第五章
数字滤波器的基本概念及一些特殊滤波器

王柯俨
kywang@mail.xidian.edu.cn
http://web.xidian.edu.cn/kywang/teach.html

5.1 数字滤波器的基本概念（1）

- 数字滤波器：
  - 输入与输出均为数字信号
  - 通过一定数值运算
  - 改变输入信号所含频率成分的相对比例
  - 或者滤除某些频率成分
  - 或者进行信号检测与参数估计
  - 与模拟滤波的不同：信号的形式，滤波的方法
- 数字滤波器的实现方法：
  - 计算机软件
  - 专用数字信号处理芯片
  - 硬件（加法器、乘法器、延迟器）组合

5.1 数字滤波器的基本概念（2）

- 数字滤波器的可实现性
  - 因果稳定，系统传输函数的极点都在单位圆内
  - 实数乘法，系统函数的系数为实数，即零极点须共轭成对出现，或者是实数

- 滤波器的种类 —— 根据理论基础分
  - 经典滤波器（一般滤波器）：由线性系统构成
    - 信号和干扰的频带互不重叠时采用
  - 现代滤波器：以随机信号处理理论为基础
    - 例如：维纳滤波器、卡尔曼滤波器、自适应滤波器等
    - 信号和干扰的频带相互重叠时采用

5.1 数字滤波器的基本概念（3）

- 经典滤波器
  - 功能划分：高通、低通、带通、带阻
  - 实现方法：
    - 无限脉冲响应数字滤波器— IIR，其h(n)为无限长，网络中有反馈回路，系统函数为

$$H(z)=\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}=\frac{N(z)}{D(z)}$$

    - 有限脉冲响应数字滤波器— FIR

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

- 特殊滤波器：
  - 理想滤波器、一阶滤波器、二阶滤波器、数字谐振器、数字陷波器、全通滤波器、最小相位滤波器、梳状滤波器、正弦波发生器。

5.2理想数字滤波器

- 系统的无失真传输条件
  - 若信号f(t)通过某系统后，响应为y(t)=Kf(t-td)，则称该系统为无失真传输系统。

$$f(t) \longrightarrow \boxed{h(t)=?} \longrightarrow y(t)=kf(t-t_d)$$

$$y(t)=kf(t-t_d)=f(t)*h(t)$$

$$\therefore \quad h(t)=k\delta(t-t_d) \qquad\qquad \therefore \quad H(j\Omega)=ke^{-j\Omega t_d}$$

输出 $Y(j\Omega)=|Y(j\Omega)|e^{j\phi_Y(\Omega)}=k|F(j\Omega)|e^{j\phi_f(\Omega)}e^{-j\Omega t_d}$

幅频特性：$|Y(j\Omega)|=k|F(j\Omega)|$

相频特性：$\phi_y(\Omega)=\phi_f(\Omega)-\Omega t_d$

理想模拟滤波器

5.2.1理想数字滤波器的特点及分类

- 特点：
  - 在滤波器的通带内，幅度为常数，在阻带中幅度为零
  - 具有线性相位；
  - 单位脉冲响应为非因果无限长序列
- 理想带通滤波器
  - 频率响应

$$H(e^{j\omega})=\begin{cases} Ce^{-j\omega n_0} & 0<\omega_1<|\omega|<\omega_2<\pi \\ 0 & 其他\omega \end{cases}$$

  - 幅频特性 $\left|H(e^{j\omega})\right|=C$ 相频特性 $\varphi(\omega)=-\omega n_0$
  - 群时延 $\tau_g(\omega)=-\dfrac{d\varphi(\omega)}{d\omega}=n_0$ 输入信号所有频率分量的时间延迟相同
  - 输出信号的频率响应

$$Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \quad \omega_1<\omega<\omega_2$$

  - 输出信号

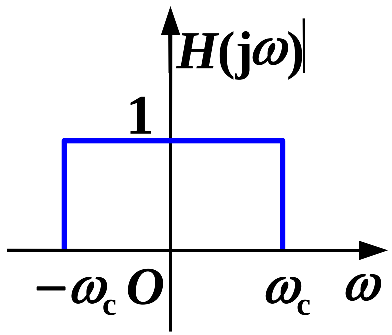
$$y(n)=Cx(n-n_0)$$

理想低通滤波器(1)

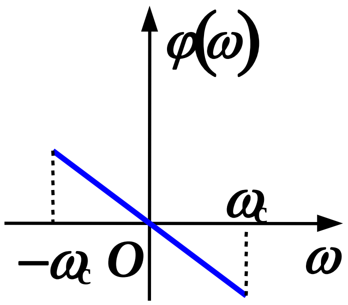
- 频率响应

$$H(e^{j\omega})=\begin{cases} e^{-j\omega n_0} & |\omega|\le\omega_c \\ 0 & \omega_c<|\omega|\le\pi \end{cases}$$

- 幅频特性



相频特性



- ω_c 为截止频率，称为理想低通滤波器的通频带，简称频带。
- $|\omega|\le\omega_c$ 的低频段内，传输信号无失真
- 滤波器的单位脉冲响应

$$h(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H(e^{j\omega})d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega c}^{\omega c}e^{-j\omega n_0}e^{j\omega n}d\omega$$

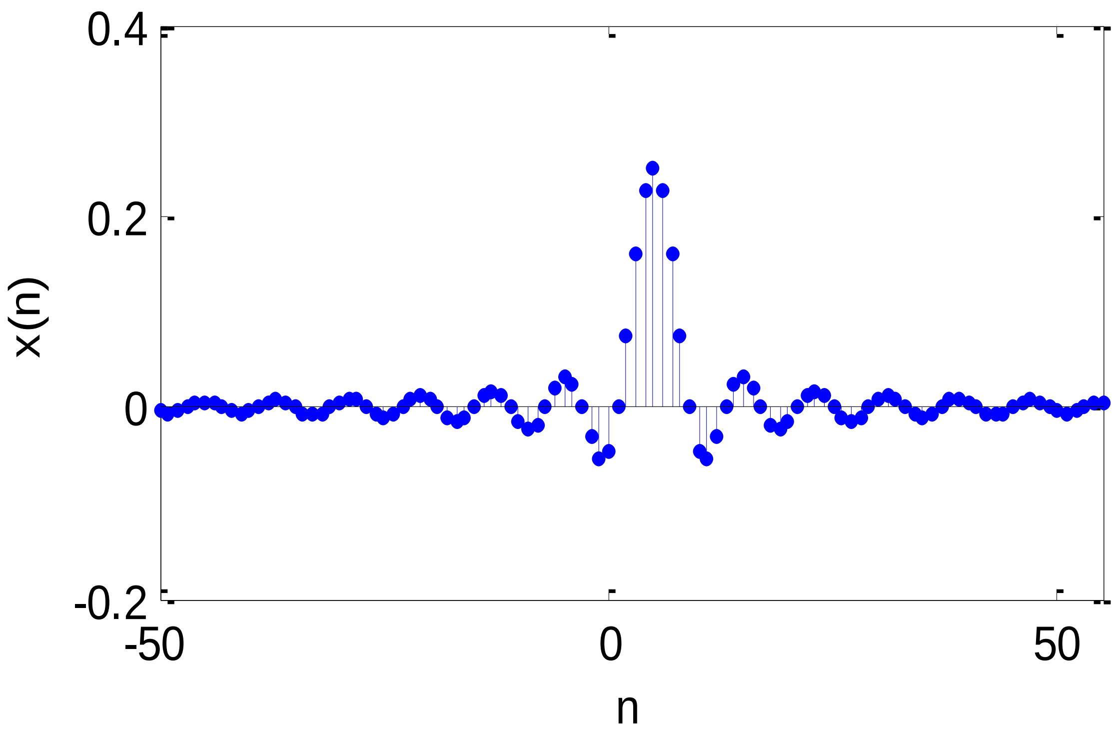
$$=\frac{\sin(\omega c(n-n_0))}{\pi(n-n_0)}=\frac{\omega c}{\pi}Sa[\omega c(n-n_0)]$$

理想低通滤波器(2)

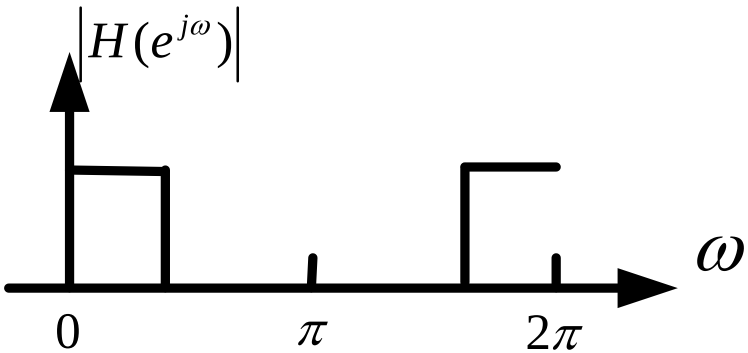
$$h(n)=\frac{\sin(\omega_c(n-n_0))}{\pi(n-n_0)}=\frac{\omega_c}{\pi}Sa[\omega_c(n-n_0)]$$

单位脉冲响应h(n)

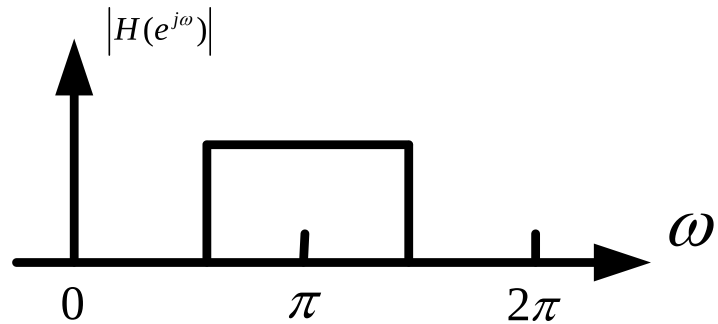
是无限长的非因果序列



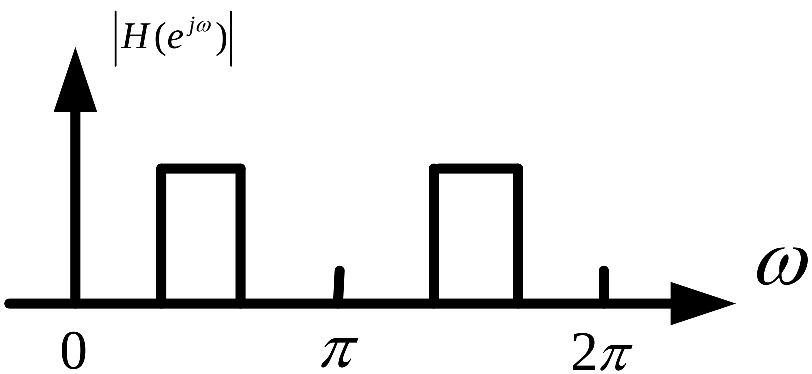
理想滤波器



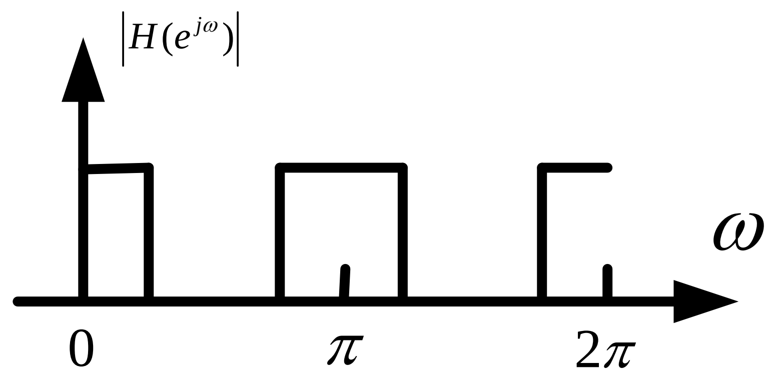
低通



高通



带通



带阻

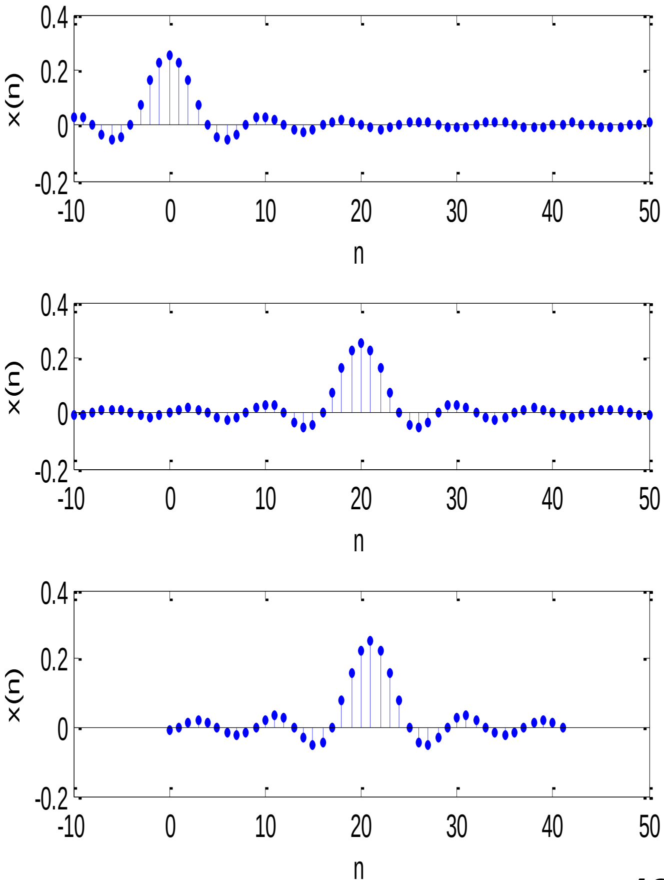
理想滤波器的可实现性

- 理想滤波器是个物理不可实现的非因果系统
  - 原因：从**h(n)**看，**n<0**时已有值。
- 近似实现
  - 序列右移
  - 加时域窗，实际的滤波器长度为**N**

$$h_N(n) = h(n) R_N(n)$$

$$H_N(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} H(e^{j\omega}) * R_N(e^{j\omega})$$

  - 截断效应
    - 通带幅度不再是常数，产生波动
    - 频谱泄漏，阻带幅度不再是零
    - 产生过渡带



5.6全通滤波器：

- **特征：**
  - 滤波器的幅频特性在整个频带上均等于常数，或为1；
  - 信号通过全通滤波器后，幅度谱保持不变，仅相位谱随着频率改变，起到纯相位滤波的作用。
- **传输函数**

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = 1, \quad 0 \le \omega \le 2\pi$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\varphi(\omega)}$$

- **系统函数的一般形式：**

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-N+k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{z^{-N} + a_1 z^{-N+1} + a_2 z^{-N+2} + \cdots + a_N}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N}}, a_0 = 1$$

- 或者二阶滤波器形式

$$H(z)=\prod_{i=1}^{L}\frac{z^{-2}+a_{1i}z^{-1}+a_{2i}}{a_{2i}z^{-2}+a_{1i}z^{-1}+1}$$

- 系数均为实数，且分子、分母的系数相同，但排列次序相反
- 下面证明其具有全通幅频特性：

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{N}a_k z^{-N+k}}{\sum_{k=0}^{N}a_k z^{-k}}=z^{-N}\frac{\sum_{k=0}^{N}a_k z^{k}}{\sum_{k=0}^{N}a_k z^{-k}}=z^{-N}\frac{D(z^{-1})}{D(z)}$$

$$D(z^{-1})\Big|_{z=e^{j\omega}}=D(e^{-j\omega})=D^*(e^{j\omega})$$

$$\therefore\left|H(e^{j\omega})\right|=\left|e^{-j\omega N}\frac{D(e^{-j\omega})}{D(e^{j\omega})}\right|=\left|\frac{D^*(e^{j\omega})}{D(e^{j\omega})}\right|=1$$

全通系统 的零极点分布规律(2)

$$H(z)=z^{-N}\frac{D(z^{-1})}{D(z)}$$

- 零极点分布特性：极点和零点互为倒易关系

$$H(z_k)=z_k^{-N}\frac{D(z_k^{-1})}{D(z_k)}$$

$$H(z_k^{-1})=z_k^{N}\frac{D(z_k)}{D(z_k^{-1})}=\frac{1}{H(z_k)}$$

- 如 z_k 为零点，则 $p_k=z_k^{-1}$ 为极点
- 因零极点共轭成对出现，如 z_k 为零点， z_k^* 为零点；
  且 $p_k=z_k^{-1}, p_k^*=\left(z_k^{-1}\right)^*$ 为极点
- 系统函数可表示为

$$\boxed{H(z)=\prod_{k=1}^{N}\frac{z^{-1}-z_k}{1-z_k^* z^{-1}}}$$

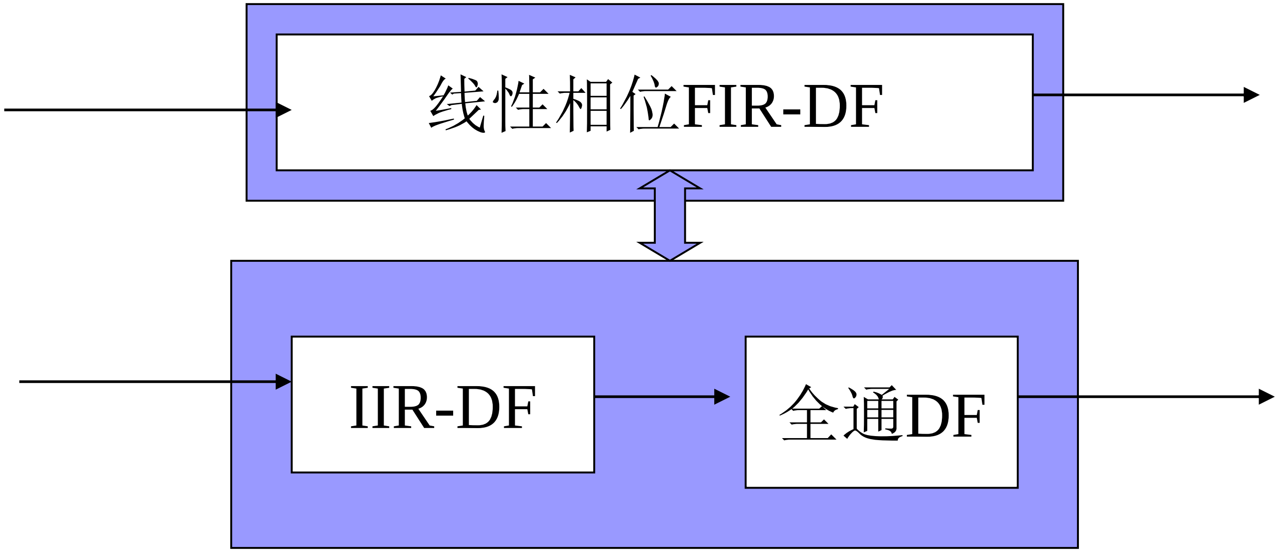
零极点互为共轭倒易关系

全通系统 的零极点分布规律(3)

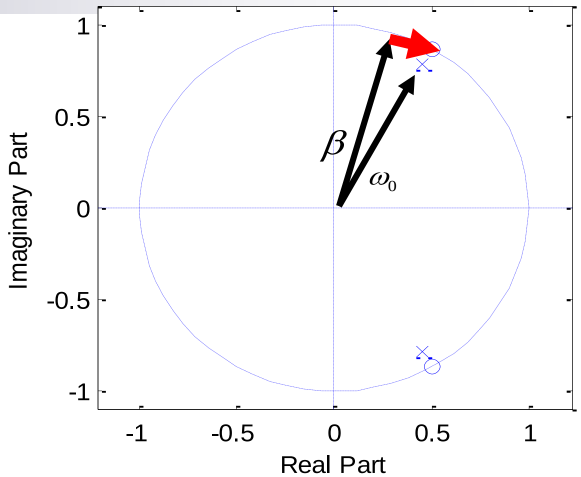
$$H(z)=\prod_{k=1}^{N}\frac{z^{-1}-z_k}{1-z_k^* z^{-1}}$$

- **N**：全通函数的阶数。**N**为**1**时，零极点均为实数。
- $\omega=0\to\pi$ 变化时，相位函数 $\varphi(\omega)$ 的变化量为 $N\pi$ 。
- 不同的**N**和 z_k 对应 各类不同的变换。

全通DF的作用：经常用于**相位均衡**。



5.7最小相位滤波器



- 相位与零极点：

$$H(e^{j\omega}) = Ae^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{k=1}^{M}(e^{j\omega} - z_k)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j\omega} - p_k)}$$

则

$$\varphi(\omega) = \sum_{k=1}^{M} \arg[e^{j\omega} - z_k] - \sum_{k=1}^{N} \arg[e^{j\omega} - p_k] + (N - M)\omega$$

＝零点矢量辐角之和－极点矢量辐角之和＋ $(N-M)\omega$

- 当某一零点（极点）位于单位圆内，当 ω 从 0 变到 2π 时，即在z平面单位圆上正向（逆时针）旋转一周时，零矢（或极矢）变化为 2π 弧度。

- 当某一零点（极点）位于单位圆外，当 ω 从 0 变到 2π 时，即在z平面单位圆上正向（逆时针）旋转一周时，零矢（或极矢）变化为0。

- 所以当 ω 从0变化到 2π 时，只有单位圆内的零极点对相角有影响。若用 Num_{m_1}, Num_{m_0} 表示单位圆内与单位圆外的零点数，以 Num_{p_1}, Num_{p_0} 分别表示单位圆内与单位圆外的极点数，

- 则 $M = Num_{m_1} + Num_{m_0}$ $N = Num_{p_1} + Num_{p_0}$

因果稳定系统 $\varphi(\omega)=\sum_{k=1}^{M}\arg[e^{j\omega}-z_k]-\sum_{k=1}^{N}\arg[e^{j\omega}-p_k]+(N-M)\omega$

$$M=Num_{m_1}+Num_{m_0}\quad , \quad Num_{p_0}=0, \quad N=Num_{p_1}$$

当 ω 从0变到 2π 时，即 $\Delta\omega=2\pi$

$$\Delta\varphi(\omega)\big|_{\Delta\omega=2\pi}=2\pi(Num_{m_1}-Num_{p_1})+2\pi[N-M]$$
$$=2\pi(Num_{m_1}-N)+2\pi[N-M]=2\pi[Num_{m_1}-M]=-2\pi Num_{m_0}$$

当 ω 由0而增加时，辐角变化为负，故称之为相位“延时”（滞后）系统。又可分为以下三种情况。

1）当全部零点都在单位圆内，则

$$\Delta\varphi(\omega)\big|_{\Delta\omega=2\pi}=0$$

此时相位变化最小，称之为最小相位系统。

2）当全部零点都在单位圆外，则

$$\Delta\varphi(\omega)\Big|_{\Delta\omega=2\pi}=-2\pi M$$

此时相位变化最大，称之为最大相位系统。

3）单位圆内外都有零点，则称之为“混合相位系统”。

最小相位系统在工程理论中较为重要，其主要特点有：

（1）任何一个非最小相位系统的系统函数H(z)均可以由一个最小相位系统 $H_{\min}(z)$ 和一个全通系统 $H_{ap}(z)$ 级联而成，即

$$H(z)=H_{\min}(z)\cdot H_{ap}(z)$$

证明：假设因果稳定系统H(z)仅有一个零点在单位圆外，设该零点为 z = $1/z_0, |z_0|<1$

$$H(z)=H_1(z)(z^{-1}-z_0) \quad =H_1(z)(z^{-1}-z_0)\frac{1-z_0^*z^{-1}}{1-z_0^*z^{-1}}$$

$$=H_1(z)(1-z_0^*z^{-1})\bullet\frac{z^{-1}-z_0}{1-z_0^*z^{-1}}$$

$$=H_{\min}(z)\bullet H_{ap}(z)$$

显然， $\left|H(e^{j\omega})\right| = \left|H_{\min}(e^{j\omega})\right|$

意义：将系统位于单位圆外的零（极）点 z_k 用 $\left(z_k^*\right)^{-1}$ 代替时，不会影响系统的幅频响应特性。这一点在滤波器设计中，将单位圆外的极点用其镜像代替，确保DF因果稳定。

作用：利用级联全通函数的方法，可将非最小相位系统的零点反射到单位圆内，而构成幅度响应相同的最小相位延时系统。

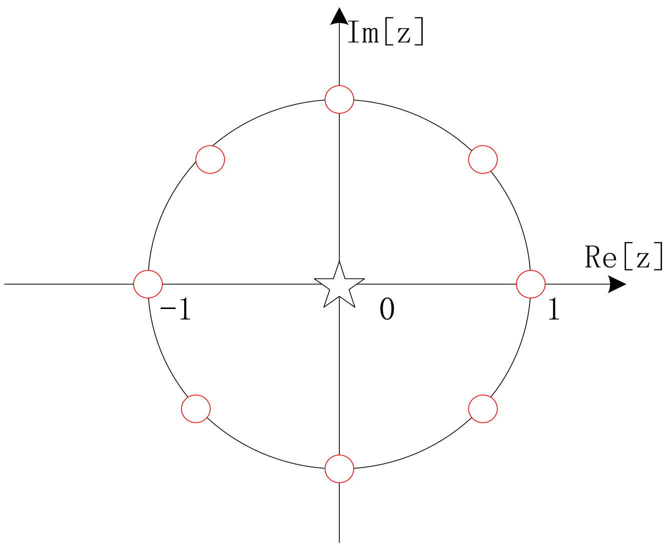
（2）在幅频响应特性相同的所有因果稳定系统中，最小相位系统的相位延迟（负的相位值）最小。

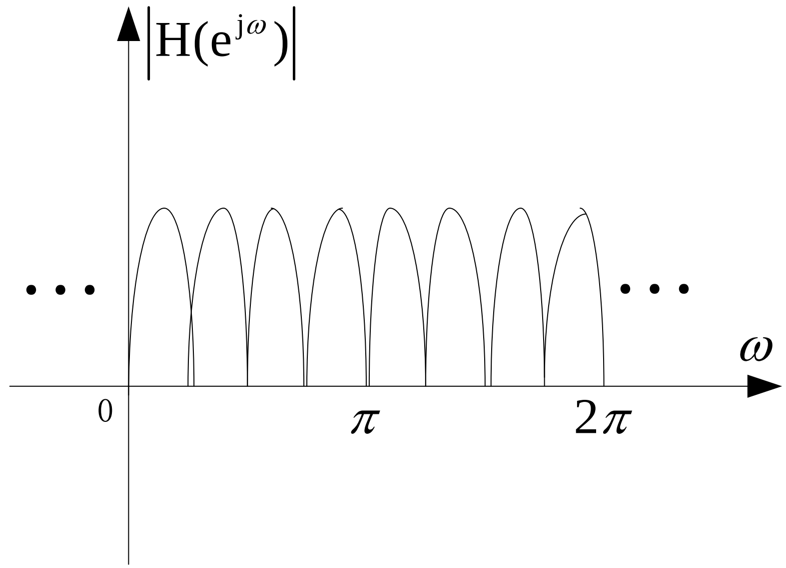
（3）最小相位系统保证其逆系统存在。

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}, \quad H^{-1}(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

5.8 梳状滤波器

- 特点





- 构成

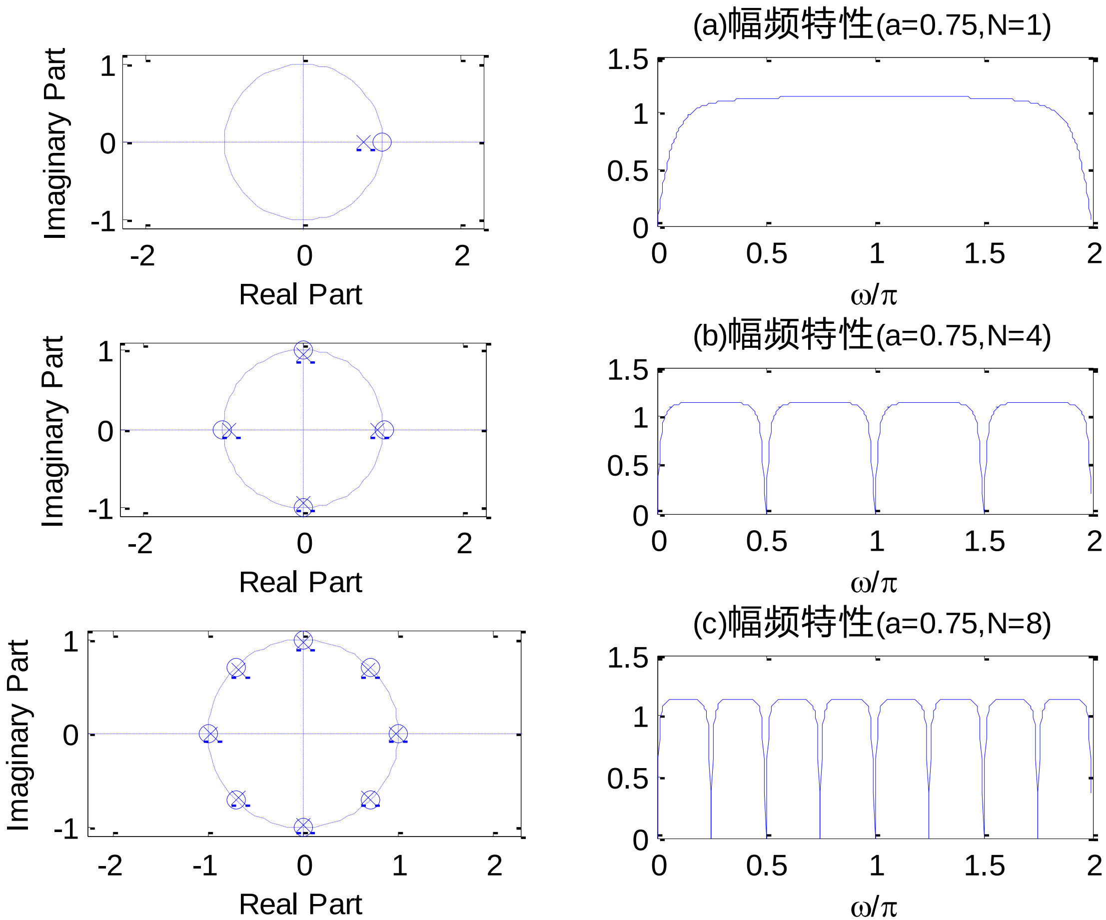
$$H(z) \qquad z \Rightarrow z^N \qquad H(z^N)$$

$$H(e^{j\omega}) \qquad e^{j\omega} \Rightarrow e^{j\omega N} \qquad H(e^{j\omega N})$$

$$0 \sim 2\pi \qquad\qquad 0 \sim 2\pi / N$$

- **例5.8.1：已知** $H(z)=\dfrac{1-z^{-1}}{1-az^{-1}}$ $0<a<1$ **，设计N=8的梳状滤波器**

- **解：** $$H(z^N)=\frac{1-z^{-N}}{1-az^{N}}=\frac{z^N-1}{z^N-a} \qquad N=8,\ \ a=0.75$$

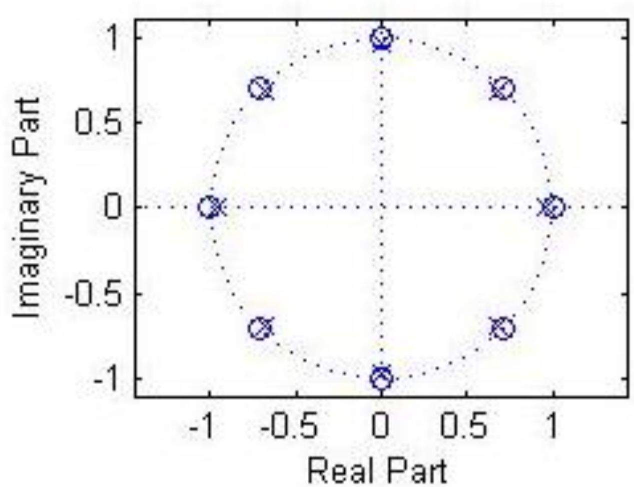


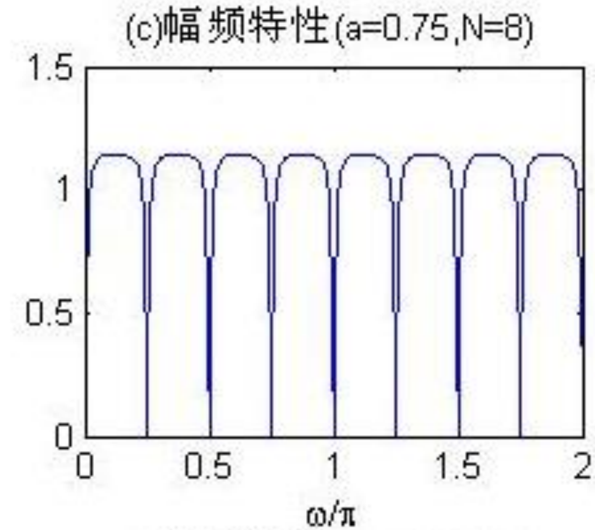
- 比较区别？

过渡带比较窄，
消除点频信号而不损伤其他信号

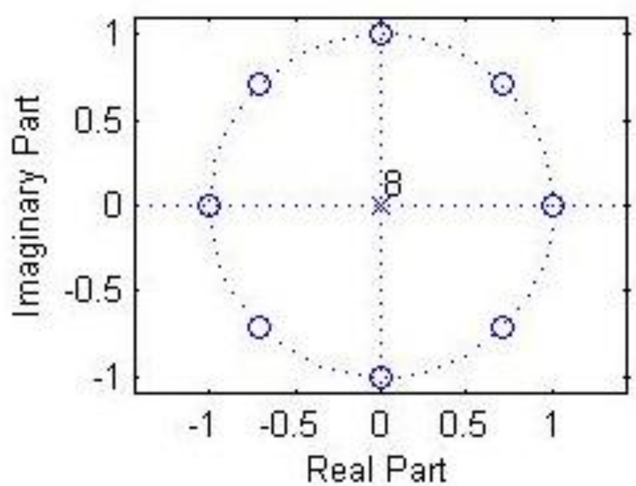
$$H_1(z)=\frac{1-z^{-N}}{1-az^{-N}}=\frac{z^N-1}{z^N-a}$$

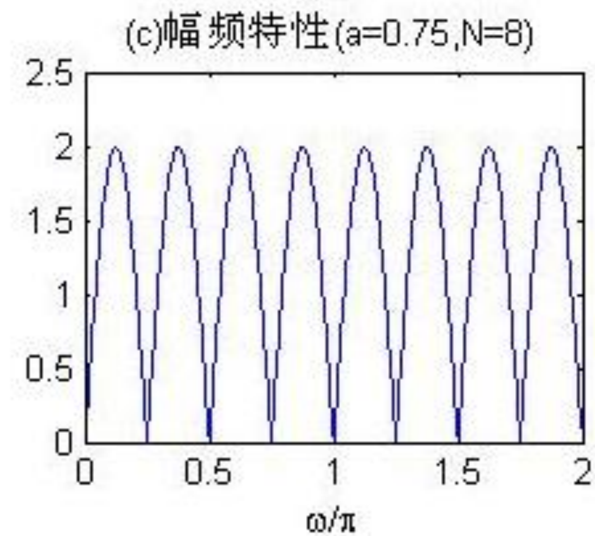
$$(a=0.75)$$





$$H_2(z)=1-z^{-N}$$





- **例5.8.2 设计梳状滤波器，滤除心电图信号中的50Hz及其谐波100Hz干扰，采样频率为200Hz。**
- **解：**

1）梳状滤波器

$$H(z)=\frac{1-z^{-N}}{1-az^{-N}} \quad a=?,N=?$$

2）N=?

50Hz对应的数字频率

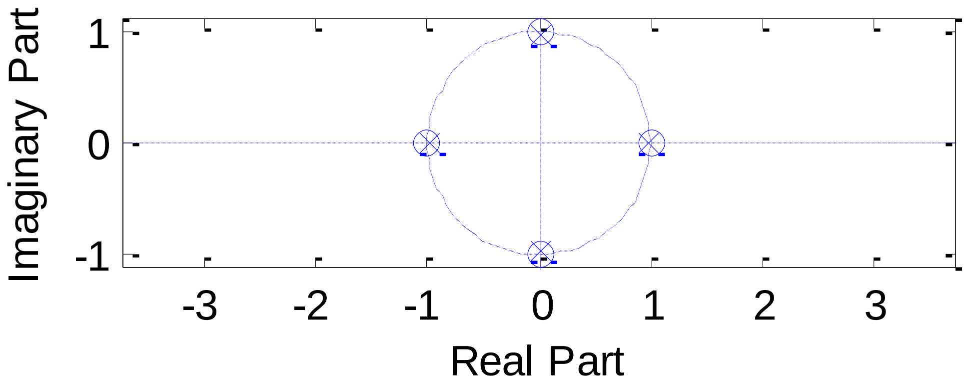
$$\frac{f}{\frac{1}{T}}=\frac{\omega}{2\pi}\Rightarrow\omega=2\pi f/f_s=2\pi\times50/200=0.5\pi$$

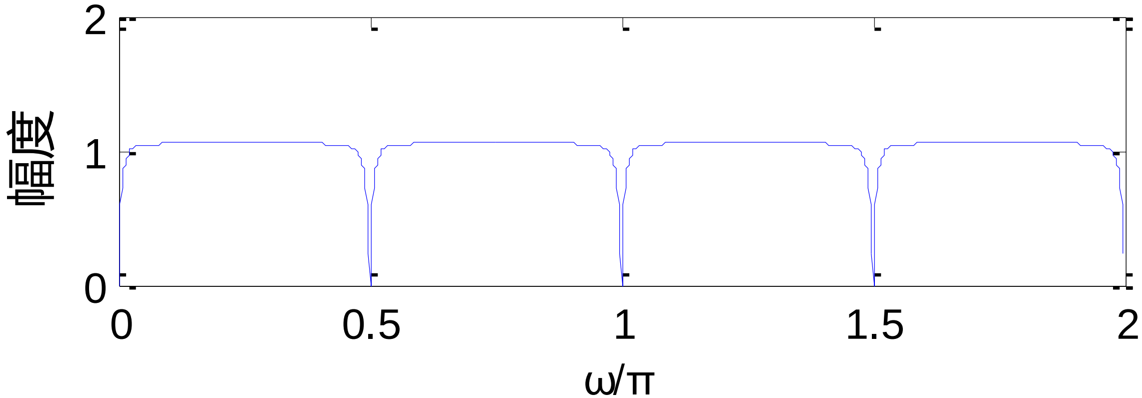
100Hz对应的数字频率

$$\omega=2\pi f/f_s=100/200\times2\pi=\pi$$

$$\frac{2\pi}{N}=0.5\pi \quad\Rightarrow\quad N=4$$

3)a=?　　　零极点位置靠近，于是 a=0.9





总结

- 理想滤波器
- 典型滤波器的特征与设计
  - 一阶滤波器、二阶滤波器、
  - 数字谐振器、
  - 数字陷波器、
  - 全通滤波器、
  - 最小相位滤波器、
  - 梳状滤波器、
  - 正弦波发生器。