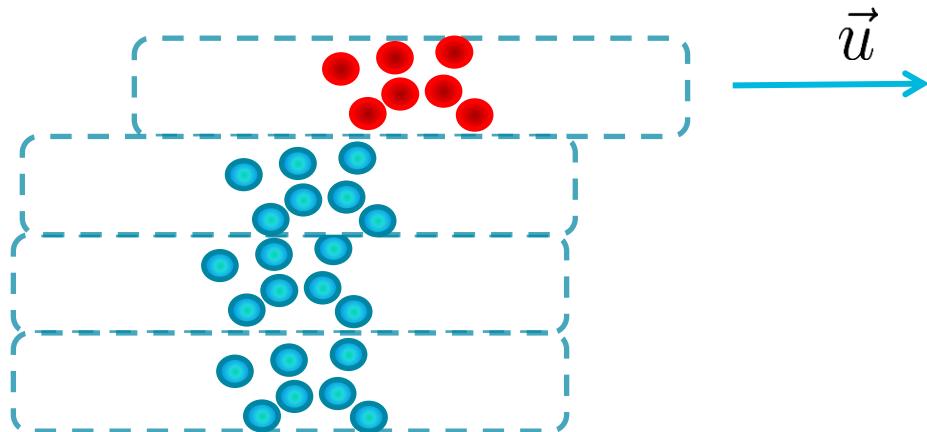
Force de frottement entre les particules fluides



1.5 Bilan des forces

La viscosité

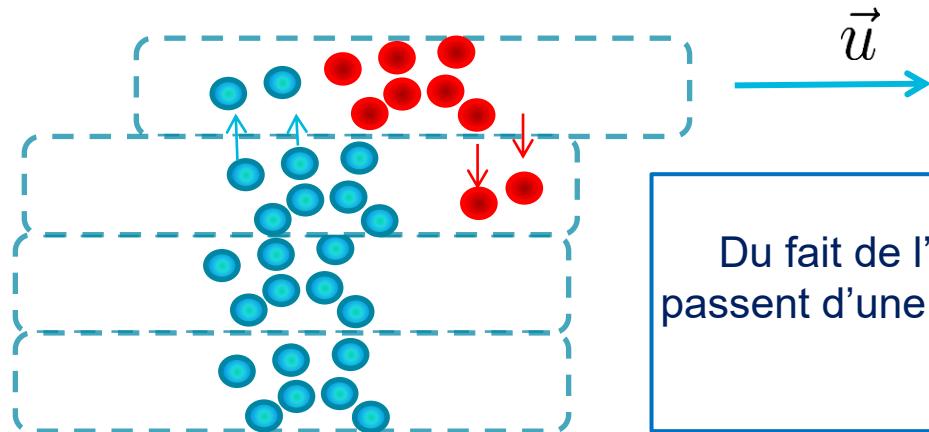
Force de frottement entre les particules fluides



1.5 Bilan des forces

La viscosité

Force de frottement entre les particules fluides

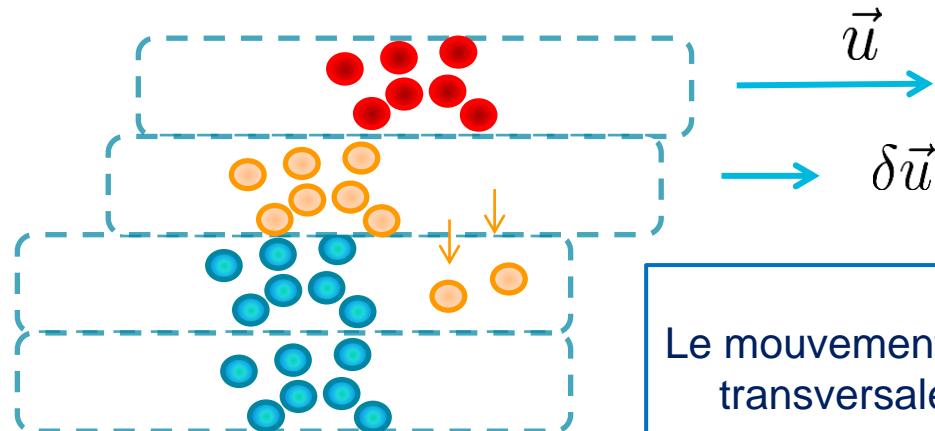


Du fait de l'agitation moléculaire, des molécules passent d'une particule fluide à l'autre et accélèrent la particule fluide au repos

1.5 Bilan des forces

La viscosité

Force de frottement entre les particules fluides

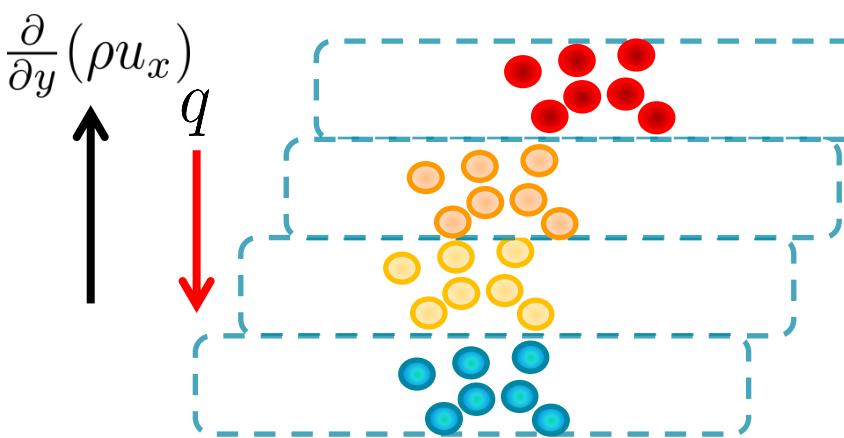


Le mouvement désordonné des particules transporte transversalement de la quantité de mouvement

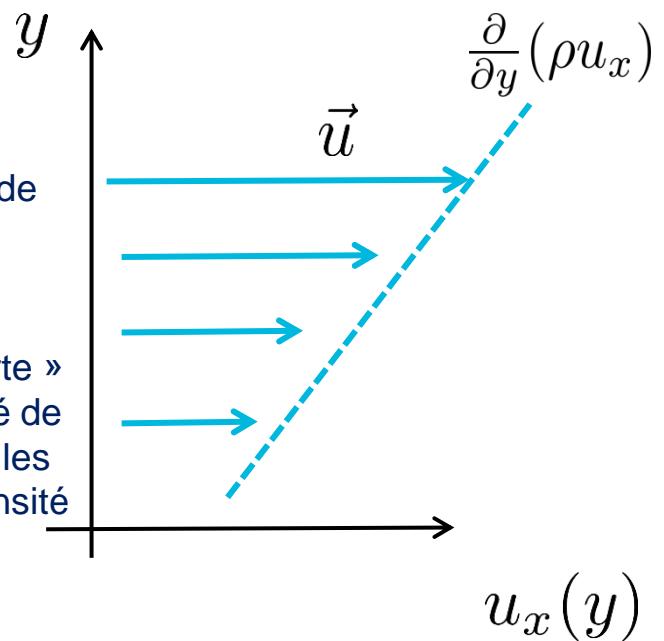
1.5 Bilan des forces

La viscosité

Force de frottement entre les particules fluides



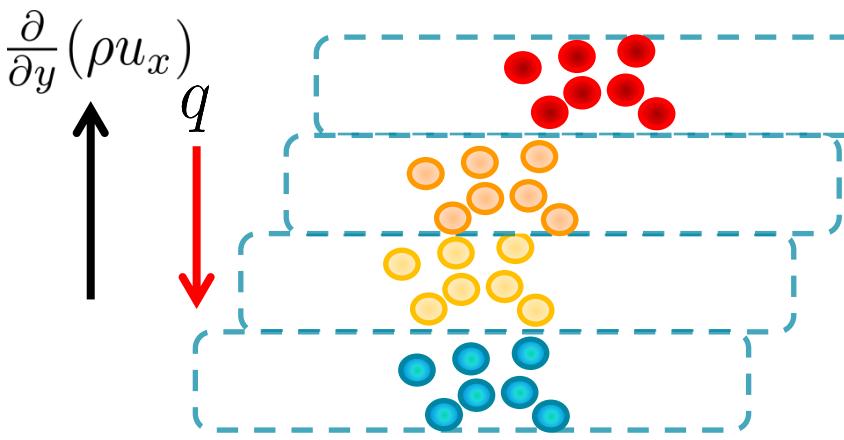
Flux de quantité de mouvement
 q
des zones de « forte » densité de quantité de mouvement vers les zones de faible densité



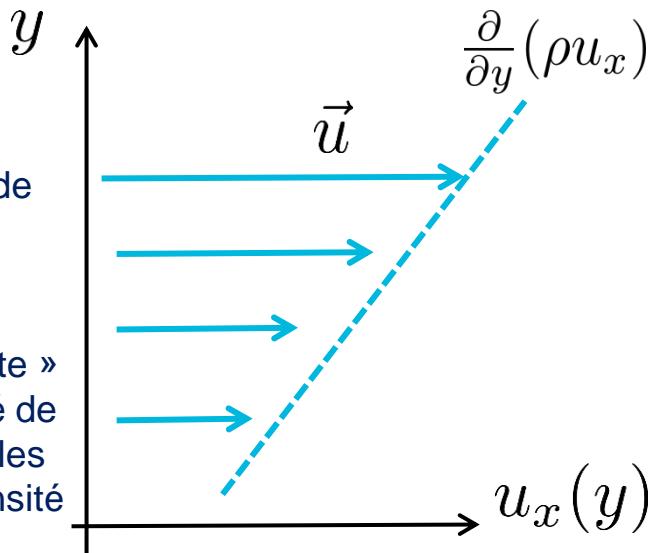
1.5 Bilan des forces

La viscosité

Force de frottement entre les particules fluides



Flux de quantité de mouvement
 q
des zones de « forte » densité de quantité de mouvement vers les zones de faible densité



La force d'entraînement est de nature diffusive $q = -\nu \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_x) = -\mu \frac{\partial}{\partial y}(u_x)$

1.5 Bilan des forces

La viscosité est un processus diffusif

Equation de diffusion de la quantité de mouvement

Flux diffusif
(pour une composante)

$$q_{xy} = -\nu \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_x)$$



$$\frac{D\rho\vec{u}}{Dt} + \nabla \cdot \bar{\vec{Q}} = -\nabla p$$

Equation de conservation

1.5 Bilan des forces

La viscosité est un processus diffusif

Equation de diffusion de la quantité de mouvement

Flux diffusif
(pour une composante)

$$q_{xy} = -\nu \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_x)$$



$$\frac{D\rho\vec{u}}{Dt} + \nabla \cdot \bar{\bar{Q}} = -\nabla p$$

Equation de conservation

$$\bar{\bar{Q}} = \begin{pmatrix} q_{xx} & q_{xy} & q_{xz} \\ q_{yx} & q_{yy} & q_{yz} \\ q_{zx} & q_{zy} & q_{zz} \end{pmatrix}$$

Tenseur d'ordre 2
(chaque ligne correspond à un gradient)

1.5 Bilan des forces

La viscosité est un processus diffusif

Equation de diffusion de la quantité de mouvement

Flux diffusif
(pour une composante)

$$q_{xy} = -\nu \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_x)$$



$$\frac{D\rho\vec{u}}{Dt} + \nabla \cdot \bar{\bar{Q}} = -\nabla p$$

Equation de conservation

$$\bar{\bar{Q}} = \begin{pmatrix} q_{xx} & q_{xy} & q_{xz} \\ q_{yx} & q_{yy} & q_{yz} \\ q_{zx} & q_{zy} & q_{zz} \end{pmatrix} \rightarrow -\rho\nu \nabla u_x \\ \rightarrow -\rho\nu \nabla u_y \\ \rightarrow -\rho\nu \nabla u_z$$

Tenseur d'ordre 2

(chaque ligne correspond à un gradient)

1.5 Bilan des forces

La viscosité est un processus diffusif

Equation de diffusion de la quantité de mouvement

Flux diffusif
(pour une composante)

$$q_{xy} = -\nu \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_x)$$



Equation de diffusion

$$\frac{D\rho\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \nu \Delta \rho\vec{u}$$

La viscosité cinématique est un coefficient de diffusion $[\nu] = m^2/s$

Viscosité dynamique $\mu = \rho\nu$

$$\frac{D\rho\vec{u}}{Dt} + \nabla \cdot \bar{\bar{Q}} = -\nabla p$$

Equation de conservation

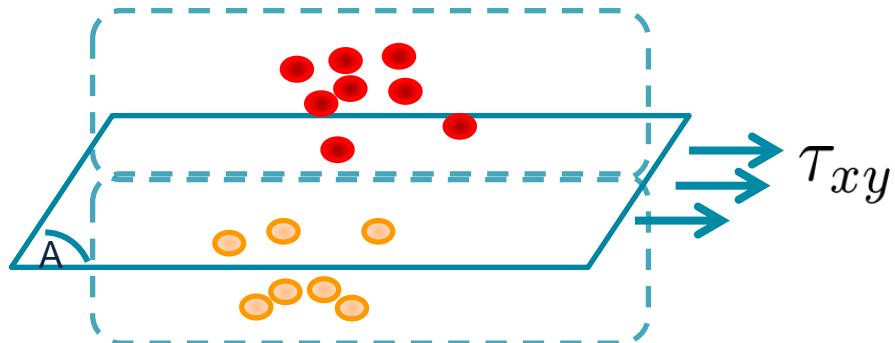
$$\bar{\bar{Q}} = \begin{pmatrix} q_{xx} & q_{xy} & q_{xz} \\ q_{yx} & q_{yy} & q_{yz} \\ q_{zx} & q_{zy} & q_{zz} \end{pmatrix} \rightarrow -\rho\nu \nabla u_x \\ \rightarrow -\rho\nu \nabla u_y \\ \rightarrow -\rho\nu \nabla u_z$$

Tenseur d'ordre 2

(chaque ligne correspond à un gradient)

1.5 Bilan des forces

Contraintes et effets diffusifs



Contrainte de cisaillement entre les couches de fluides

La force d'entraînement exercée par la couche supérieure par unité de surface

$$\tau_{xy} = \frac{F}{A} \quad [N/m^2]$$

Flux diffusif de quantité de mouvement induit une contrainte

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

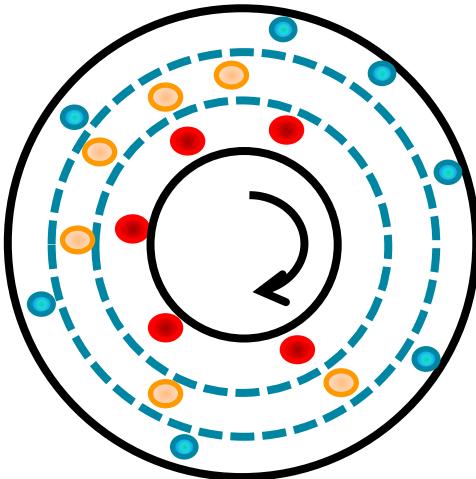
On alors la

VISCOSITE DYNAMIQUE μ $\text{kg.s}^{-1}.\text{m}^{-1}$

VISCOSITE CINEMATIQUE $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$

1.5 Bilan des forces

Exemple : Ecoulement Taylor Couette



Entrainement
par le cylindre
interne



Deux interprétations

- On a une contrainte visqueuse orthoradiale
- Un flux de quantité de mouvement radial

$$\tau_{\theta r} = \mu \frac{\partial}{\partial r} (u_\theta) \quad [N/m^2]$$

$$q_r = -\nu \frac{\partial}{\partial r} (\rho u_\theta) \quad [N/m^2]$$

1.5 Bilan des forces

Tenseur des contraintes

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho\nu\Delta\vec{u} + \vec{f}_p \quad \rightarrow \quad \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \nabla \bar{\sigma} + \vec{f}_p$$

Accélération lagrangienne Forces surfaciques Force volumique

1.5 Bilan des forces

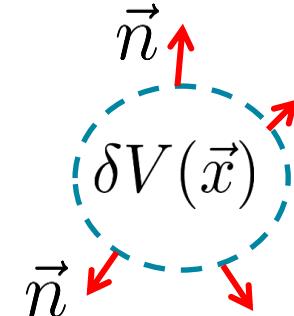
Tenseur des contraintes

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \nu \Delta \vec{u} + \vec{f}_p \rightarrow \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \boxed{\nabla \bar{\bar{\sigma}}} + \vec{f}_p$$

Accélération lagrangienne Forces surfaciques Force volumique

Divergence du tenseur des contraintes

Formulation globale $\vec{F}_s = \iint \bar{\bar{\sigma}} \vec{n} dS = \iiint \nabla \bar{\bar{\sigma}} dV$



1.5 Bilan des forces

Tenseur des contraintes

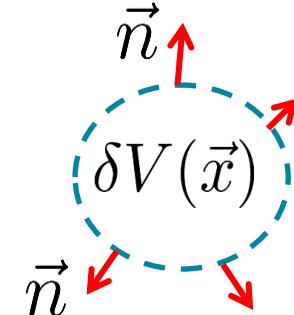
$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \nu \Delta \vec{u} + \vec{f}_p$$

Accélération lagrangienne Forces surfaciques Force volumique

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \boxed{\nabla \bar{\bar{\sigma}}} + \vec{f}_p$$

Divergence du tenseur des contraintes

Formulation globale $\vec{F}_s = \iint \bar{\bar{\sigma}} \vec{n} dS = \iiint \nabla \bar{\bar{\sigma}} dV$



Tenseur des contraintes = pression (isotrope) + contraintes visqueuses

$$\bar{\bar{\sigma}} = -p \text{Id} + \bar{\bar{\tau}}$$

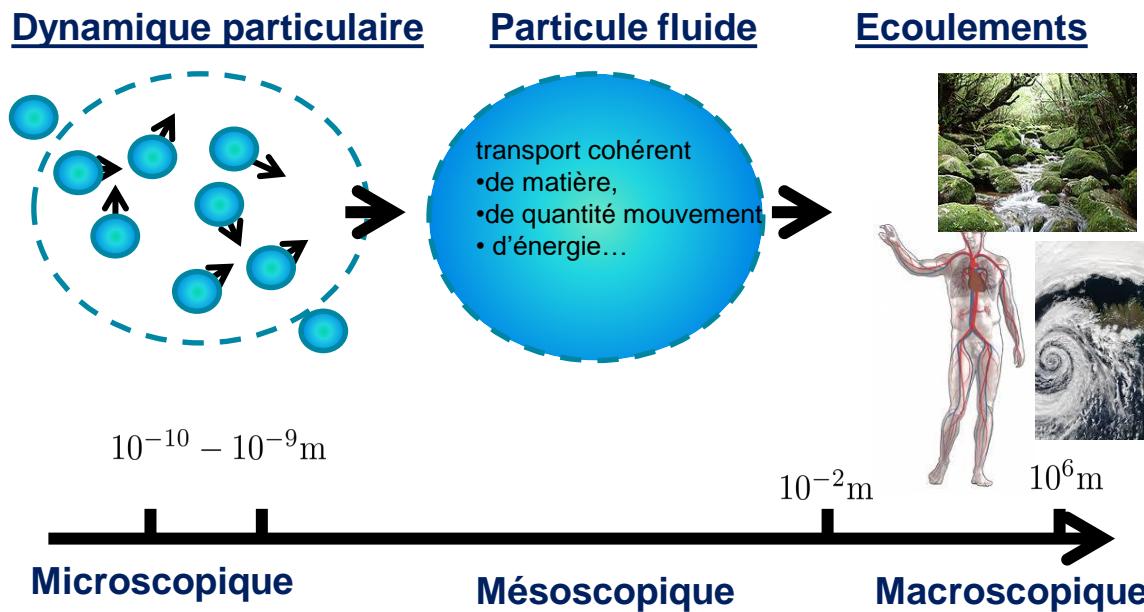
$$\bar{\bar{\tau}} = -\bar{\bar{Q}} = \mu (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T)$$

(pour un fluide incompressible)

CHAPITRE 1 : DESSINE MOI UNE PARTICULE FLUIDE

67

1.6 Conclusion



$$\frac{d}{dt}(\delta m \vec{v}_p) = \sum f_v$$



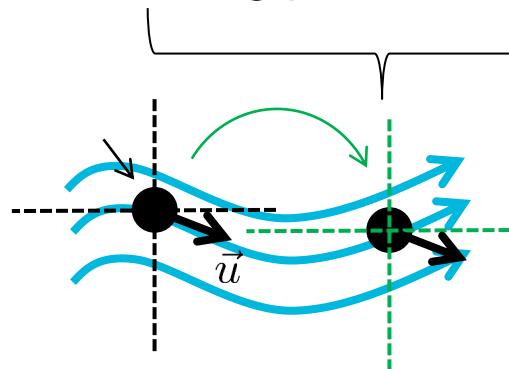
$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{u} &= 0 \\ \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} &= -\nabla p + \vec{f}_p + \rho \nu \Delta \vec{u}\end{aligned}$$

1.6 Conclusion

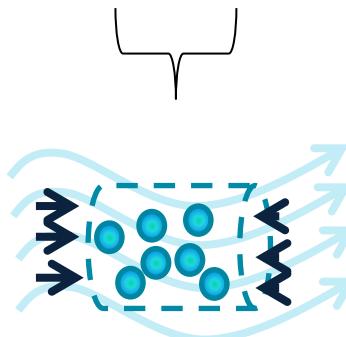
Equations de Navier-Stokes

Equation bilan de la quantité de mouvement $\rho \vec{u}$

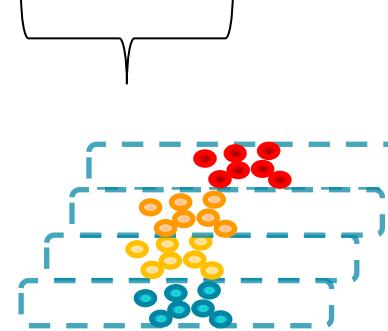
$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla p + \vec{f}_p + \rho \nu \Delta \vec{u}$$



Transport de la quantité de mouvement



Gradient de pression



Force visqueuse

CHAPITRE 1 : DESSINE MOI UNE PARTICULE FLUIDE

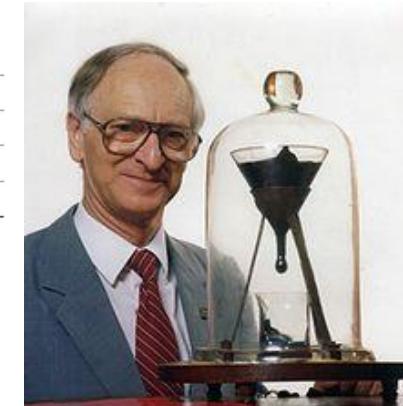
69

1.6 Conclusion

Valable que pour les fluides?



Expérience de la goutte de poix



Milieux granulaire: sable/dynamique des dunes



Foule compacte

CHAPITRE 2

LES ÉCOULEMENTS VISQUEUX

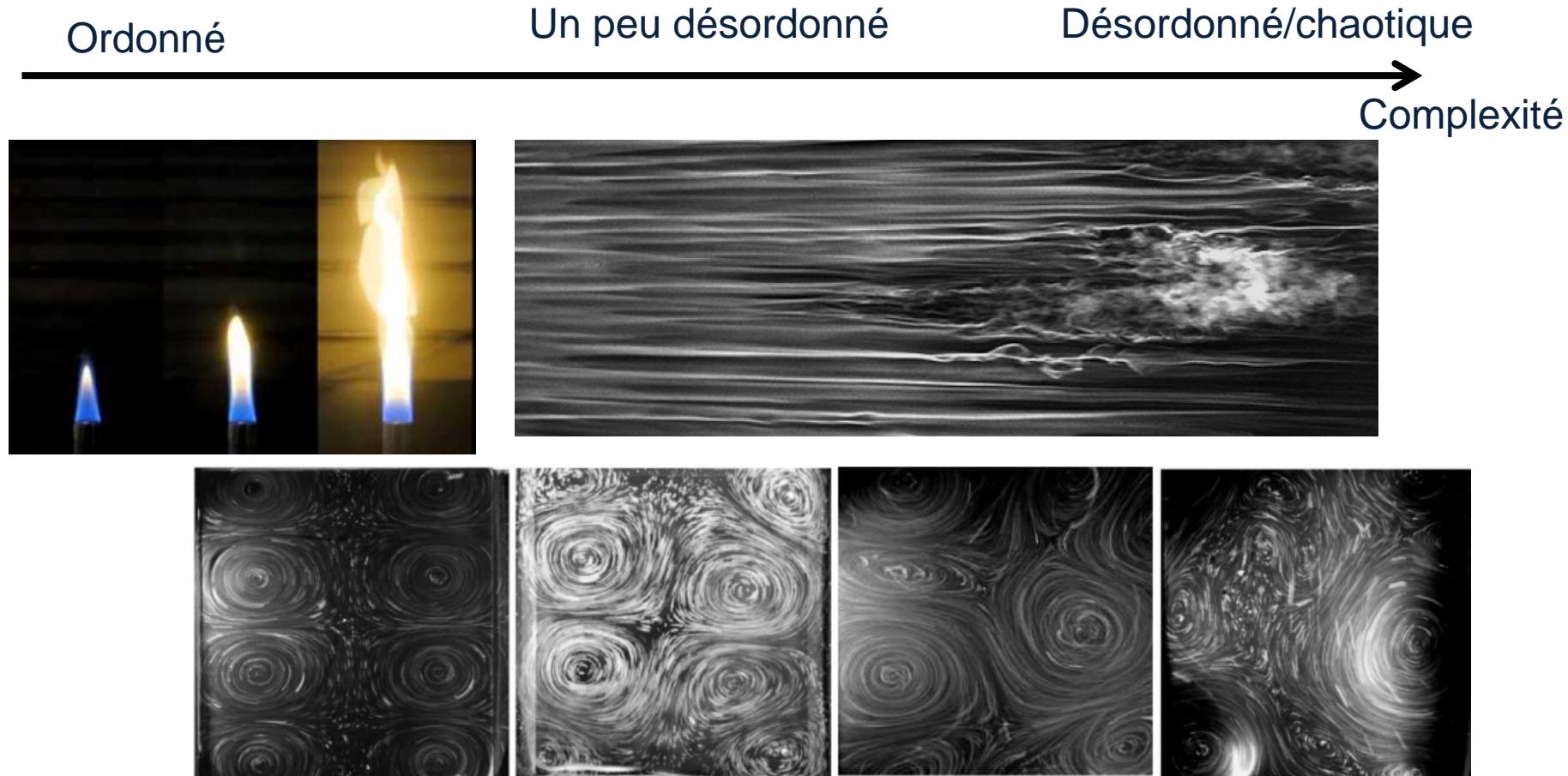


CHAPITRE 2 : ECOULEMENTS VISQUEUX

71

2.1 Diversité des régimes

Diversité dans la phénoménologie des écoulements



CHAPITRE 2 : ECOULEMENTS VISQUEUX

72

2.1 Diversité des régimes

Diversité dans la phénoménologie des écoulements



CHAPITRE 2 : ECOULEMENTS VISQUEUX

73

2.2 Nombre de Reynolds

Diversité dans la phénoménologie des écoulements

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla p + \rho \nu \Delta \vec{u}$$

Inertie du fluide Force visqueuse/frottement



Non-linéaire
Déstabilise
Conserve l'énergie



linéaire
Stabilise
Dissipe l'énergie

CHAPITRE 2 : ECOULEMENTS VISQUEUX

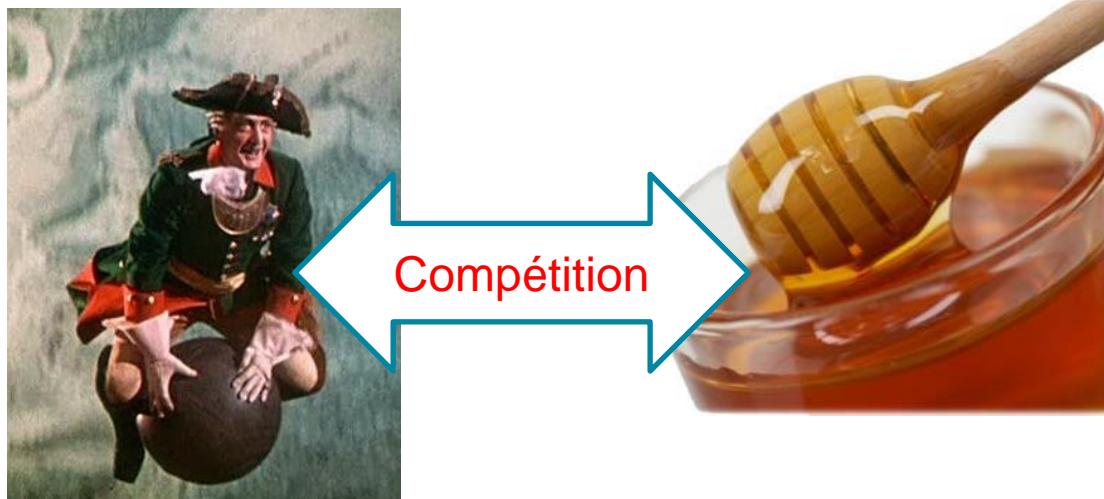
74

2.2 Nombre de Reynolds

Diversité dans la phénoménologie des écoulements

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla p + \rho \nu \Delta \vec{u}$$

Inertie du fluide Force visqueuse/frottement



Non-linéaire
Déstabilise
Conserve l'énergie

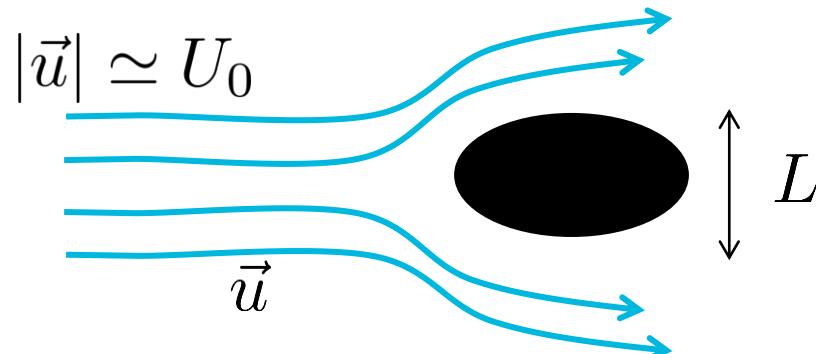
linéaire
Stabilise
Dissipe l'énergie

2.2 Nombre de Reynolds

Compétition/ comparaison

$$\frac{[\rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}]}{[\rho \nu \Delta \vec{u}]}$$

Ordre de grandeur



2.2 Nombre de Reynolds

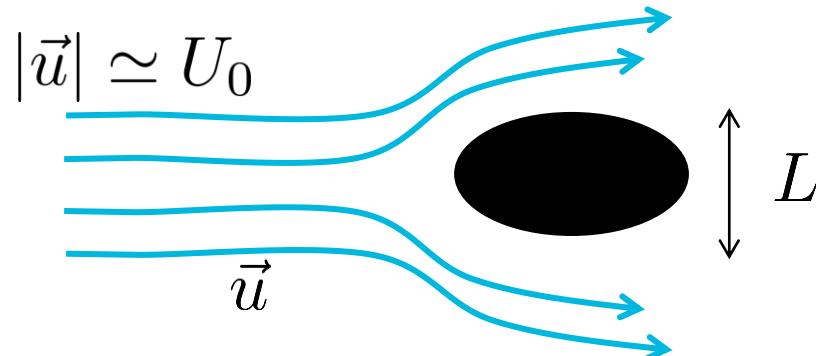
Compétition/ comparaison

$$\frac{[\rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}]}{[\rho \nu \Delta \vec{u}]}$$

Ordre de grandeur

$$[\rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}] = \rho \frac{U_0^2}{L}$$

$$[\rho \nu \Delta \vec{u}] = \rho \nu \frac{U_0}{L^2}$$



CHAPITRE 2 : ECOULEMENTS VISQUEUX

77

2.2 Nombre de Reynolds

Compétition/ comparaison

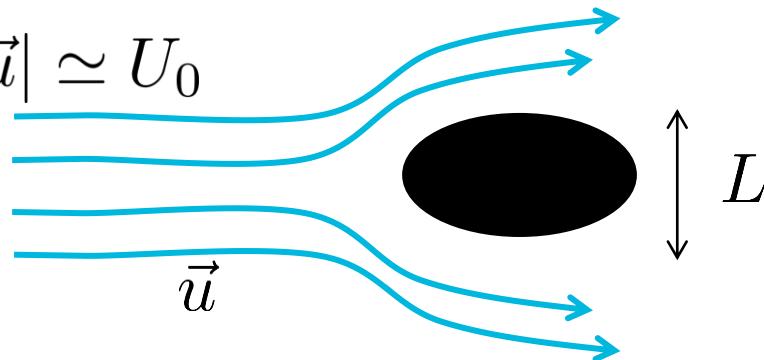
$$\frac{[\rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}]}{[\rho \nu \Delta \vec{u}]}$$

Ordre de grandeur

$$[\rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}] = \rho \frac{U_0^2}{L}$$

$$[\rho \nu \Delta \vec{u}] = \rho \nu \frac{U_0}{L^2}$$

$$|\vec{u}| \simeq U_0$$



$$Re = \frac{[\rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}]}{[\nu \Delta \vec{u}]} = \frac{U_0 L}{\nu}$$

2.2 Nombre de Reynolds

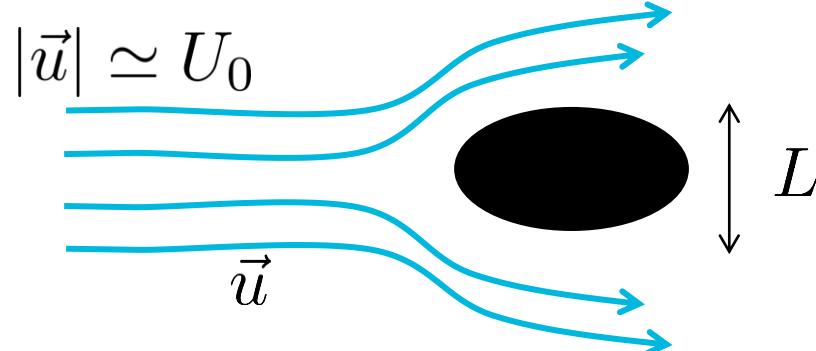
Compétition/ comparaison

$$\frac{[\rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}]}{[\rho \nu \Delta \vec{u}]}$$

Ordre de grandeur

$$[\rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}] = \rho \frac{U_0^2}{L}$$

$$[\rho \nu \Delta \vec{u}] = \rho \nu \frac{U_0}{L^2}$$



$$Re = \frac{[\rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}]}{[\nu \Delta \vec{u}]} = \frac{U_0 L}{\nu}$$

Nombre de Reynolds

CHAPITRE 2 : ECOULEMENTS VISQUEUX

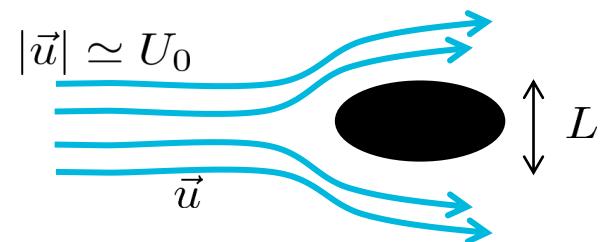
79

2.2 Nombre de Reynolds

Compétition/ comparaison

$$Re = \frac{U_0 L}{\nu}$$

Le nombre de Reynolds caractérise la stabilité de l'écoulement par rapport aux perturbations



Analogie avec un penalty

Vitesse du ballon U_0

Taille des buts L

Taille du gardien ν

CHAPITRE 2 : ECOULEMENTS VISQUEUX

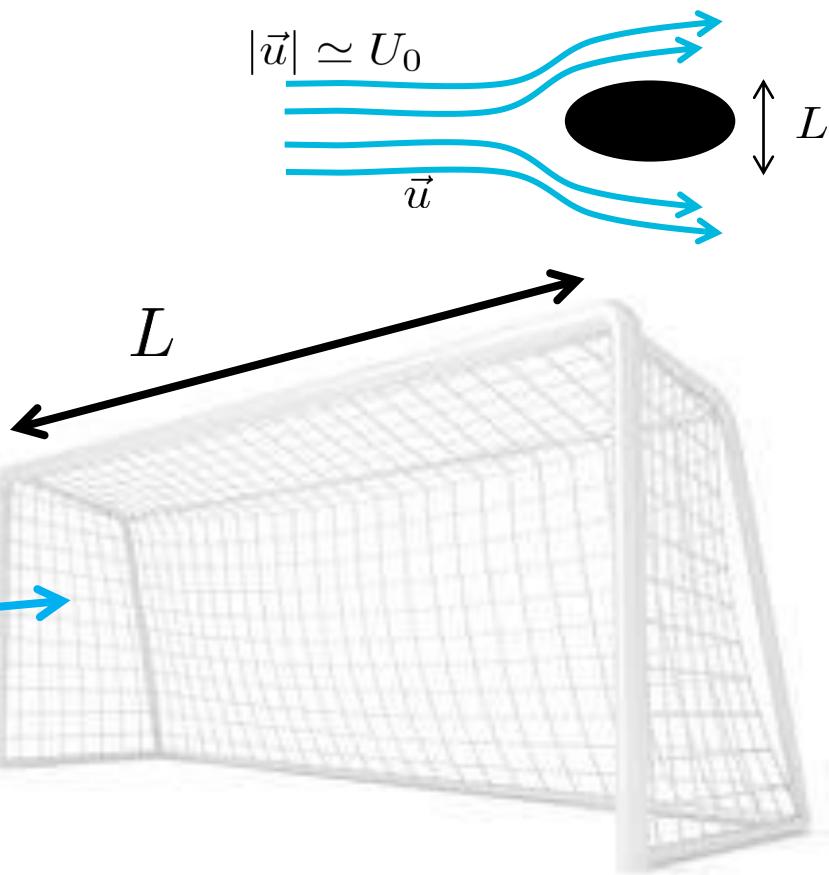
80

2.2 Nombre de Reynolds

Compétition/ comparaison

$$Re = \frac{U_0 L}{\nu}$$

Le nombre de Reynolds caractérise la stabilité de l'écoulement par rapport aux perturbations

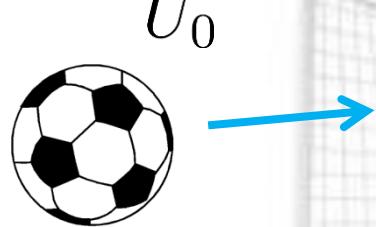


Analogie avec un penalty

Vitesse du ballon U_0

Taille des buts L

Taille du gardien ν



Les perturbations de vitesse d'amplitude U_0 peuvent-elles être amplifiées?

CHAPITRE 2 : ECOULEMENTS VISQUEUX

81

2.2 Nombre de Reynolds

Compétition/ comparaison

$$Re = \frac{U_0 L}{\nu}$$

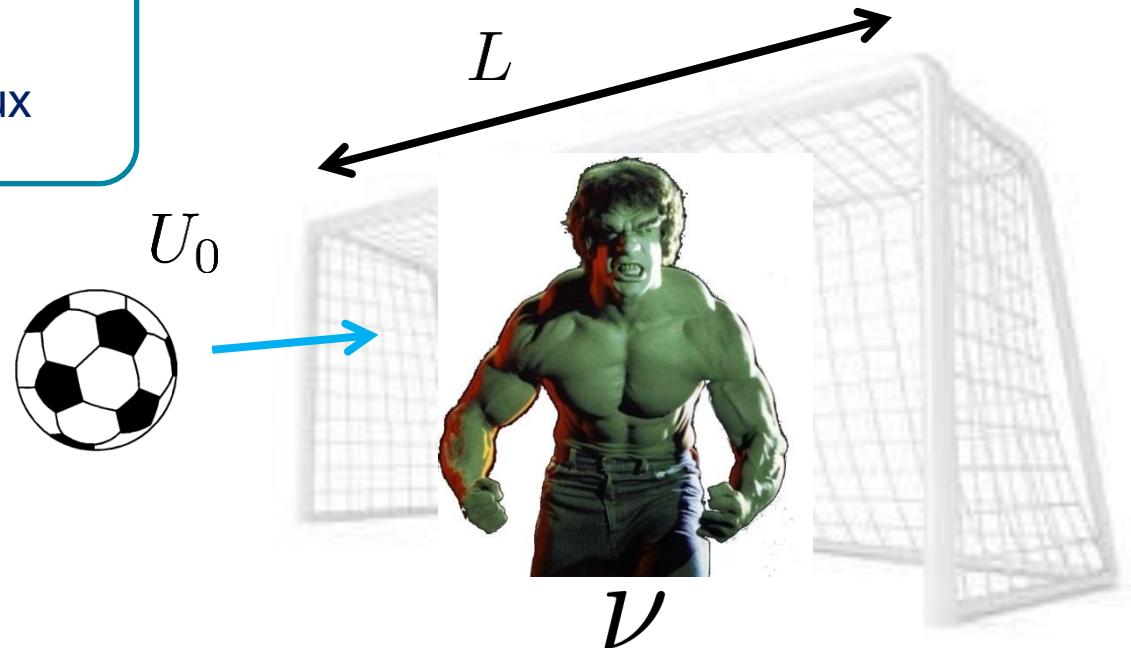
Le nombre de Reynolds caractérise la stabilité de l'écoulement par rapport aux perturbations

Analogie avec un penalty

Vitesse du ballon U_0

Taille des buts L

Taille du gardien ν



La viscosité s'oppose à l'amplification

CHAPITRE 2 : ECOULEMENTS VISQUEUX

2.2 Nombre de Reynolds

82

Compétition/ comparaison

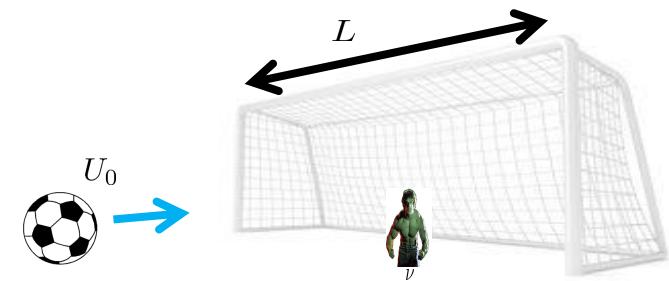
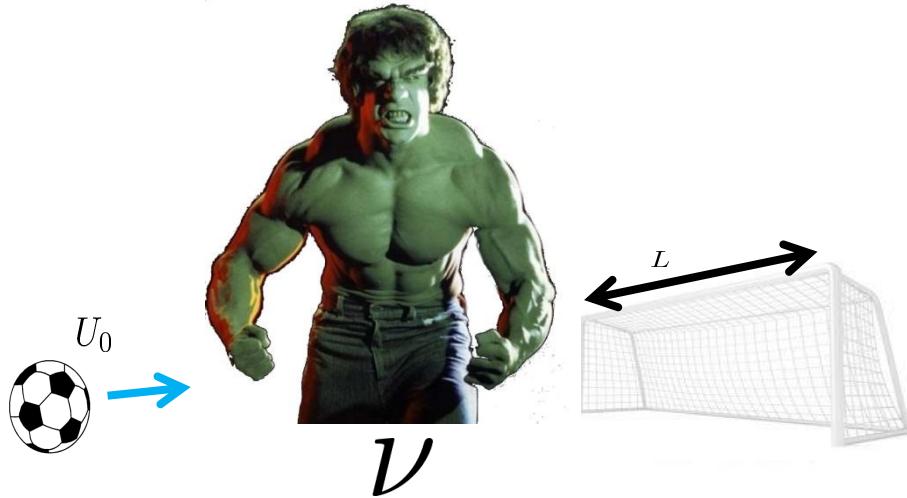
$$Re = \frac{U_0 L}{\nu}$$

$Re \ll 1$ **Ecoulement laminaire**

Ordonné et stable

$Re \gg 1$ **Ecoulement turbulent**

Chaotique et instable



Compétition/ comparaison

$$Re = \frac{U_0 L}{\nu}$$

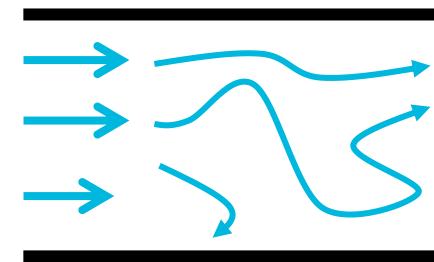
$Re \ll 1$ **Ecoulement laminaire**

Ordonné et stable



$Re \gg 1$ **Ecoulement turbulent**

Chaotique et instable

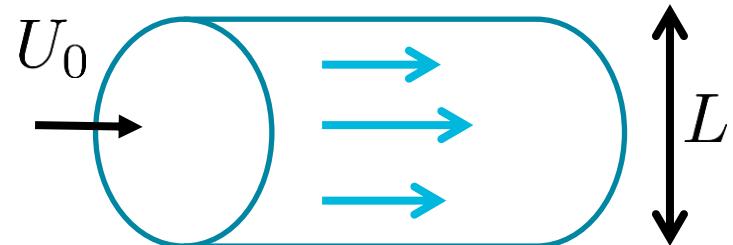
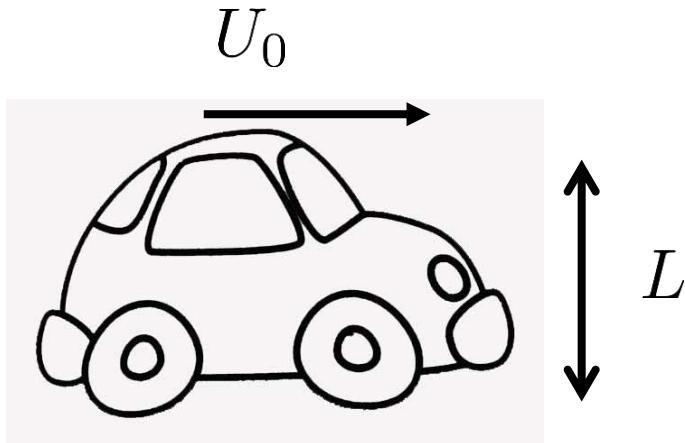


CHAPITRE 2 : ECOULEMENTS VISQUEUX

84

2.2 Nombre de Reynolds

Construire un nombre de Reynolds $Re = \frac{U_0 L}{\nu}$



Echelles et vitesse caractéristiques de l'écoulement

La viscosité cinématique ν dépend du fluide (indépendante de l'écoulement);

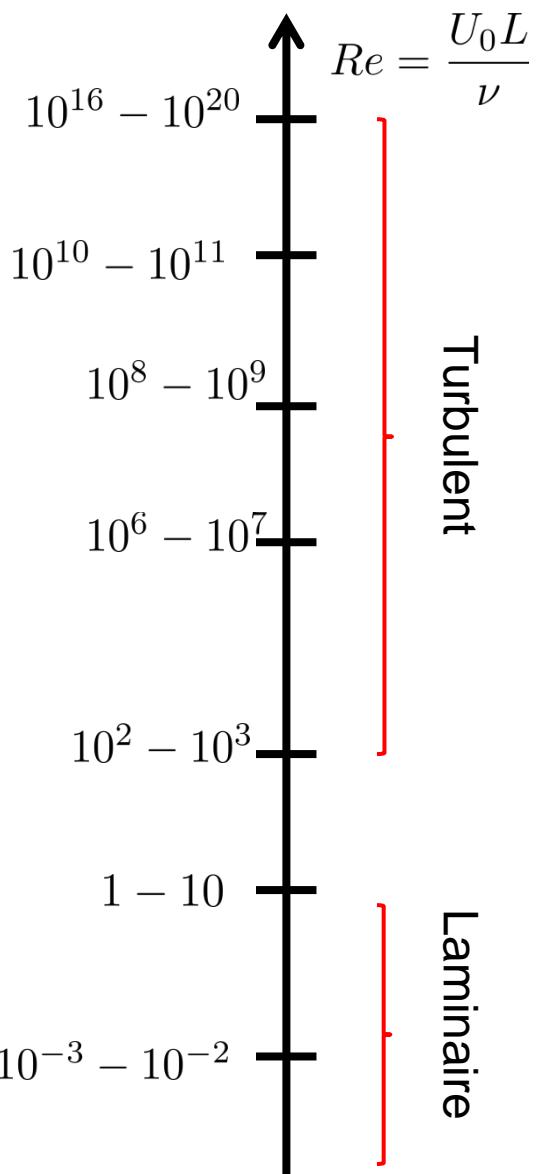
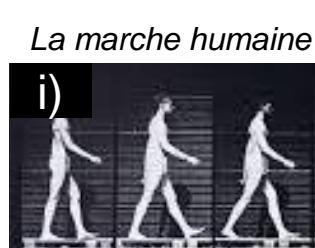
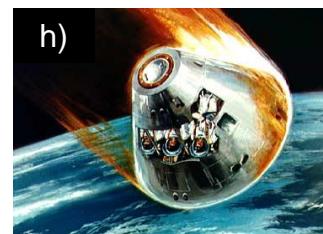
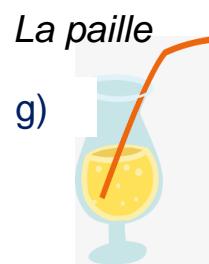
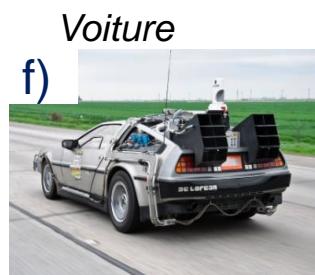
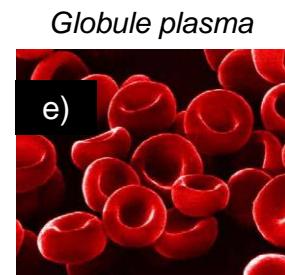
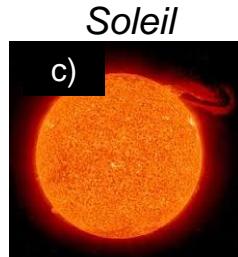
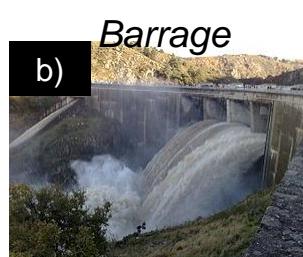
Air $\nu(T = 300K) = 1.5 \times 10^{-5} m^2/s$

Eau $\nu(T = 300K) = 10^{-6} m^2/s$

CHAPITRE 2 : ECOULEMENTS VISQUEUX

85

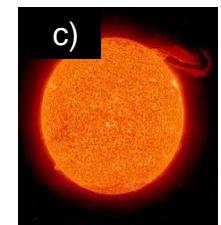
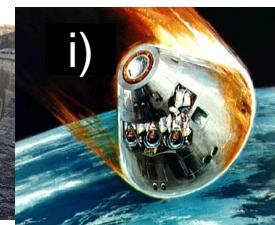
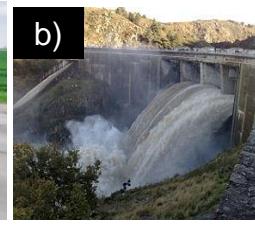
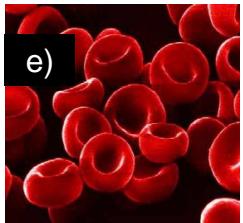
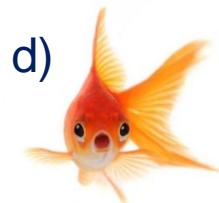
2.2 Nombre de Reynolds



CHAPITRE 2 : ECOULEMENTS VISQUEUX

86

2.2 Nombre de Reynolds



$10^{-3} - 10^{-2}$

$1 - 10$

$10^2 - 10^3$

$10^6 - 10^7$

$10^8 - 10^9$

$10^{10} - 10^{11}$

$10^{16} - 10^{20}$

Laminaire

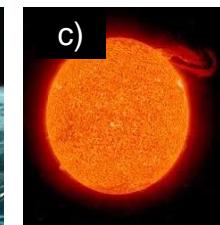
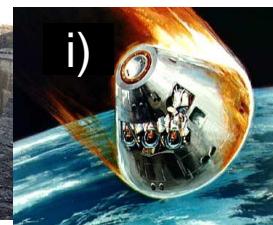
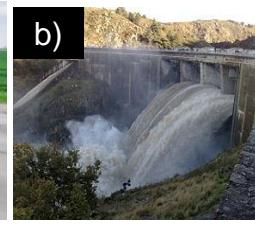
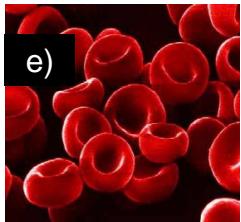
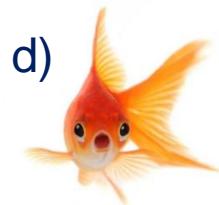
Turbulent

$$Re = \frac{U_0 L}{\nu}$$

CHAPITRE 2 : ECOULEMENTS VISQUEUX

87

2.2 Nombre de Reynolds



$10^{-3} - 10^{-2}$

$1 - 10$

$10^2 - 10^3$

$10^6 - 10^7$

$10^8 - 10^9$

$10^{10} - 10^{11}$

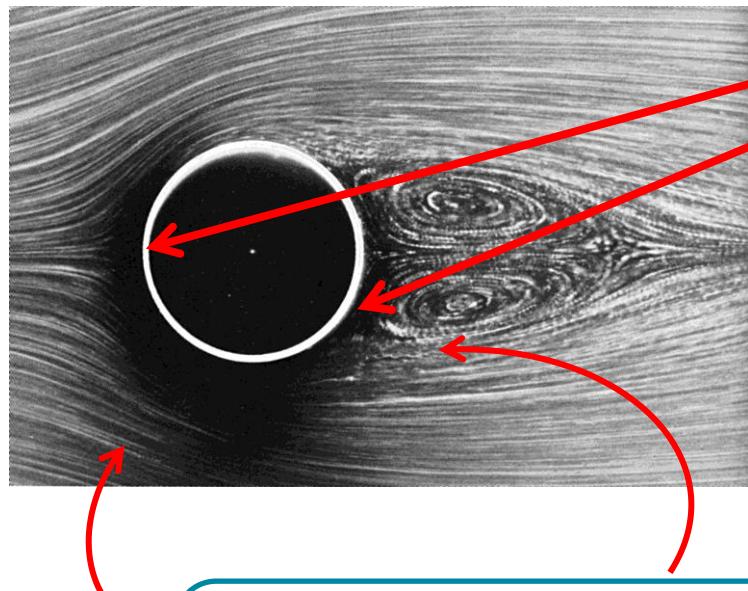
$10^{16} - 10^{20}$

Laminaire

Turbulent

$$Re = \frac{U_0 L}{\nu}$$

Conditions aux limites



Conditions aux limites
Fluide-solide

$$\vec{u}(x) = ???$$

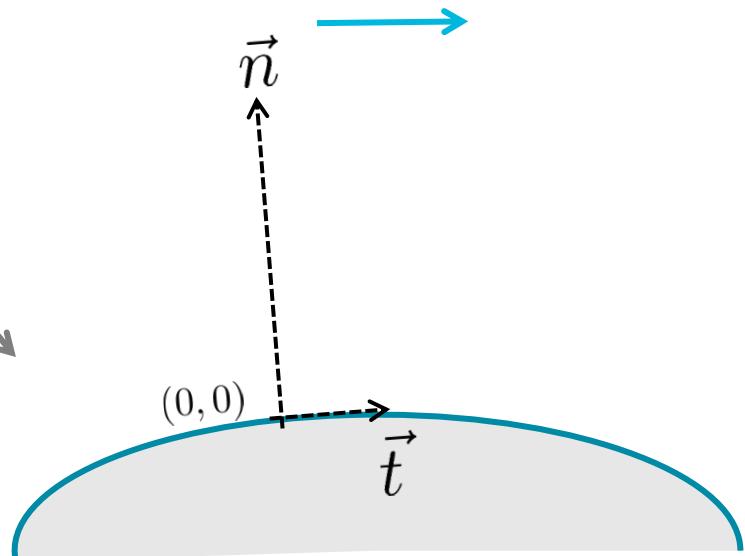
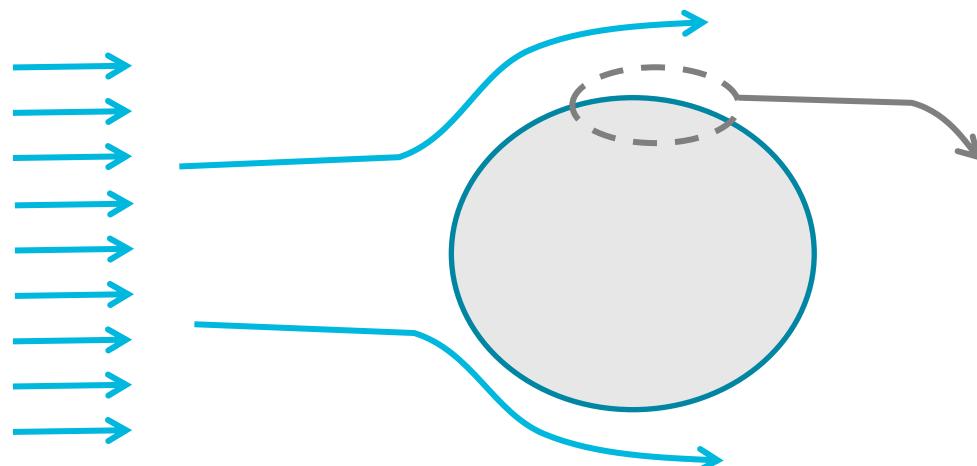
$$\nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

Valide dans le fluide

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla p + \vec{f}_p + \rho \nu \Delta \vec{u}$$

Conditions aux limites

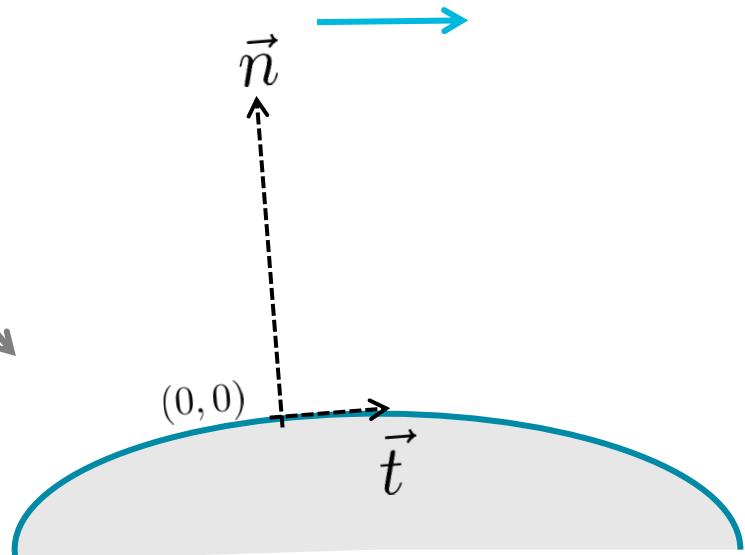
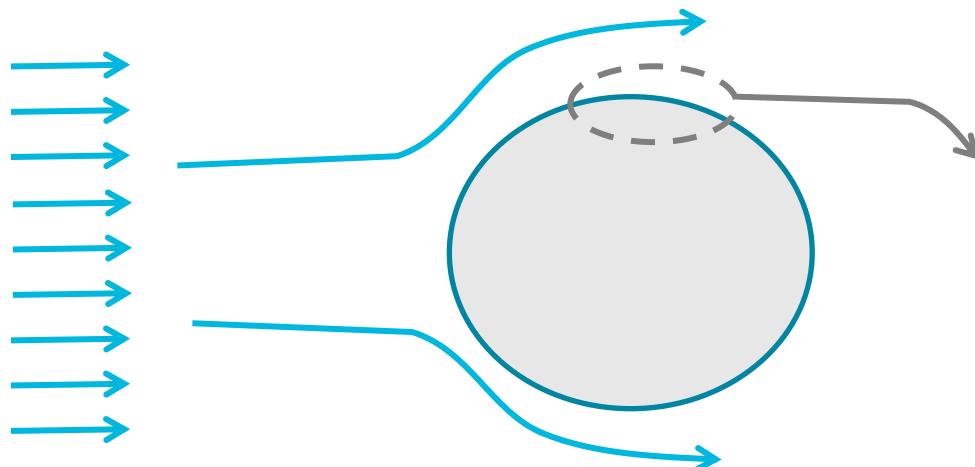
$$U_0 \vec{e}_x$$



2.3 Conditions aux limites et couche limites

Conditions aux limites

$$U_0 \vec{e}_x$$



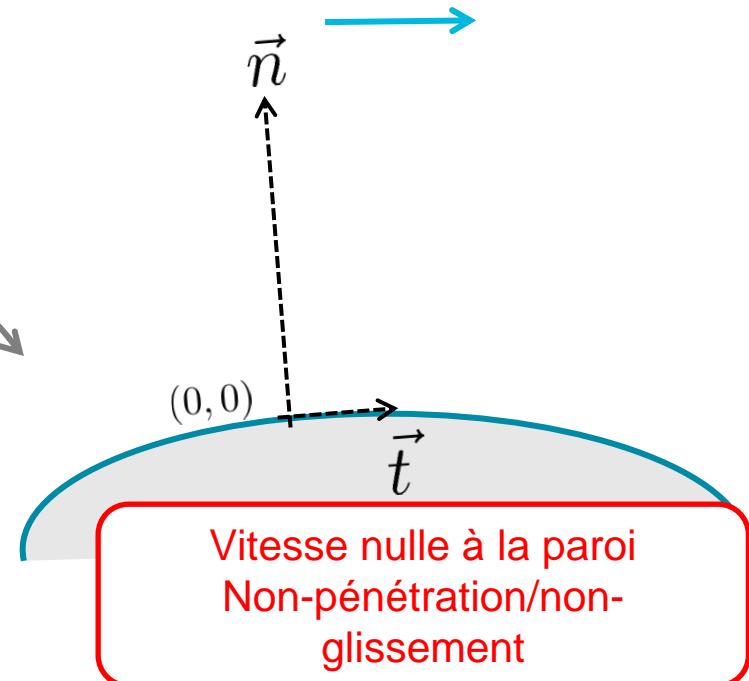
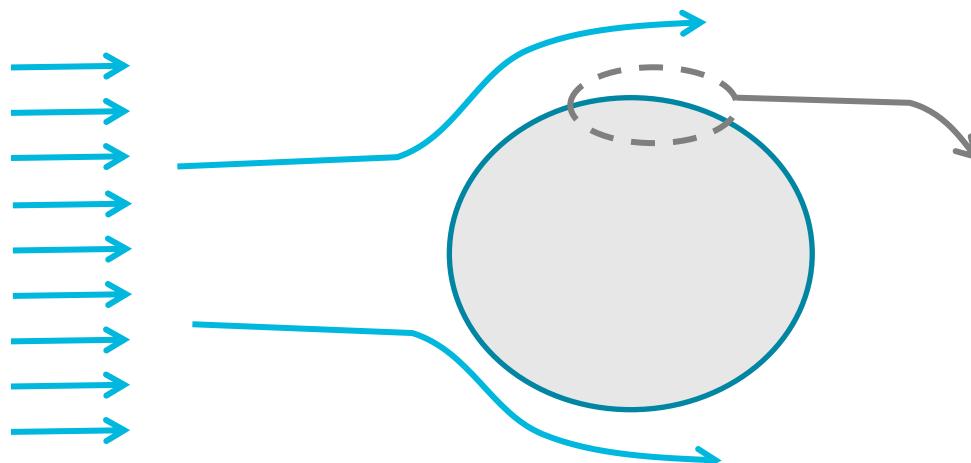
La vitesse du fluide normale à la paroi $\vec{u}|_{surface} \cdot \vec{n} = 0$ (non-pénétration)

La vitesse du fluide tangentielle à la paroi $\vec{u}|_{surface} \cdot \vec{t} = 0$ (non-glissement) si $\nu \neq 0$

2.3 Conditions aux limites et couche limites

Conditions aux limites

$$U_0 \vec{e}_x$$



La vitesse du fluide normale à la paroi

$$\vec{u}|_{surface} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{non-pénétration})$$

La vitesse du fluide tangentielle à la paroi

$$\vec{u}|_{surface} \cdot \vec{t} = 0 \quad (\text{non-glissement}) \text{ si } \nu \neq 0$$

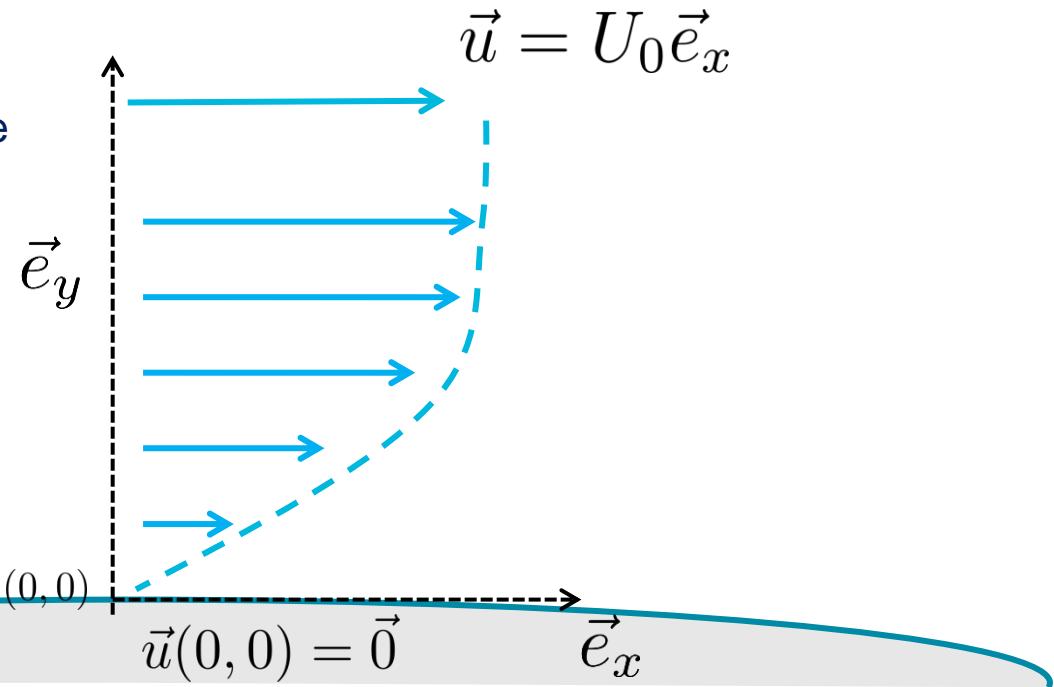
2.3 Conditions aux limites et couche limites

Des conditions aux limites aux couches limites

Il existe une zone de raccordement entre la paroi (vitesse nulle) et loin de la paroi (vitesse asymptotique)

Les forts gradients du champ de vitesse se concentrent dans

La couche limite



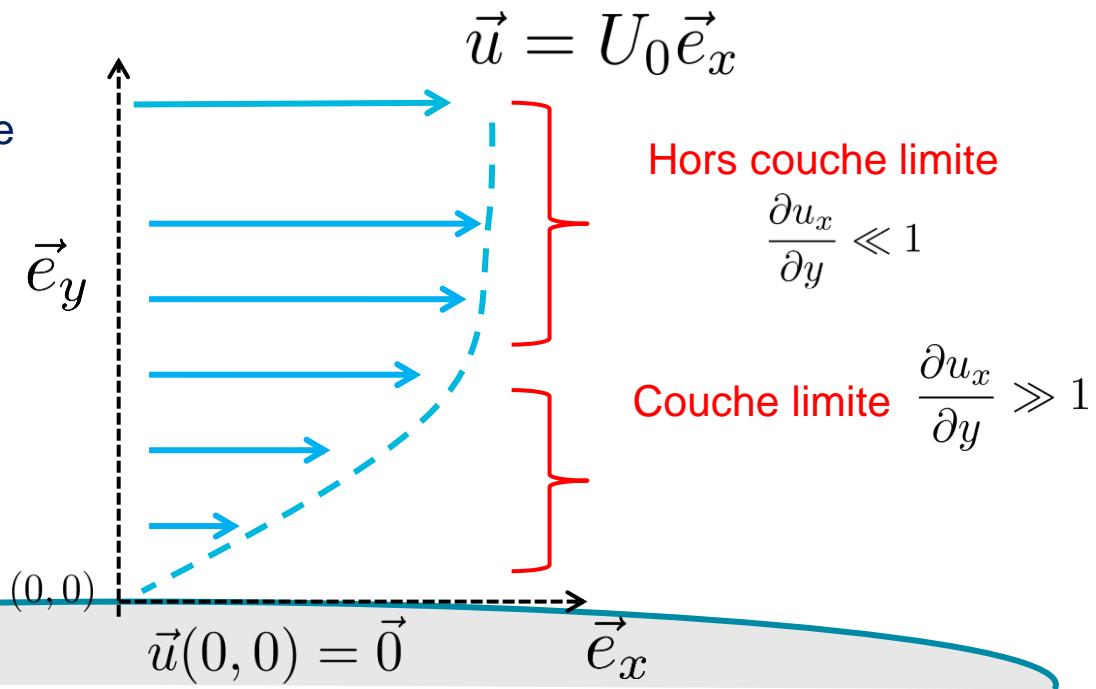
2.3 Conditions aux limites et couche limites

Des conditions aux limites aux couches limites

Il existe une zone de raccordement entre la paroi (vitesse nulle) et loin de la paroi (vitesse asymptotique)

Les forts gradients du champ de vitesse se concentrent dans

La couche limite



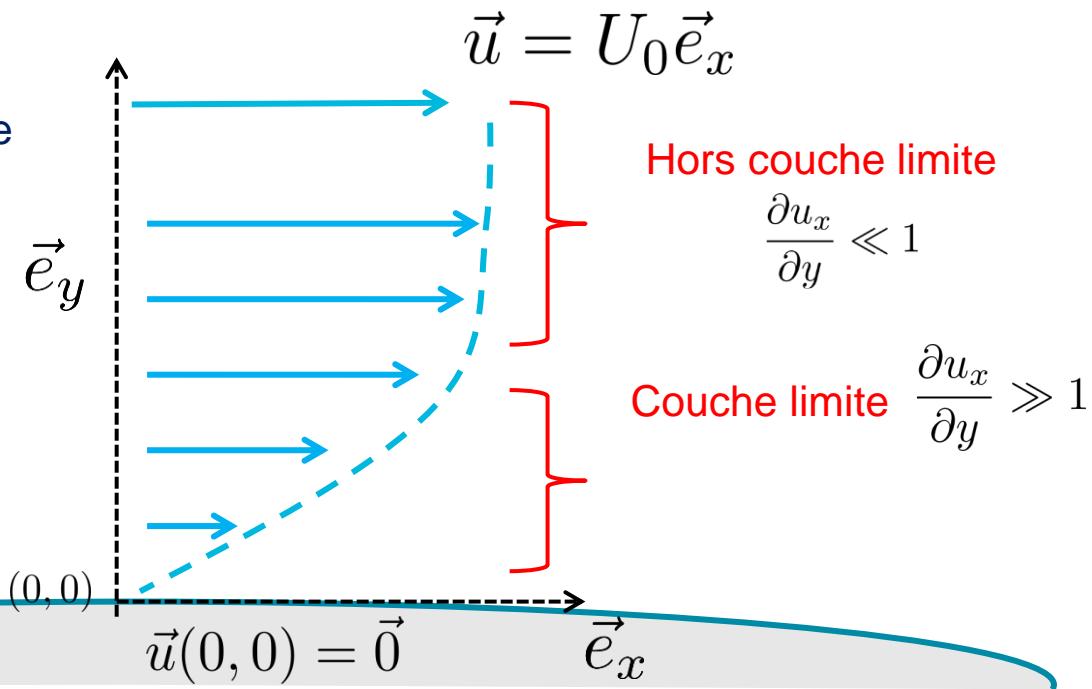
2.3 Conditions aux limites et couche limites

Des conditions aux limites aux couches limites

Il existe une zone de raccordement entre la paroi (vitesse nulle) et loin de la paroi (vitesse asymptotique)

Les forts gradients du champ de vitesse se concentrent dans

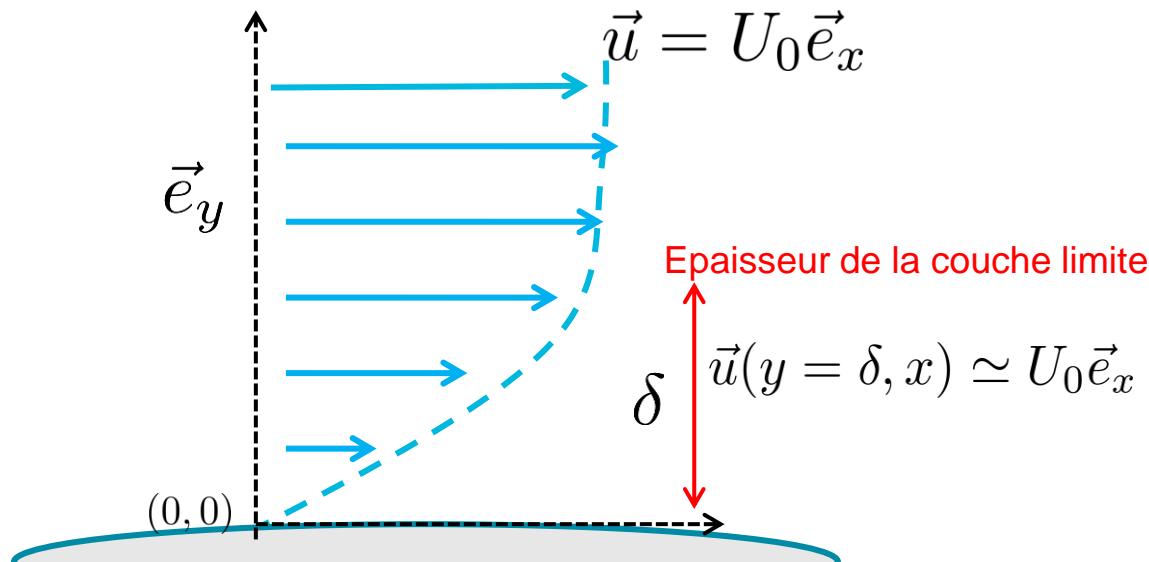
La couche limite



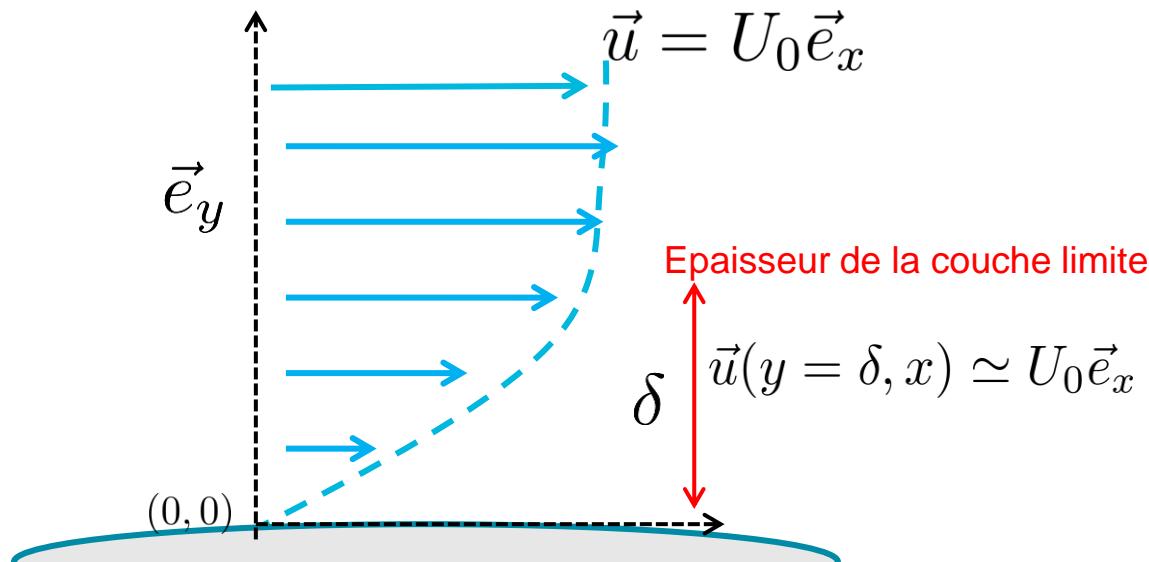
La paroi ralentit significativement le fluide dans la couche limite via les effets visqueux:

La contrainte visqueuse est la force dominante $\tau_{xy} = \nu \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_x)$

Des conditions aux limites aux couches limites



Des conditions aux limites aux couches limites



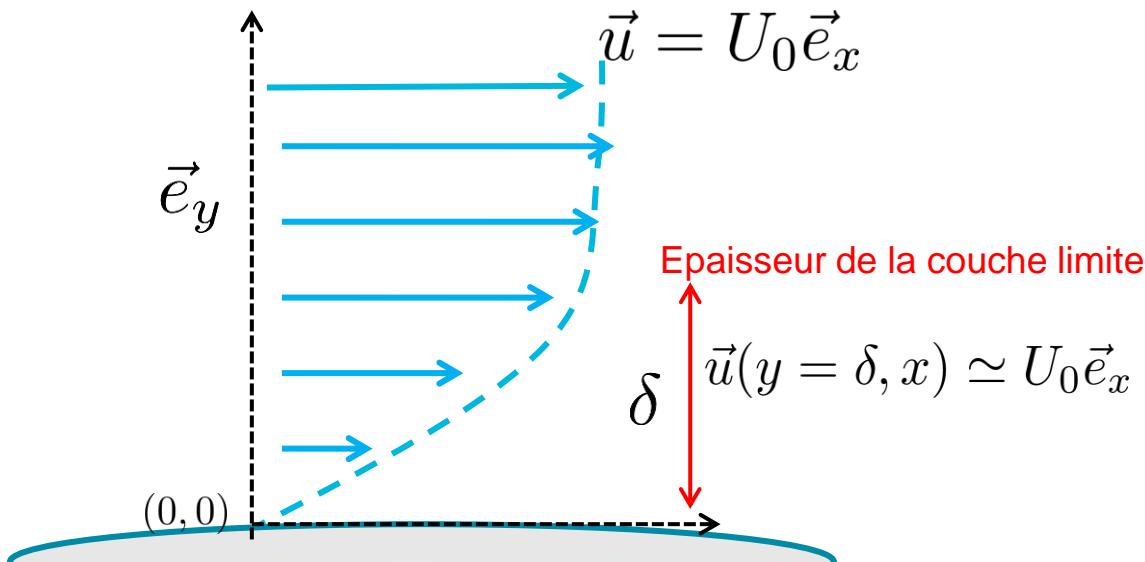
Le nombre de Reynolds dans la couche limite

$$\text{Re} = \frac{\delta U_0}{\nu} \ll 1$$

L'écoulement est laminaire

2.3 Conditions aux limites et couche limites

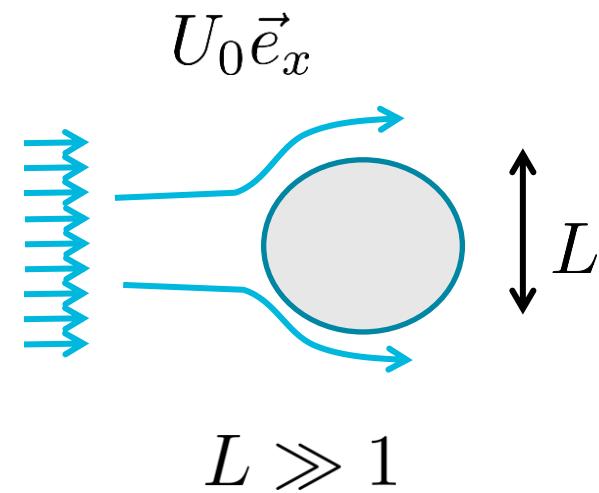
Des conditions aux limites aux couches limites



Le nombre de Reynolds dans la couche limite

$$\text{Re} = \frac{\delta U_0}{\nu} \ll 1$$

L'écoulement est laminaire



Le nombre de Reynolds du cylindre

$$\text{Re} = \frac{LU_0}{\nu}$$

L'écoulement peut être turbulent

Des conditions limites aux couches limites



Le nombre de Reynolds dans la couche limite

$$\text{Re} = \frac{\delta U_0}{\nu} \ll 1$$

L'écoulement est laminaire

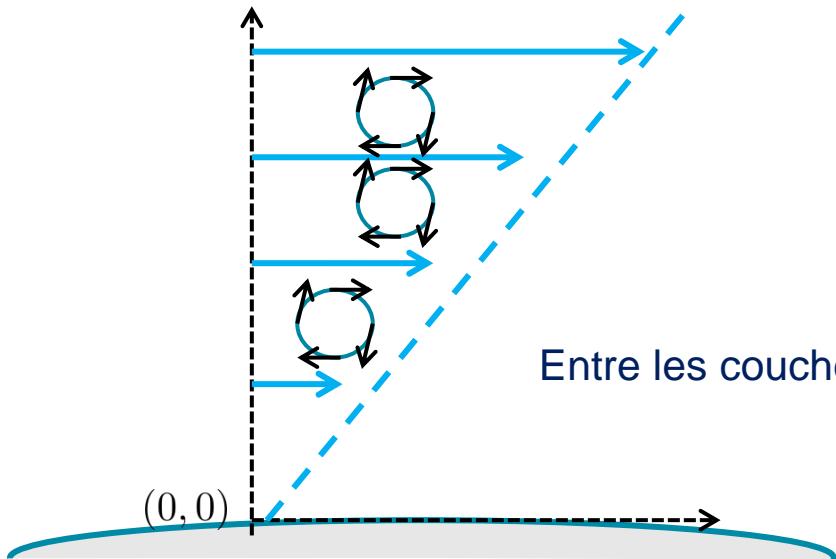
Le nombre de Reynolds du cylindre

$$\text{Re} = \frac{LU_0}{\nu}$$

L'écoulement peut être turbulent

2.3 Conditions aux limites et couche limites

Viscosité et vorticité



Entre les couches, les particules fluides « tournent » sur elle même

$$\vec{\text{rot}} \vec{u} = \vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{\omega} \quad \text{Vorticité}$$

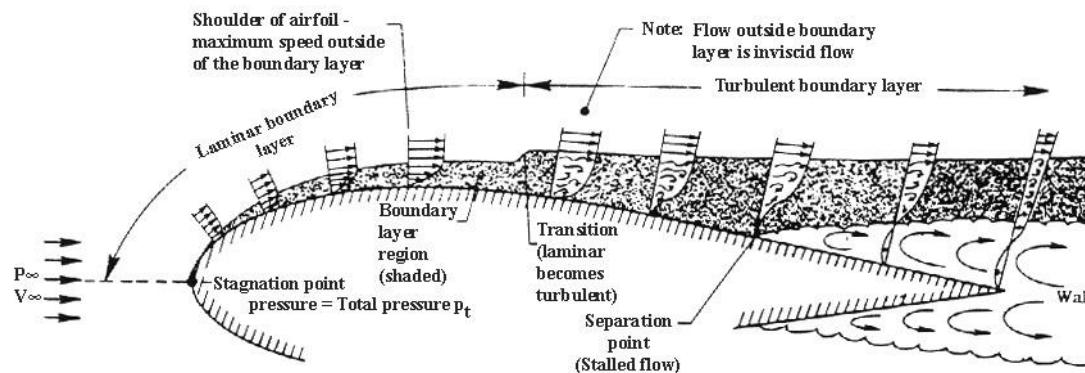
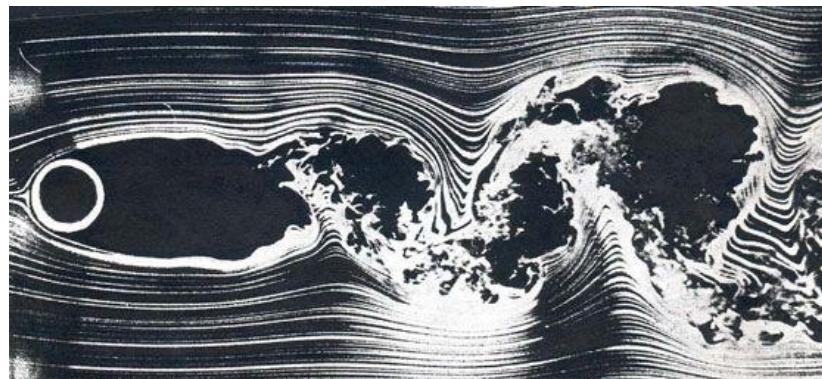


Les effets visqueux sont la source d'un mouvement rotationnel du fluide

2.3 Conditions aux limites et couche limites

Viscosité et vorticité

La plupart des instabilités (origine de la turbulence) proviennent de la déstabilisation des tourbillons



CHAPITRE 3

MODÉLISER LES ECOULEMENTS

3.1 Fluide parfait

Tous les fluides réels ont une viscosité, qui génère de la vorticité (tourbillon) proche des parois.

Equation de Navier-Stokes (Fluide réel)

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla p + \vec{f}_p + \rho \nu \Delta \vec{u}$$

3.1 Fluide parfait

Tous les fluides réels ont une viscosité, qui génère de la vorticité (tourbillon) proche des parois.

Equation de Navier-Stokes (Fluide réel)

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla p + \vec{f}_p + \rho \nu \Delta \vec{u}$$



3.1 Fluide parfait

Tous les fluides réels ont une viscosité, qui génère de la vorticité (tourbillon) proche des parois.

Equation de Navier-Stokes (Fluide réel)

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla p + \vec{f}_p + \rho \nu \Delta \vec{u}$$



Imaginons un fluide SANS viscosité → **Fluide parfait**

3.1 Fluide parfait

Tous les fluides réels ont une viscosité, qui génère de la vorticité (tourbillon) proche des parois.

Equation de Navier-Stokes (Fluide réel)

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla p + \vec{f}_p + \rho \nu \Delta \vec{u}$$



Imaginons un fluide SANS viscosité → **Fluide parfait**

et un écoulement SANS vorticité: → **Ecoulement potentiel**

3.1 Fluide parfait

Tous les fluides réels ont une viscosité, qui génère de la vorticité (tourbillon) proche des parois.

Equation de Navier-Stokes (Fluide réel)

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla p + \vec{f}_p + \rho \nu \Delta \vec{u}$$



Equation de Bernoulli (Fluide parfait)

$$(\vec{u} \cdot \nabla) \nabla \left(p + \rho \frac{|\vec{u}|^2}{2} + V_p \right) = 0$$

Imaginons un fluide SANS viscosité

→ **Fluide parfait**

et un écoulement SANS vorticité:

→ **Ecoulement potentiel**

3.1 Fluide parfait

Tous les fluides réels ont une viscosité, qui génère de la vorticité (tourbillon) proche des parois.

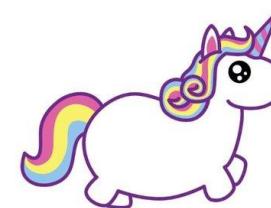
Equation de Navier-Stokes (Fluide réel)

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla p + \vec{f}_p + \rho \nu \Delta \vec{u}$$



Equation de Bernoulli (Fluide parfait)

$$(\vec{u} \cdot \nabla) \nabla \left(p + \rho \frac{|\vec{u}|^2}{2} + V_p \right) = 0$$



Imaginons un fluide SANS viscosité

→ **Fluide parfait**

et un écoulement SANS vorticité:

→ **Ecoulement potentiel**

3.2 Equation de Bernoulli

De Navier-Stokes à l'équation de Bernoulli

1^{ère} étape: fluide parfait

¹⁾ Le fluide parfait est un fluide **dont la viscosité est nulle** $\nu = 0$.

¹⁾ Ne s'applique pas dans les couches limites, les écoulements confinés ou à faible nombre de Reynolds;
²⁾ Bonne approximation dans les écoulements ouverts ou à grand nombre de Reynolds

3.2 Equation de Bernoulli

De Navier-Stokes à l'équation de Bernoulli

1^{ère} étape: fluide parfait

¹⁾ Le fluide parfait est un fluide **dont la viscosité est nulle** $\nu = 0$.

¹⁾ Ne s'applique pas dans les couches limites, les écoulements confinés ou à faible nombre de Reynolds;
²⁾ Bonne approximation dans les écoulements ouverts ou à grand nombre de Reynolds

2^{ème} étape: simplifier le terme non-linéaire

¹⁾ Identité vectorielle
(incompressible) $\vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = \nabla \left(\frac{|\vec{u}|^2}{2} \right) + \vec{\omega} \times \vec{u}$

↓ ↓

¹⁾ Force centrifuge+ Coriolis

3.2 Equation de Bernoulli

De Navier-Stokes à l'équation de Bernoulli

3ème étape: de l'équation de Navier-Stokes à Euler

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\rho |\vec{u}|^2}{2} + p + \mathcal{V} \right) + \rho \vec{\omega} \times \vec{u} = 0$$

Terme gradient
(conservatif)

Force du tourbillon

1)

Force potentielle $\vec{f}_p = -\nabla \mathcal{V}$, pesanteur $\vec{f}_p = -\rho g \vec{e}_z = -\nabla(\rho g z)$

3.2 Equation de Bernoulli

De Navier-Stokes à l'équation de Bernoulli

3ème étape: de l'équation de Navier-Stokes à Euler

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\rho |\vec{u}|^2}{2} + p + \mathcal{V} \right) + \rho \vec{\omega} \times \vec{u} = 0$$

Terme gradient
(conservatif)

Force du tourbillon

1)

Force potentielle $\vec{f}_p = -\nabla \mathcal{V}$, pesanteur $\vec{f}_p = -\rho g \vec{e}_z = -\nabla(\rho g z)$

3.2 Equation de Bernoulli

De Navier-Stokes à l'équation de Bernoulli

3ème étape: de l'équation de Navier-Stokes à Euler

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\rho |\vec{u}|^2}{2} + p + \mathcal{V} \right) + \rho \vec{\omega} \times \vec{u} = 0$$

Terme gradient
(conservatif)

Force du tourbillon

$$H = \frac{\rho |\vec{u}|^2}{2} + p + \mathcal{V}$$

La charge (homogène à une densité d'énergie volumique)

1)

Force potentielle $\vec{f}_p = -\nabla \mathcal{V}$, pesanteur

$$\vec{f}_p = -\rho g \vec{e}_z = -\nabla(\rho g z)$$

3.2 Equation de Bernoulli

De Navier-Stokes à l'équation de Bernoulli

Deux méthodes

- 1) M1 via les hypothèses: écoulement stationnaire+une ligne de courant
- 2) M2 via les hypothèses: écoulement potentiel (sans vorticité)

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\rho |\vec{u}|^2}{2} + p + \mathcal{V} \right) + \rho \vec{\omega} \times \vec{u} = 0$$

Gradient de la charge

Force du tourbillon

3.2 Equation de Bernoulli

De Navier-Stokes à l'équation de Bernoulli

1) Deux méthodes

- 1) M1 via les hypothèses: écoulement stationnaire+une ligne de courant

$$\cancel{\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}} + \nabla \left(\frac{\rho |\vec{u}|^2}{2} + p + \mathcal{V} \right) + \rho \vec{\omega} \times \vec{u} = 0$$

Terme gradient (conservatif)

Force du tourbillon

CHAPITRE 3 : MODÉLISER LES ÉCOULEMENTS

115

3.2 Equation de Bernoulli

De Navier-Stokes à l'équation de Bernoulli

1) Deux méthodes

- 1) M1 via les hypothèses: écoulement stationnaire+une ligne de courant

Produit scalaire

$$\vec{u} \cdot (\quad) = 0$$

$$\vec{u} \cdot \nabla \left(\frac{\rho |\vec{u}|^2}{2} + p + \mathcal{V} \right) + \rho \vec{u} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{u}) = 0$$

Force du tourbillon

Terme gradient
(conservatif)

3.2 Equation de Bernoulli

De Navier-Stokes à l'équation de Bernoulli

1) Deux méthodes

- 1) M1 via les hypothèses: écoulement stationnaire+une ligne de courant

Produit scalaire

$$\vec{u} \cdot (\quad) = 0$$

$$\vec{u} \cdot \nabla \left(\frac{\rho |\vec{u}|^2}{2} + p + \mathcal{V} \right) + \rho \vec{u} \cdot (\cancel{\vec{\omega} \times \vec{u}}) = 0$$

Terme gradient
(conservatif)

Produit mixte nul
La force de Coriolis ne travaille pas

3.2 Equation de Bernoulli

De Navier-Stokes à l'équation de Bernoulli

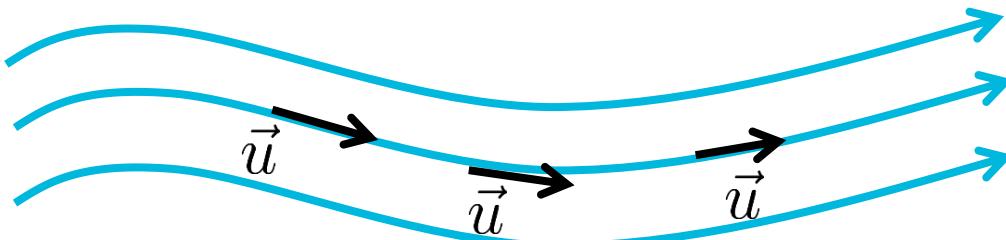
1) Deux méthodes

- M1 via les hypothèses: écoulement stationnaire+une ligne de courant

Théorème de Bernoulli
(advection de la charge)

$$\vec{u} \cdot \nabla (H) = 0$$

$$H = \frac{\rho |\vec{u}|^2}{2} + p + \mathcal{V}$$



Ligne de courant
(tangente au champ de vecteur)
=trajectoire si stationnaire

3.2 Equation de Bernoulli

De Navier-Stokes à l'équation de Bernoulli

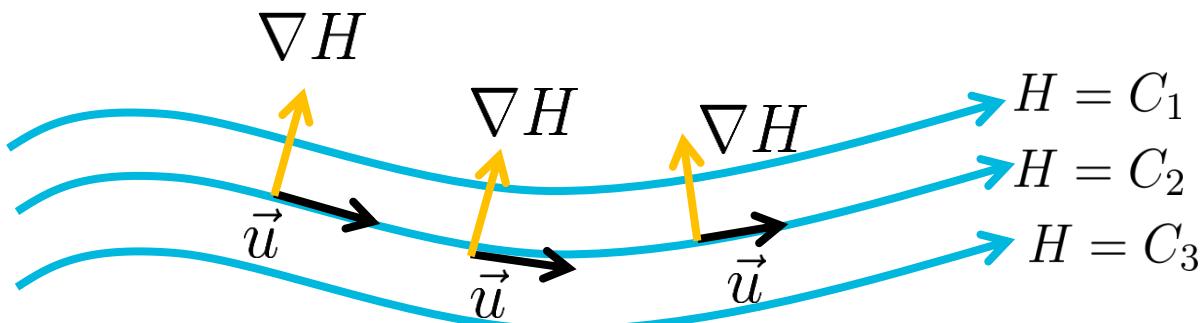
Deux méthodes

- M1 via les hypothèses: écoulement stationnaire+une ligne de courant

Théorème de Bernoulli
(advection de la charge)

$$\vec{u} \cdot (\nabla H) = 0$$

$$H = \frac{\rho|\vec{u}|^2}{2} + p + V$$



La charge est constante
le long d'une ligne de
courant

Ligne de courant
(tangente au champ de vecteur vitesse)
=trajectoire si stationnaire

3.2 Equation de Bernoulli

De Navier-Stokes à l'équation de Bernoulli

Deux méthodes

- M2 via les hypothèses: écoulement potentiel (sans vorticité)

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} = \vec{0} \iff \vec{u} = \nabla \phi \quad \text{La vitesse dérive d'un potentiel } \phi(x, y, z, t)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\rho |\vec{u}|^2}{2} + p + \mathcal{V} \right) + \rho \vec{\omega} \times \vec{u} = 0$$

Gradient de la charge

3.2 Equation de Bernoulli

De Navier-Stokes à l'équation de Bernoulli

1) Deux méthodes

- 1) M2 via les hypothèses: écoulement potentiel (sans vorticité)

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} = \vec{0} \iff \vec{u} = \nabla \phi \quad \text{La vitesse dérive d'un potentiel } \phi(x, y, z, t)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \boxed{\nabla \left(\frac{\rho |\vec{u}|^2}{2} + p + \mathcal{V} \right)} + \cancel{\rho \vec{\omega} \times \vec{u} = 0}$$

Gradient de la charge

Force du tourbillon

3.2 Equation de Bernoulli

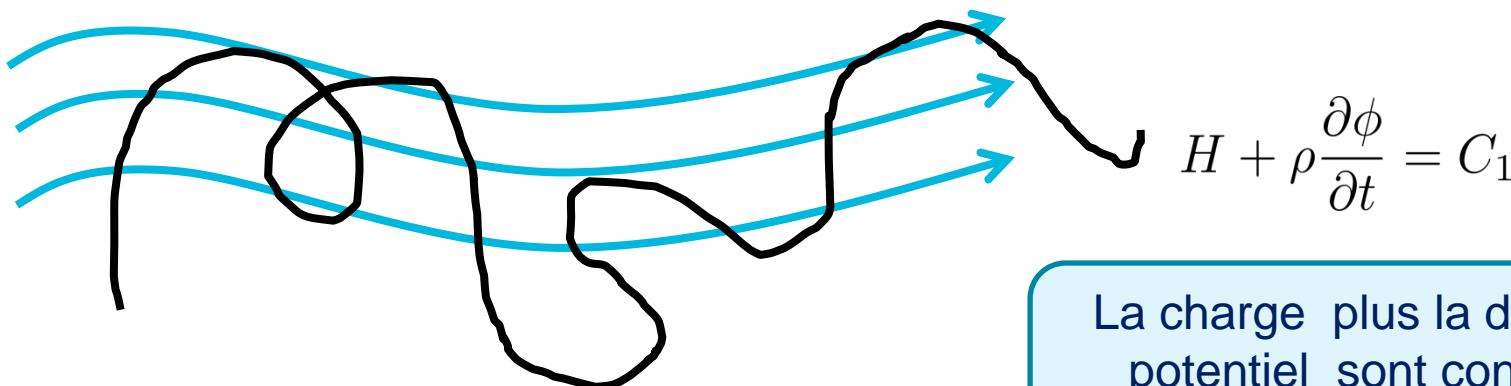
De Navier-Stokes à l'équation de Bernoulli

1) Deux méthodes

- 1) M2 via les hypothèses: écoulement potentiel (sans vorticité)

Théorème de Bernoulli
(vrai partout)

$$\nabla \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\rho |\vec{u}|^2}{2} + p + \mathcal{V} \right) = 0$$



La charge plus la dérivée du potentiel sont constantes partout

CHAPITRE 3 : MODÉLISER LES ÉCOULEMENTS

122

3.2 Equation de Bernoulli

De l' équation de Bernoulli Evolution de la charge $H = \frac{\rho|\vec{u}|^2}{2} + p + \gamma$

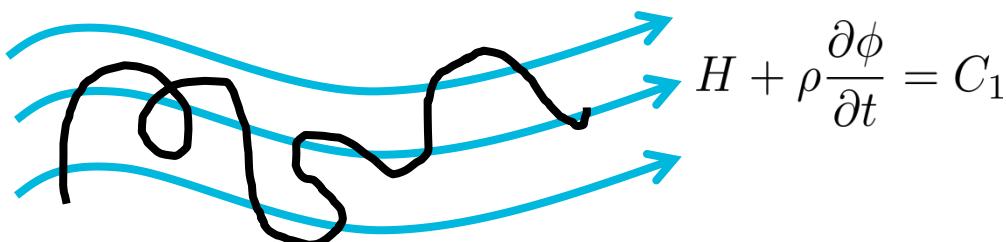
Le fluide est parfait et l'écoulement incompressible

1) M1 via les hypothèses: écoulement stationnaire+une ligne de courant



Valide même avec de la vorticité
Nécessite de connaître les lignes de courant

2) M2 via les hypothèses: écoulement potentiel (sans vorticité)



Valide même avec des instationnarités
Valide partout dans l'écoulement
Nécessite l'absence de vorticité

CHAPITRE 3 : MODÉLISER LES ÉCOULEMENTS

123

3.3 La charge

La charge?? $H = \frac{\rho|\vec{u}|^2}{2} + p + \rho g z$ avec $\mathcal{V} = \rho g z$

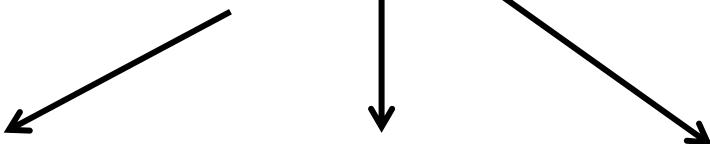


$$E = \iiint H dV = \iiint \left(\frac{\rho|\vec{u}|^2}{2} + p + \rho g z \right) dV$$

Énergie cinétique

????

Énergie potentielle



CHAPITRE 3 : MODÉLISER LES ÉCOULEMENTS

124

3.3 La charge

La charge?? $H = \frac{\rho|\vec{u}|^2}{2} + p + \rho g z$ avec $\mathcal{V} = \rho g z$



$$E = \iiint H dV = \iiint \left(\frac{\rho|\vec{u}|^2}{2} + p + \rho g z \right) dV$$

Énergie cinétique

Enthalpie
(Transvasement)

Énergie potentielle

Rappel de thermodynamique

$$\Delta H = \Delta(U + PV) = W_u$$

Variation d'enthalpie
= travail utile
(transvasement)



$$W_u = P_s V_s - P_e V_e$$

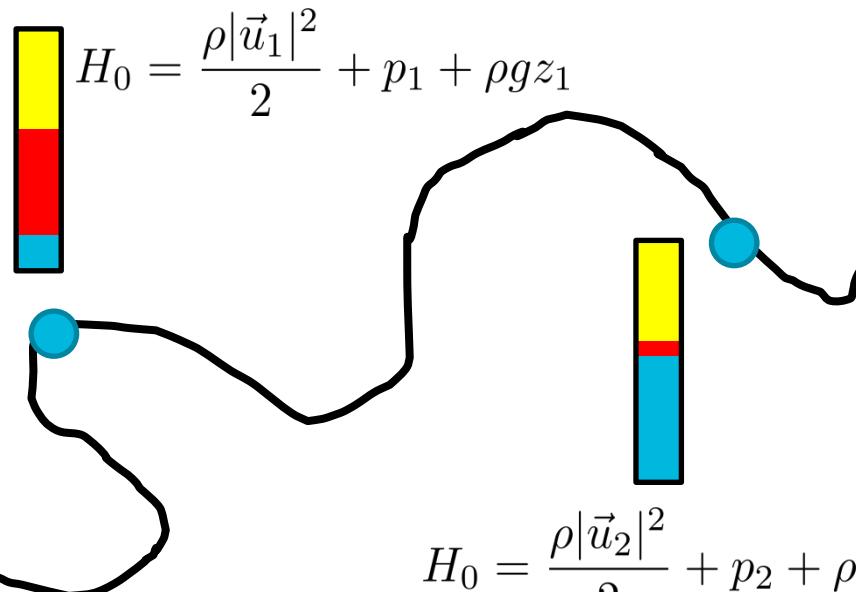
CHAPITRE 3 : MODÉLISER LES ÉCOULEMENTS

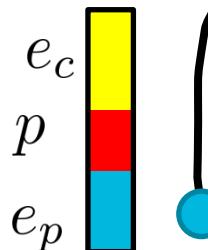
125

3.3 La charge

La charge=énergie totale

$$H = \frac{\rho|\vec{u}|^2}{2} + p + \rho g z$$


$$H_0 = \frac{\rho|\vec{u}_1|^2}{2} + p_1 + \rho g z_1$$



$$H_0 = \frac{\rho|\vec{u}_0|^2}{2} + p_0 + \rho g z_0$$

$$H_0 = \frac{\rho|\vec{u}_2|^2}{2} + p_2 + \rho g z_2$$

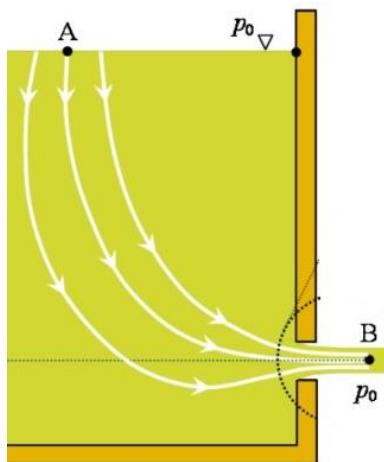
La charge totale est constante, mais les parts relatives d'énergie cinétique, potentielle et d'enthalpie varient

3.3 La charge

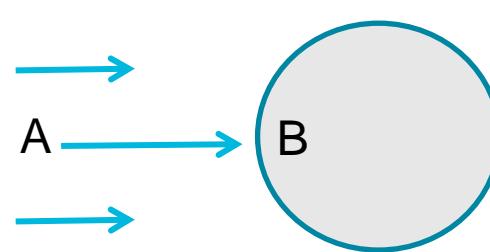
Application de l'équation de Bernoulli

$$H = \frac{\rho|\vec{u}|^2}{2} + p + \rho g z$$

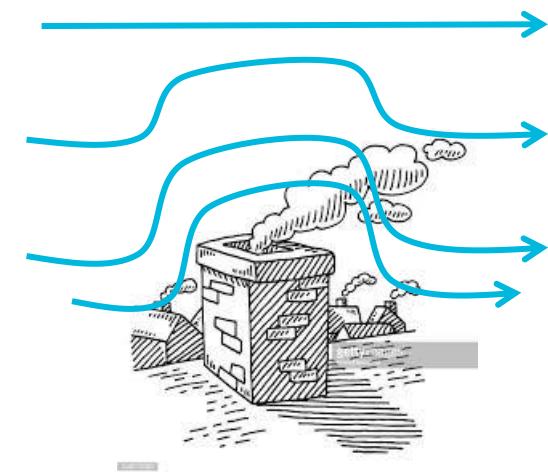
Écoulement gravitaire
(réservoir)



Force d'un écoulement
incident sur un obstacle



Aspiration cheminée



CHAPITRE 3 : MODÉLISER LES ÉCOULEMENTS

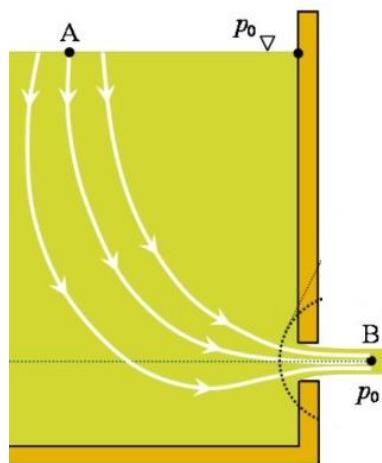
127

3.3 La charge

Application de l'équation de Bernoulli

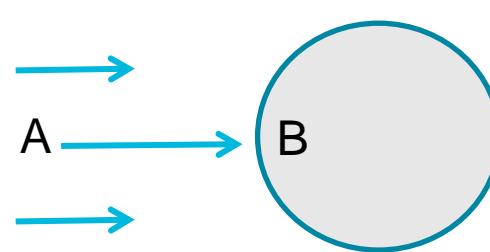
$$H = \frac{\rho|\vec{u}|^2}{2} + p + \rho g z$$

Écoulement gravitaire
(réservoir)



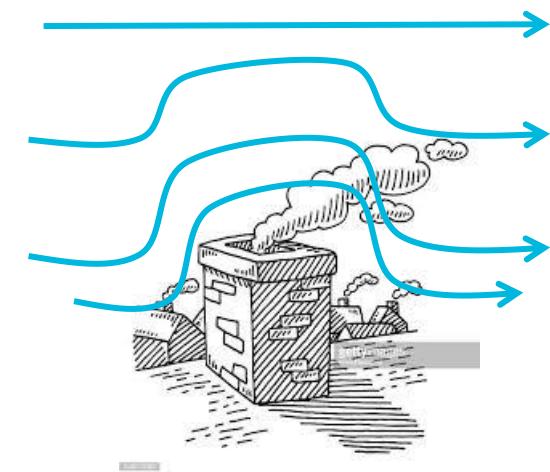
Transformation énergie
potentielle en cinétique

Force d'un écoulement
incident sur un obstacle



Transformation énergie
cinétique en pression

Aspiration cheminée

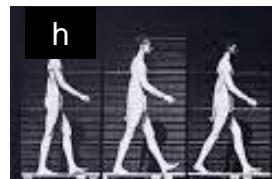
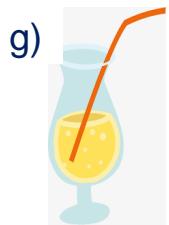
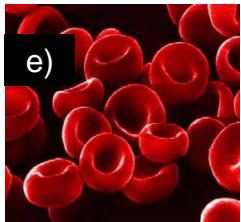
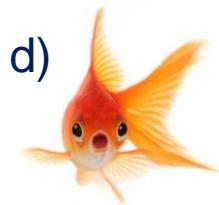


Transformation pression en
énergie cinétique
(dépression)

CHAPITRE 3 : MODÉLISER LES ÉCOULEMENTS

128

3.4 Modéliser la turbulence



$10^{-3} - 10^{-2}$

$1 - 10$

$10^2 - 10^3$

$10^6 - 10^7$

$10^8 - 10^9$

$10^{10} - 10^{11}$

$10^{16} - 10^{20}$

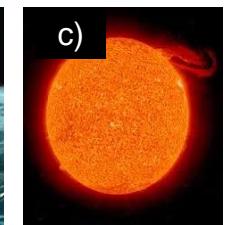
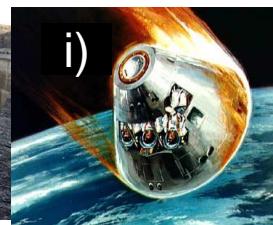
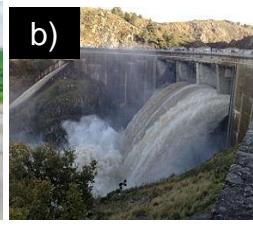
Laminaire

Turbulent

$$Re = \frac{U_0 L}{\nu}$$

La plupart des écoulements est à des grands nombres de Reynolds

$$Re > 10^2 - 10^3$$



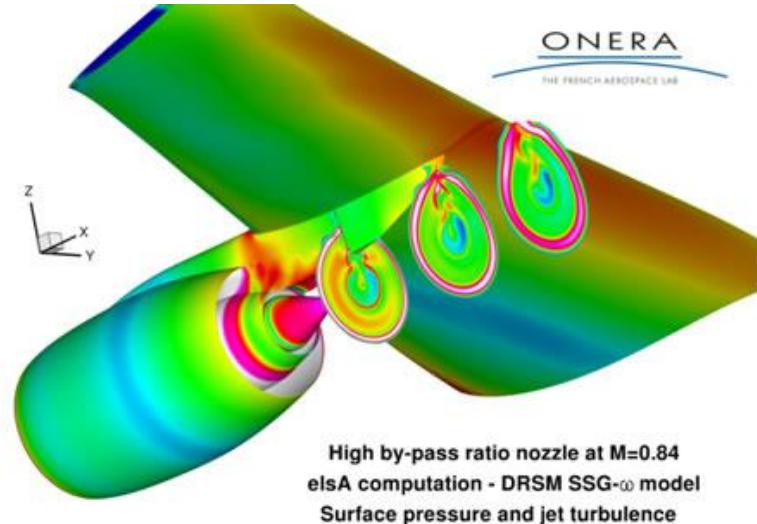
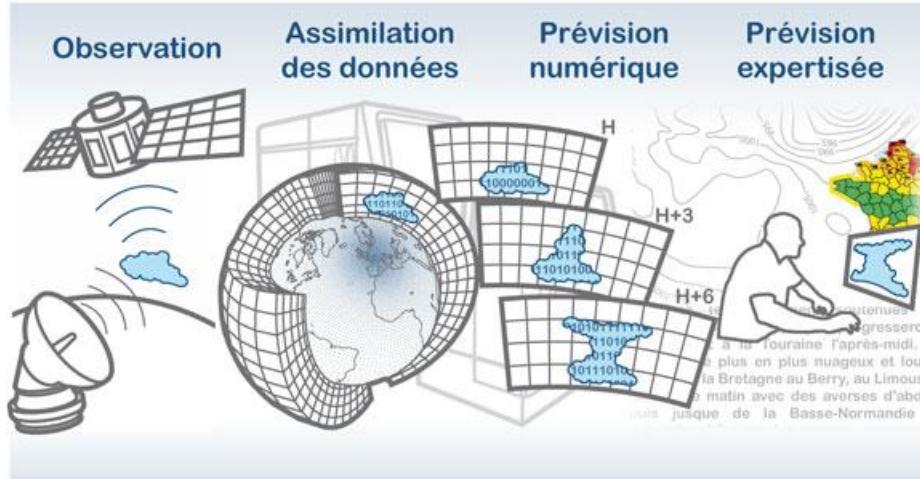
CHAPITRE 3 : MODÉLISER LES ÉCOULEMENTS

129

3.4 Modéliser la turbulence

Equation de Navier-Stokes (Fluide réel)

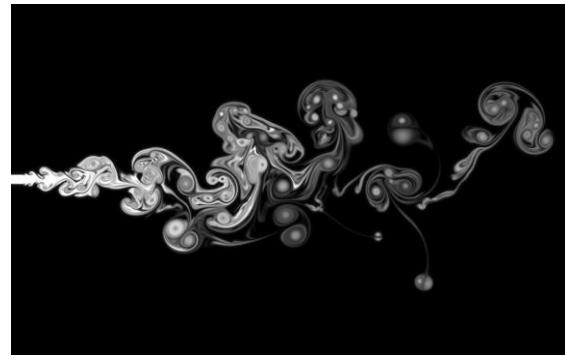
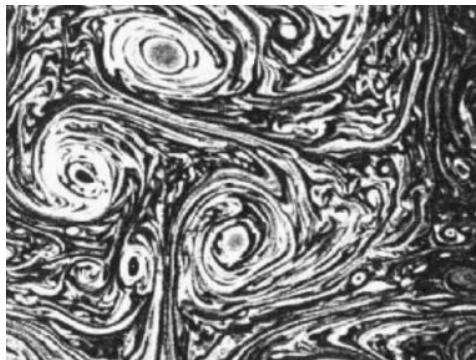
$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla p + \vec{f}_p + \rho \nu \Delta \vec{u}$$



CHAPITRE 3 : MODÉLISER LES ÉCOULEMENTS

130

3.4 Modéliser la turbulence



Dans les écoulements fortement turbulents on ne peut pas négliger la présence de **vorticité** et la **dissipation** (donc la viscosité)

3.4 Modéliser la turbulence

Mais en pratique, on ne peut pas simuler l'équation de Navier-Stokes pour la plupart des écoulements

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla p + \vec{f}_p + \rho \nu \Delta \vec{u}$$

Maillage très couteux numériquement (petit δx) : gestion de la mémoire.

Simulations très longues (petit δt) : plusieurs mois, pas d'études paramétriques

