



# 第八章 时域离散系统的实现

王柯俨

[kywang@mail.xidian.edu.cn](mailto:kywang@mail.xidian.edu.cn)

<http://web.xidian.edu.cn/kywang/teach.html>

## 8.1 引言

- 时域离散系统的实现方式

- 软件实现

- 硬件实现

- 数字滤波器的表示方法

- 数字滤波器的系统函数:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

## ■ 数字滤波器的表示方法

### □ 常系数线性差分方程:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

## ■ 均由延迟、乘法、加法实现

## ■ 滤波器的不同实现算法、运算结构/网络结构

### □ 计算误差（有限字长效应）

### □ 计算复杂度（乘法、加法、存取数、比较数的次数）

### □ 存储量（系统参数、中间结果、输入输出信号值等）

### □ 计算速度

# 本章内容

- 理解数字滤波器结构的表示方法
- 掌握IIR滤波器的基本结构：直接型、级联型、并联型
- 掌握FIR滤波器的直接型、级联型、线性相位结构，理解频率抽样型结构
- 了解数字滤波器的格型结构

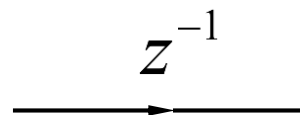
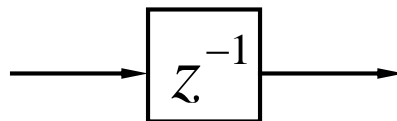
# 基本运算单元

基本运算单元

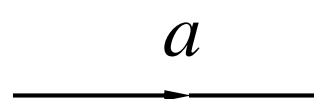
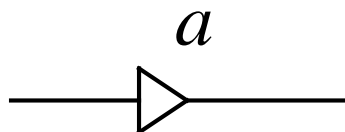
方框图

流图

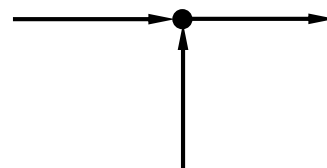
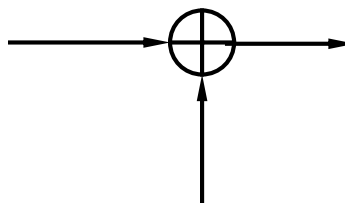
单位延时:



常数乘法器:

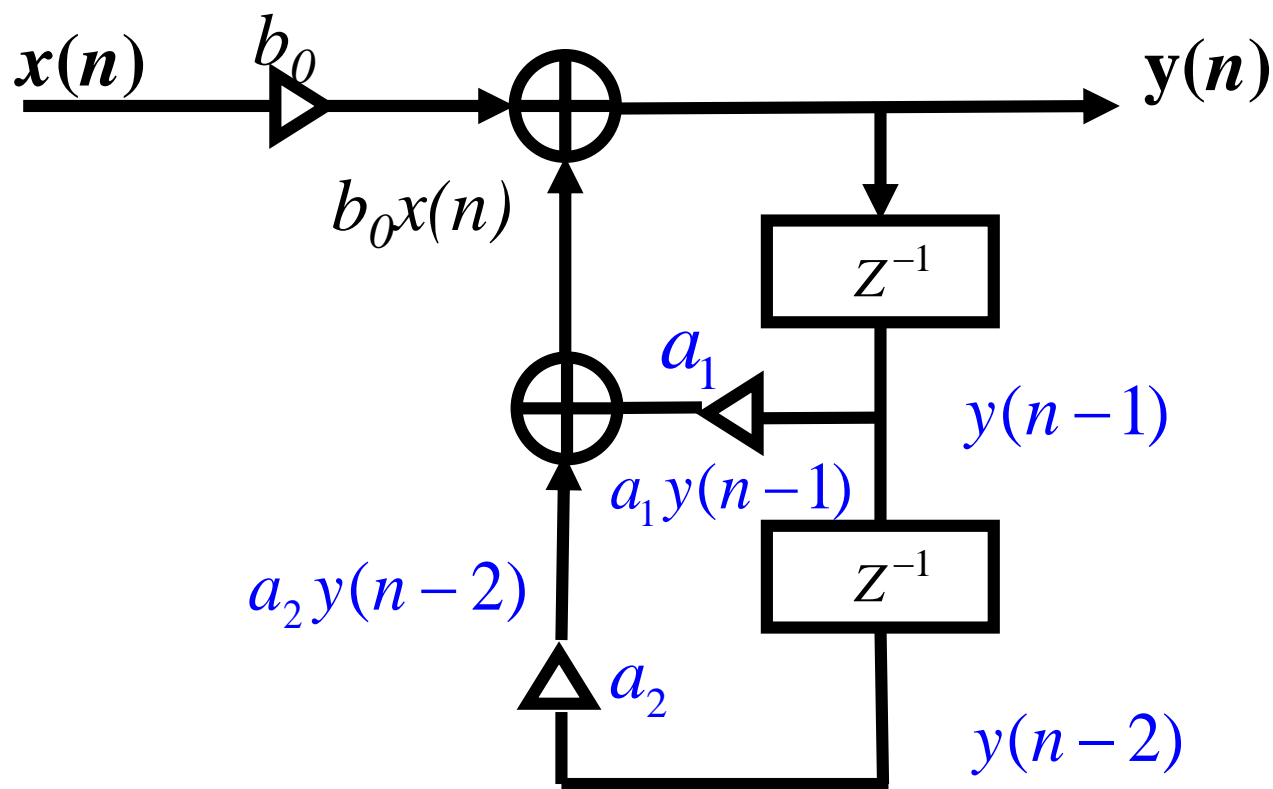


加法器:



## 二阶数字滤波器

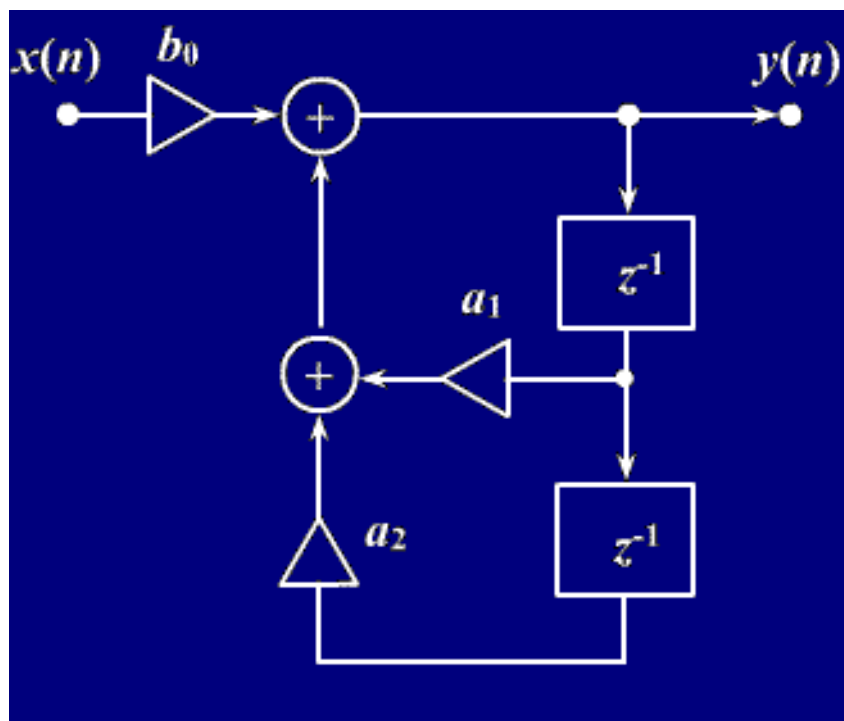
$$y(n] = a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + b_0 x(n)$$



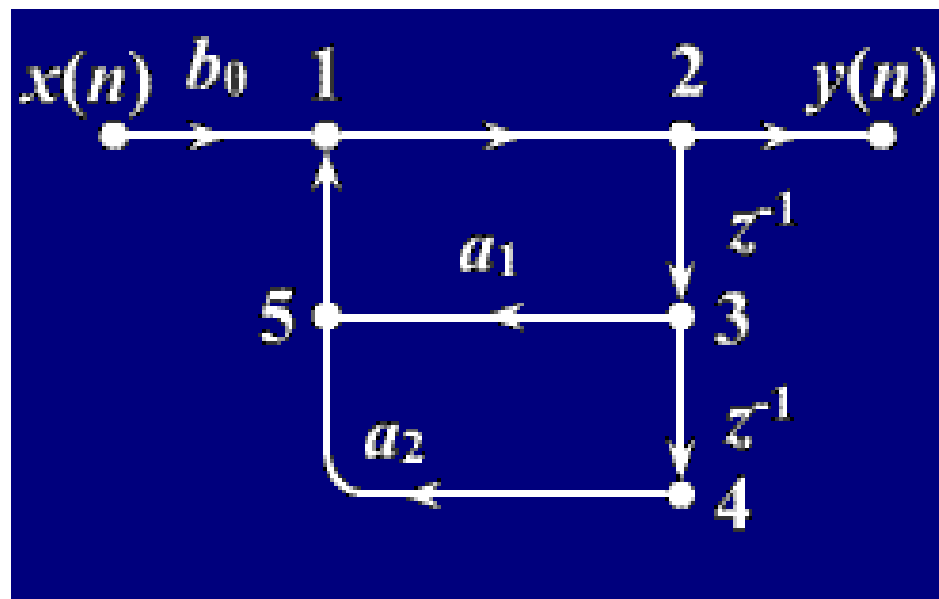
## 二阶数字滤波器

$$y(n] = a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + b_0 x(n)$$

方框图结构



流图结构



# 流图结构

## ■ 节点

□ 源节点

□ 阱节点

□ 网络节点

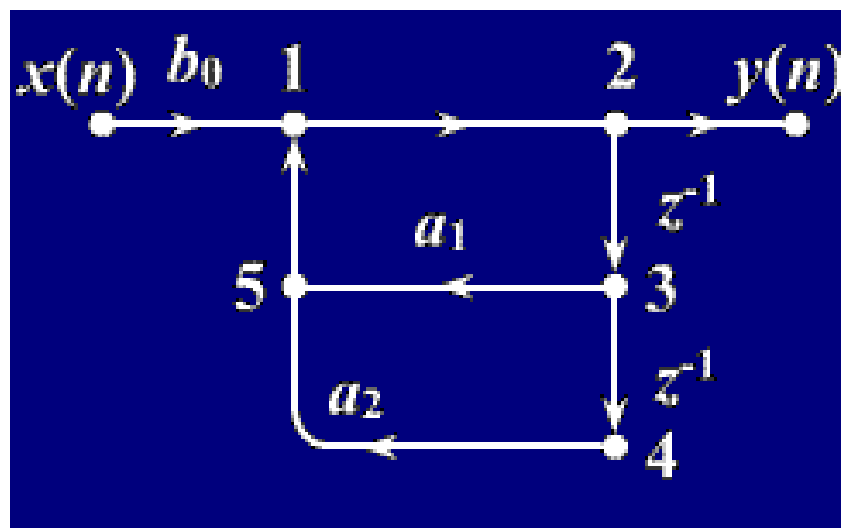
■ 分支节点

■ 相加器

## ■ 支路

□ 输入支路

□ 输出支路



节点的值=所有输入支路的值之和

支路的值=支路起点处的节点值 × 传输系数



## 8.2 FIR数字滤波器的网络结构

- 直接型结构
- 级联型结构
- 线性相位型结构
- 频率取样型结构
- 快速卷积法

# 1. FIR数字滤波器的直接型结构

## ■ FIR数字滤波器的特点:

□ 系统函数:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

□ 差分方程:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k)$$

□ **N-1**为滤波器的阶数，**N**为滤波器的长度

□ 有**N-1**个零点分布于**z**平面，**z=0**处是**N-1**阶极点

□ 系统的单位脉冲响应 **h(n)**有限长，设**N**点

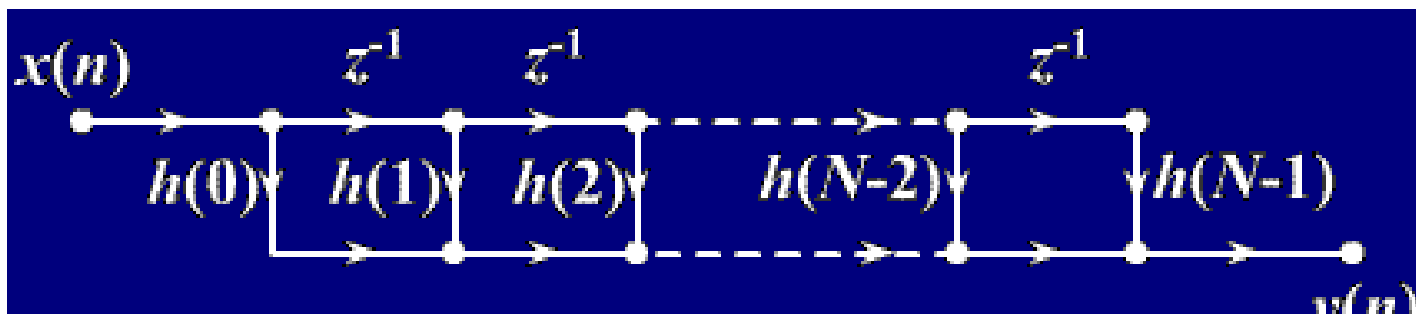
□ 系统函数**H(z)**在  $|z| > 0$  处收敛，有限**z**平面只有零点，全部极点在 **z = 0** 处（因果系统）

□ 无输出到输入的反馈，一般为非递归型结构

# 1. FIR数字滤波器的直接型结构（2）

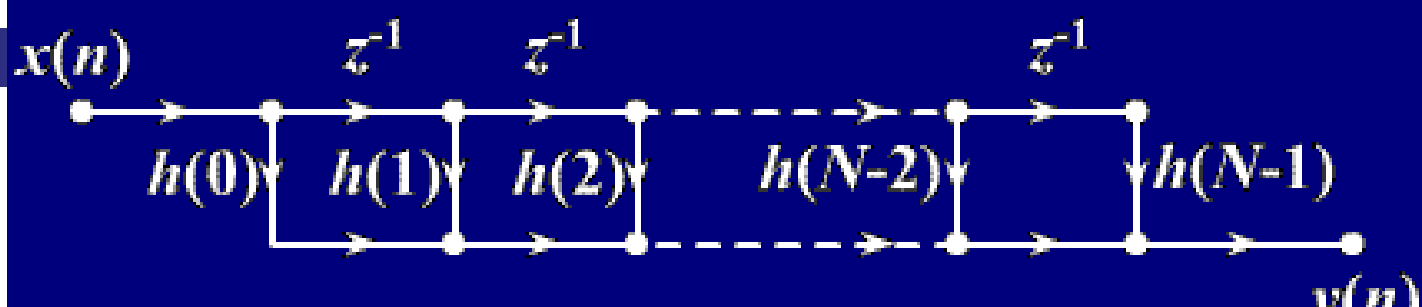
$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} \quad y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k)$$

## ■ 直接型结构（卷积型、横截型）



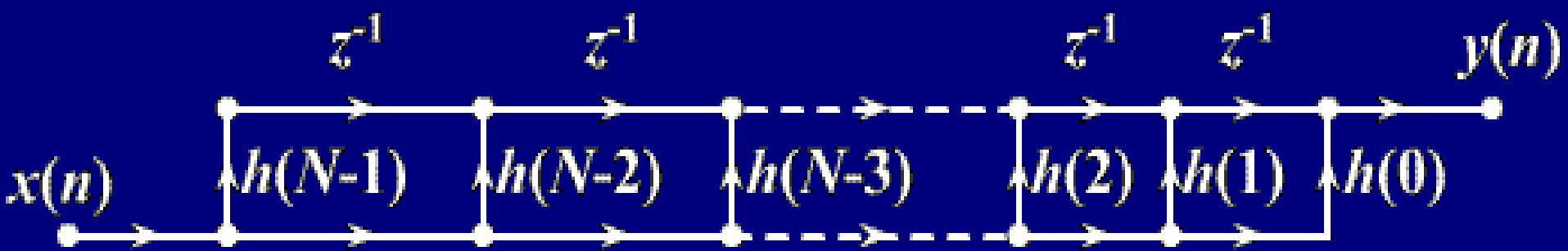
## ■ 特点:

- **N-1**个单位延时器，**N**个乘法器，**N-1**个加法器
- 单位延时器串联，有抽头，称为**延时线**



## 1 FIR 数字滤波器的直接型结构 (3)

### ■ 直接型的转置:

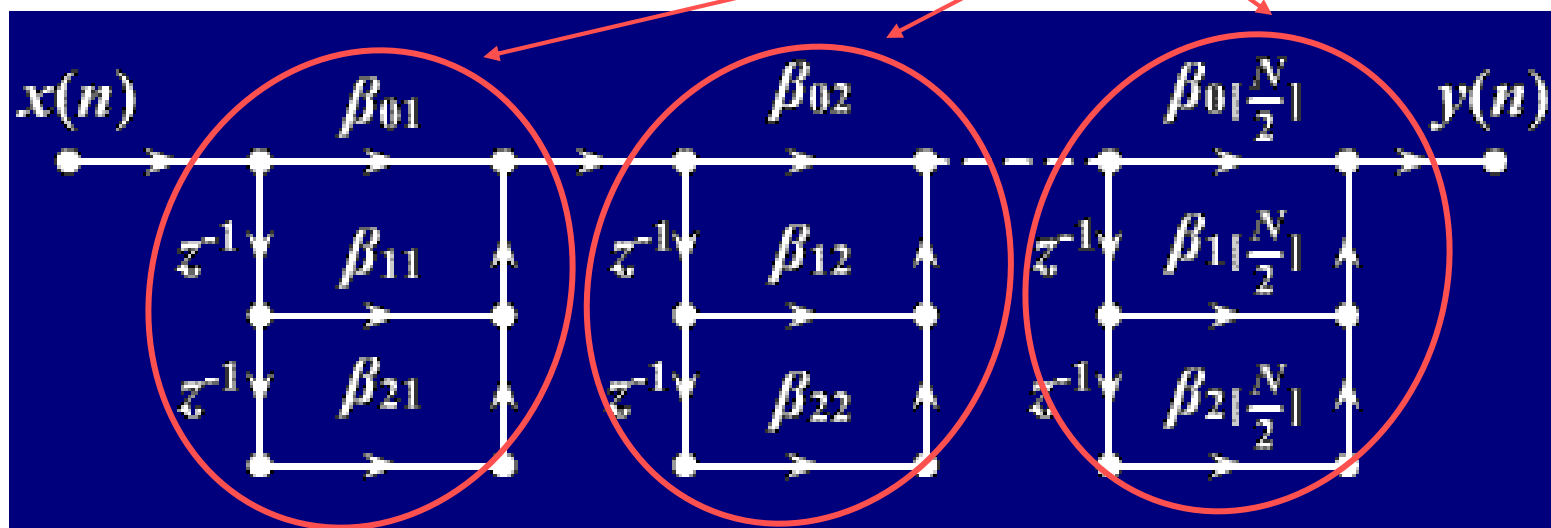


- 对于单个输入、单个输出的系统，通过反转网络中的全部支路的方向，并且将其输入和输出互换，得出的流图具有与原始流图相同的系统函数。

## 2. FIR 数字滤波器的级联型结构

- 将 $H(z)$ 进行因式分解，将共轭成对零点放在一起，形成实系数二阶因式的乘积形式：

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \prod_{k=1}^{[N/2]} (\beta_{0k} + \beta_{1k}z^{-1} + \beta_{2k}z^{-2})$$



## 2. FIR 数字滤波器的级联型结构 (2)

### ■ 级联型的特点

- 每个一阶网络控制一个零点，每个二阶网络控制一对零点，调节2或3个系数即可调整零点，便于控制滤波器的传输零点
- 系数比直接型多，所需的乘法运算多

### ■ 例8.2.1 (P218) 画直接型和级联型结构

$$H(z) = 0.96 + 2z^{-1} + 2.8z^{-2} + 1.5z^{-3}$$

$$H(z) = (0.6 + 0.5z^{-1})(1.6 + 2z^{-1} + 3z^{-2})$$

### 3. FIR滤波器的线性相位结构

$$H(e^{j\omega}) = H_g(\omega)e^{j\theta(\omega)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{第一类线性相位: } \theta(\omega) = -\omega \frac{N-1}{2} \\ \text{第二类线性相位: } \theta(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \omega \frac{N-1}{2} \end{array} \right.$$

- **FIR滤波器单位脉冲响应 $h(n)$ 为实数**,  $0 \leq n \leq N-1$  且满足:
  - 第一类（偶对称）： $h(n) = h(N-1-n)$
  - 第二类（奇对称）： $h(n) = -h(N-1-n)$
  - 对称中心在  **$(N-1)/2$** 处, 这种**FIR滤波器**具有严格线性相位。

## $N$ 为奇数时

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n) z^{-n} + h\left(\frac{N-1}{2}\right) z^{-\frac{N-1}{2}} + \sum_{n=\frac{N-1}{2}+1}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

$$\text{令 } n = N-1-m$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n) z^{-n} + h\left(\frac{N-1}{2}\right) z^{-\frac{N-1}{2}} + \sum_{m=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(N-1-m) z^{-(N-1-m)}$$

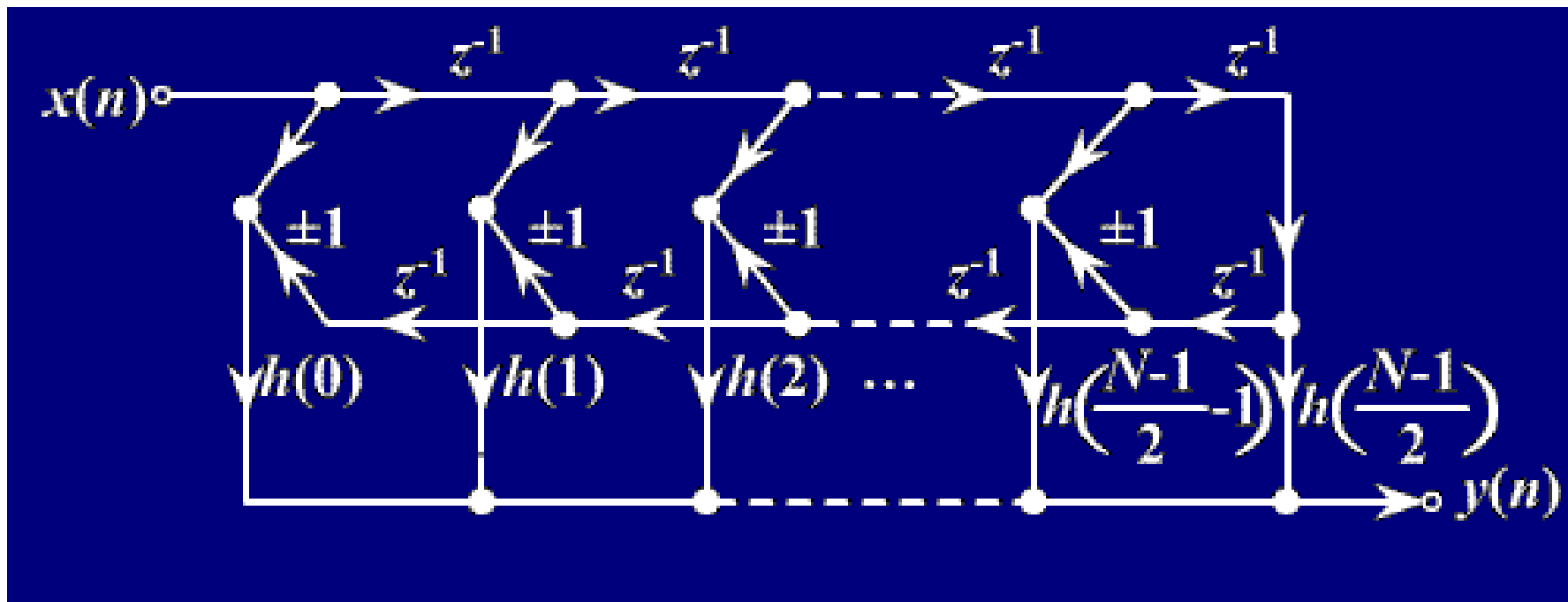
$$= \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n) \left[ z^{-n} \pm z^{-(N-1-n)} \right] + h\left(\frac{N-1}{2}\right) z^{-\frac{N-1}{2}}$$

+ 第一类

— 第二类



$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n) \left[ z^{-n} \pm z^{-(N-1-n)} \right] + h\left(\frac{N-1}{2}\right) z^{-\frac{N-1}{2}}$$

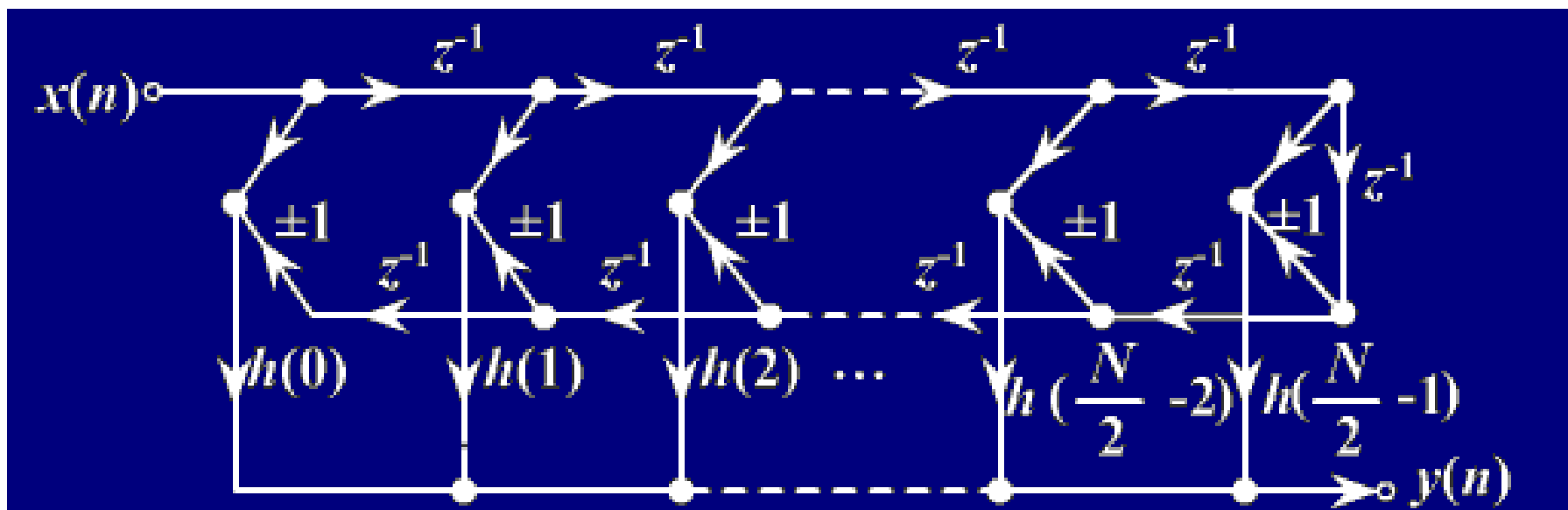


$h(n)$ 偶对称, 取 “+”

$h(n)$ 奇对称, 取 “—”, 且  $h\left(\frac{N-1}{2}\right) = 0$

## N为偶数时

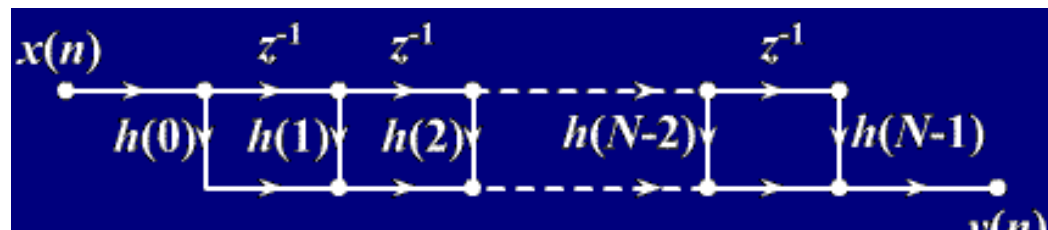
$$\begin{aligned}
 H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)z^{-n} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} h(n)z^{-n} \\
 &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) \left[ z^{-n} \pm z^{-(N-1-n)} \right]
 \end{aligned}$$



# 复杂度：线性相位结构 V.S. 直接型

## ■ 加法器、延迟器个数：

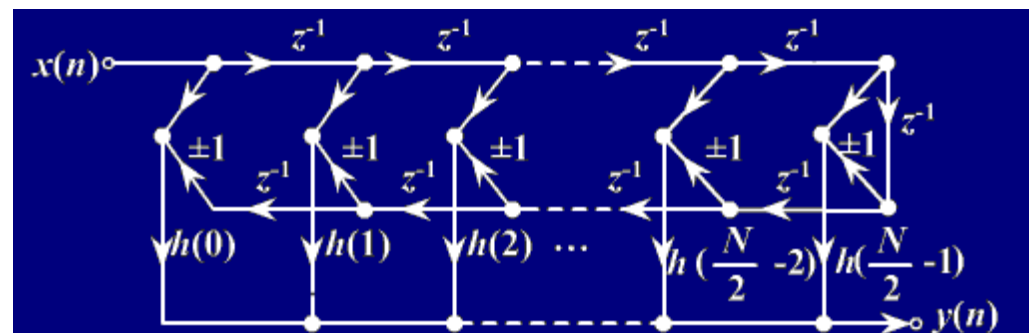
□ 均为N-1



## ■ 乘法器个数

□ 直接型：N

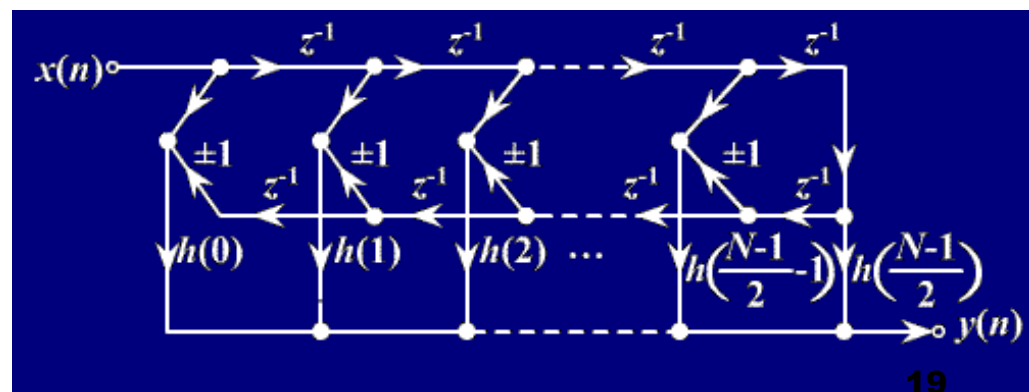
□ 线性相位结构：



**N为偶数：N/2**

**N为奇数：(N+1)/2**

(节省近一半)



## 4. 频率抽样型

- N个频率抽样 $H(k)$ 恢复 $H(z)$ 的内插公式:

$$H(z) = (1 - z^{-N}) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

$$= \frac{1}{N} H_c(z) \sum_{k=0}^{N-1} H_k(z)$$

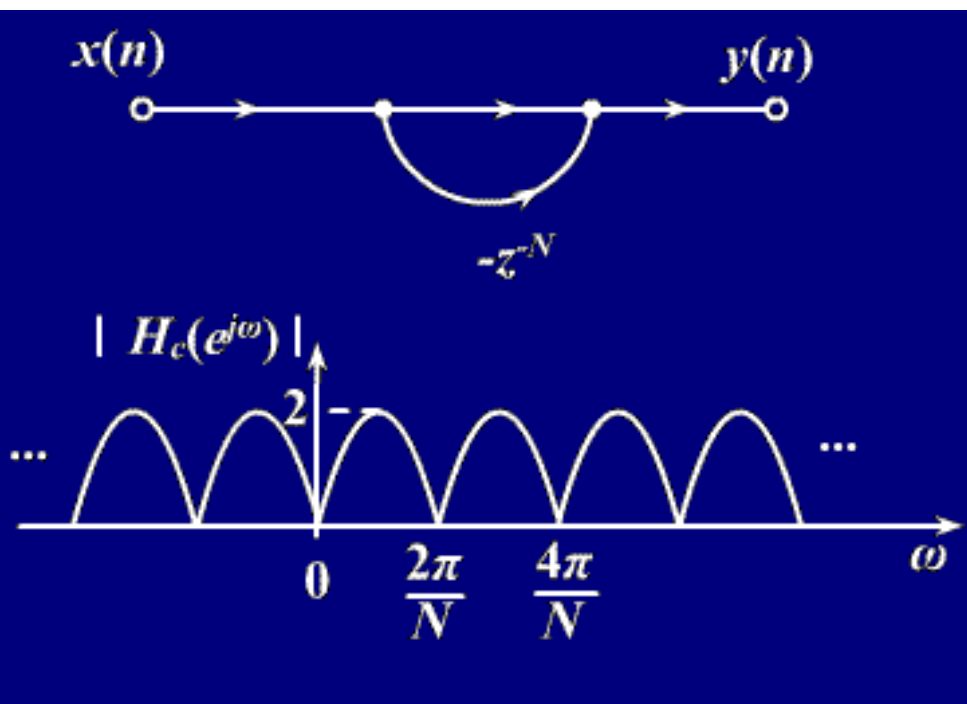
$$H(k) = H(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

子系统:  $H_c(z) = 1 - z^{-N}$

是 $N$ 节单位延时单元的梳状滤波器

在单位圆上有 $N$ 个等间隔角度的零点:

$$z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$



频率响应:

$$\begin{aligned} H_c(e^{j\omega}) &= 1 - e^{-j\omega N} \\ &= e^{-j\frac{\omega N}{2}} \left( e^{j\frac{\omega N}{2}} - e^{-j\frac{\omega N}{2}} \right) \\ &= 2je^{-j\frac{\omega N}{2}} \sin \frac{\omega N}{2} \end{aligned}$$

子系统:  $H_k(z) = \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$  一阶网络

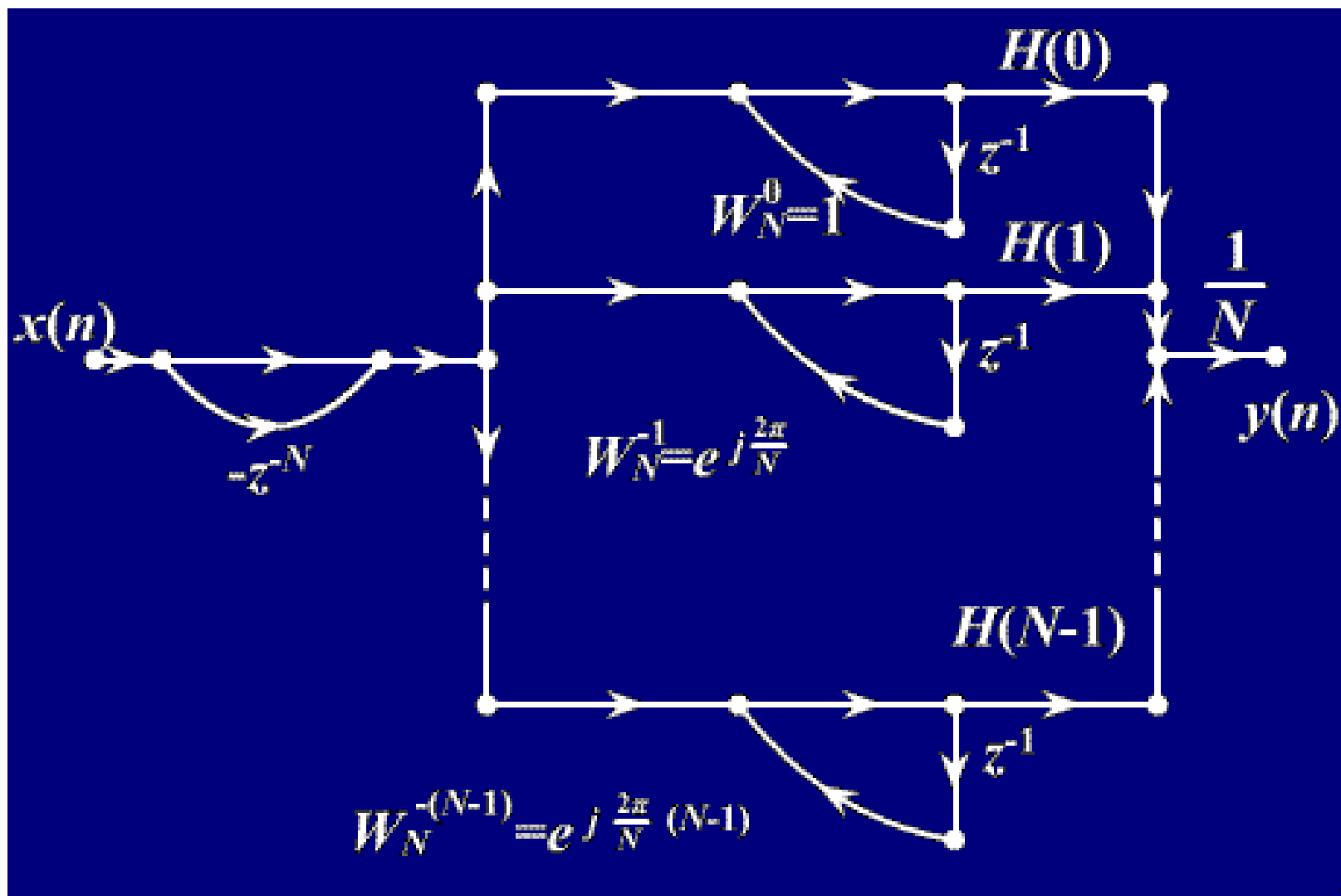
单位圆上有一个极点:  $z_k = W_N^{-k} = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$

与第  $k$  个零点相抵消, 使该频率  $\omega = \frac{2\pi}{N}k$  处的频率响应等于  $H(k)$

- 频率采样结构由一个**N阶梳状滤波器**和**N个并联一阶网络级联**构成

$$H(z) = (1 - z^{-N}) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

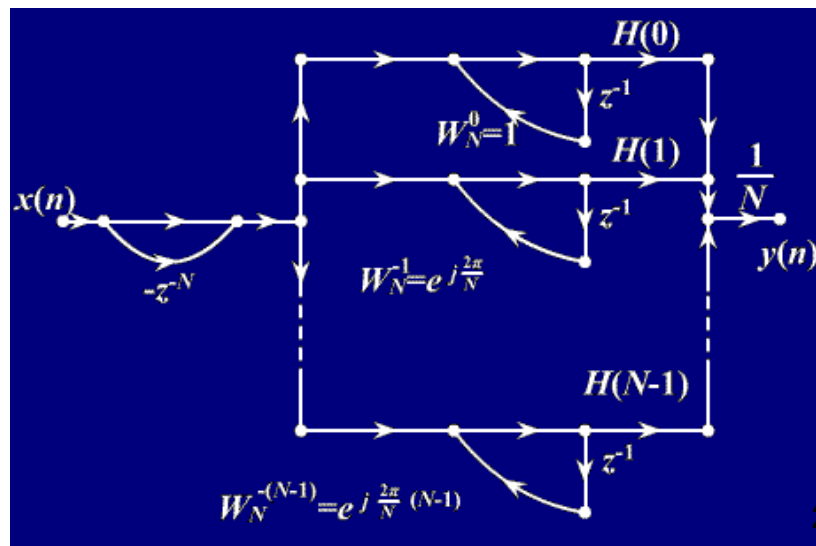
$$H(z) = (1 - z^{-N}) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$



## 频率抽样型结构的优缺点

- 调整 $H(k)$ 就可以有效地调整频响特性
- 若 $h(n)$ 长度相同，则网络结构完全相同，除了各支路增益 $H(k)$ ，便于标准化、模块化
- 系数多为复数，增加了复数乘法和存储量
- 有限字长效应可能导致零极点不能完全对消，导致系统不稳定

$$H(z) = (1 - z^{-N}) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$





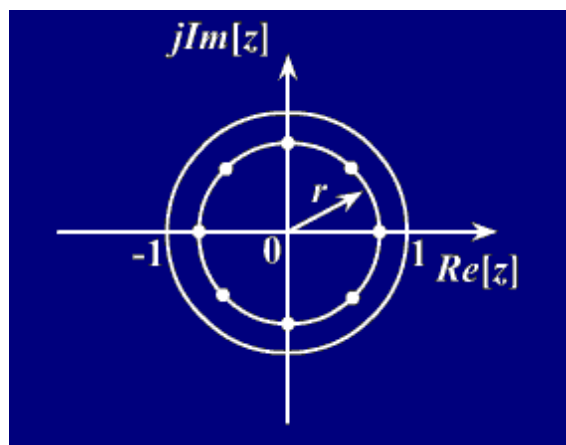
# 频率抽样结构的修正（1）

## ■ 问题

- 在有限字长情况下，系数量化后极点不能和零点抵消，使**FIR**系统不稳定

## ■ 解决方案

- 将零极点移至半径为 $r$ 的圆上：  $r < 1$ 且 $r \approx 1$



$$H(z) = (1 - r^N z^{-N}) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H_r(k)}{1 - r W_N^{-k} z^{-1}}$$

零、极点：  $z_k = r e^{j\frac{2\pi}{N}k}$  ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$

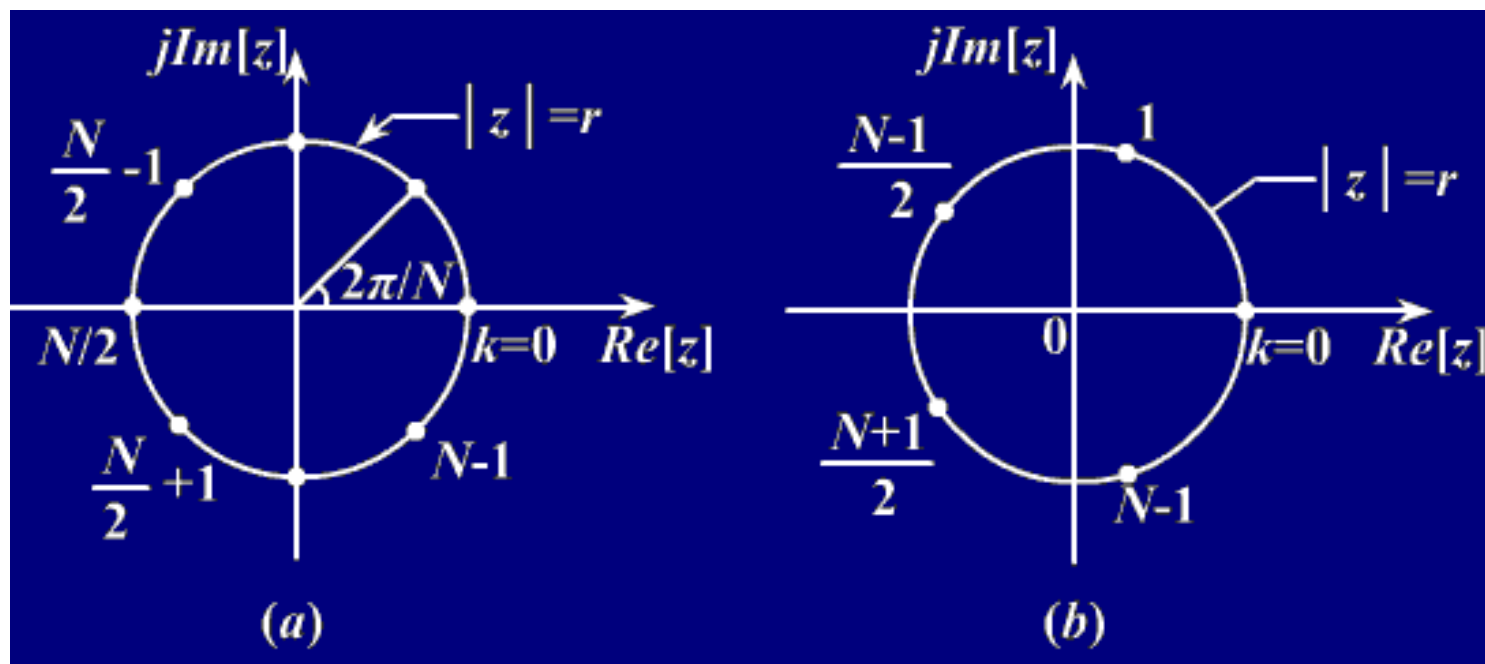
实际中取  $H_r(k) = H(k)$

## 频率抽样结构的修正 (2)

$$H_k(z) = \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

- 问题:  $H(k)$ 、 $W_N^{-k}$  是复数, 复数乘法器不易硬件实现
- $H(k)$  的分布: 等间隔采样, 关于  $k=N/2$  共轭对称

$$H(k) = H^*(N - k) \quad (\text{h(n)实数})$$



由对称性:  $z_{N-k} = z_k^*$   $W_N^{-(N-k)} = W_N^k = (W_N^{-k})^*$

## ■ 解决方案

将第**k**和第**(N-k)**个一阶网络合并成一个实系数的二阶网络

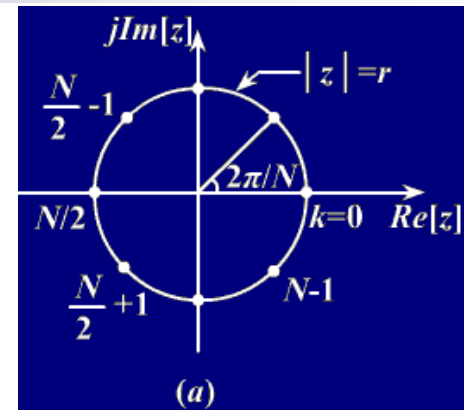
$$\begin{aligned}\hat{H}_k(z) &= H_k(z) + H_{N-k}(z) \\ &= \frac{H(k)}{1 - rW_N^{-k}z^{-1}} + \frac{H(N-k)}{1 - rW_N^{-(N-k)}z^{-1}} \\ &= \frac{H(k)}{1 - rW_N^{-k}z^{-1}} + \frac{H^*(k)}{1 - r(W_N^{-k})^*z^{-1}} \\ &= \frac{\alpha_{0k} + \alpha_{1k}z^{-1}}{1 - z^{-1}2r\cos(\frac{2\pi}{N}k) + r^2z^{-2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{0k} &= 2\operatorname{Re}[H(k)] \\ \alpha_{1k} &= -2r\operatorname{Re}[H(k)W_N^{-k}]\end{aligned}\quad \begin{cases} k = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2} & N \text{为奇数} \\ k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 & N \text{为偶数} \end{cases}$$

■ **N**为偶数时，还有一对实数根

$$H(z) = (1 - r^N z^{-N}) \frac{1}{N} \left[ H_0(z) + H_{N/2}(z) + \sum_{k=1}^{N/2-1} H_k(z) \right]$$

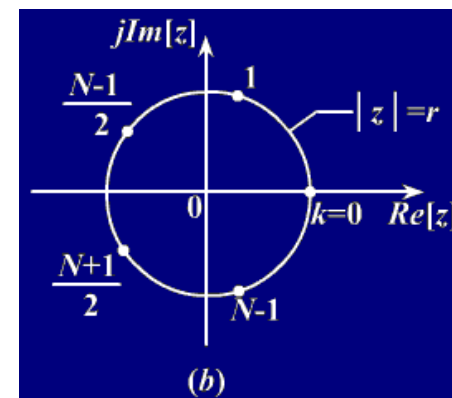
$$= (1 - r^N z^{-N}) \frac{1}{N} \left[ \frac{H(0)}{1 - rz^{-1}} + \frac{H(N/2)}{1 + rz^{-1}} + \sum_{k=1}^{N/2-1} \frac{\alpha_{0k} + \alpha_{1k} z^{-1}}{1 - z^{-1} 2r \cos(\frac{2\pi}{N} k) + r^2 z^{-2}} \right]$$



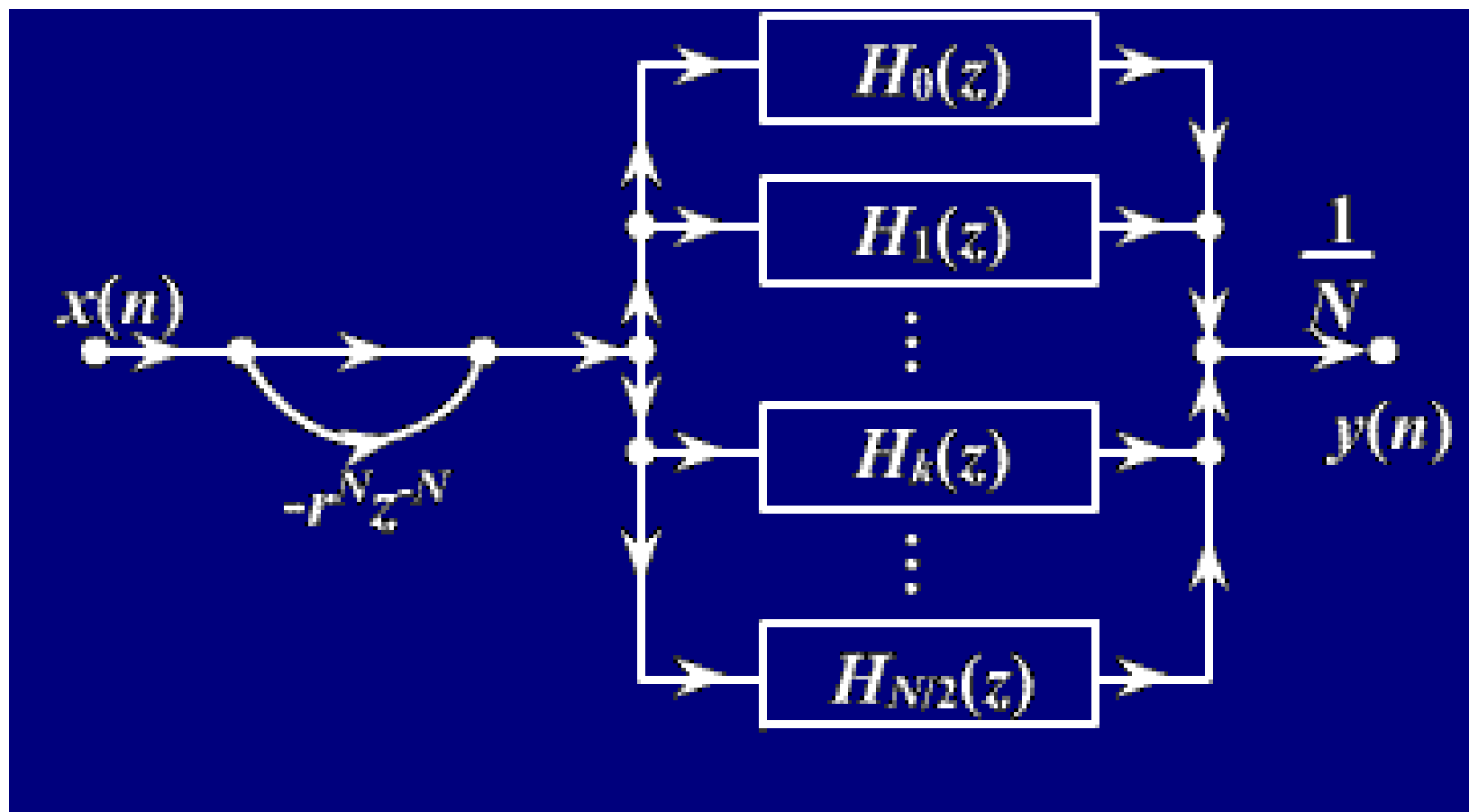
■ **N**为奇数

$$H(z) = (1 - r^N z^{-N}) \frac{1}{N} \left[ H_0(z) + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} H_k(z) \right]$$

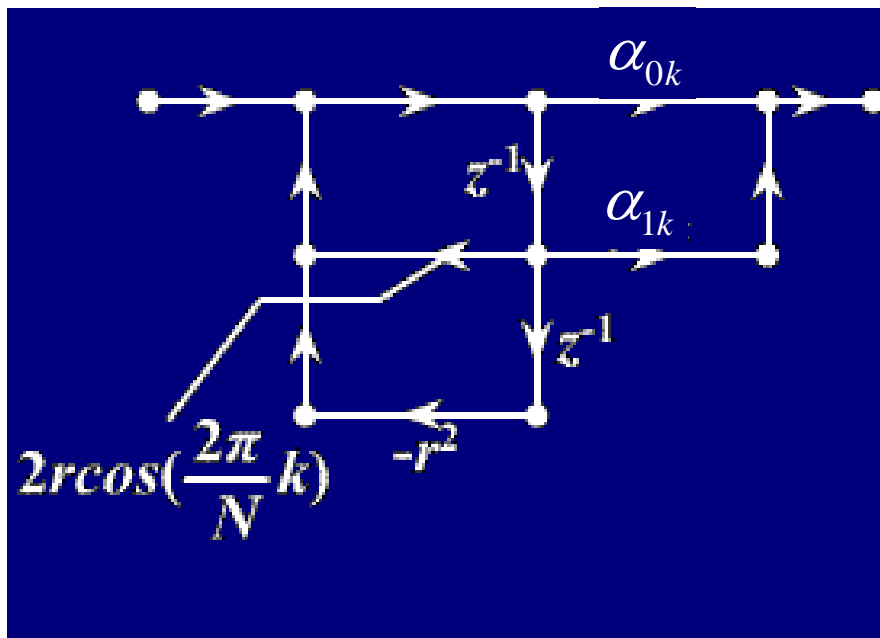
$$= (1 - r^N z^{-N}) \frac{1}{N} \left[ \frac{H(0)}{1 - rz^{-1}} + \sum_{k=1}^{N/2-1} \frac{\alpha_{0k} + \alpha_{1k} z^{-1}}{1 - z^{-1} 2r \cos(\frac{2\pi}{N} k) + r^2 z^{-2}} \right]$$



## 频率采样修正结构

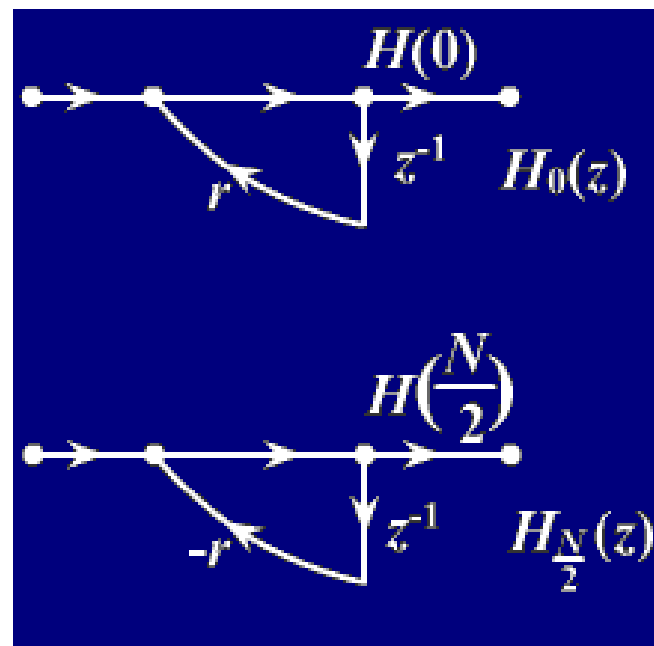


## ■ 其中的一阶、二阶网络结构



二阶网络结构

$$\hat{H}_k(z) = \frac{\alpha_{0k} + \alpha_{1k}z^{-1}}{1 - z^{-1}2r\cos(\frac{2\pi}{N}k) + r^2z^{-2}}$$



一阶网络结构

$$H_0(z) = \frac{H(0)}{1 - rz^{-1}}$$

$$H_{\frac{N}{2}}(z) = \frac{H(N/2)}{1 + rz^{-1}}$$

例：设计一 **$M$** 阶实系数**FIR**，已知 **$H[0]=1$** ， **$H[1]=1$** ，画出其频率取样型结构。

解：频率抽样点数 **$N=M+1$** ，由 **$H[0]=1$** ， **$H[N-1]=H[1]=1$**

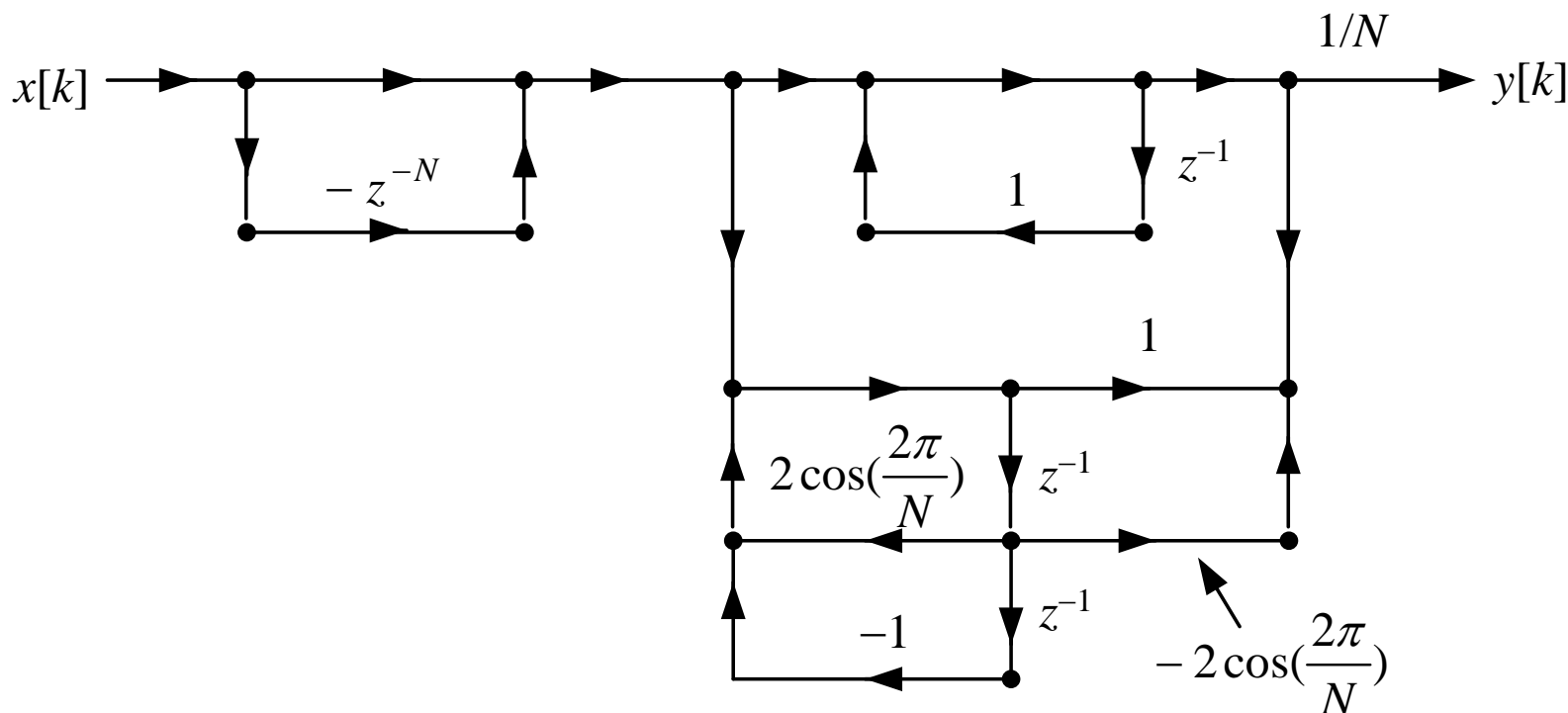
$$H(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \left\{ \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1-W_N^{-1}z^{-1}} + \frac{1}{1-W_N^{-(N-1)}z^{-1}} \right\}$$

由  $W_N^{-(N-1)} = W_N^1$

$$H(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \left\{ \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{2-2\cos(\frac{2\pi}{N})z^{-1}}{1-2\cos(\frac{2\pi}{N})z^{-1}+z^{-2}} \right\}$$

## 实系数频率取样型结构流图

$$H(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \left\{ \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{2-2\cos(\frac{2\pi}{N})z^{-1}}{1-2\cos(\frac{2\pi}{N})z^{-1}+z^{-2}} \right\}$$

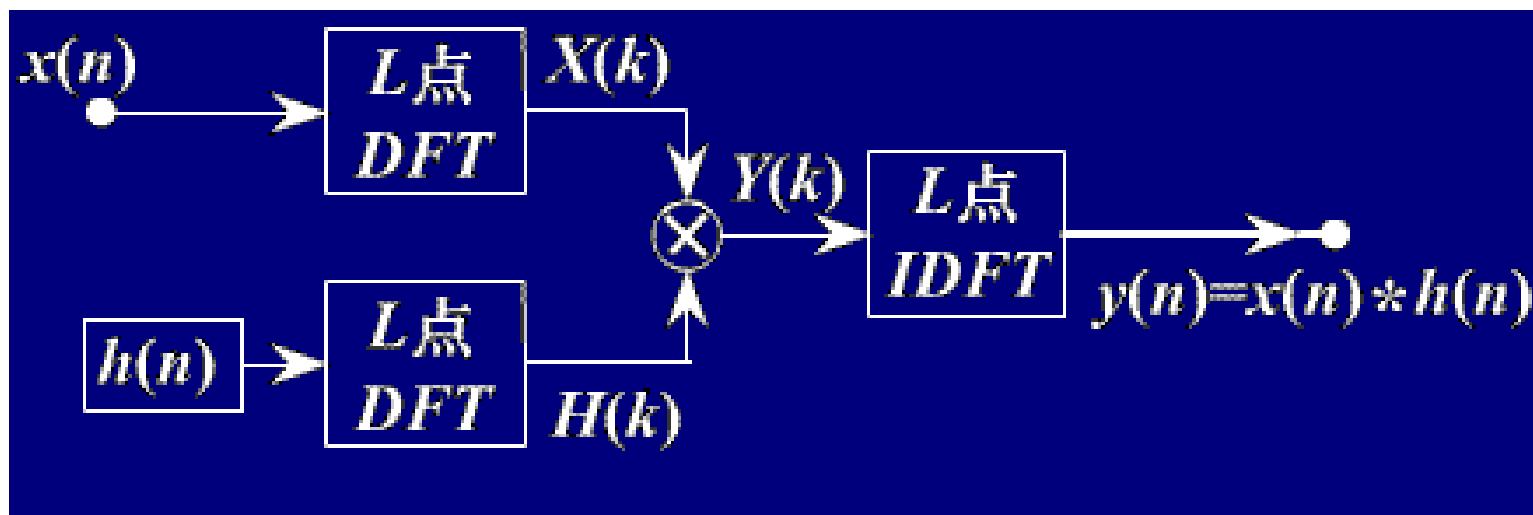


- 优点：
1.  $H[m]$ 零点较多时，实现较为简单。
  2. 可以构成滤波器组，实现信号的频谱分析。



## 5. 快速卷积法

- 单位脉冲响应是有限长序列，输入有限长序列信号，则输出信号可用**DFT**计算。
- 优点：采用**FFT**快速算法，运算速度加快。
- 若输入序列为无限长序列，可用重叠相加法或重叠保留法。



## 8.3 IIR数字滤波器的基本结构

系统函数: 
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

差分方程: 
$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

### ■ IIR数字滤波器的特点:

- 系统的单位脉冲响应  $h(n)$  无限长
- 系统函数  $H(z)$  有极点
- 存在输出到输入的反馈, 递归型结构

# IIR数字滤波器的基本结构

- 直接型结构
- 级联型结构
- 并联型结构

# 1. IIR数字滤波器的直接型结构

全极点IIR:  $H_2(z) = \frac{Y(z)}{W(z)}$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \left( \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right) \left( \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \right)$$

*FIR*:  $H_1(z) = \frac{W(z)}{X(z)}$

$$w[k] = b_0 x[k] + b_1 x[k-1] + \cdots + b_N x[k-M]$$

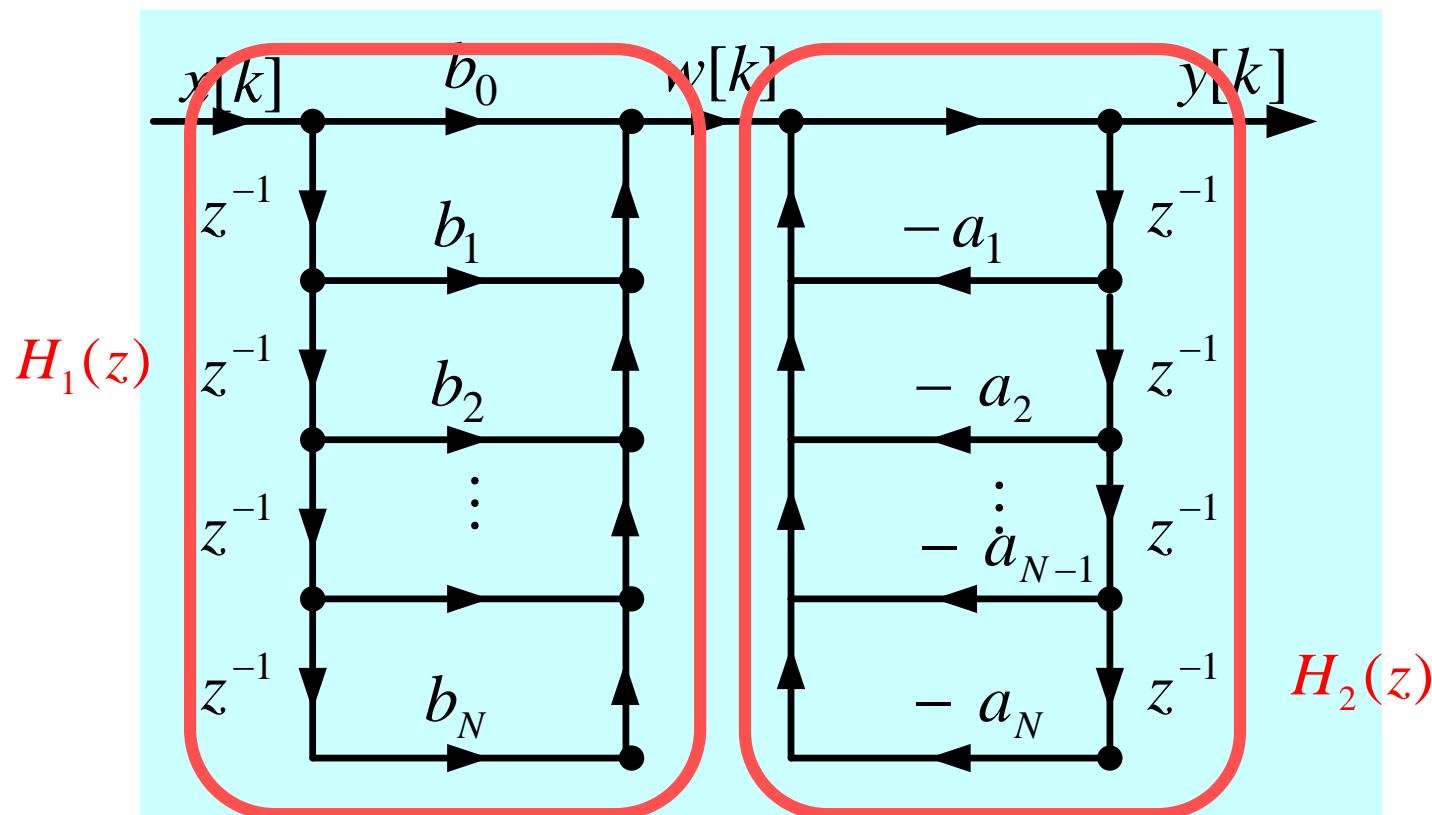
$$y[k] = w[k] - a_1 y[k-1] - a_2 y[k-2] - \cdots - a_N y[k-N]$$

## 直接 I 型结构

$$H_1(z) = \frac{W(z)}{X(z)} \quad H_2(z) = \frac{Y(z)}{W(z)}$$

设  $M=N$        $w[k] = b_0 x[k] + b_1 x[k-1] + \cdots + b_N x[k-N]$

$$y[k] = w[k] - a_1 y[k-1] - a_2 y[k-2] - \cdots - a_N y[k-N]$$

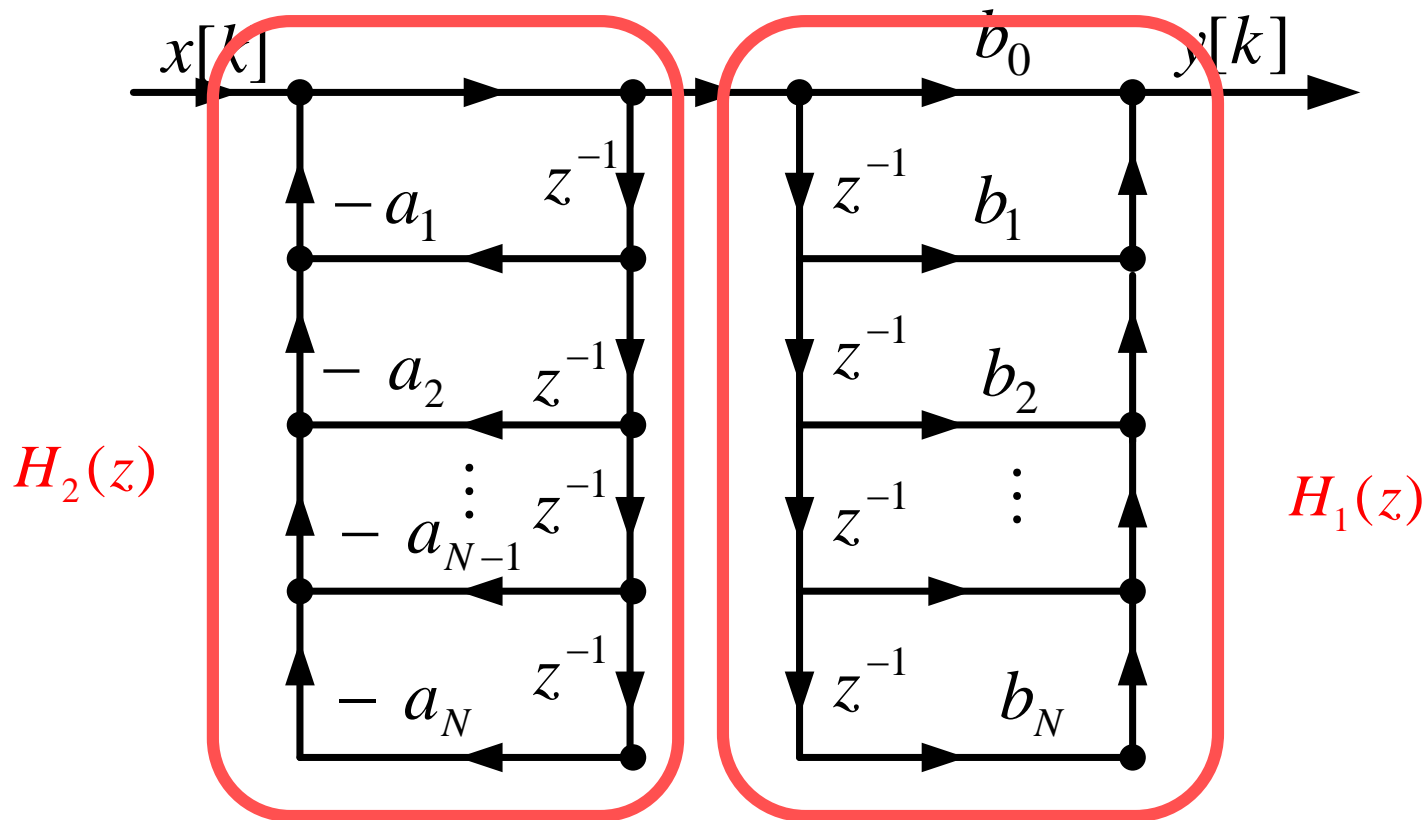


分子多项式决定前向通路，分母多项式决定反馈回路

## 直接 II 型结构

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) = H_2(z)H_1(z)$$

交换 $H_1(z)$ 与 $H_2(z)$ 的顺序

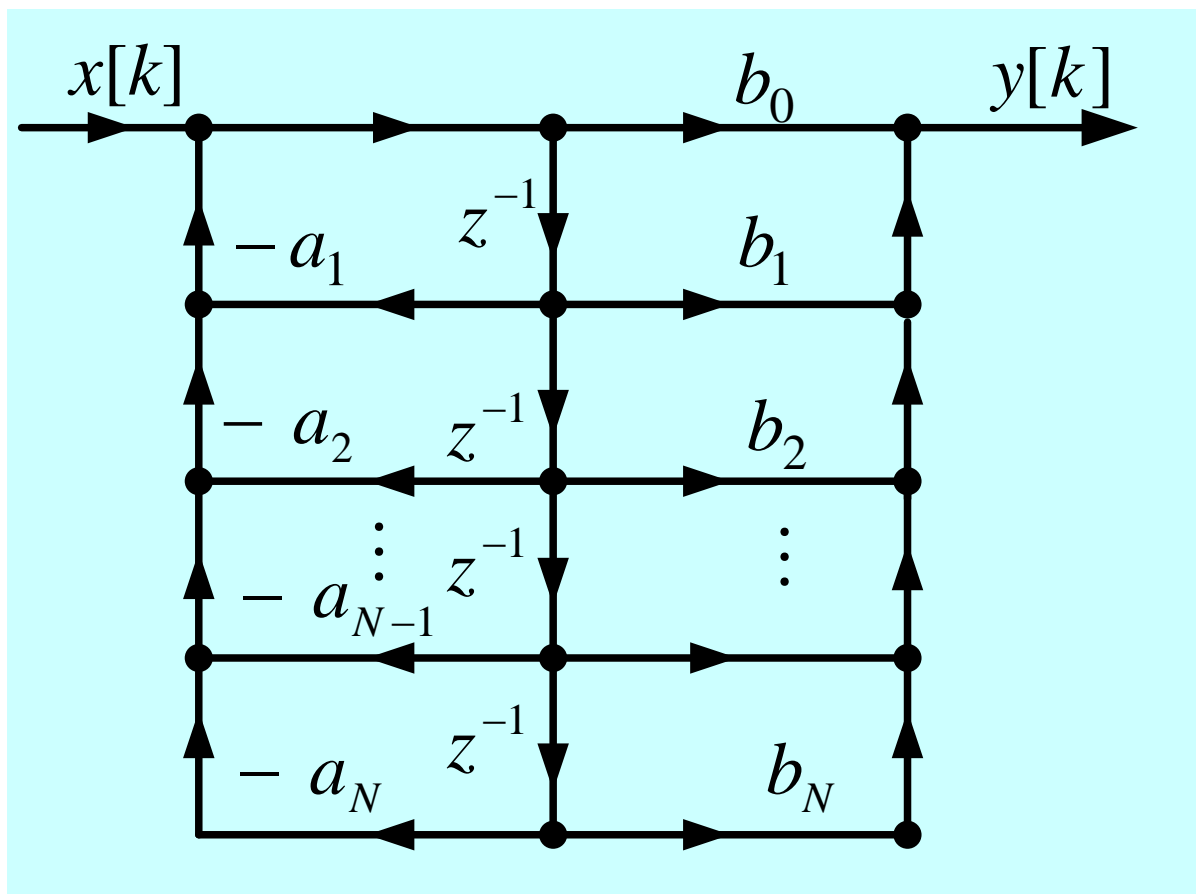


将延迟单元合并

## 直接 II 型结构

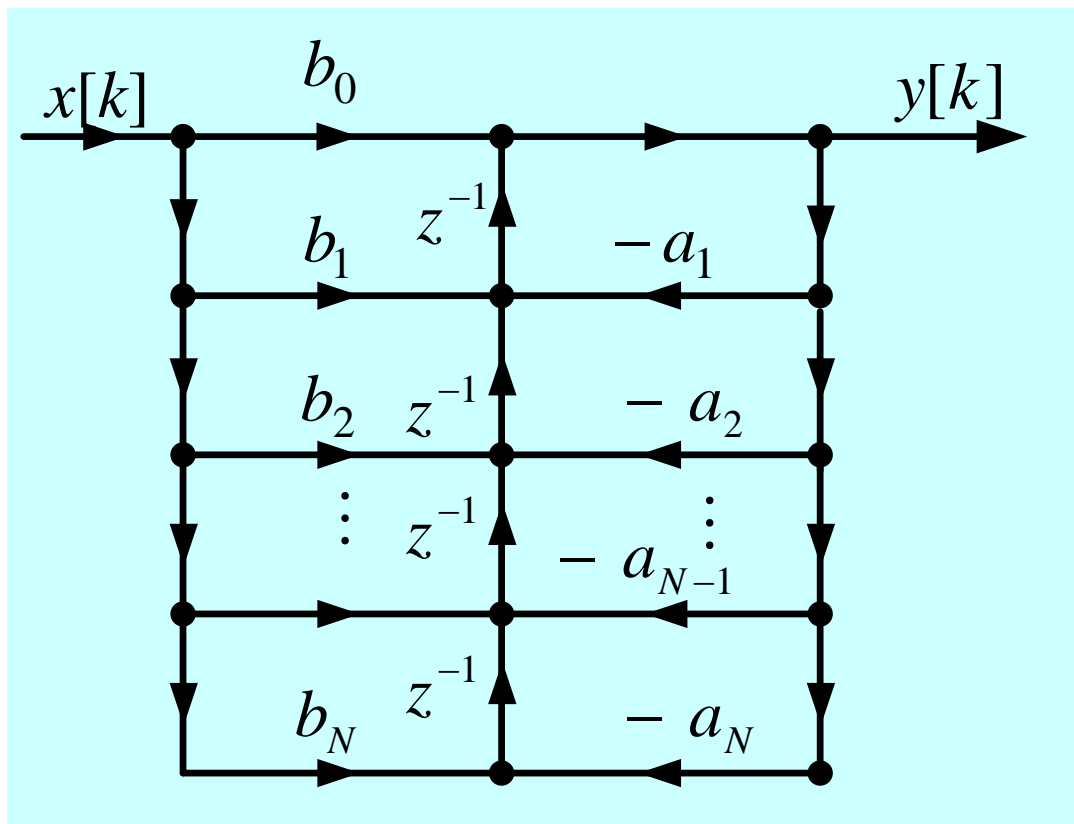
$H(z) = H_1(z)H_2(z) = H_2(z)H_1(z)$   
交换 $H_1(z)$ 与 $H_2(z)$ 的顺序

复杂度?



- $M+N+1$ 次乘法； $M+N$ 次加法；延时单元数为 $M$ 、 $N$ 中的最大值。

## 转置直接 II 型结构





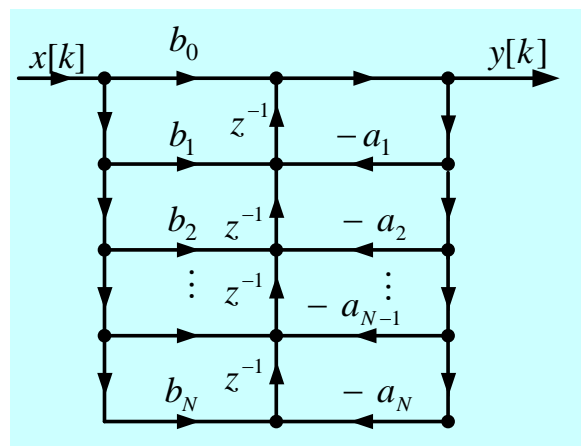
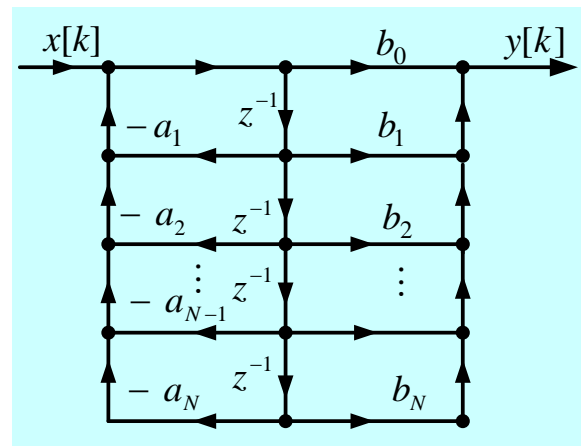
# IIR数字滤波器直接型结构的优缺点

## ■ 缺点:

- 改变某一个 $\{a_k\}$ 将影响所有的极点
- 改变某一个 $\{b_k\}$ 将影响所有的零点
- 系数  $a_k, b_k$  对滤波器的性能控制作用不明显, 参数调整麻烦
- 极点对有限字长效应太敏感, 易出现不稳定或较大误差

## ■ 优点:

- 简单直观



## 2. IIR数字滤波器的级联型网络结构

将滤波器系统函数 $H(z)$ 的分子和分母分别分解为一阶和二阶实系数因子之积的形式（共轭零极点合并）

$$H(z) = K \frac{\prod_{k=1}^{M_1} (1 - z_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_2} (1 + \alpha_{1,k} z^{-1} + \alpha_{2,k} z^{-2})}{\prod_{k=1}^{N_1} (1 - p_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_2} (1 + \beta_{1,k} z^{-1} + \beta_{2,k} z^{-2})}$$

↓

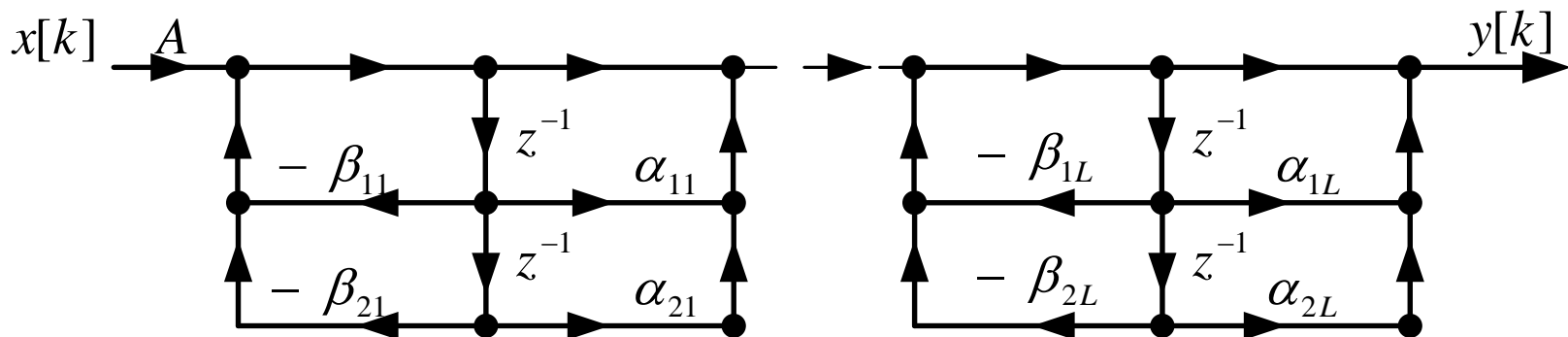
$$H(z) = A \prod_{i=1}^L \frac{1 + \alpha_{1,i} z^{-1} + \alpha_{2,i} z^{-2}}{1 + \beta_{1,i} z^{-1} + \beta_{2,i} z^{-2}} = A \prod_{i=1}^L H_i(z)$$

二阶网络

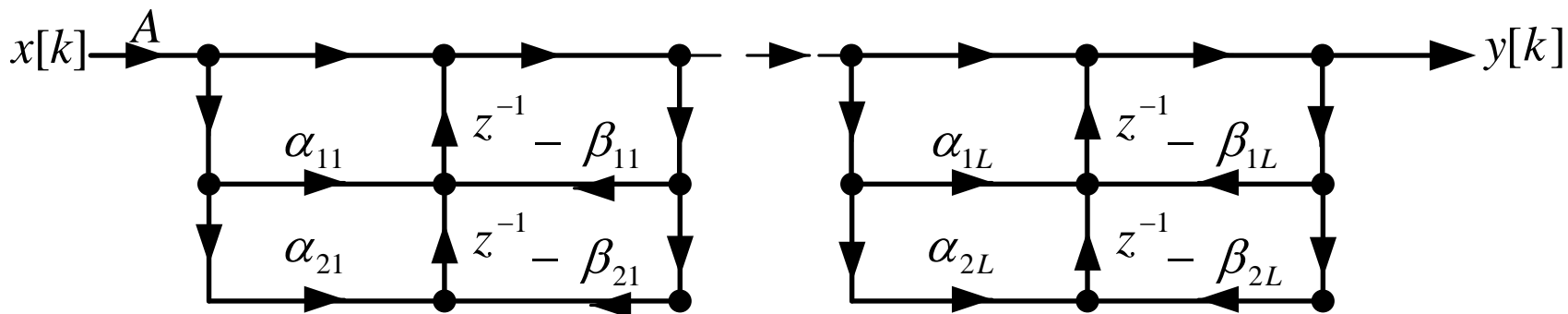
画出各二阶基本网络的直接型结构，再将它们级联。

## 级联型结构信号流图

$$H_i(z) = \frac{1 + \alpha_{1,i}z^{-1} + \alpha_{2,i}z^{-2}}{1 + \beta_{1,i}z^{-1} + \beta_{2,i}z^{-2}}$$

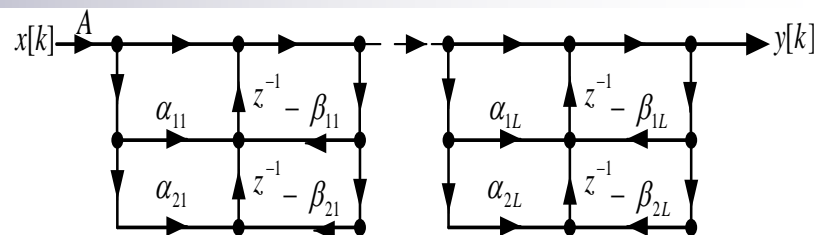


## 基于直接II型的级联型结构



## 基于转置直接II型的级联型结构

## IIR数字滤波器级联型结构的优缺点



### 优点:

1. 硬件实现时，可以用一个二阶网络进行时分复用
2. 每一个基本网络系数变化只影响该子系统的零极点  
一阶网络决定一个零点和一个极点；  
二阶网路决定一对共轭零点（或一个实数极点）和一对共轭极点
3. 对系数变化的敏感度小，受有限字长的影响比直接型低
4. 具有最少的存储器

### 缺点:

- 二阶节电平难控制，电平大易导致溢出，电平小则使信噪比减小。

例8.3.2 (P223)

$$H(z) = \frac{8 - 4z^{-1} + 11z^{-2} - 2z^{-3}}{1 - \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2} - \frac{1}{8}z^{-3}}$$

### 3. IIR数字滤波器的并联型结构

- 将滤波器系统函数 $H(z)$ 展开成部分分式之和，每部分可用一个一阶或二阶网络实现

$$H(z) = C + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{b_k}{1 - a_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{b_{k0} + b_{k1} z^{-1}}{1 - a_{k1} z^{-1} - a_{k2} z^{-2}}$$

$$H(z) = C + \sum_{k=1}^L \frac{b_{k0} + b_{k1} z^{-1}}{1 - a_{k1} z^{-1} - a_{k2} z^{-2}}$$

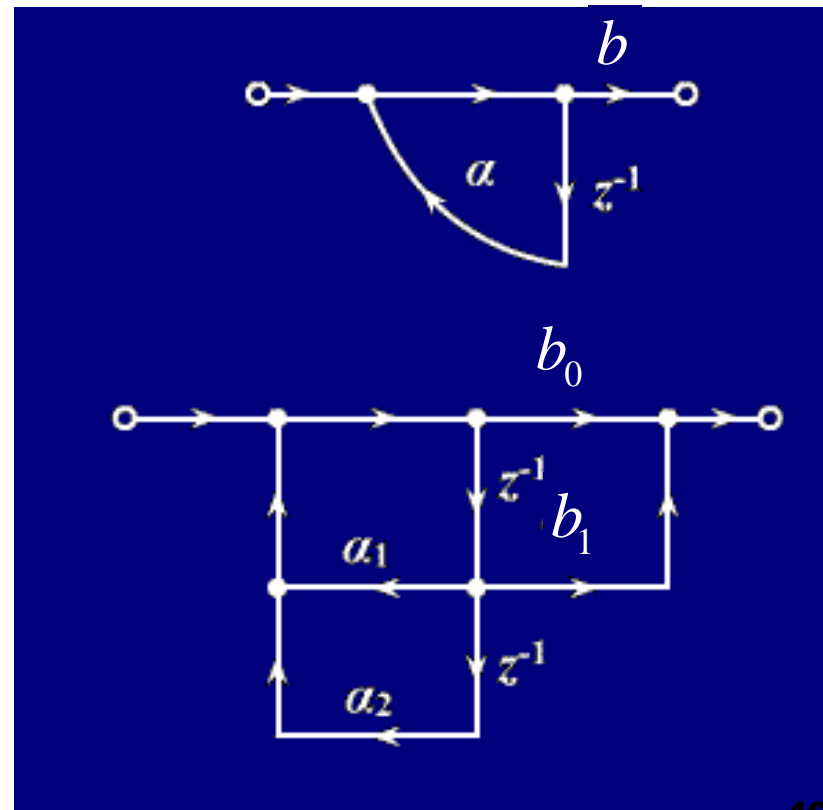
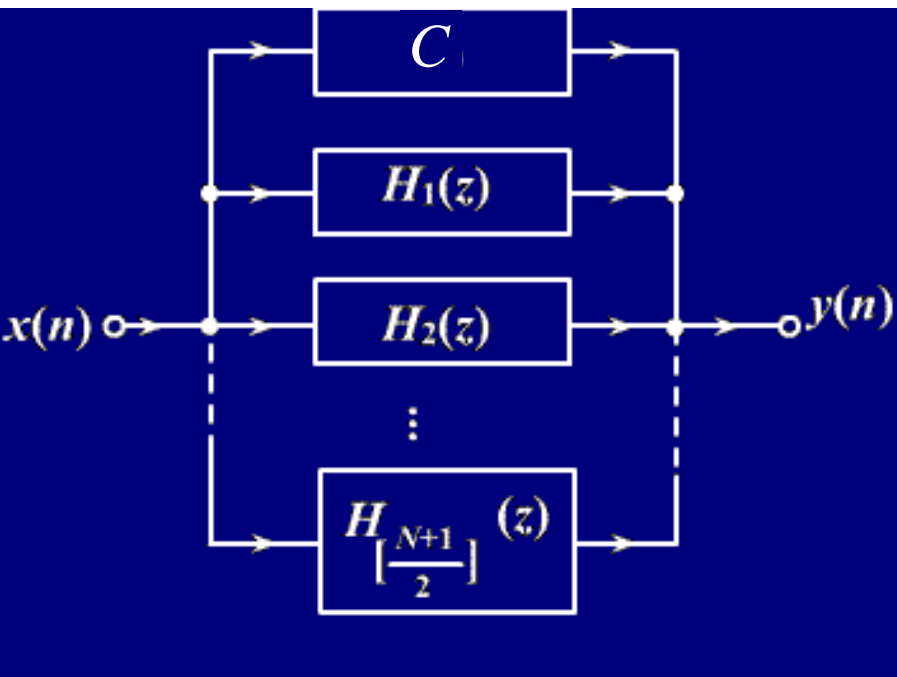
$L$ 为  $(N+1)/2$  的整数部分

画出各二阶基本网络的直接型结构，再将它们并联。

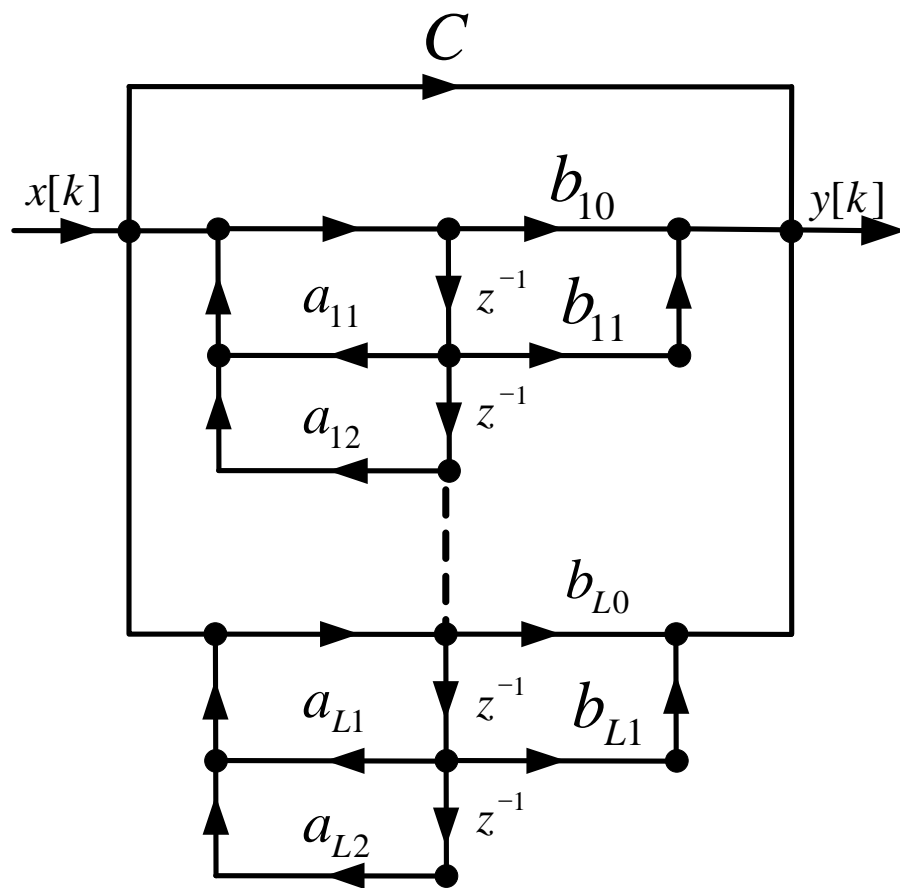
$$H(z) = C + \sum_{k=1}^L \frac{b_{k0} + b_{k1}z^{-1}}{1 - a_{k1}z^{-1} - a_{k2}z^{-2}}$$

$$G_1(z) = \frac{b}{1 - az^{-1}}$$

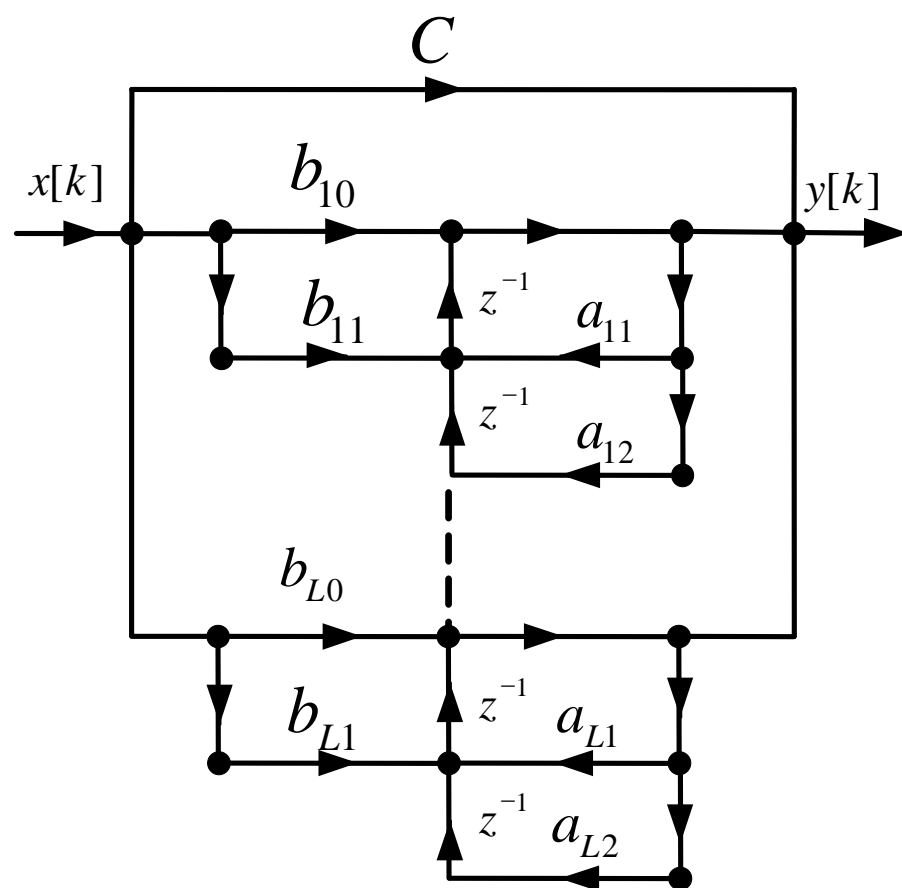
$$G_2(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1}}{1 - a_1z^{-1} - a_2z^{-2}}$$



$$H(z) = C + \sum_{k=1}^L \frac{b_{k0} + b_{k1}z^{-1}}{1 - a_{k1}z^{-1} - a_{k2}z^{-2}}$$



基于直接II型的并联型结构



基于转置直接II型的并联型结构

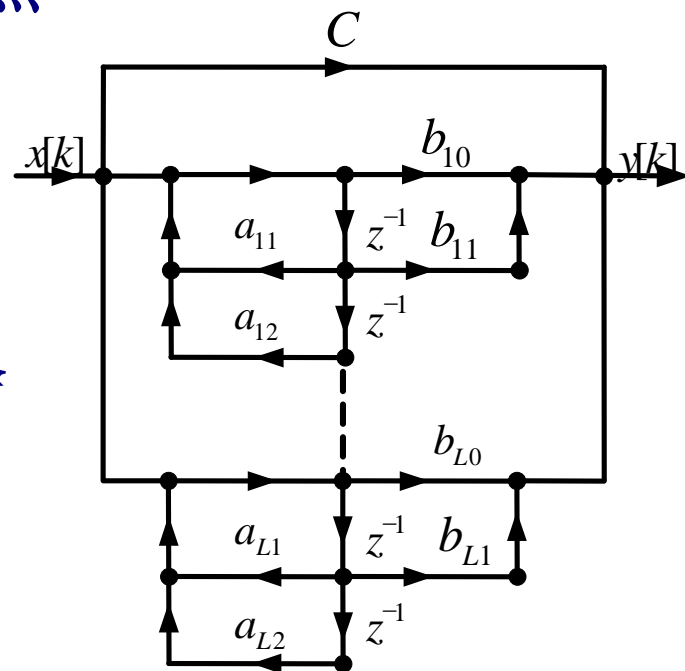
# IIR数字滤波器的并联型结构优缺点

## ■ 优点:

1. 运算速度快
2. 各基本网络的误差互不影响, 不会增加积累误差
3. 可以单独调整极点的位置

## ■ 缺点:

不能像级联型那样直接调整零点





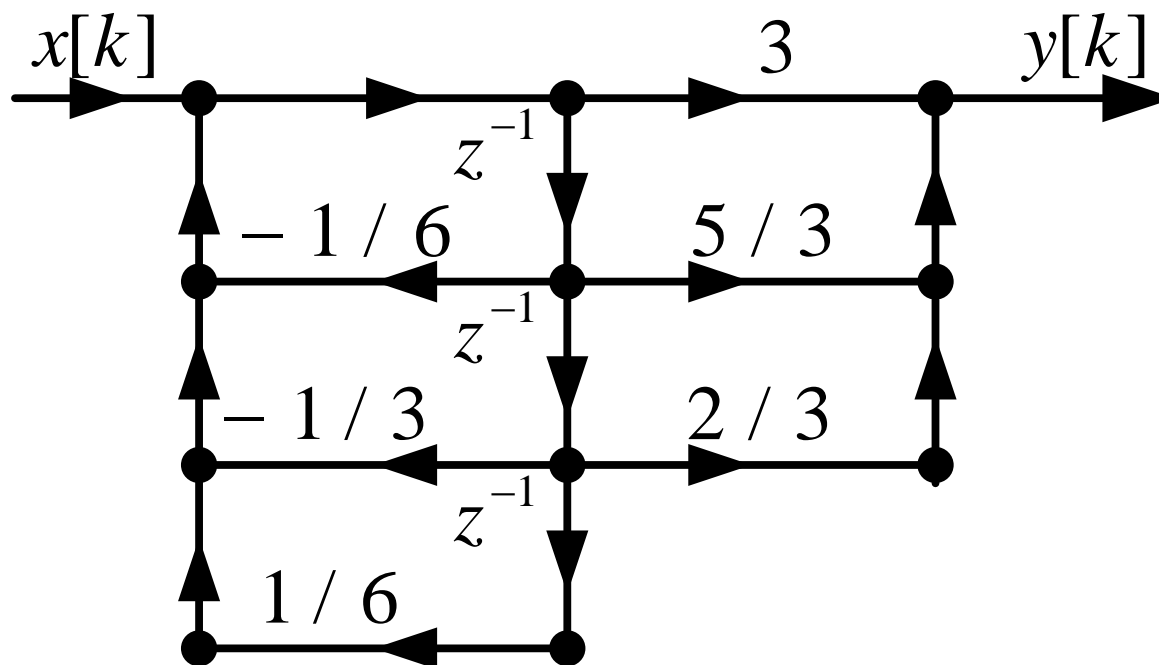
[例]已知某三阶数字滤波器的系统函数为

$$H(z) = \frac{3 + \frac{5}{3}z^{-1} + \frac{2}{3}z^{-2}}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2})}$$

试画出其直接型、级联型和并联型结构。

## 1. 直接型

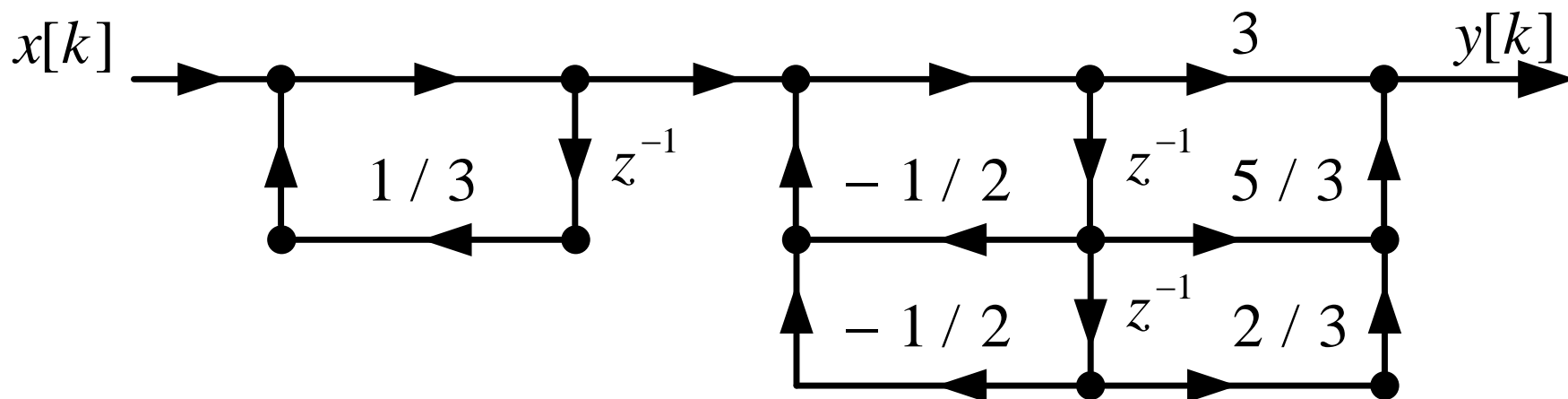
将系统函数 $H(z)$ 表达为: 
$$H(z) = \frac{3 + \frac{5}{3}z^{-1} + \frac{2}{3}z^{-2}}{1 + \frac{1}{6}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2} - \frac{1}{6}z^{-3}}$$



## 2. 级联型

将系统函数 $H(z)$ 表达为一阶、二阶实系数分式之积

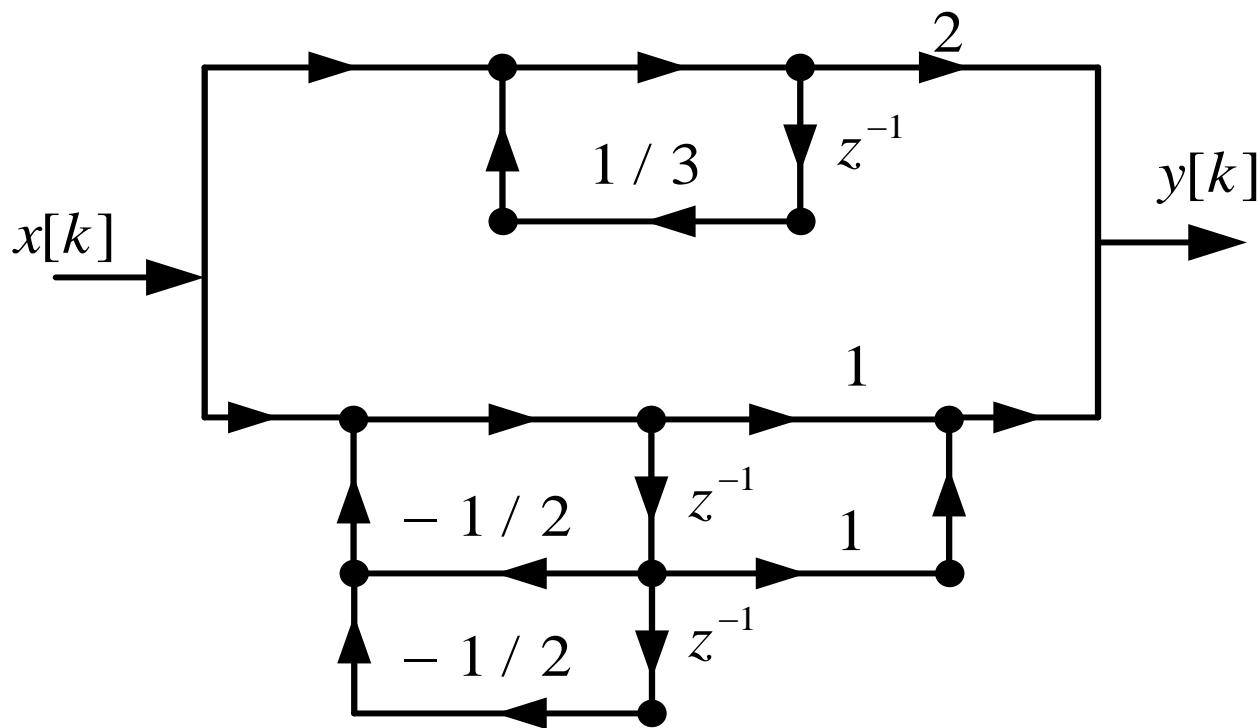
$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \cdot \frac{3 + \frac{5}{3}z^{-1} + \frac{2}{3}z^{-2}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$



### 3. 并联型

将系统函数 $H(z)$ 表达为部分分式之和的形式

$$H(z) = \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{1 + z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$



## 8.6 数字信号处理中的量化效应

- 因有限位寄存器引起的误差，称为**量化效应**，也称为**有限寄存器效应**。
- 量化误差的表现：
  - **A/D**变换器中的量化效应
  - 系数量化效应
  - 运算中的量化效应

## 量化及量化误差

- 量化编码：序列值用有限长的二进制数表示。
- 量化误差：由于量化编码而导致的误差。
- 量化阶：假设用 **$b+1$** 位二进制数表示一个实数，**1**位表示符号，尾数用 **$b$** 位表示。

# 二进制数的描述和量化影响

## 一. 定点二进制数表示法

(定点:  $|x| < 1$  , 或  $-1 < x < 1$  )

$\beta_0\beta_1\beta_2\cdots\beta_b$  (  $b+1$ 位码,  $\beta_i(0,1)$  )

- 原码:  $x = (-1)^{\beta_0} \sum_{i=1}^b \beta_i 2^{-i}$
- 补码:  $x = 2 - |x| = -\beta_0 + \sum_{i=1}^b \beta_i 2^{-i}$
- 反码:  $x = -\beta_0(1 - 2^{-b}) + \sum_{i=1}^b \beta_i 2^{-i}$

$\beta_0 = 0$  时三种码子是一致的。

例: 设  $b = 3$  ,  $x = +0.75$  , 则  $[x]_{\text{原}} = (0.110)_2$  ;  
 $x = -0.75$  , 则  $[x]_{\text{原}} = (1.110)_2$  。

## 二、量化方式及误差

截尾：只取  $b$  位，截去  $b$  位后的真值位；

舍入：四舍五入，取最接近的  $b$  位。

### 1. 定点制截尾误差位

设一个正数的真值为  $b_1$  位表示，即  $x = \sum_{i=1}^{b_1} \beta_i 2^{-i}$

用  $[\bullet]_T$  表示截尾成  $b$  位，则  $[x]_T = \sum_{i=1}^b \beta_i 2^{-i}$

截尾误差为  $E_T = [x]_T - x = -\sum_{i=b+1}^{b_1} \beta_i 2^{-i}$

当  $\beta_i$  全为1时，误差最大，为  $E_T = -(2^{-b} - 2^{-b_1})$

当  $b_1 \rightarrow \infty$  时  $E_T = -2^{-b} = -q$

即截尾误差范围为  $-q < E_T < 0 \quad \dots\dots (1)$



同理可推出一个负数表示的截断误差范围是：

$$0 < E_T < q \quad \dots\dots\dots (1.1)$$

2. 定点制舍入误差  $-q/2 < E_R < q/2 \quad \dots\dots (2)$

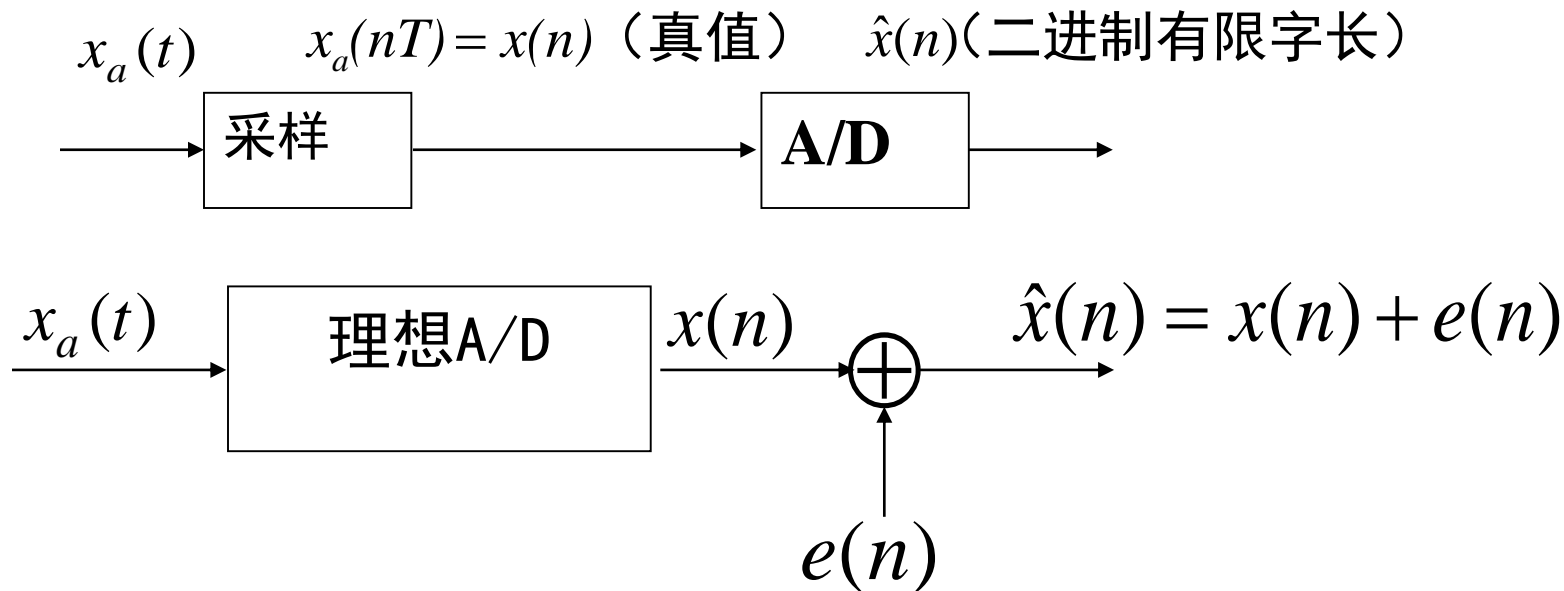
与上述类似可推出：

以上分析是基于原码表示的二进制数，在书上还给出了补码和反码表示的截断误差范围和舍入误差范围分析。

# A/D变换的量化效应

ADC完成模拟信号的数字化，这同样存在量化效应。

A/D可用截尾或舍入方式转换，可将上述量化误差考虑成为“量化噪声”  $e(n)$  。



# 量化噪声的统计分析

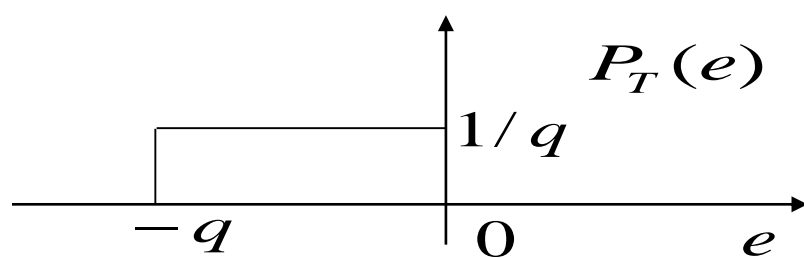
- 假定：
- (1)  $e(n)$  平稳随机过程
  - (2)  $e(n)$  与  $x(n)$  不相关
  - (3)  $e(n)$  为白噪声 (  $e(n)$  自身两两不相关 )
  - (4)  $e(n)$  等概率分布

利用  $e(n)$  的概率分布，计算出  $e(n)$  的统计特性

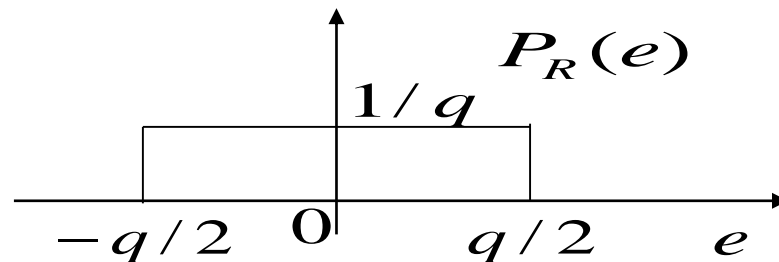
均值：  $m_e = E[(e(n))] = \int_{-\infty}^{\infty} e P(e) de$

方差：  $\sigma_e^2 = E[(e(n) - m_e)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (e - m_e)^2 P(e) de$

ADC的量化噪声分析也可以分为截尾分布和舍入分布两种情况。



(截尾分布)



(舍入分布)

1. 截尾:  $m_e = -q/2$  (直流误差, 一般不用该量化、转换公式的原因)  
 $\sigma_e^2 = q^2/12$  (噪声功率)

2. 舍入:  $m_e = 0$      $\sigma_e^2 = q^2/12$      $q = \Delta = 2^{-b}$

物理意义: A/D字长  $b \uparrow$  则  $\sigma_e^2 \downarrow$ , 噪声下降, 性能提高。

$$\frac{S}{N} = 10 \lg \frac{\sigma_x^2}{\sigma_o^2} = 6.02b + 10.79 + 10 \lg \sigma_x^2$$