第一章
时域离散信号和系统

Discrete-Time Signals and Systems in the Time-Domain

图像传输与处理研究所　王柯俨

kywang@mail.xidian.edu.cn

http://web.xidian.edu.cn/kywang/teach.html

本章主要内容

- 时域离散信号（序列）的表示方法
- 典型的时域离散信号
- 时域离散系统：系统的线性、时不变性、因果稳定性
- 时域离散系统的时域分析方法，系统输入与输出的描述

1.1 引言

- 信号（signal）
  - 携带信息的函数，是信息的载体
  - 信号形式：模拟信号、时域离散信号、数字信号
- 系统（system）
  - 若干相互作用、相互联系的事物按一定规律组成具有特定功能的整体称为系统。
- 举例：
  - 手机、电视机、通信网、计算机网等都可以看成系统。它们所传送的语音、音乐、图象、文字等都可以看成信号。

1.1 引言

- 系统
  - 信号的概念与系统的概念常常紧密地联系在一起。
  - 信号的产生、传输和处理需要一定的物理装置，这样的物理装置常称为系统。
  - 系统的基本作用是对输入信号进行加工和处理，将其转换为所需要的输出信号。
  - 系统所处理的信号类型就是系统的类型。

1.1 引言

- 信号、系统数学描述的意义
  - 为了把握信号与系统特征参数
  - 系统输出的预测
  - 系统性能的分析
  - 综合

1.2 模拟信号、时域离散信号和数字信号

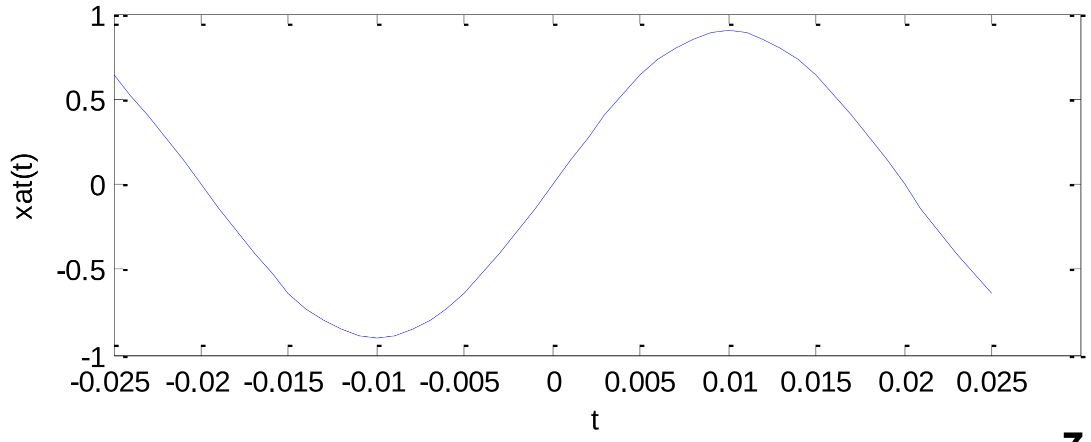
- 时域离散信号和数字信号的定义
- 时域离散信号的表示方法
- 常用的时域离散信号

模拟信号

- 模拟信号

$$x_a(t) = 0.9\sin 50\pi t$$

  - 正弦信号的角频率 **50π**
  - 正弦信号的频率是 **25Hz**
  - 周期是**0.04s**



时域离散信号

模拟信号 $x_a(t) = 0.9\sin 50\pi t$

采样

- 采样频率 $F_s = 200Hz$
- 采样间隔 $T = 1/F_s = 0.005s$

时域离散信号

$$x(n) = x_a(t)|_{t=nT} = 0.9\sin 50\pi nT \quad -\infty < n < \infty$$

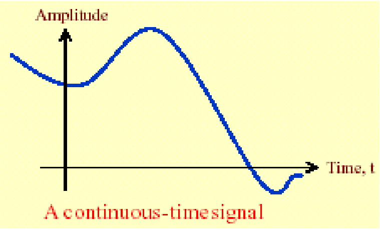
n表示第n个采样点，n 取整数

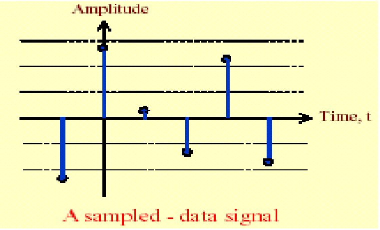
采样频率的选择？

时域离散信号：获取

- 方式一：采样

模拟信号 → 时域离散采样信号

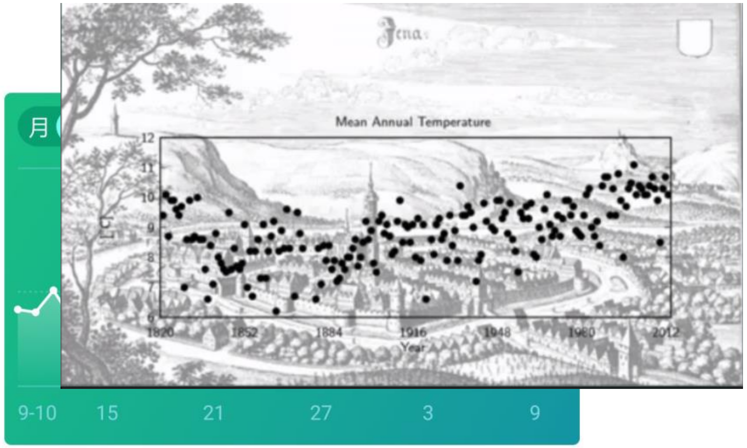




- 方式二：实验测试

测量体重　记录运动步数

测量气温



$$x(n)=\{110,109,107,108,106\}$$

n 取值为 $\{0,1,2,3,4\}$

时域离散信号：表示

- 公式表示

$$x(n)=x_a(t)\,|_{t=nT}=x_a(nT)$$

注意：

- 写明n的取值范围
- 闭合表达式存在

例：

$$x(n)=x_a(t)\,|_{t=nT}=0.9\sin 50\pi nT \quad -\infty<n<\infty$$

$$x(n)=a^{|n|},\quad 0<a<1,\ -\infty<n<\infty$$

时域离散信号：表示

- 用集合符号表示序列
  - 集合符合：$\{\bullet\}$，表示数的集合
  - 时域离散信号是一组有序的数的集合，可表示成集合。

例：将n代入

$$x(n) = x_a(t)|_{t=nT} = 0.9\sin 50\pi nT \quad -\infty < n < \infty$$

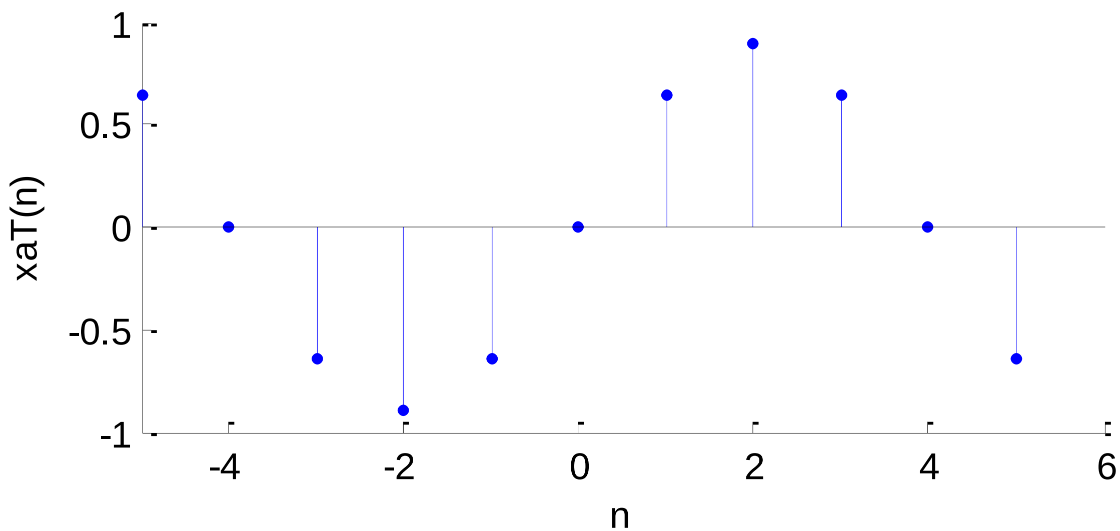
得：

$$x(n) = \{\cdots, 0.0, 0.6364, 0.900, 0.6364, \underline{0.0000}, -0.6364, -0.9000, -0.6364, \cdots\}$$

表示n=0点的序列值

时域离散信号：表示

- 用图形表示
  - 直观

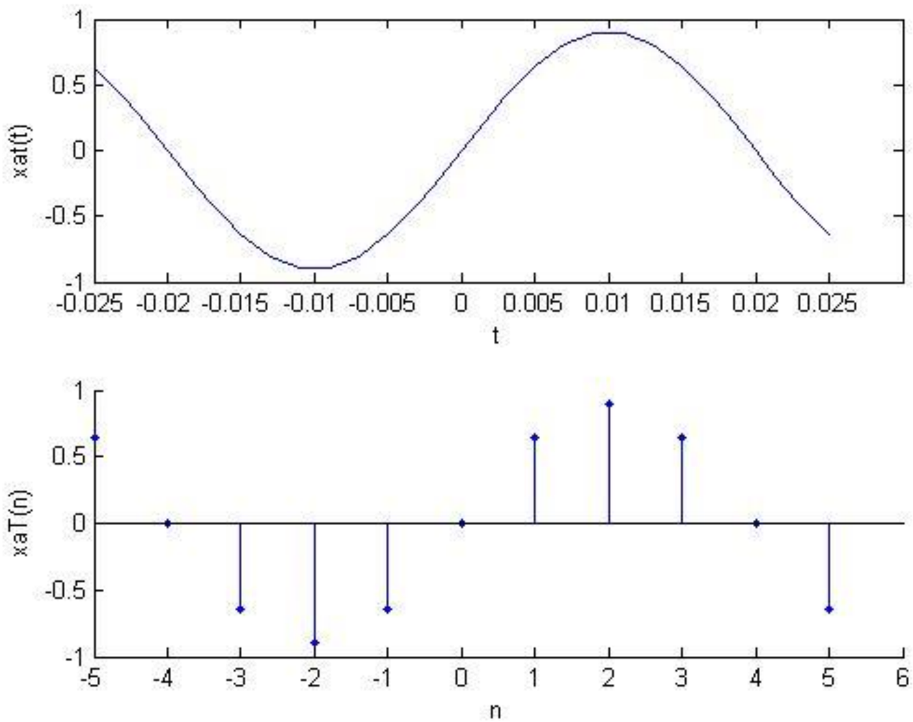


  - 为了醒目，在每一条竖线的顶端加一个小黑点。

Matlab 语言中的序列表示

```
t=-0.025:0.001:0.025;
xat=0.9*sin(50*pi*t);
subplot(2,1,1);
plot(t,xat);axis([-0.025,0.03,-1,1]);
xlabel('t'); ylabel('xat(t)');

T=0.005; n=-5:5;
xaT=0.9*sin(50*pi*n*T);
subplot(2,1,2);
stem(n,xaT,'.');axis([-5,6,-1,1]);
xlabel('n');ylabel('xaT(n)');
```



STEM(Y) plots the data sequence Y as stems from the x axis terminated with circles for the data value. If Y is a matrix then each column is plotted as a separate series.

数字信号

- 数字信号与离散信号的区别？
  - 时间离散、幅度离散

例：时域离散信号 $x(n) = 0.9\sin 50\pi nT \quad -\infty < n < \infty$

$$x(n) = \{\cdots, 0.0, 0.6364, 0.900, 0.6364, 0.0000, -0.6364, -0.9000, -0.6364, \cdots\}$$

  - 用四位二进制数表示离散序列x(n)的幅度
  - 其中第一位表示符号位
  - 用x[n]表示经过二进制编码后的信号

$$x[n] = \{\cdots, 0.000, 0.101, 0.111, 0.101, 0.000, 1.101, 1.111, 1.101, \cdots\}$$

↑

数字信号

数字信号

- 编码位数的选择
  - 将x[n]转换为十进制

$$x[n]=\{\cdots,0.000,0.101,0.111,0.101,0.000,1.101,1.111,1.101,\cdots\}$$

$$x[n]=\{\cdots,0.0,0.625,0.875,0.625,0.0,-0.625,-0.875,-0.625,\cdots\}$$

存在误差

$$x(n)=\{\cdots,0.0,0.6364,0.900,0.6364,0.0000,-0.6364,-0.9000,-0.6364,\cdots\}$$

- 量化误差：幅度值上有误差，有损变换

  与二进制编码位数有关

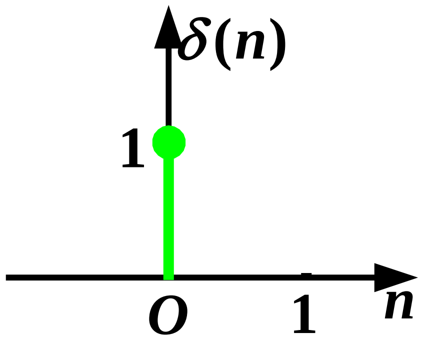
小结

- 时域离散信号的表示方法
- 问题：
  - 采样间隔如何确定？
  - 连续信号 → 离散信号，是否有损变换？
- 离散序列的二进制编码 → 数字信号
- 问题：
  - 是否有损变换？
  - 如何减少误差？

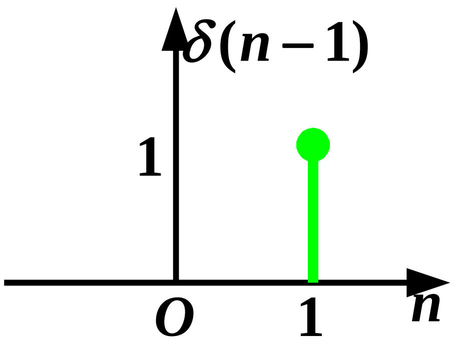
1.2.3 常用时域离散信号

1.单位脉冲序列(1)

$$\delta(n)=\begin{cases}0, n\neq 0\\ 1, n=0\end{cases}$$



时移性 $\delta(n-j)=\begin{cases}0, n\neq j\\ 1, n=j\end{cases}$



比例性 $c\delta(n), c\delta(n-j)$

抽样性 $f(n)\delta(n)=f(0)\delta(n)$

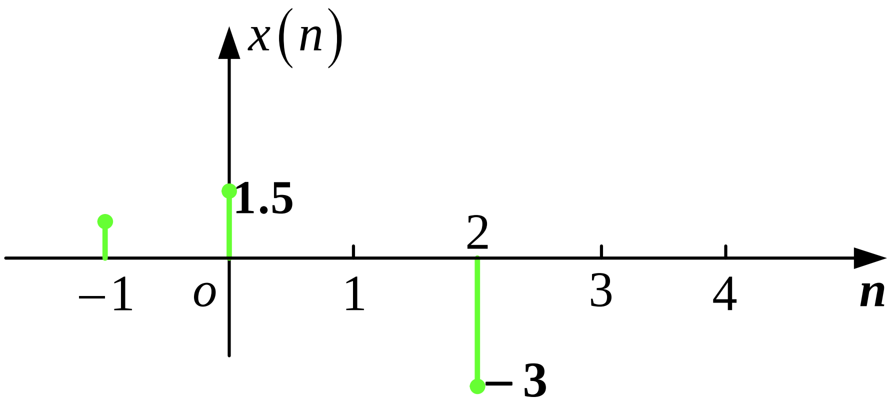
注意: $\delta(t)$用面积(强度)表示($t\to 0$，幅度为∞)；

$\delta(n)$在$n=0$取有限值(不是面积)。

1.单位脉冲序列(2)

- 任意序列的表示

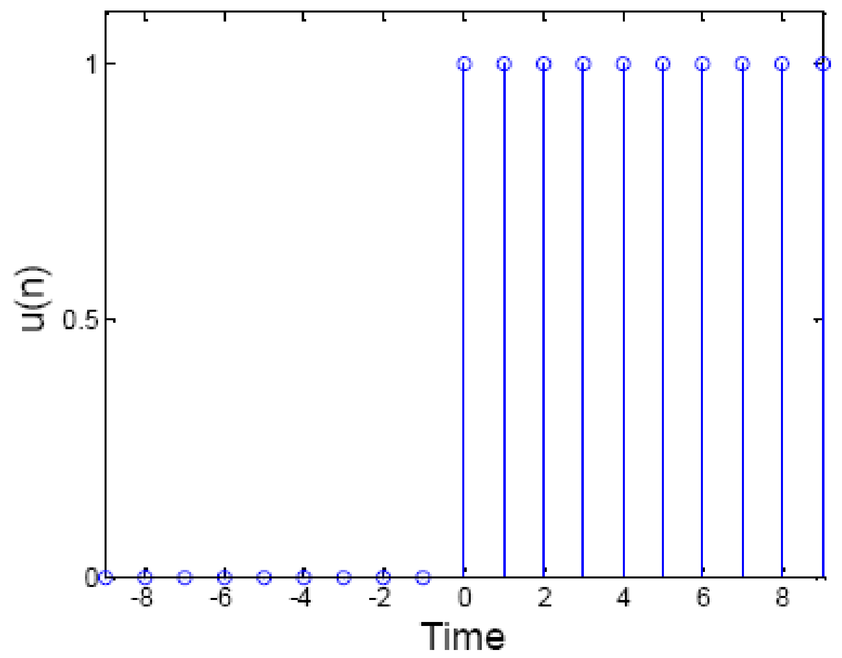
$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$$



$$f(n)=\left\{1,\underset{\underset{n=0}{\uparrow}}{1.5},0,-3,0,0,\right\}=\delta(n+1)+1.5\delta(n)-3\delta(n-2)$$

2.单位阶跃序列

$$u(n)=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$



用单位脉冲序列表示

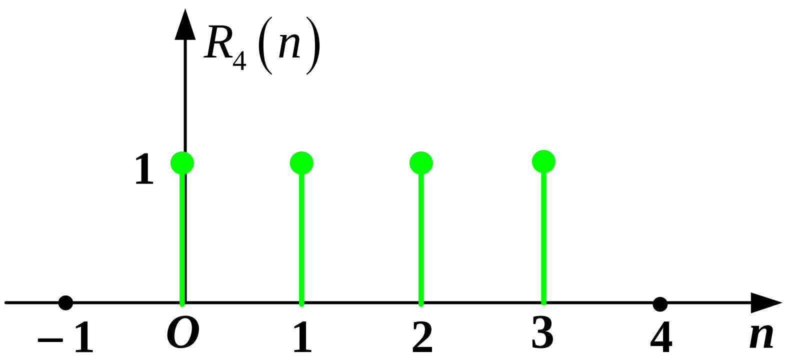
$$u(n)=\sum_{m=0}^{\infty}\delta(n-m)$$

注意:

$\delta(n)$与$u(n)$是差和关系，不再是微分关系。

3.矩形序列

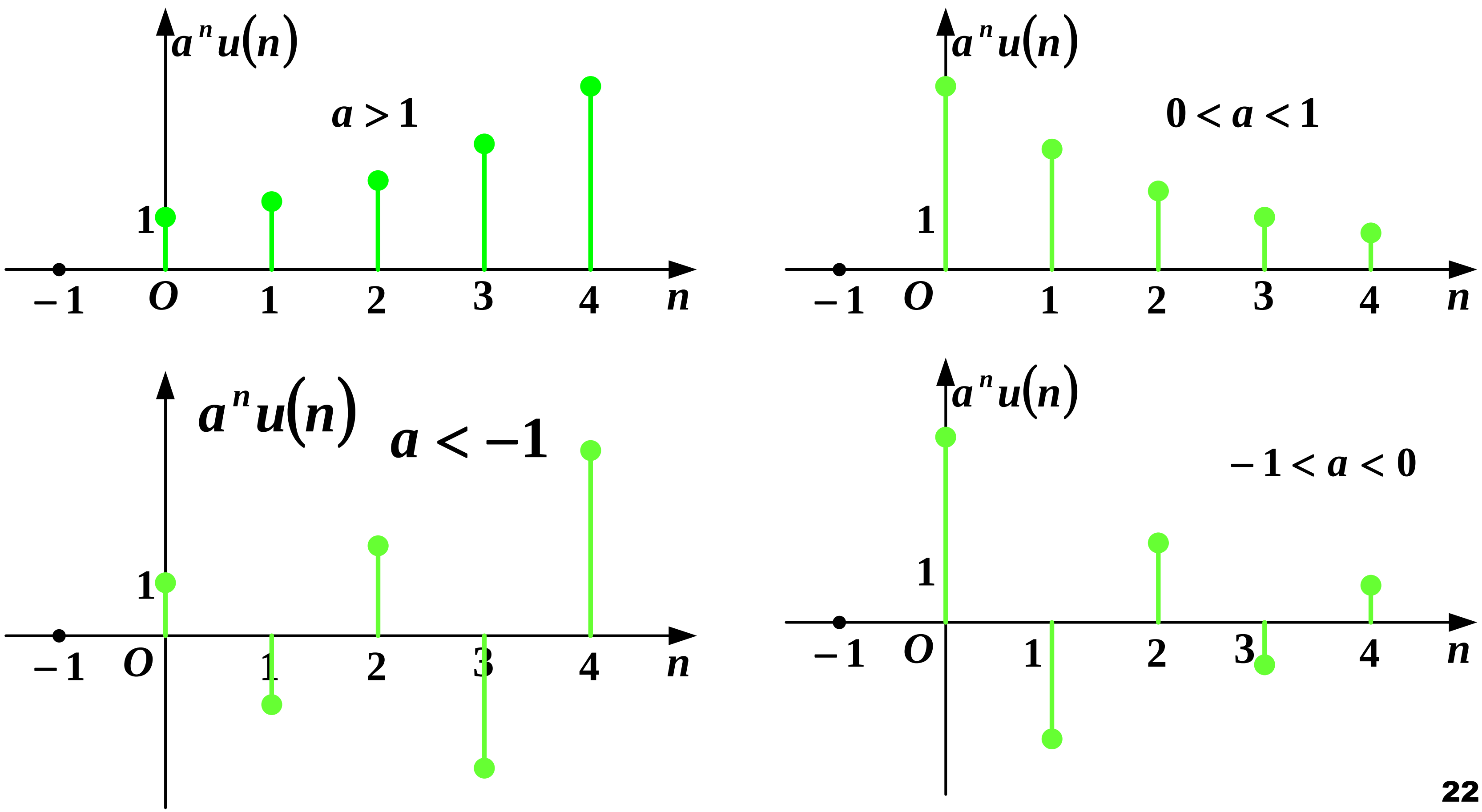
$$R_N(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le N-1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$



下标*N* 称为矩形序列的长度

4.实指数序列

$$x(n) = a^n u(n)$$ a 取实数，其大小影响序列波形

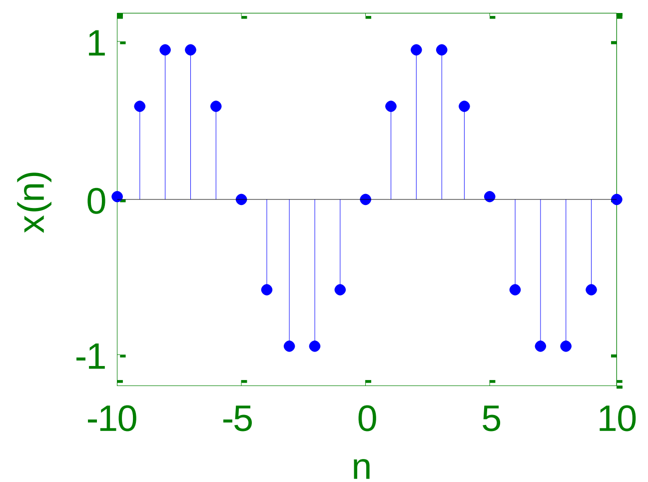


5.正弦序列

$$x(n) = A\sin(\Omega nT + \theta) = A\sin(\omega n + \theta)$$

- T 采样间隔； Ω 模拟信号的角频率
- ω 数字域的数字频率

$$\omega = \Omega T$$



$$\omega = 2\pi / 10$$

注意:

- ω（rad）和 Ω（rad/s）不同
- ω 和 Ω 的对应关系可推论到一般情况

6.复指数序列

$$x(n) = e^{j\omega n}$$

- ω数字频率，用欧拉公式展开

$$x(n) = \cos(\omega n) + j\sin(\omega n)$$

- 特点：

$$e^{j(\omega+2\pi M)n} = e^{j\omega n} \qquad M, n\text{为整数}$$

$$\cos[(\omega + 2\pi M)n] = \cos \omega n$$

$$\sin[(\omega + 2\pi M)n] = \sin \omega n$$

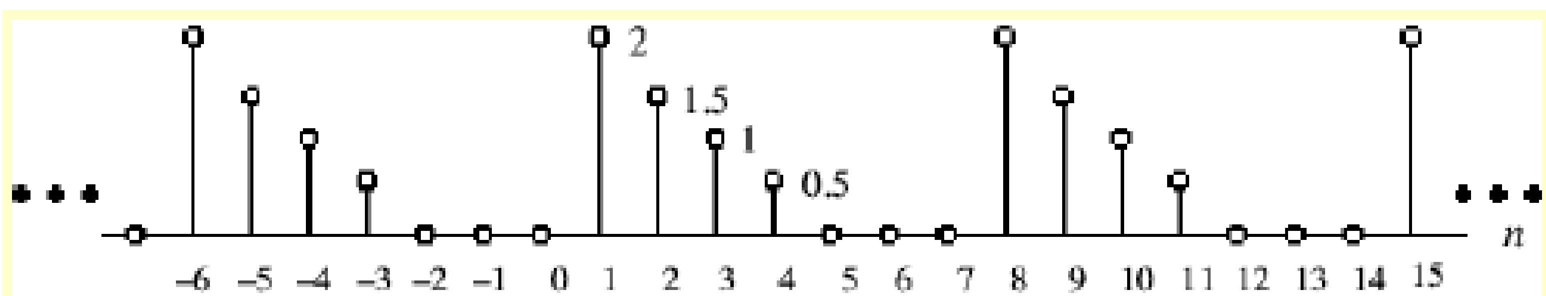
  - 周期信号 -- 以2π为周期（对ω而言）
  - 主值区间 -- [-π,π]或 [0,2π]

7.周期序列

- 满足下式，则称为周期序列

$$x(n) = x(n+N) \quad -\infty < n < \infty$$

- 周期：满足上式的最小正整数N



7.周期序列

$$x(n)=x(n+N)\quad -\infty<n<\infty$$

- 正（余）弦序列的周期性？是否为周期序列？

$$x(n)=A\sin(\omega n+\varphi)$$

$$x(n+N)=A\sin(\omega n+\omega N+\varphi)$$

- 正弦序列X(n)为周期序列的条件？

$$\omega N=2\pi M\quad M\text{为正整数}$$

- 周期：满足上式的最小正整数N

$$N=2\pi M/\omega$$

7.周期序列

$$\omega N = 2\pi M \quad M\text{为正整数}$$

$$N = 2\pi M / \omega$$

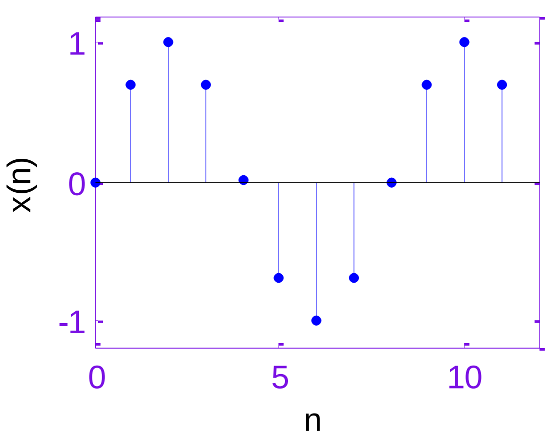
- 周期性?

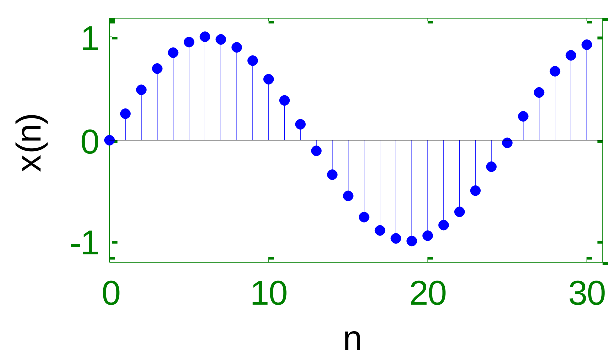
$$x(n) = \sin(\frac{\pi}{4}n) \qquad x(n) = \sin(\frac{1}{4}n)$$

- 数字频率 ω

$$\omega = \pi/4 \qquad \omega = 1/4$$

$$2\pi/\omega = 8 \qquad 2\pi/\omega = 8\pi$$





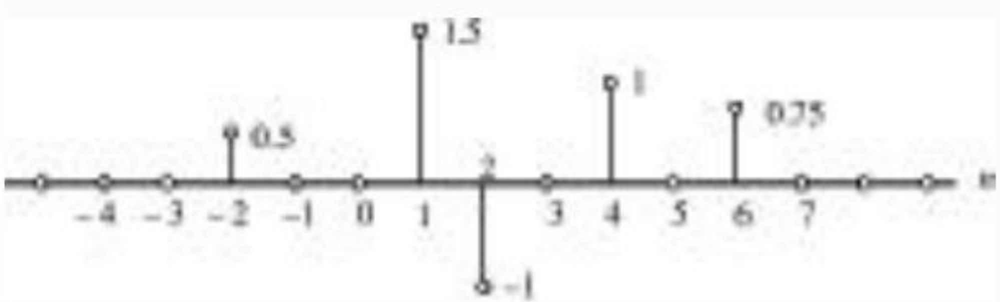
8.任意序列描述

- 基于单位脉冲序列描述

Q：为什么这样描述？

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$$

任意序列 -- 单位脉冲序列的移位加权和



$$x[n]=0.5\delta[n+2]+1.5\delta[n-1]-\delta[n-2]+\delta[n-4]+0.75\delta[n-6]$$

1.3 时域离散系统

※线性时不变时域离散系统
※线性时不变系统输出和输入之间的关系
※系统的因果性和稳定性

1.3.1 线性时不变时域离散系统

1. 线性性质

满足线性叠加原理

设 $x_1(n)$、$x_2(n)$ 分别为系统的输入，则系统的输出分别为：

$$y_1(n)=T[x_1(n)]、y_2(n)=T[x_2(n)]$$

设 $x(n)=ax_1(n)+bx_2(n)$　　a,b 为常数

如下式成立，则该系统是线性系统

$$y(n)=T[x(n)]=T[ax_1(n)+bx_2(n)]$$
$$=ay_1(n)+by_2(n)$$

输入线性组合 ⟶ 输出线性组合

线性系统举例

- 线性系统？

$$y(n)=T[x(n)]=[x(n)]^2$$

$$x(n)=ax_1(n)+bx_2(n)$$

$$y(n)=[x(n)]^2=\left[ax_1(n)+bx_2(n)\right]^2$$

$$\neq\left[ax_1(n)\right]^2+\left[bx_2(n)\right]^2$$

2. 时不变特性

- 移位不变性

如果 $y(n)=T[x(n)]$

$$y_1(n)=T[x(n-n_0)]=y(n-n_0)$$

则称系统具有移位不变性

- 具有移位不变性的系统为时不变系统。
- 时不变系统对输入信号的运算关系 $T[\bullet]$在整个运算过程中不随时间变化。其输出随输入信号移位而移位，且保持波形不变。

输入移位 ⟶ 输出相应移位

2. 时不变特性

例：(1) $y(n)=nx(n)$ 是否是时不变系统?

(2) $y(n)=ax(n)+b$ 是否是线性时不变系统?

(2)解：时不变性

令 $x_1(n)=x(n-n_0)$

则 $y_1(n)=T[x_1(n)]=ax(n-n_0)+b=y(n-n_0)$

线性性质

令 $x(n)=x_2(n)+x_3(n)$

$y_2(n)=T[x_2(n)]=ax_2(n)+b,\quad y_3(n)=T[x_3(n)]=ax_3(n)+b,$

则 $y(n)=T[x(n)]=T[x_2(n)+x_3(n)]=ax_2(n)+ax_3(n)+b$

$\neq T[x_2(n)]+T[x_3(n)]=y_2(n)+y_3(n)$

1.3.2 线性时不变系统的输出和输入之间的关系

- 系统的单位脉冲响应（对 $\delta(n)$ 的零状态响应）

$$h(n)=T[x(n)]=T[\delta(n)]$$

- 任意输入信号

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$$

- 系统的输出为

线性叠加原理

$$y(n)=T[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}T[x(m)\delta(n-m)]$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)T[\delta(n-m)]=\boxed{\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)=x(n)*h(n)}$$

取样性质

时不变性

卷积运算

求解 $y(n)=x(n)*h(n)$

- 卷积运算的图解法或列表法
- 用MATLAB计算两个有限长序列的卷积
- 解析法：直接按卷积公式求解

求解 $y(n)=x(n)*h(n)$

- **卷积运算的图解法** $y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$

（1）画出x(m)和h(m)的波形；

（2）反转平移：h(m)反转→ h(-m),右移n → h(n – m)

（3）乘积： x(m) h(n – m)

（4）求和： *m* 从–∞到∞ 对应乘积项求和。

例：

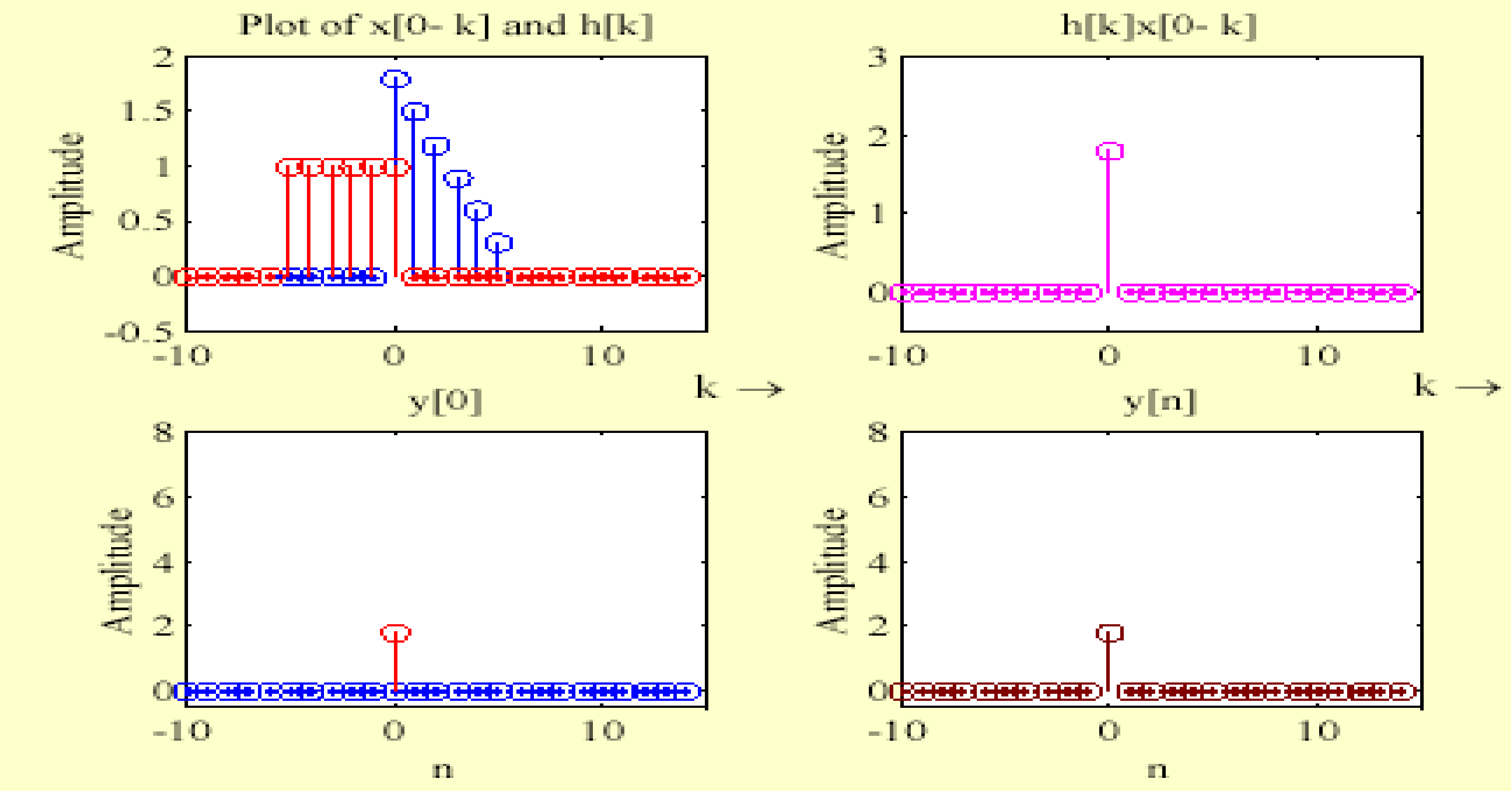
$$x[n]=\begin{cases}1, & 0\le n\le 5\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$h[n]=\begin{cases}1.8-0.3n, & 0\le n\le 5\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

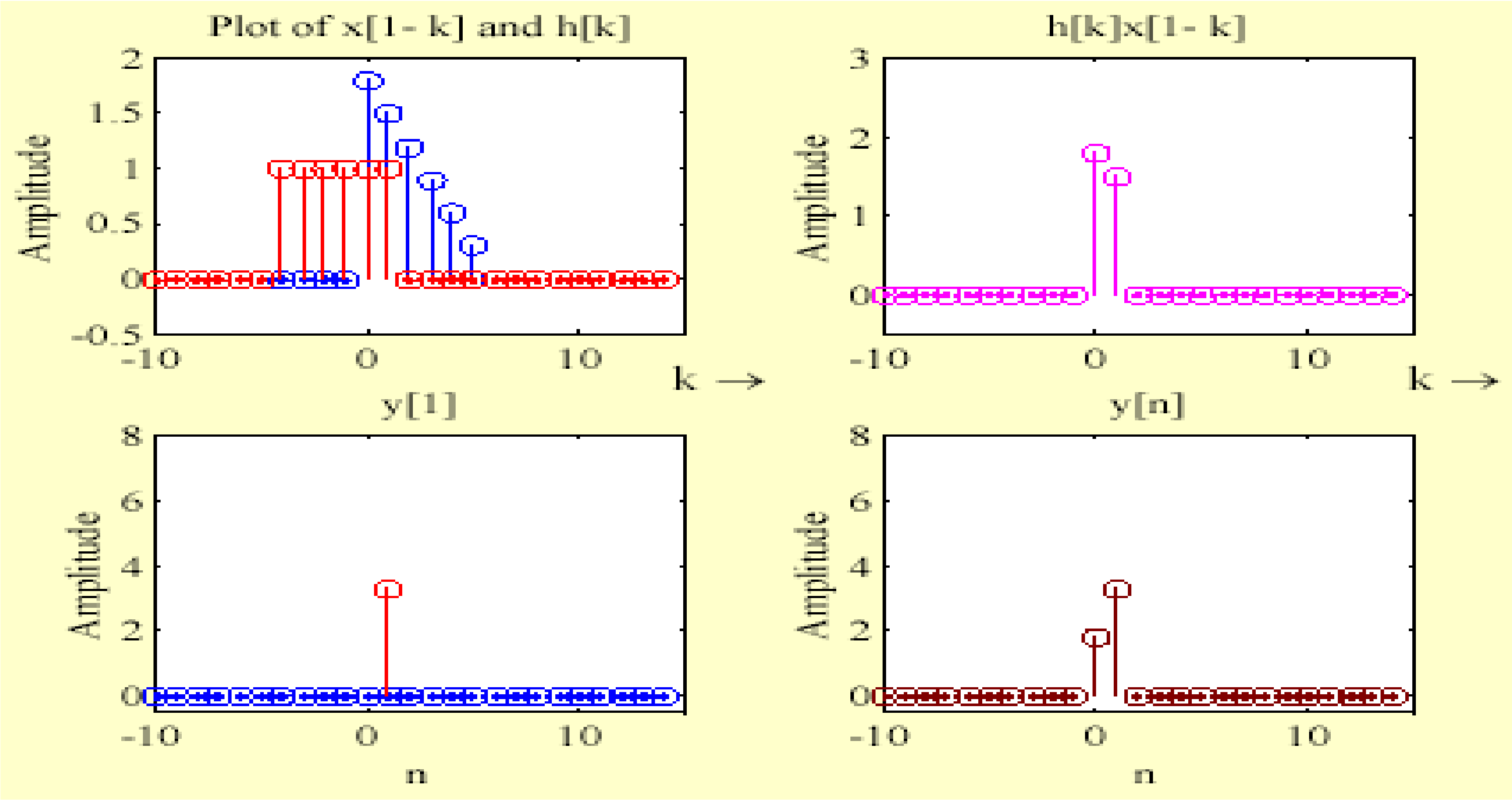
卷积和

$$x[n]=\begin{cases}1, & 0\le n\le 5\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

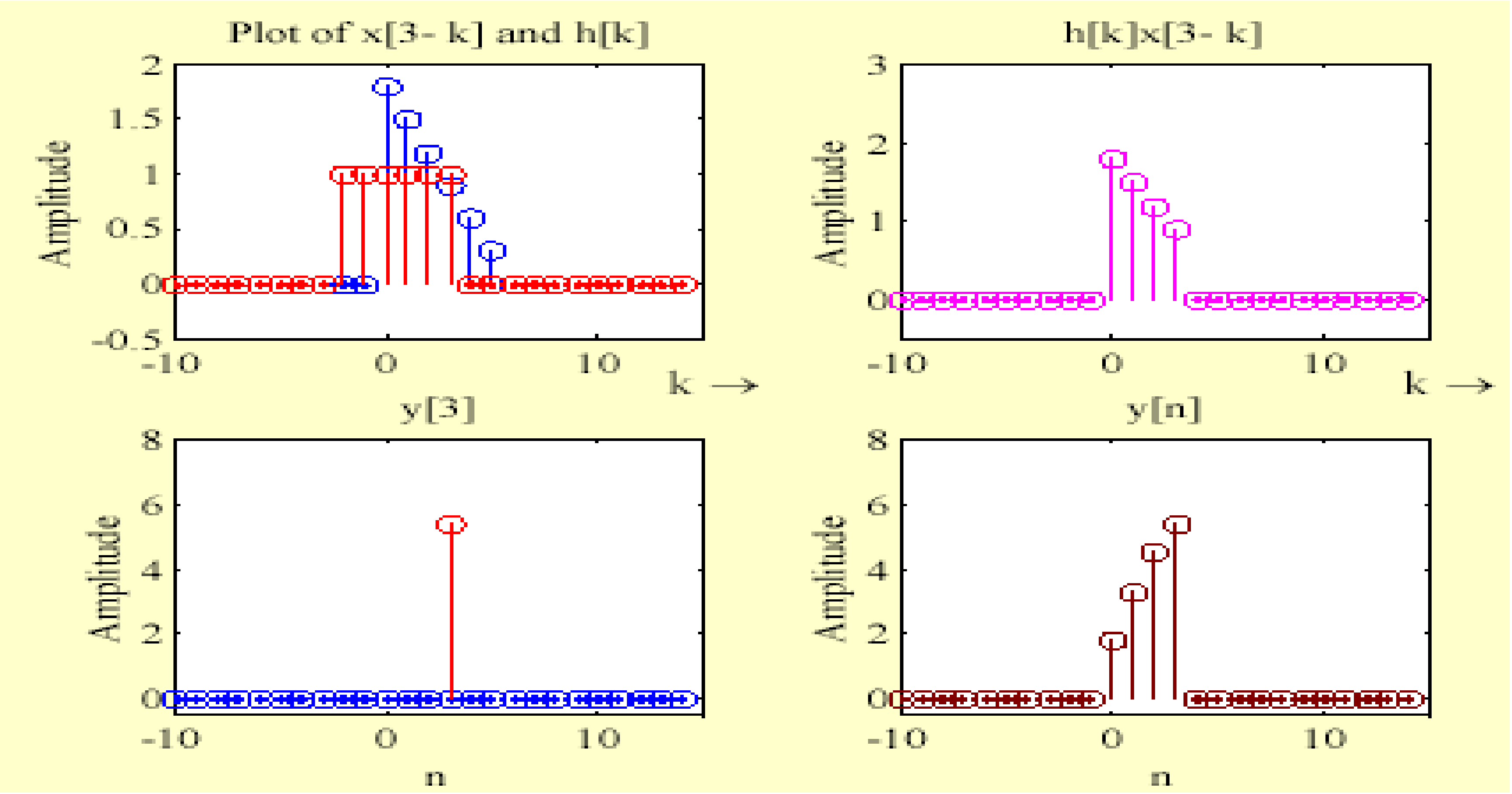
$$h[n]=\begin{cases}1.8-0.3n, & 0\le n\le 5\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$



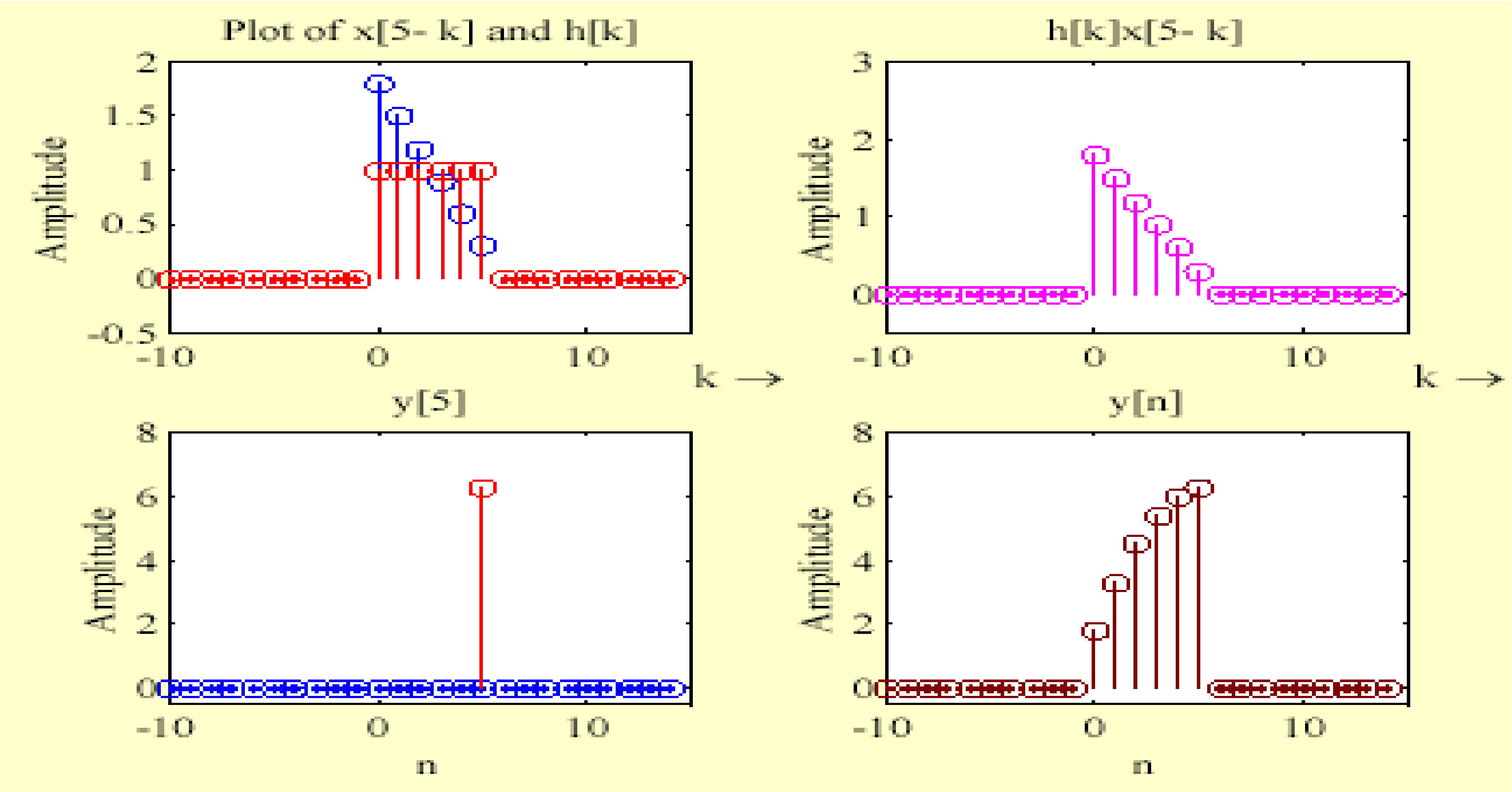
卷积和



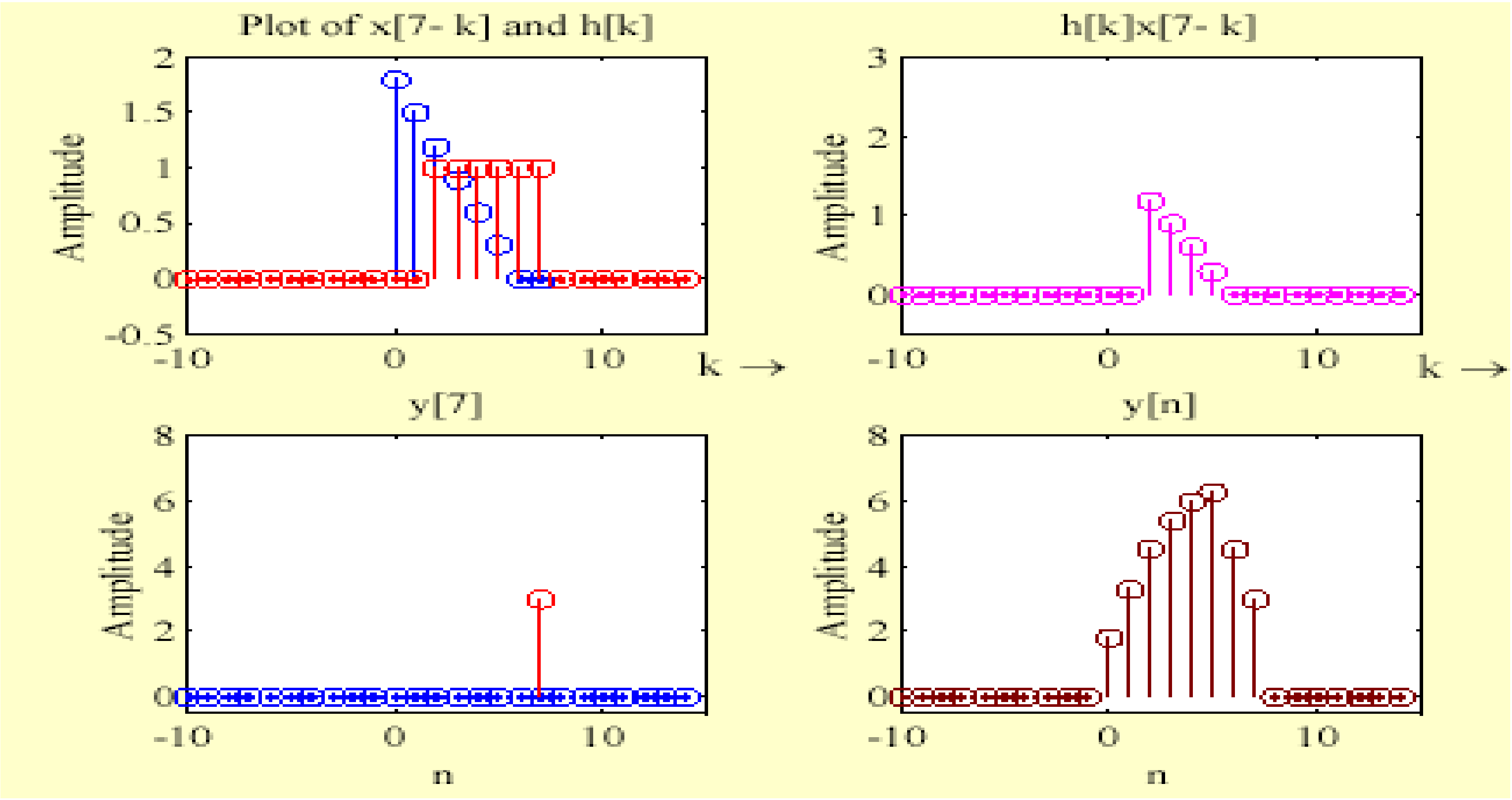
卷积和



卷积和

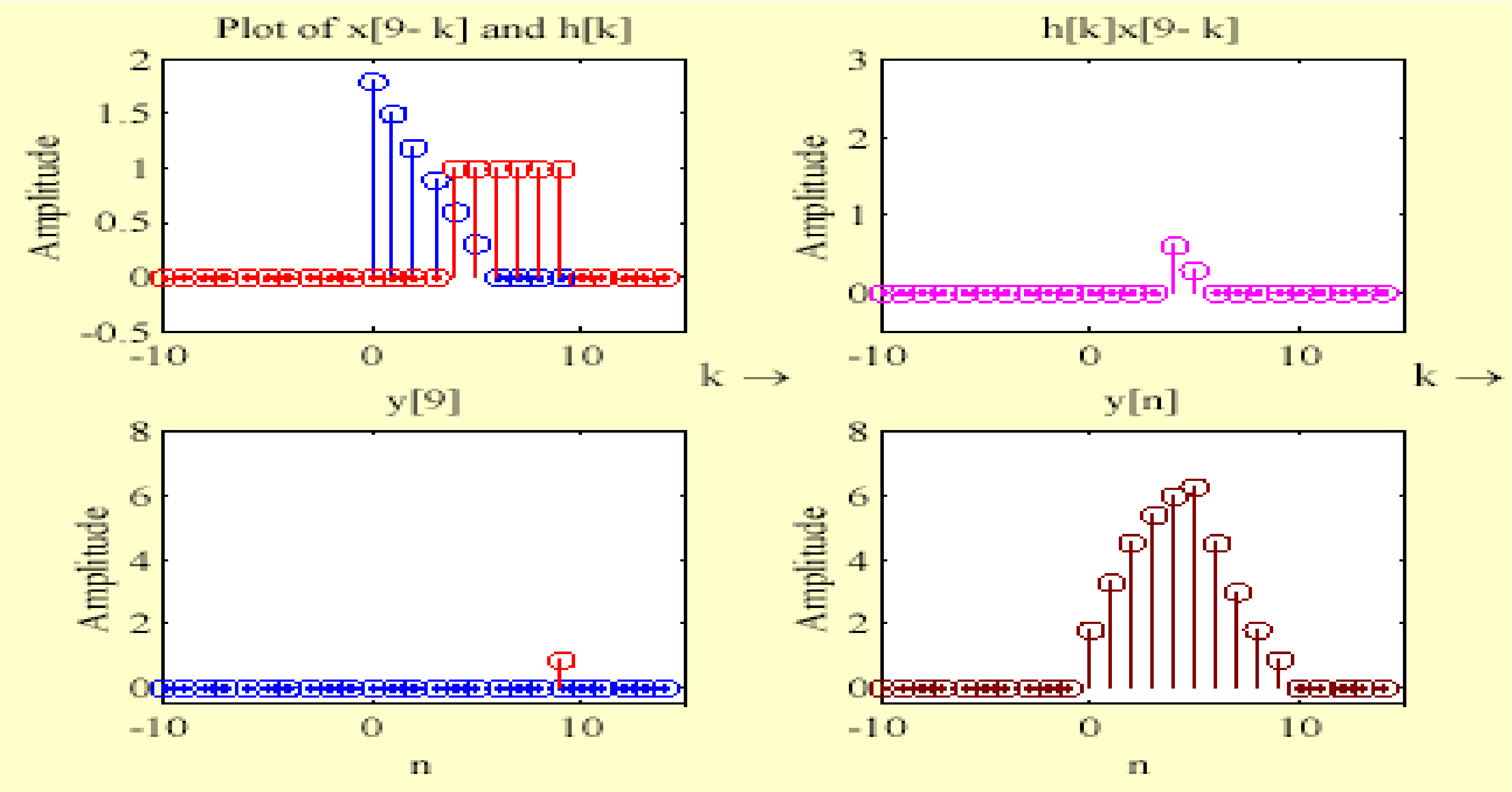


卷积和



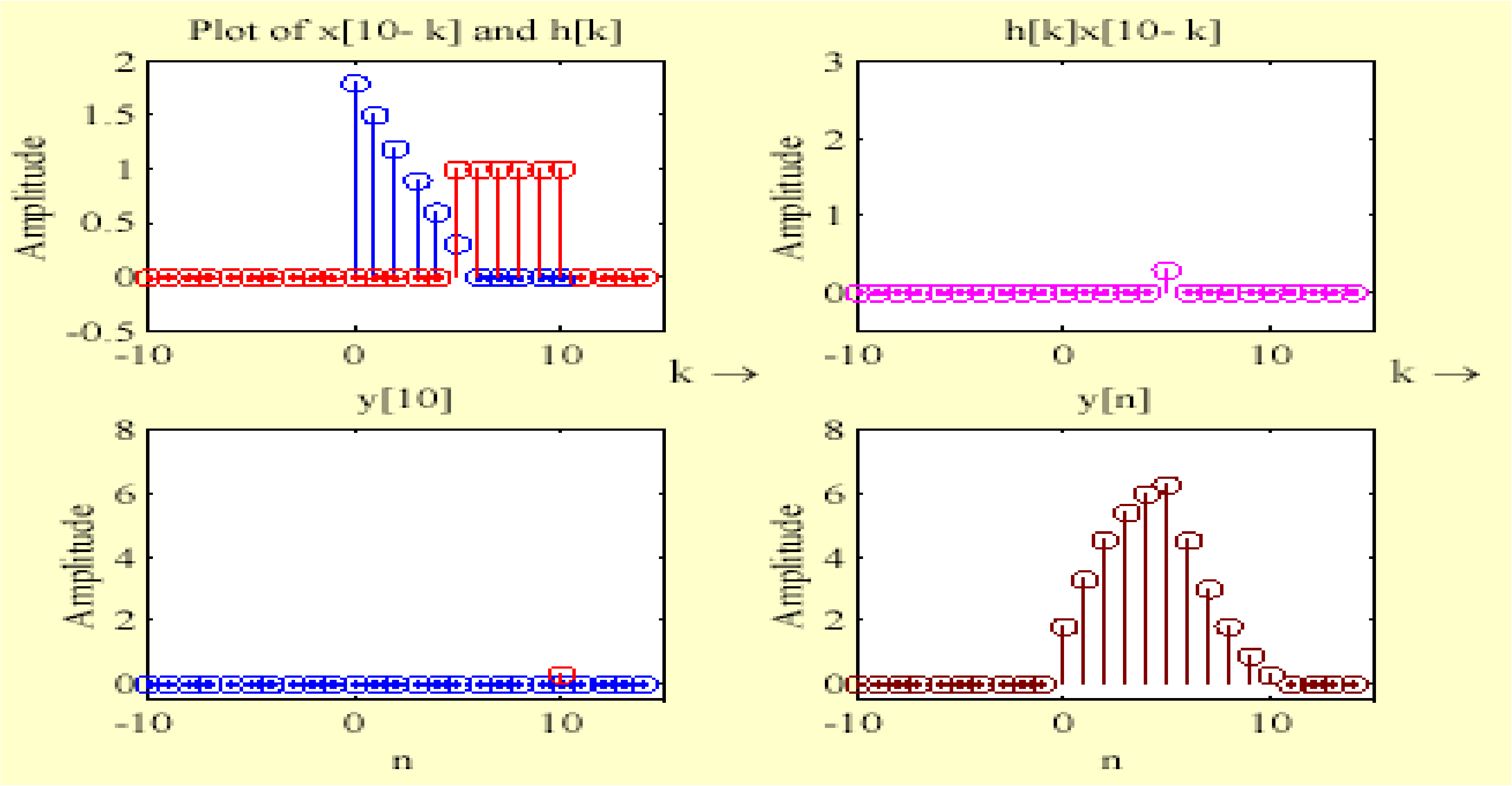
Plot of x[7- k] and h[k]
Amplitude
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-10
0
10
k →
h[k]x[7- k]
Amplitude
3
2
1
0
-10
0
10
k →
y[7]
Amplitude
8
6
4
2
0
-10
0
10
n
y[n]
Amplitude
8
6
4
2
0
-10
0
10
n

卷积和

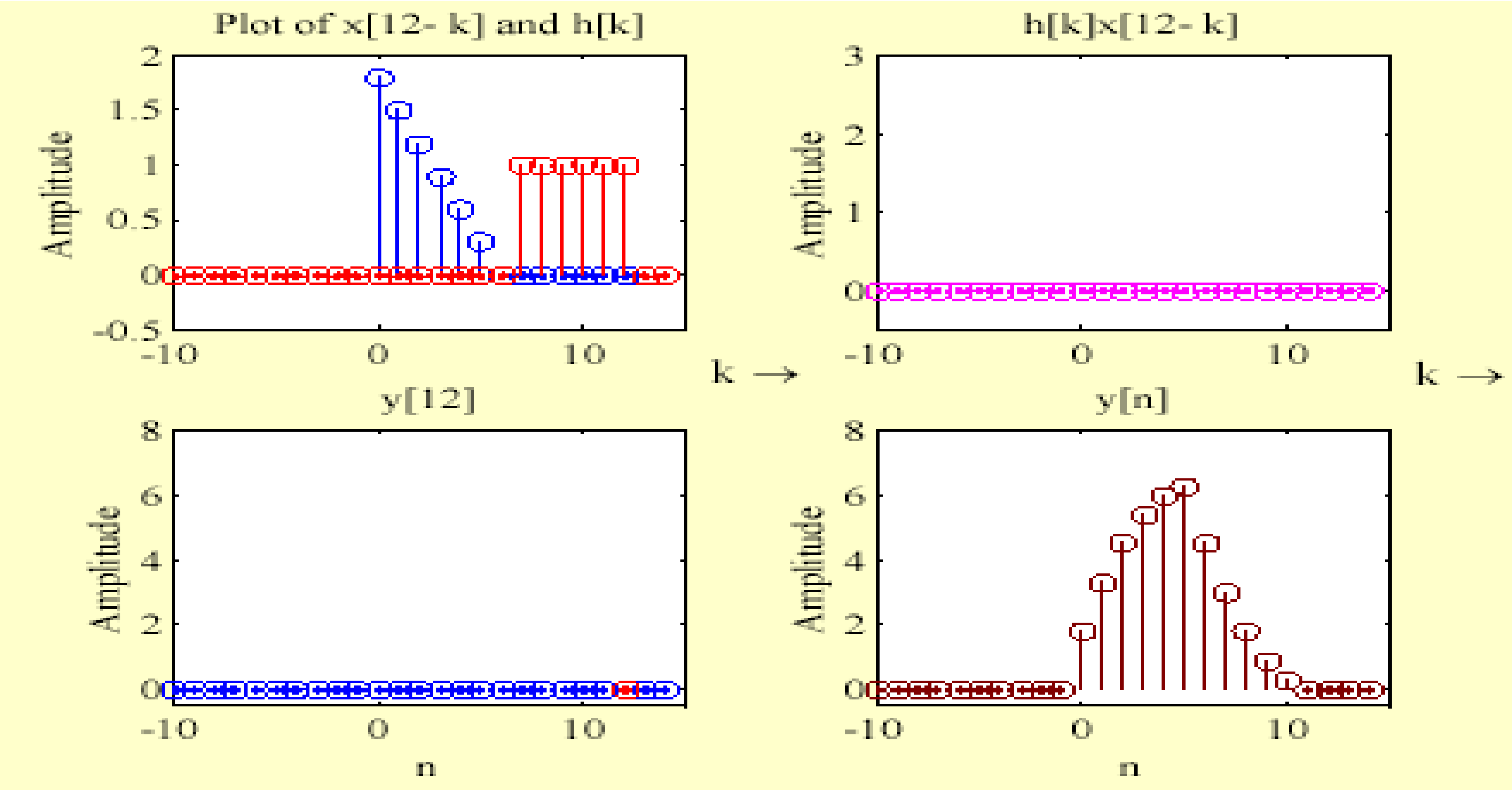


Plot of x[9- k] and h[k]
Amplitude
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-10
0
10
k →
h[k]x[9- k]
3
2
1
y[9]
8
6
4
n
y[n]

卷积和

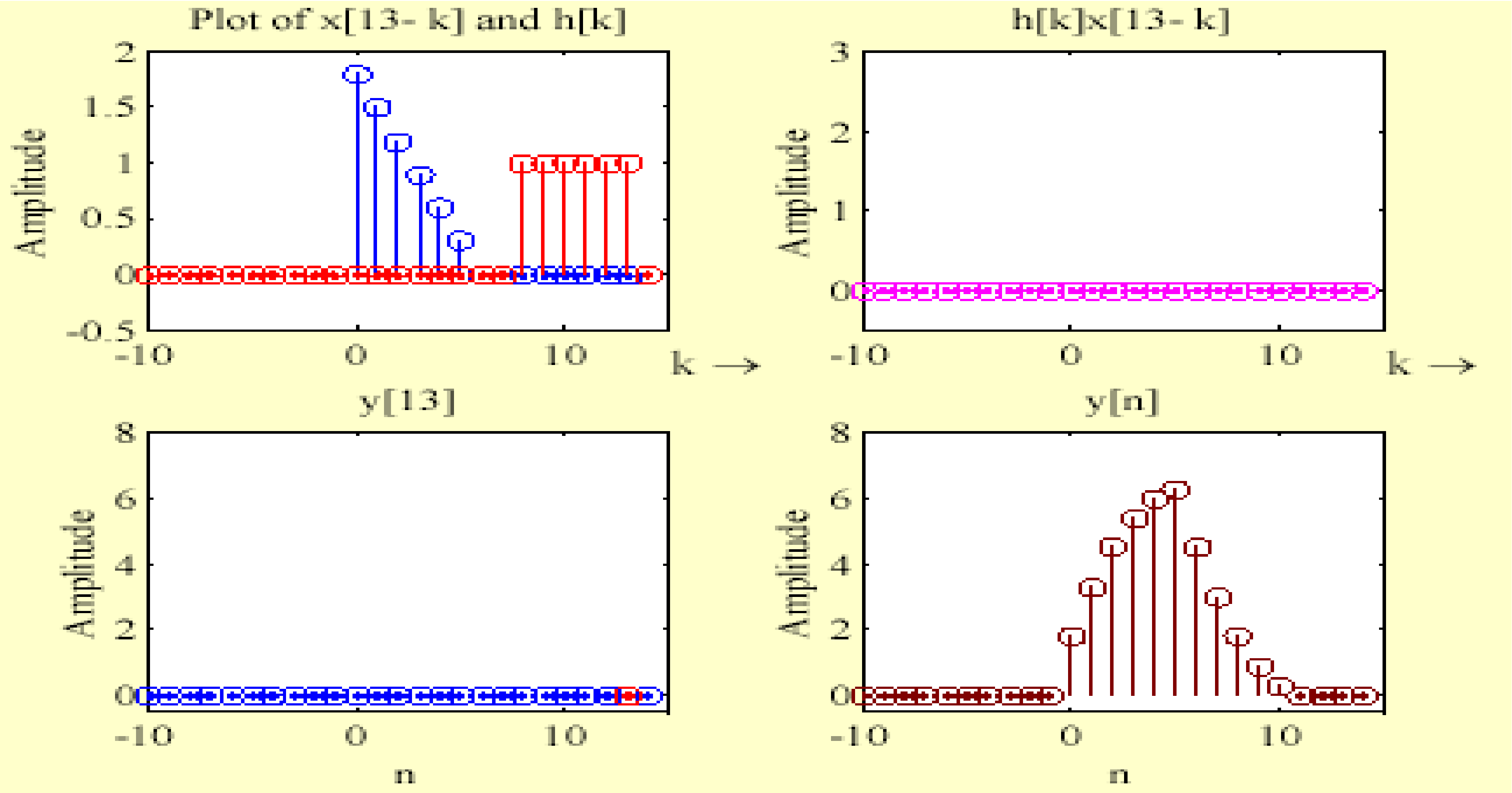


卷积和



Plot of x[12- k] and h[k]
Amplitude
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-10
0
10
k →
h[k]x[12- k]
3
2
1
0
y[12]
8
6
4
2
n
y[n]

卷积和



Plot of x[13- k] and h[k]
Amplitude
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-10
0
10
k →
h[k]x[13- k]
Amplitude
3
2
1
0
-10
0
10
k →
y[13]
Amplitude
8
6
4
2
0
-10
0
10
n
y[n]
Amplitude
8
6
4
2
0
-10
0
10
n

求解 $y(n)$

- 卷积运算的列表法 $y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$

例：

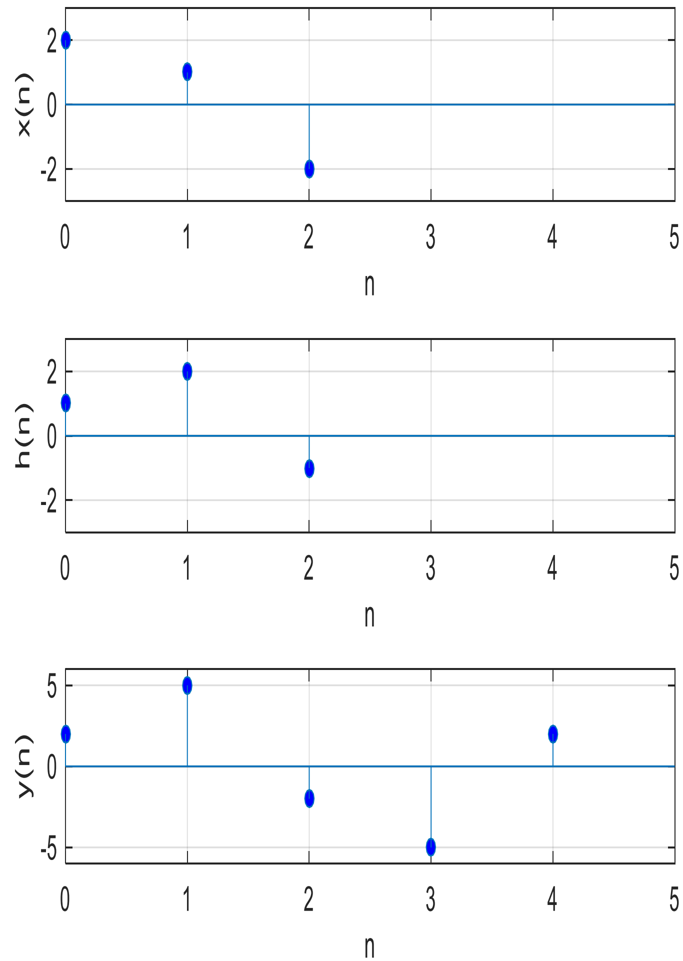
$$x[n]=\begin{cases}1, & 0\le n\le 5\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$h[n]=\begin{cases}1.8-0.3n, & 0\le n\le 5\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

Matlab计算

```
xn=[2,1,-2];
hn=[1,2,-1];
yn=conv(xn,hn);
n=0:length(yn)-1;
subplot(1,1,1);stem(n,yn,'.');line([0,5],[0,0])
xlabel('n');ylabel('y(n)');
grid on;axis([0,5,-6,6])
```

C = conv(A,B)



注意： 函数默认序列均从0开始。

问题： 两个有限长序列卷积和的长度？

—— 两个序列长度之和减1

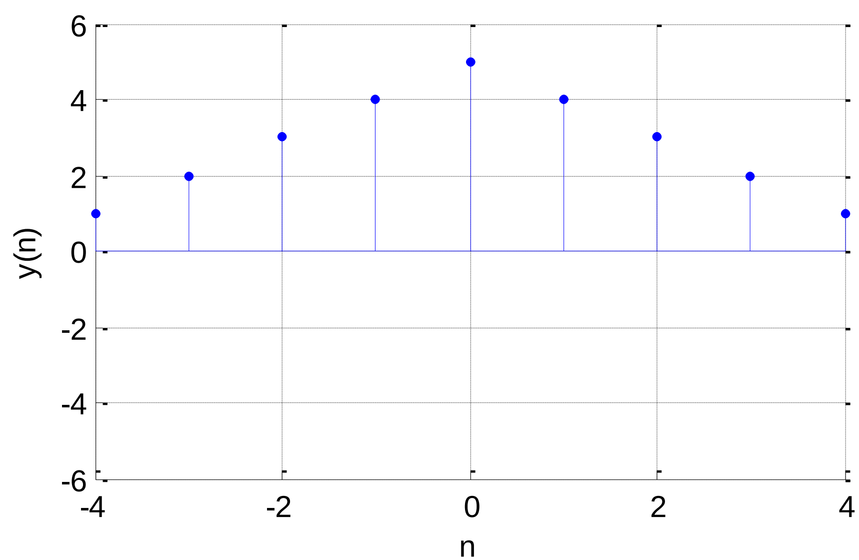
Matlab计算

- 序列不从0开始

$$x(n)=\delta(n+2)+\delta(n+1)+\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)$$

$$h(n)=x(n)$$

```
h=ones(1,5);nh=-2:2;
x=h;nx=nh;
nys=nh(1)+nx(1);
nyf=nh(end)+nx(end);
y=conv(h,x);ny=nys:nyf;
stem(ny,y,'.');line([-4,4],[0,0])
xlabel('n');ylabel('y(n)');
grid on;axis([-4,4,-6,6])
```



解析法（1）

- 条件：已知信号的解析表达式，直接按公式计算

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

- 解法：根据信号的非零值区间，确定求和的上下限，分段计算

例： $x(n)=a^{n}u(n),\quad h(n)=R_4(n)$

$$y(n)=x(n)*h(n)=h(n)*x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_4(m)a^{n-m}u(n-m)$$

$$u(n-m)\neq 0 \quad\Rightarrow\quad n\geq m$$

$$R_4(m)\neq 0 \quad\Rightarrow\quad 0\leq m\leq 3$$

m取值与n有关

解析法（2）

$$x(n) = a^n u(n), \quad h(n) = R_4(n)$$

$$u(n-m) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad n \geq m$$

$$R_4(m) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq m \leq 3$$

- 分段计算

$$n < 0, \quad y(n) = 0$$

$$0 \leq n \leq 3, \quad 0 \leq m \leq n, \quad y(n) \neq 0$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} R_4(m) a^{n-m} u(n-m) = \sum_{m=0}^{n} a^{n-m} = a^n \frac{1-a^{-n-1}}{1-a^{-1}}$$

$$n \geq 4, \quad 0 \leq m \leq 3, \quad y(n) \neq 0$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} R_4(m) a^{n-m} u(n-m) = \sum_{m=0}^{3} a^{n-m} = a^n \frac{1-a^{-4}}{1-a^{-1}}$$

卷积运算的性质

- 任意序列与单位脉冲序列的卷积等于该序列本身；如果卷积一个移位 n_0 的单位脉冲序列，即将该序列移位 n_0

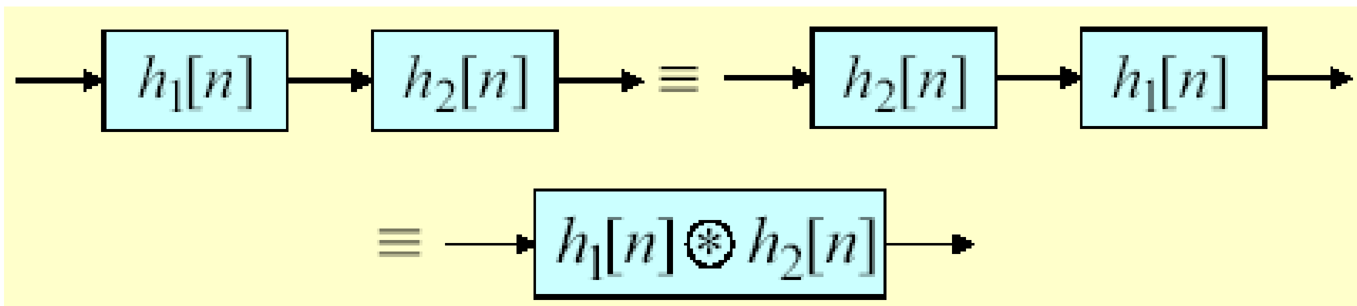
$$x(n) = x(n) * \delta(n)$$

$$x(n-n_0) = x(n) * \delta(n-n_0)$$

- 卷积运算服从交换率、结合率和分配率
  - 交换率： $y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$
  - 结合率： $x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] = [x(n) * h_1(n)] * h_2(n)$
  - 分配率： $x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$

卷积运算的性质

- 串联系统等效

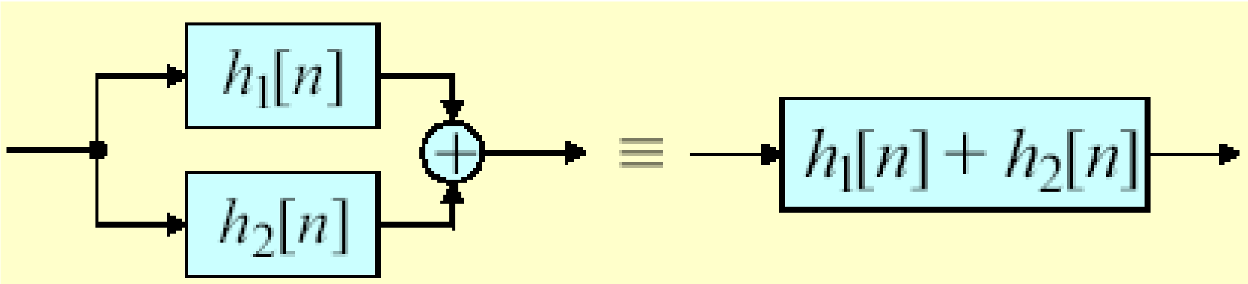


$$y(n) = [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] = x(n) * h(n)$$

$$\boxed{h(n) = h_1(n) * h_2(n)}$$

卷积运算的性质

- 并联系统等效



$$y(n) = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n) = x(n) * [h_1(n) + h_2(n)]$$

$$\boxed{h(n) = h_1(n) + h_2(n)}$$

- 例1.3.6 （P18）

1.3.3系统的因果性和稳定性

- 因果性 —— 系统的可实现性

  系统n时刻的输出取决于n时刻及n时刻以前的输入信号，而和n时刻以后的输入信号无关。

  例：$y(n)=x(n)+x(n+1)$ 系统的因果性？

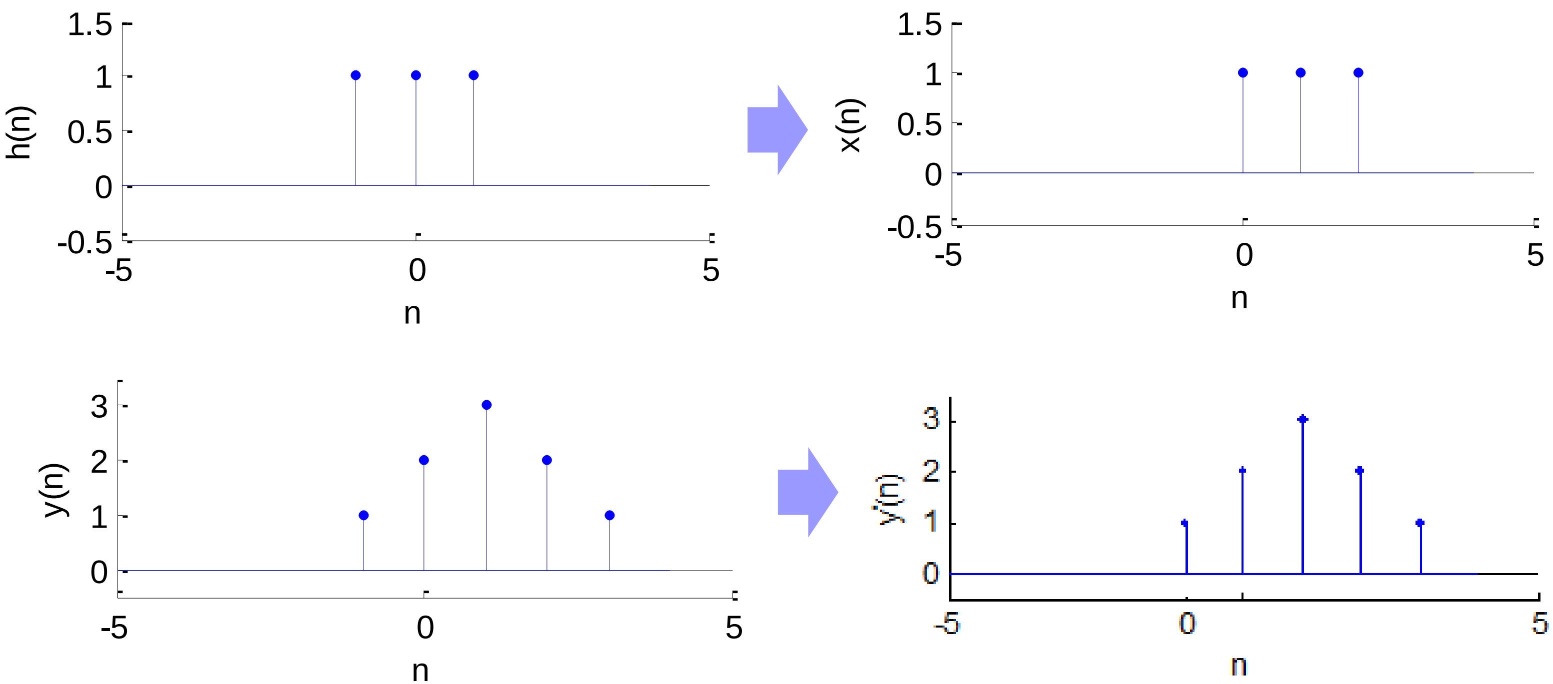
- 因果性的判别方法（时域）
  - 定义
  - 单位脉冲响应

$$h(n)=0,\quad n<0$$ （充要条件）

（因果系统的单位脉冲响应必定是因果序列）

系统的因果性

注：非因果数字系统可利用存储器，延时实现。



系统的稳定性

- 稳定性——输入输出稳定 （BIBO稳定）
  对任意有界的输入，系统的输出有界。
- 线性时不变系统稳定的充要条件：

$$\sum_{n=0}^{\infty}|h(n)|<\infty$$ 单位脉冲响应绝对可和

证明：1）充分性：设输入信号有界， $|x(n)|<p$ ，p是常数

$$|y(n)|=\left|\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)x(n-m)\right|\leq\sum_{m=-\infty}^{\infty}|h(m)||x(n-m)|$$

$$\leq p\sum_{m=-\infty}^{\infty}|h(m)|<\infty$$

因此，输出有界。

h(n)绝对可和，输入有界

⇓

输出有界

系统的稳定性

- 2）必要性（反证法）：设单位脉冲响应不满足绝对可和条件，即：对于任意大的数M，存在 n_1

$$\sum_{n=0}^{n_1}|h(n)| > M$$

输入信号有界

$$x(n_1-k)=\begin{cases}1 & h(k)\geq 0\\ -1 & h(k)<0\end{cases}$$

则 $$y(n_1)=\sum_{k=0}^{n_1}h(k)x(n_1-k)=\sum_{k=0}^{n_1}|h(k)|\geq M$$

系统不稳定

证毕

h(n)不满足绝对可和，输入有界

⬇

输出无界，系统不稳定

系统的稳定性

- 稳定性的判别方法（时域）
  - 单位脉冲响应绝对可和

$$\sum_{n=0}^{\infty}|h(n)|<\infty$$

（充要条件）

  - 输入单位阶跃序列，输出趋于常数（包括零）（第2章）

例题： 试分析 $h(n)=a^n u(n)$ 的因果性与稳定性，其中a为实常数。

1.4 时域离散系统的输入输出描述——线性常系数差分方程描述

- 线性时常系数差分方程
- 线性时常系数差分方程的递推解法
- 用MATLAB求解差分方程
- 应用举例——滑动平均滤波器

系统的数学描述（回顾）

- 输入输出描述
  - 模拟系统：
    - 微分方程（时域）、传输函数（频域）
  - 时域离散系统：
    - 差分方程（时域）、基于Z变换的传递函数（频域）
- 内部描述
  - 状态变量

1.4.1线性常系数差分方程

- N阶线性常系数差分方程 ⟹ 线性时不变时域离散系统

$$y(n)=\sum_{i=0}^{M}b_i x(n-i)-\sum_{i=1}^{N}a_i y(n-i)$$

$$\sum_{i=0}^{N}a_i y(n-i)=\sum_{i=0}^{M}b_i x(n-i) \quad a_0=1$$

- $x(n)$ 为系统输入， $y(n)$ 为系统输出，a_i 和 b_i 均为常数
- 无交叉项相乘
- $y(n-i)$ 项中i的最大值与最小值之差 -- 差分方程的阶数

1.4.2线性常系数差分方程的求解

- 经典解法
  - 类似于模拟系统中微分方程的解法，较麻烦
- 递推解法　（第1章）
- Z变换方法　（第2章）
- Matlab求解

递推解法（1）

$$y(n)=\sum_{i=0}^{M}b_i x(n-i)-\sum_{i=1}^{N}a_i y(n-i)$$

- 输入信号和初始条件

$$x(n),x(n-1),\cdots,x(n-M)$$

$$y(n-1),y(n-2),\cdots,y(n-N)$$

- 递推求解

$$y(n)=\sum_{i=0}^{M}b_i x(n-i)-\sum_{i=1}^{N}a_i y(n-i)$$

递推解法（2）

- 例1.4.1： $y(n)=ay(n-1)+x(n)$， 式中，$\underline{x(n)=\delta(n)}$, $\boxed{y(-1)=1}$

  求系统 $n\geq 0$ 的输出。

解：由 $y(n)=ay(n-1)+x(n)$ 得

$$
\begin{aligned}
n=0 \qquad & y(0)=ay(-1)+\delta(0)=a+1 \\
n=1 \qquad & y(1)=ay(0)+\delta(1)=a(a+1) \\
n=2 \qquad & y(2)=ay(1)+\delta(2)=a^2(a+1) \\
\vdots \qquad & \\
& y(n)=ay(n-1)+\delta(n)=a^n(a+1)u(n)
\end{aligned}
$$

Q：输入是单位脉冲序列，那么输出是单位脉冲响应吗？

Q：初始状态的个数=？

Q：系统（差分方程）的阶数 N=？

递推解法（3）

- （接上例）：求系统的单位脉冲响应？

$$y(n)=ay(n-1)+x(n)$$

式中， $x(n)=\delta(n),\quad y(-1)=0$

解：由 $y(n)=ay(n-1)+x(n)$ 得

$$n=0 \qquad y(0)=ay(-1)+\delta(0)=1$$

$$n=1 \qquad y(1)=ay(0)+\delta(1)=a$$

$$n=2 \qquad y(2)=ay(1)+\delta(2)=a^2$$

$$\vdots$$

$$y(n)=ay(n-1)+\delta(n)=a^n u(n)$$

$$h(n)=y(n)=a^n u(n)$$

递推法适合计算机求解

1.4.3 Matlab 求解差分方程（1）

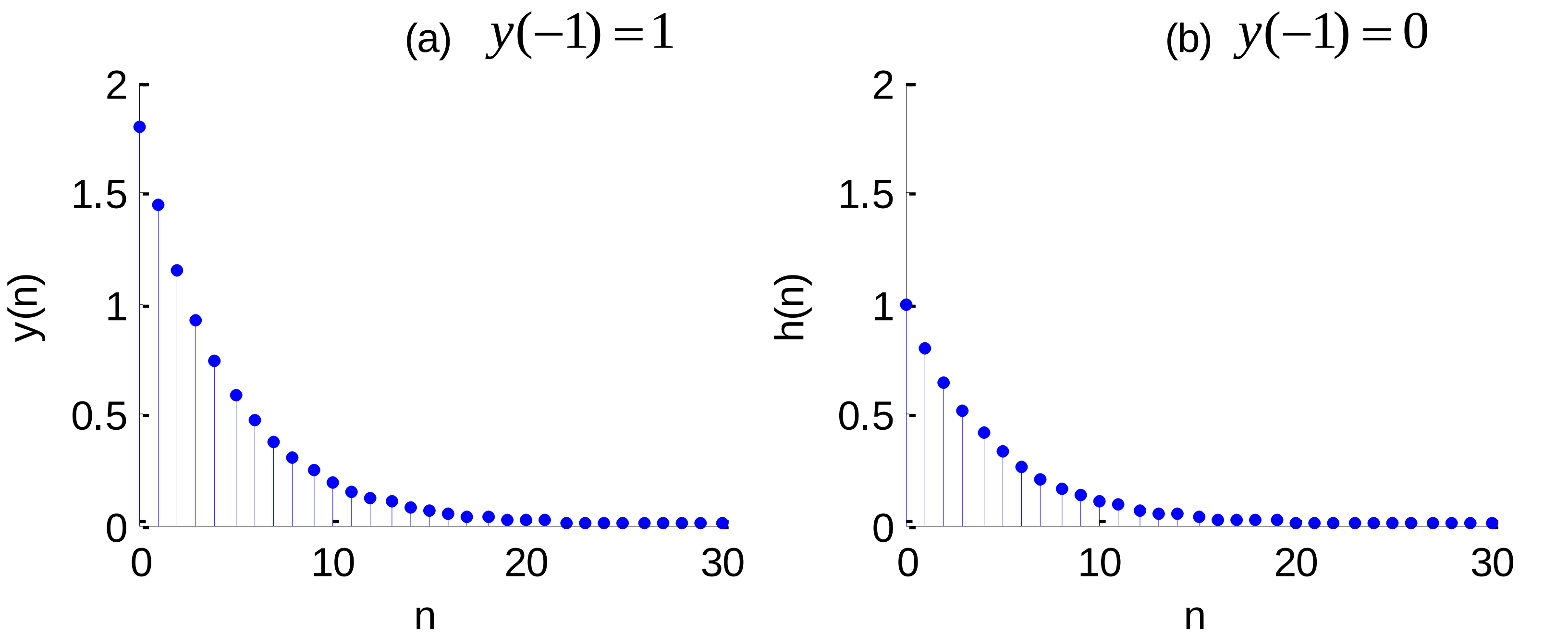
```
%调用filter解差分方程y(n)-ay(n-1)=x(n)
a=4/5; ys=1;      %设差分方程系数a=4/5,初始状态: y(-1)=1
xn=[1,zeros(1,30)]; %x(n)=单位脉冲序列,长度N=31
B=1;A=[1,-a];      %差分方程系数
xi=filtic(B,A,ys);  %由初始条件计算等效初始条件输入序列xi
yn=filter(B,A,xn,xi);  %调用filter解差分方程,求系统输出信y(n)
n=0:length(yn)-1;
subplot(1,2,1);stem(n,yn,'.') ;
title('(a)');xlabel('n');ylabel('y(n)') ;
```

Matlab 求解差分方程（2）

```
%调用filter解差分方程y(n)-ay(n-1)=x(n)
a=4/5; ys=0;      %设差分方程系数a=4/5,初始状态: y(-1)=0
xn=[1,zeros(1,30)]; %x(n)=单位脉冲序列,长度N=31
B=1;A=[1,-a];     %差分方程系数
xi=filtic(B,A,ys);  %由初始条件计算等效初始条件输入序列xi
yn=filter(B,A,xn,xi);  %调用filter解差分方程,求系统输出信y(n)
n=0:length(yn)-1;
subplot(1,2,2);stem(n,yn,'.');axis([0,30,0,2]) ;
title('(b) ');xlabel('n');ylabel('h(n)') ;
```

Matlab 求解差分方程（3）

$$y(n)=ay(n-1)+x(n),\quad x(n)=\delta(n)$$



$$y(n)=a^n(a+1)u(n)$$

$$h(n)=y(n)=a^n u(n)$$

1.4.4举例—滑动平均滤波器（1）

- 取输入信号的最近几个值，进行算术平均

$$y(n)=\frac{1}{5}[x(n)+x(n-1)+x(n-2)+x(n-3)+x(n-4)]$$

（五项滑动平均滤波器）

- 作用：对输入信号进行平滑，相当于低通滤波器，滤除高频分量，保留低频分量
- 单位脉冲响应为：

$$h(n)=\frac{1}{5}[\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\delta(n-3)+\delta(n-4)]$$

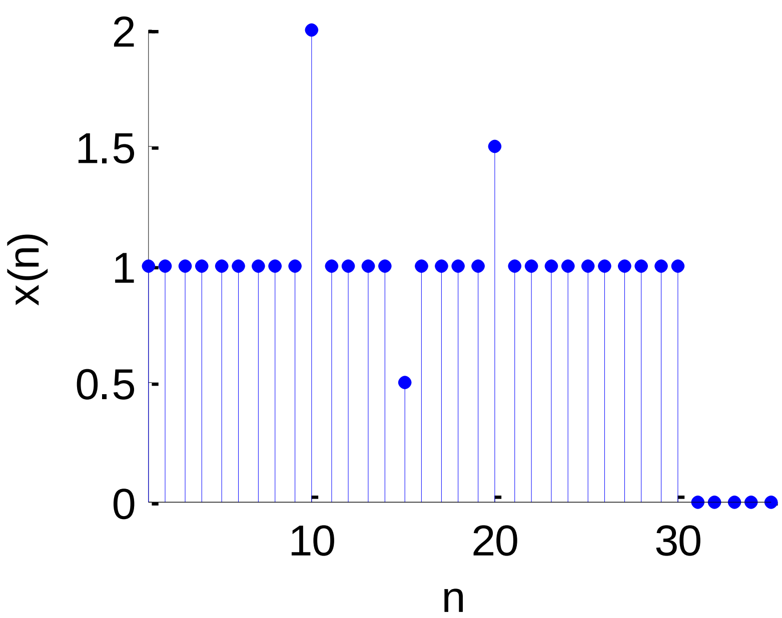
Q：阶数？因果性？稳定性？

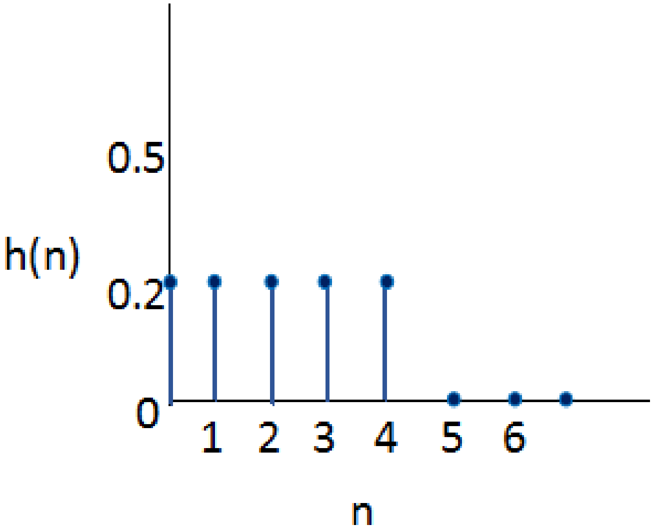
滑动平均滤波器（2）

- 例：五项滑动平均滤波器

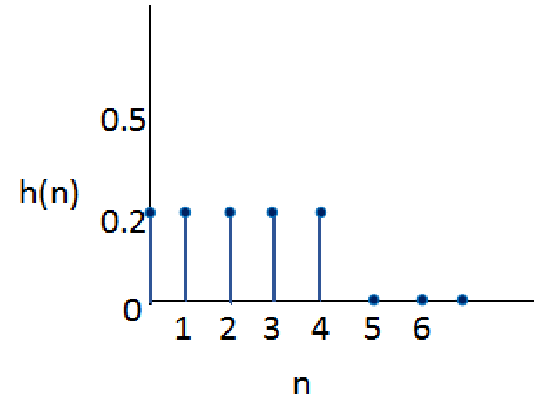
$$h(n)=\frac{1}{5}[\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\delta(n-3)+\delta(n-4)]$$

输入如下，求输出y(n)。





滑动平均滤波器（3）



- 五项滑动平均滤波器

$$h(n)=\frac{1}{5}[\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\delta(n-3)+\delta(n-4)]$$

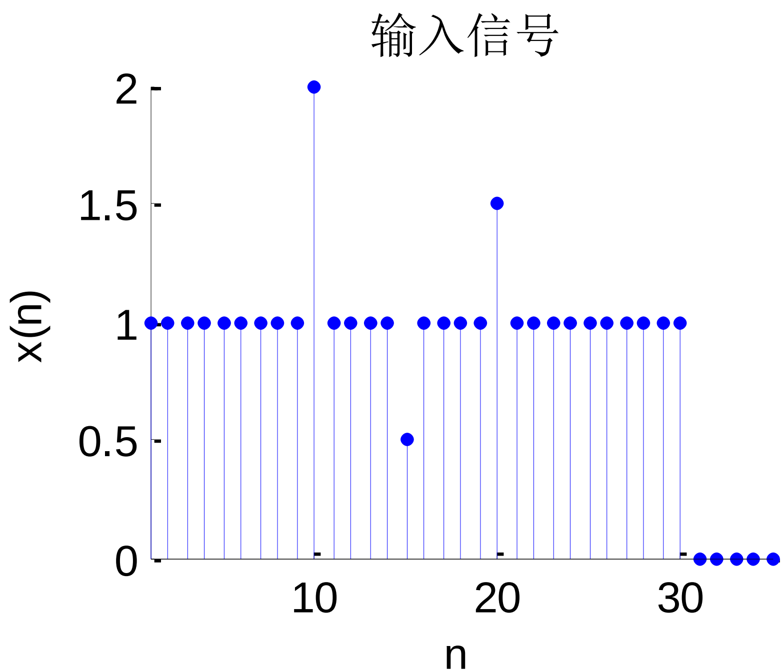
输出如下：

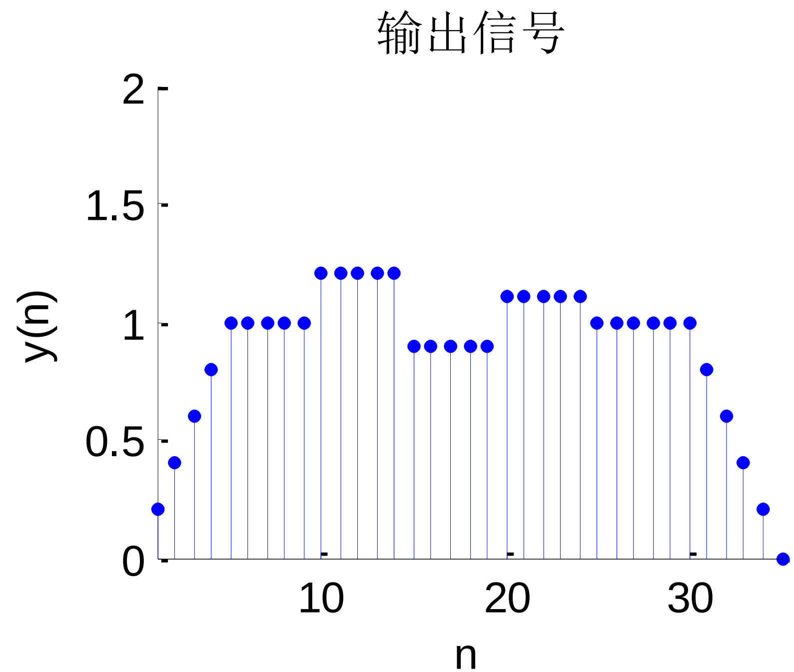
$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)$$

$$=\frac{1}{5}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)[\delta(n-k)+\delta(n-k-1)+\cdots+\delta(n-k-4)]$$

$$=\frac{1}{5}[x(n)+x(n-1)+x(n-2)+x(n-3)+x(n-4)]$$

滑动平均滤波器（4）





- **P20 商品价格平滑**

本章主要内容

- 时域离散信号（序列）的定义和表示方法
- 典型的时域离散时间序列的特征
- 时域离散线性时不变系统的分析：
  - 系统的因果稳定性、线性、时不变性
  - 时域离散系统的输入与输出的描述
  - 线性常系数差分方程的求解：卷积运算、递推解法

作业

- **P32-34:**

    1，3，4，5(4,5,7,8)，6(1,4),

    7(用列表法计算)，8(1)，11，12

- 编程（选做）：

1. 常见离散信号的**MATLAB**产生和图形显示
2. **P35: 18**