



第6章 无限长单位脉冲 响应（IIR）滤波器设计

王柯俨

kywang@mail.xidian.edu.cn

<http://web.xidian.edu.cn/kywang/teach.html>

数字滤波器的分类

■ 经典滤波器（一般滤波器）：

- 信号和干扰的频带互不重叠时采用

■ 现代滤波器:

- 信号和干扰的频带相互重叠时采用（例如：维纳滤波器、卡尔曼滤波器、自适应滤波器等）

■ 功能

- ## □ 高通、低通、帶通、帶阻

■ 结构

- ## □ 递归系统 IIR

- 非递归系统 **FIR**

IIR数字滤波器的设计方法

■ 直接设计法

- 在时域或频域直接设计数字滤波器

■ 间接设计法

- 根据指标要求设计模拟滤波器
- 将模拟滤波器转换为数字滤波器

■ 为什么采用间接设计法？

- 模拟滤波器的理论和设计方法已发展得相当成熟，且有若干典型的模拟滤波器供选择。
- 这些滤波器都有严格的设计公式、现成的曲线和图表供设计人员使用。

6.1 模拟滤波器设计

■ 模拟滤波器的设计步骤

- 确定设计指标
- 选择滤波器的类型
- 计算滤波器的阶数
- 查表或计算滤波器的参数，确定系统函数
- 综合实现及装配调试

■ 设计模拟低通 → 低通到高通、带通、带阻的频率变换

■ 模拟滤波器的传输函数

$$H(j\Omega) = |H(j\Omega)| e^{j\varphi(\Omega)}$$

- **选频滤波器**：一般只考虑幅频特性，对相频特性不作要求。
- 幅频特性体现了各频率成分幅度的衰减，而相频特性体现的是不同成分在时间上的延时。
- 对输出波形有要求时，则需考虑线性相位问题。

6.1.1 模拟滤波器的设计指标

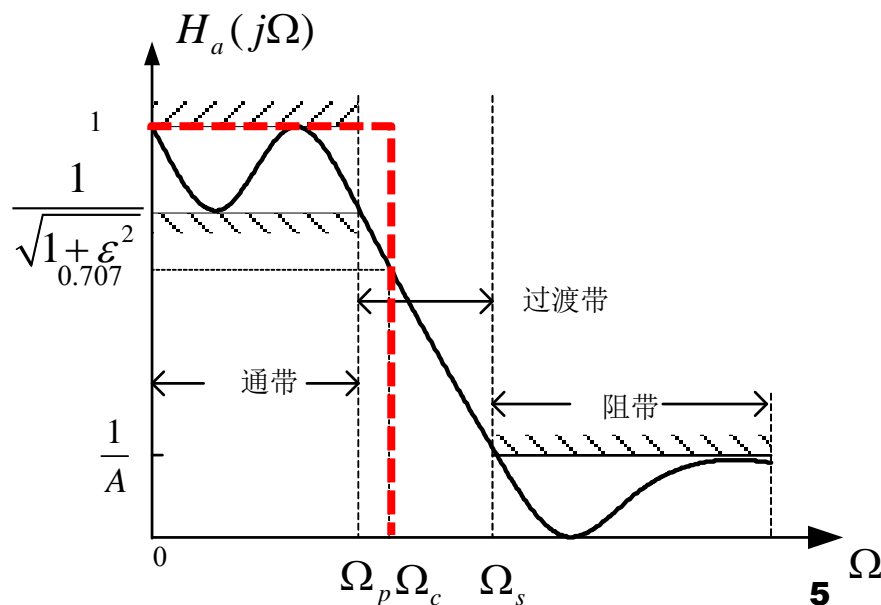
- Ω_p - 通带边界频率, Ω_s - 阻带边界频率, Ω_c - 3db截止频率
- 系统通带和阻带的误差要求

□ 通带常数特性要求 $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \leq |H_a(j\Omega)| \leq 1, \quad |\Omega| \leq \Omega_p$

□ 通带最大衰减, 或通带峰值波纹, 或通带波纹幅度, 用分贝表示

$$\alpha_p = -20 \lg \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \\ = 10 \lg(1+\varepsilon^2) \quad dB$$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{\alpha_p/10} - 1}$$



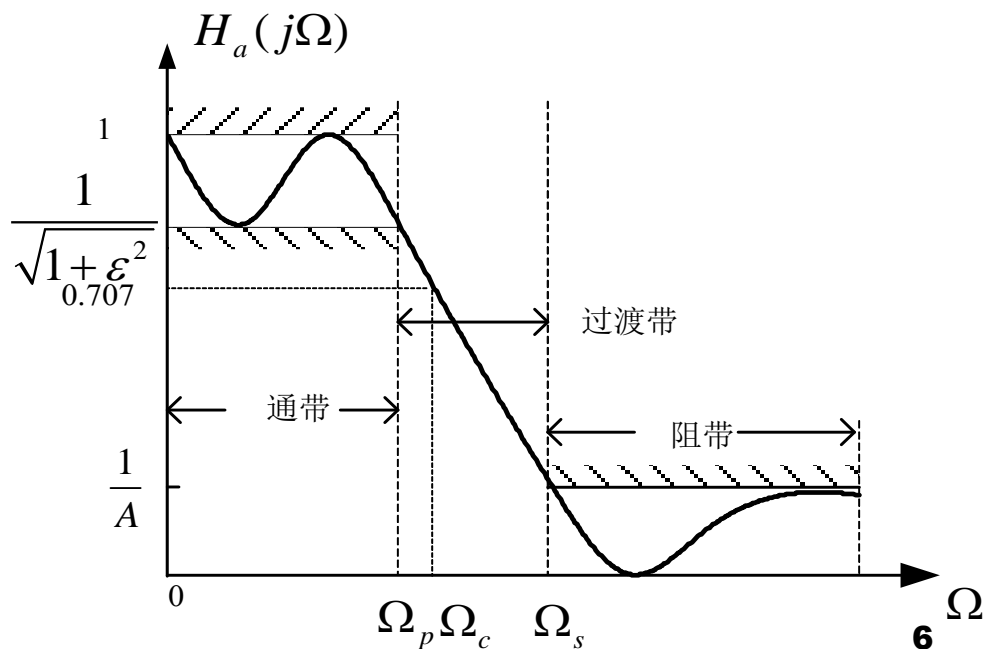
□ 阻带常数特性要求

$$|H_a(j\Omega)| \leq \frac{1}{A} \quad |\Omega| \geq \Omega_s$$

□ 阻带最小衰减，或阻带峰值波纹，或阻带波纹幅度，用分贝表示

$$\alpha_s = -20\lg\left(\frac{1}{A}\right) = 20\lg A \quad dB$$

$$A = 10^{\alpha_s/20}$$



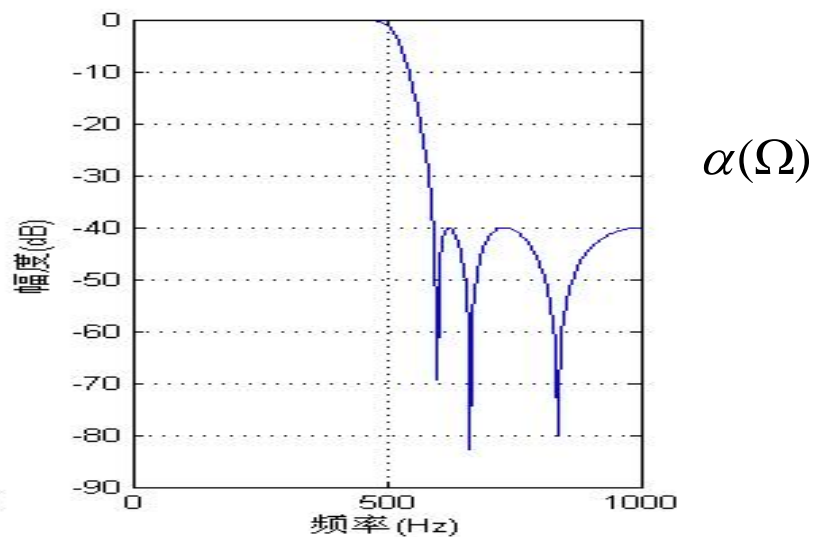
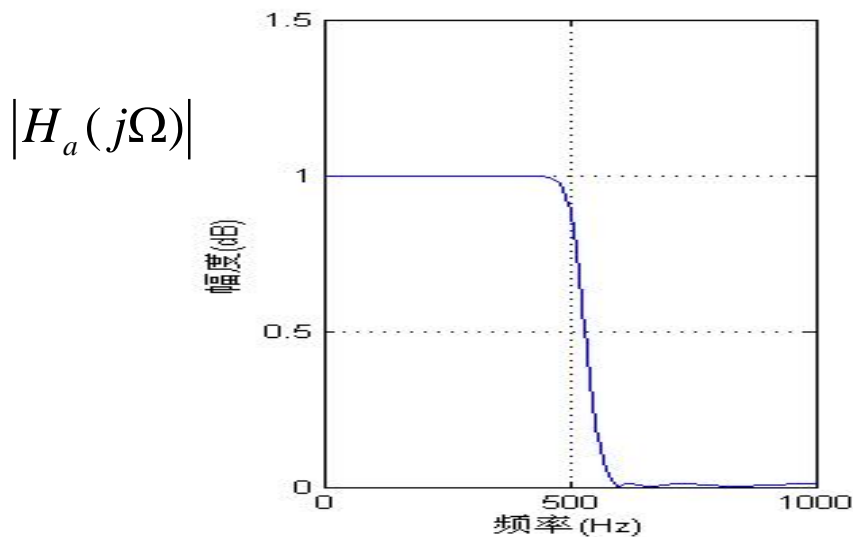
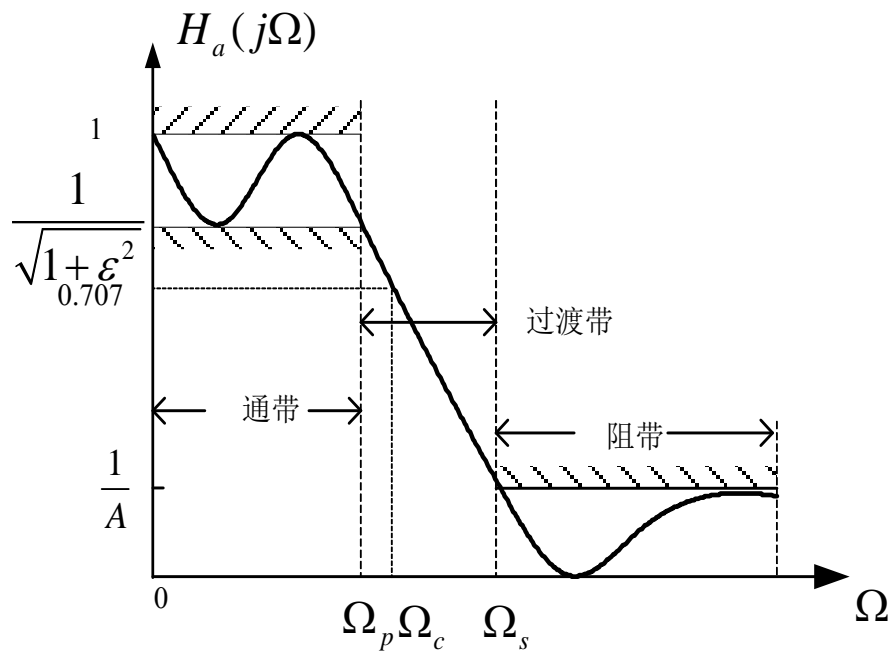
- 损耗函数：描述幅频响应特性

$$\alpha(\Omega) = -20\lg |H_a(j\Omega)|$$

$$= -10\lg |H_a(j\Omega)|^2$$

- 3dB截止频率

$$\alpha(\Omega_c) = 3 \text{ dB}$$



两个附加参数

■ 过渡比或选择性参数

$$k = \frac{\Omega_p}{\Omega_s}$$

□ 反映过渡带的性能，过渡带越窄，**k**值趋近于1

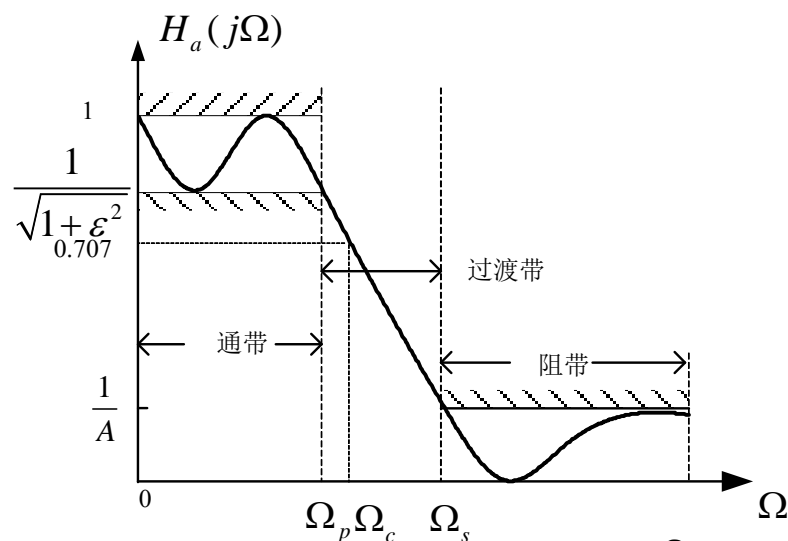
□ 低通滤波器 $k < 1$

■ 偏离参数

$$k_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2 - 1}}$$

□ ε 越小， A 越大， k_1 越小，
通带、阻带的纹波越小

□ 表示通带和阻带偏离所逼近常数的
精度



6.1.1 模拟滤波器设计指标

- 低通滤波器的技术指标:

$$\Omega_p \quad \alpha_p \quad \Omega_s \quad \alpha_s$$

- 滤波器技术指标的特点:

通带内衰减小于常数 α_p ，阻带内衰减大于常数 α_s ，但对通带和阻带频响曲线的形状没有具体要求。（片段常数特性要求）

■ 典型的模拟滤波器类型

- 巴特沃斯 (**Butterworth**) 滤波器: 具有单调下降的幅频特性;
- 切比雪夫 (**Chebyshev**) 滤波器: 幅频特性在通带或阻带有波动, 可提高选择性; 大约 $3/4$ 通带接近线性相位;
- 贝塞尔 (**Bessel**) 滤波器: 通带内较好的线性相位;
- 椭圆 (**Ellipse**) 滤波器: 较好的线性相位, 大约 $1/2$ 通带接近线性相位。

6.1.2 巴特沃斯（Butterworth）模拟低通滤波器设计

■ 巴特沃斯低通滤波器

□ **N**阶巴特沃斯低通滤波器的幅度平方函数为：

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

□ **N**为滤波器的阶次， Ω_c 为**3dB**截频。

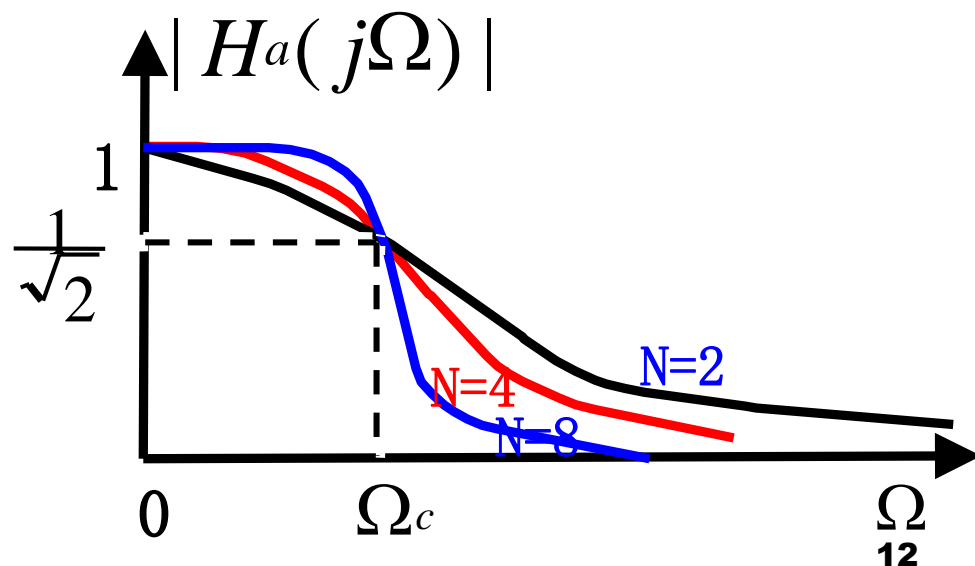
巴特沃斯低通滤波器特点:

- 在 $\Omega=0$ 点, $|H_a(j\Omega)|^2$ 的 $n(n<2N)$ 阶导数等于零, 因此滤波器在 $\Omega=0$ 点具有最大平坦幅度
- 滤波器幅频响应随 Ω 的增大而单调下降, 因为幅度平方函数的导数小于零

■ 损耗函数

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

$$\begin{aligned}\alpha(\Omega) &= -20\lg |H_a(j\Omega)| \\ &= 10\lg \left(\frac{1}{|H_a(j\Omega)|^2} \right) \\ &= 10\lg \left(1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N} \right)\end{aligned}$$



$$\alpha(\Omega) = 10 \lg \left(1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c} \right)^{2N} \right)$$

$$\alpha(\Omega_c) = 10 \lg \left(1 + \left(\frac{\Omega_c}{\Omega_c} \right)^{2N} \right) = 10 \lg 2 \approx 3 \text{ dB}$$

■ 滤波器的特性完全由**3dB**截止频率 Ω_c 和阶数**N**确定

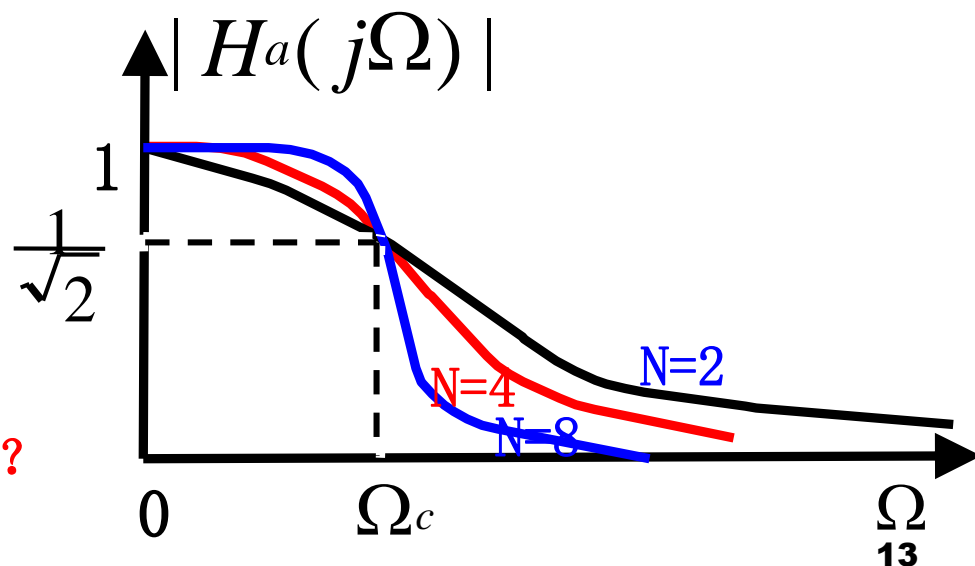
■ 滤波器的给定指标为

- 通带边界频率 Ω_p
- 阻带边界频率 Ω_s
- 通带最小幅度 $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$
- 阻带最大波纹 $\frac{1}{A}$

■ **3dB**截止频率与阶数如何确定？

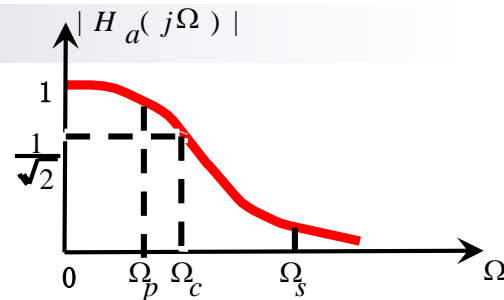
Ω_c

N



3dB截止频率与阶数如何确定？

- 滤波器幅频响应随频率的增大而单调下降



$$|H_a(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega_p / \Omega_c)^{2N}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}$$

$$|H_a(j\Omega_s)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega_s / \Omega_c)^{2N}} = \frac{1}{A^2}$$

$$\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_s}\right)^N = \frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2 - 1}} \quad \Rightarrow \quad N = \frac{\lg\left(\varepsilon / \sqrt{A^2 - 1}\right)}{\lg(\Omega_p / \Omega_s)} = \frac{\lg k_1}{\lg k}$$

- 于是：

$$N \geq \left\lceil \frac{\lg k_1}{\lg k} \right\rceil$$

$$\Omega_c = \frac{\Omega_p}{\varepsilon^{1/N}}$$

- 满足通带指标，阻带指标有富裕

$$\Omega_c = \frac{\Omega_s}{(A^2 - 1)^{1/2N}}$$

- 满足阻带指标，通带指标有富裕

< 总结 >

■ 滤波器的给定指标为

□ 通带、阻带边界频率 Ω_p Ω_s

□ 通带最大衰减 $\alpha_p = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$

□ 阻带最小衰减 $\alpha_s = -20 \lg\left(\frac{1}{A}\right) = 20 \lg A \quad dB$

■ 先求 $\varepsilon = \sqrt{10^{\alpha_p/10} - 1}$ $A = 10^{\alpha_s/20}$

■ 确定阶数与截止频率

$$N = \frac{\lg\left(\varepsilon / \sqrt{A^2 - 1}\right)}{\lg\left(\Omega_p / \Omega_s\right)} = \frac{\lg k_1}{\lg k}$$

$$\Omega_c = \frac{\Omega_p}{\varepsilon^{1/N}}$$

$$\Omega_c = \frac{\Omega_s}{(A^2 - 1)^{1/2N}}$$

巴特沃斯低通滤波器的系统函数

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

- 将幅度平方函数转换成s域函数，（令 $s = j\Omega$ 代入）有

$$H_a(s)H_a(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}}$$

- 令分母为零，得极点

$$S_k = (-1)^{\frac{1}{2N}} (j\Omega_c) = \Omega_c e^{j\pi(\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2N})}$$

式中， $k=0, 1, 2, \dots, (2N-1)$

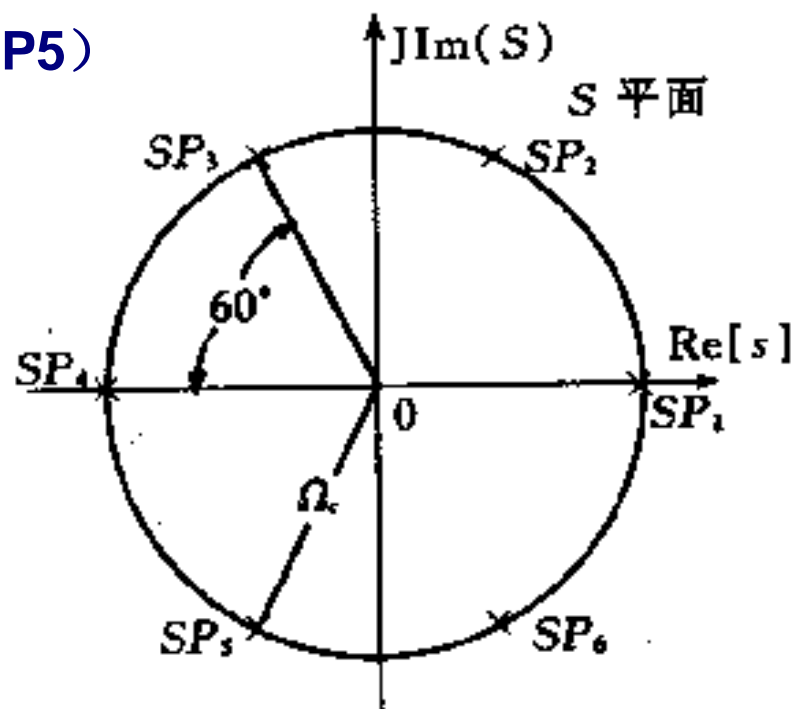
- 可见，**Butter worth**滤波器的振幅平方函数有**2N**个极点，它们均匀对称地分布在 $|S|=\Omega_c$ 的圆周上。
- 例：**N=3**阶**BF**振幅平方函数的极点分布，如下图：

- 考虑到系统的稳定性，系统函数是由**S**平面左半部分的极点（**SP3, SP4, SP5**）组成的，它们分别为：

$$S_{p3} = \Omega_c e^{j\frac{2}{3}\pi},$$

$$S_{p4} = -\Omega_c,$$

$$S_{p5} = \Omega_c e^{-j\frac{2}{3}\pi}$$



- 系统函数为：
$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^3}{(S - S_{p3})(S - S_{p4})(S - S_{p5})}$$

或
$$H_a(s) = \frac{1}{(s / \Omega_c)^3 + 2(s / \Omega_c)^2 + 2(s / \Omega_c) + 1}$$

- 令 $p = s / \Omega_c$ ，则 $p_k = s_k / \Omega_c$

- 归一化的三阶滤波器的系统函数：

$$H_a(p) = \frac{1}{(p - p_{p3})(p - p_{p4})(p - p_{p5})}$$

N阶巴特沃斯低通滤波器的系统函数

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{D_N(s)}$$

- $D_N(s)$ -- N阶巴特沃斯多项式，有三种形式：

$$D_N(s) = B_N(s) = s^N + \sum_{k=0}^{N-1} b_k s^k \quad \text{分母多项式}$$

$$D_N(s) = \prod_{k=1}^N (s - \Omega_c p_k) \quad p_k = e^{j\pi(\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2N})} \quad \text{极点位置}$$

$$D_N(s) = \prod_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} B_k(s), \quad B_k(s) = s^2 + b_{k1}s + b_{k0} \quad \text{分母因式}$$

- 归一化 ($\Omega_c = 1, p = s/\Omega_c$)
- 去归一化

$$G(p) = 1/D'_N(p)$$

$$H_a(s) = G(p) \Big|_{p=s/\Omega_c}$$

N---极点

$$D_N'(p) = \prod_{k=1}^N (p - p_k) \quad p_k = e^{j\pi(\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2N})}$$

极点位置 阶数 N	$P_{0,N-1}$	$P_{1,N-2}$	$P_{2,N-3}$	$P_{3,N-4}$	P_4
1	-1.0000				
2	-0.7071±j0.7071				
3	-0.5000±j0.8660	-1.0000			
4	-0.3827±j0.9239	-0.9239±j0.3827			
5	-0.3090±j0.9511	-0.8090±j0.5878	-1.0000		
6	-0.2588±j0.9659	-0.7071±j0.7071	-0.9659±j0.2588		
7	-0.2225±j0.9749	-0.6235±j0.7818	-0.9010±j0.4339	-1.0000	
8	0.1951±j0.9808	0.5556±j0.8315	-0.8315±j0.5556	-0.9808±j0.1951	
9	-0.1736±j0.9848	-0.5000±j0.8660	-0.7660±j0.6428	-0.9397±j0.3420	-1.0000

N---分母多项式系数 $D_N'(p) = B_N(p) = p^N + \sum_{k=0}^{N-1} b_k p^k$

分母多项式 系数阶数 N	$B(p) = p^N + b_{N-1}p^{N-1} + b_{N-2}p^{N-2} + \dots + b_1p + b_0$								
	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
1	1.0000								
2	1.0000	1.4142							
3	1.0000	2.0000	2.0000						
4	1.0000	2.6131	3.4142	2.613					
5	1.0000	3.2361	5.2361	5.2361	3.2361				
6	1.0000	3.8637	7.4641	9.1416	7.4641	3.8637			
7	1.0000	4.4940	10.0978	14.5918	14.5918	10.0978	4.4940		
8	1.0000	5.1258	13.1371	21.8462	25.6884	21.8642	13.1371	5.1258	
9	1.0000	5.7588	16.5817	31.1634	41.9864	41.9864	31.1634	16.5817	5.7588

N---分母因式

$$D_N'(p) = \prod_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} B_k(p), \quad B_k(p) = p^2 + b_{k1}p + b_{k0}$$

分母因式 阶数 N	$B(p) = B_1(p)B_2(p)B_3(p)B_4(p)B_5(p)$ $B(p)$
1	$(p+1)$
2	$(p^2+1.4142p+1)$
3	$(p^2+p+1)(p+1)$
4	$(p^2+0.7654p+1)(p^2+1.8478p+1)$
5	$(p^2+0.6180p+1)(p^2+1.6180p+1)(p+1)$
6	$(p^2+0.5176p+1)(p^2+1.4142p+1)(p^2+1.9319p+1)$
7	$(p^2+0.4450p+1)(p^2+1.2470p+1)(p^2+1.8019p+1)(p+1)$
8	$(p^2+0.3902p+1)(p^2+1.1111p+1)(p^2+1.6629p+1)(p^2+1.9616p+1)$
9	$(p^2+0.3473p+1)(p^2+p+1)(p^2+1.5321p+1)(p^2+1.8794p+1)(p+1)$

低通巴特沃斯滤波器设计步骤:

- 由 $\Omega_p, \alpha_p, \Omega_s, \alpha_s$ 求滤波器阶次 N 和 3dB 截止频率 Ω_c ;
- 由 N 查表, 求出归一化极点 p_k 和归一化系统函数 $G(p)$ (P140)

$$G(p) = 1 / D'_N(p)$$

- 令 $p = s / \Omega_c$ 代入 $G(p)$, 得实际滤波器传输函数 $H_a(s)$ 。
(去归一化)

$$H_a(s) = G(p) \Big|_{p=s/\Omega_c}$$

- 已知通带边界频率 $f_p = 1kHz$, 通带最大衰减 $\alpha_p = 1dB$, 阻带截止频率 $f_s = 5kHz$, 阻带最小衰减 $\alpha_s = 40dB$, 设计巴特沃斯低通滤波器。

- 解: 1) 确定阶次 N 和 Ω_c :

$$\varepsilon = \sqrt{10^{\alpha_p/10} - 1} = \sqrt{10^{1/10} - 1} = 0.508847 \quad A = 10^{\alpha_s/20} = 10^{40/20} = 100$$

$$k = \frac{\Omega_p}{\Omega_s} = \frac{1}{5} = 0.2 \quad k_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2 - 1}} = \frac{0.50885}{\sqrt{9999}} = 0.005089$$

- 可得 N 和 Ω_c

$$N = \frac{\lg k_1}{\lg k} = 3.2811 \Rightarrow N = 4 \quad \Omega_c = \frac{\Omega_s}{(A^2 - 1)^{1/2N}} = \frac{2\pi f_s}{9999^{1/8}} = 9934.7 \text{ rad/s}$$

- 2) 按照以上技术指标设计巴特沃斯低通滤波器。

- 查表求分母因式:

$$D'_4(p) = (p^2 + 0.7654p + 1)(p^2 + 1.8478p + 1)$$

- 系统函数

$$\begin{aligned} H_a(s) &= \frac{1}{D'_N(s/\Omega_c)} \\ &= \frac{\Omega_c^4}{(s^2 + 0.7654\Omega_c s + \Omega_c^2)(s^2 + 1.8478\Omega_c s + \Omega_c^2)} \end{aligned}$$

6.1.3切比雪夫 (chebyshev) 滤波器

■ 切比雪夫1型

- 通带内等波纹，阻带内单调下降

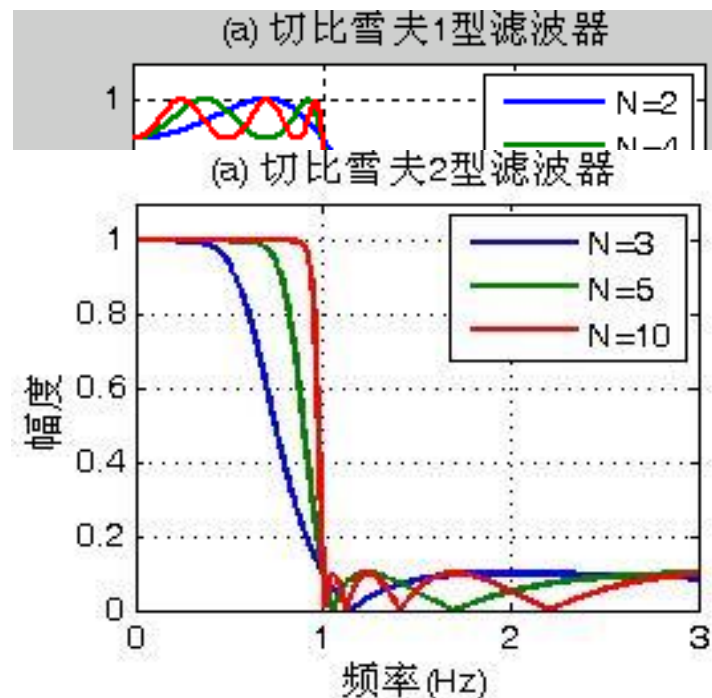
■ 切比雪夫2型

- 通带内单调下降，阻带内等波纹

■ 巴特沃斯滤波器在通带内幅度特性是单调下降的

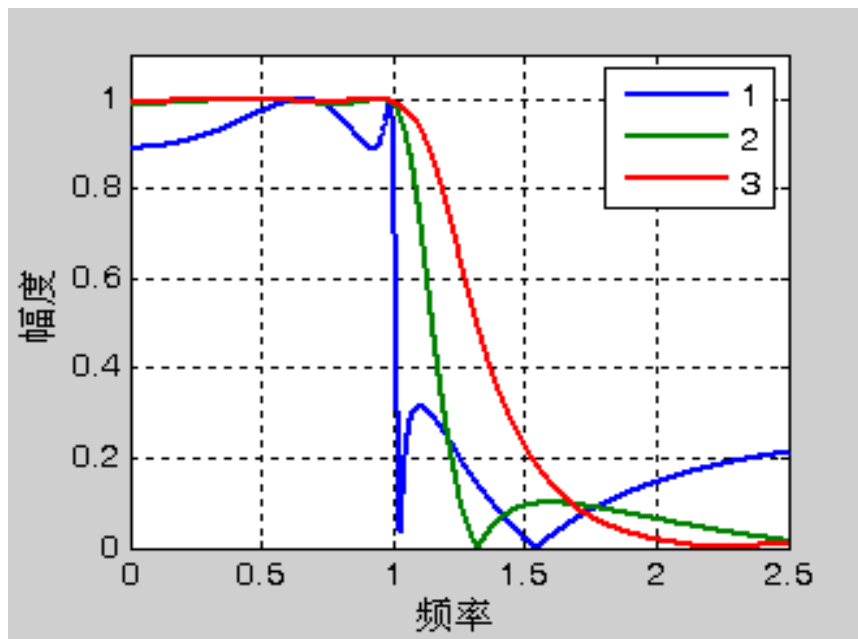
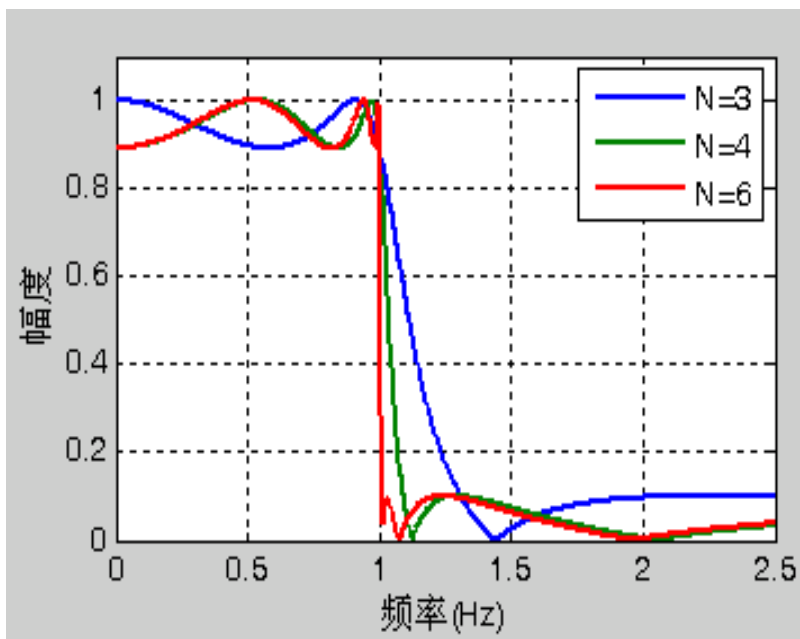
- 如果阶次一定，则在靠近截止频率处，幅度下降很多
- 或者说，为了使通带内的衰减足够小，需要的阶次 (N) 很高

■ 切比雪夫滤波器的纹波在通带范围内是等幅起伏的，同样的通带衰减，其阶数较巴特沃斯滤波器要小。

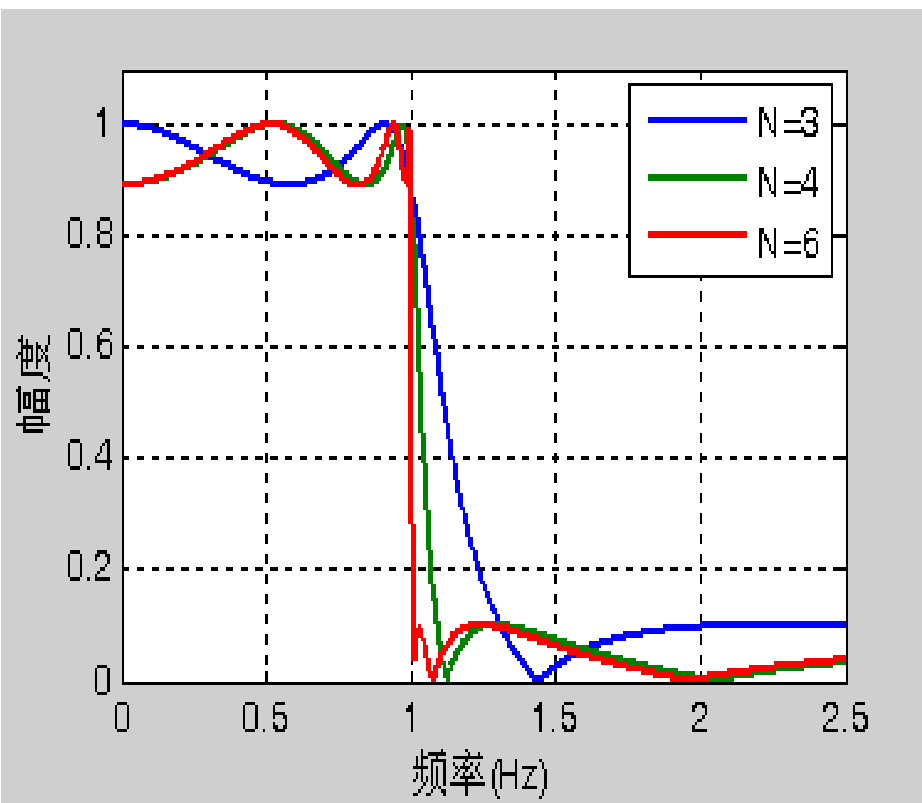


6.1.4椭圆滤波器（考尔滤波器）

- 幅频响应在通带和阻带内都是等波纹的
- 对于给定的阶数和给定的波纹要求，椭圆滤波器能获得较其它滤波器更窄的过渡带宽，就这点而言，椭圆滤波器是最优的
- 通带和阻带内波纹固定时，阶数越高，过渡带越窄
- 阶数固定，通带和阻带纹波越小，过渡带越宽



$$\alpha_p = 1dB \quad \alpha_s = 20dB$$



$$\alpha_p = 1dB$$

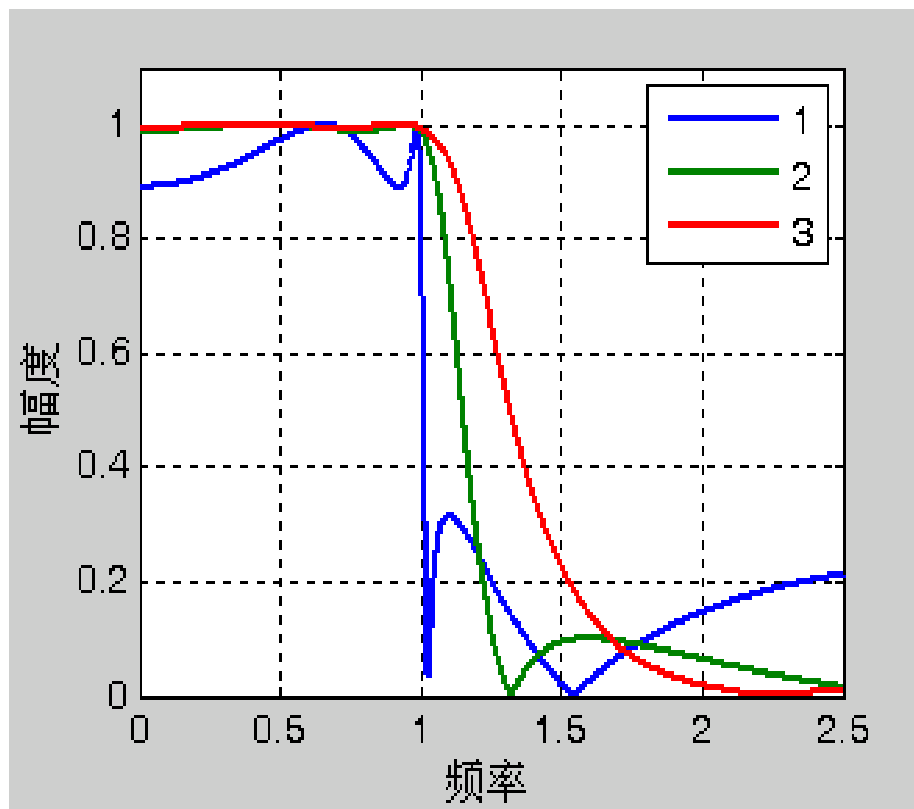
$$\alpha_s = 10dB$$

$$\alpha_p = 0.1dB$$

$$\alpha_s = 20dB$$

$$\alpha_p = 0.05dB$$

$$\alpha_s = 40dB$$



6.1.7 模拟滤波器的比较

- **相同阶数**的频率响应特性：
 - 相同通带最大衰减、阻带最小衰减，巴特沃思滤波器的过渡带最宽；椭圆滤波器过渡带最窄；两类切比雪夫滤波器的过渡带宽度相等，介于巴特沃斯滤波器和椭圆滤波器之间。
- **相同指标**下，椭圆滤波器阶次最低，切比雪夫次之，巴特沃思最高，参数的灵敏度则恰恰相反。故椭圆滤波器的性价比最高，应用最广。

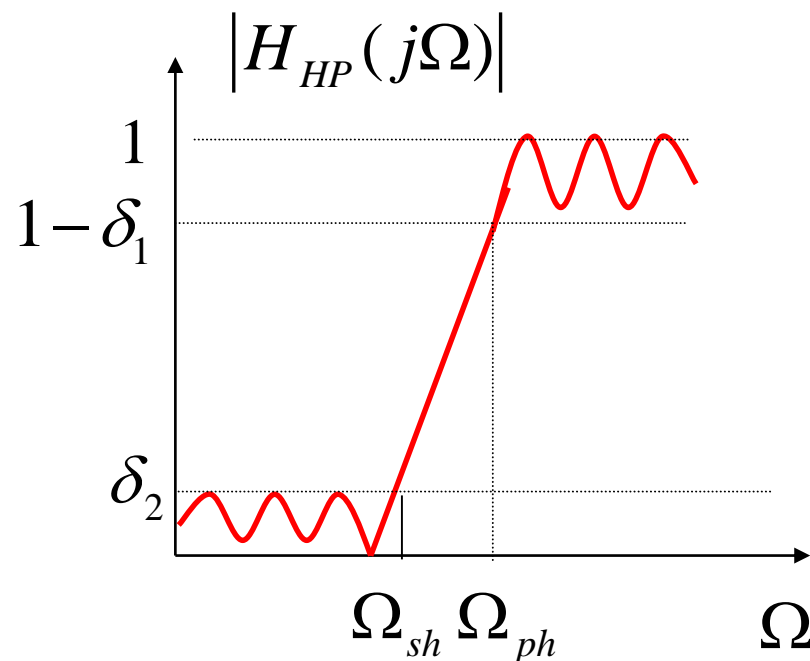
6.1.7 模拟滤波器的比较

- **巴特沃思滤波器**的幅频特性单调下降，大约 $3/4$ 通带接近线性相位；
- **切比雪夫1滤波器**通带等波纹幅频特性，过渡带和阻带单调下降，大约 $3/4$ 通带接近线性相位；
- **切比雪夫2滤波器**阻带等波纹幅频特性，通带和过渡带单调下降，通带与巴特沃斯滤波器几乎相同，大约 $3/4$ 通带接近线性相位；
- **椭圆滤波器**通带、阻带等波纹幅频特性，过渡带单调下降，仅在 $1/2$ 通带接近线性相位；
- **贝塞尔滤波器**在整个通带逼近线性相位，但过渡带比其他滤波器宽得多。

6.1.8 频率变换与高通、带通及带阻滤波器的设计

■ 高通滤波器的指标

- 通带边界频率: Ω_{ph}
- 阻带边界频率: Ω_{sh}
- 通带纹波幅度: δ_1
- 阻带纹波幅度: δ_2



带通滤波器的指标

■ 通带边界频率：

□ 上边界频率 Ω_{pu}

□ 下边界频率 Ω_{pl}

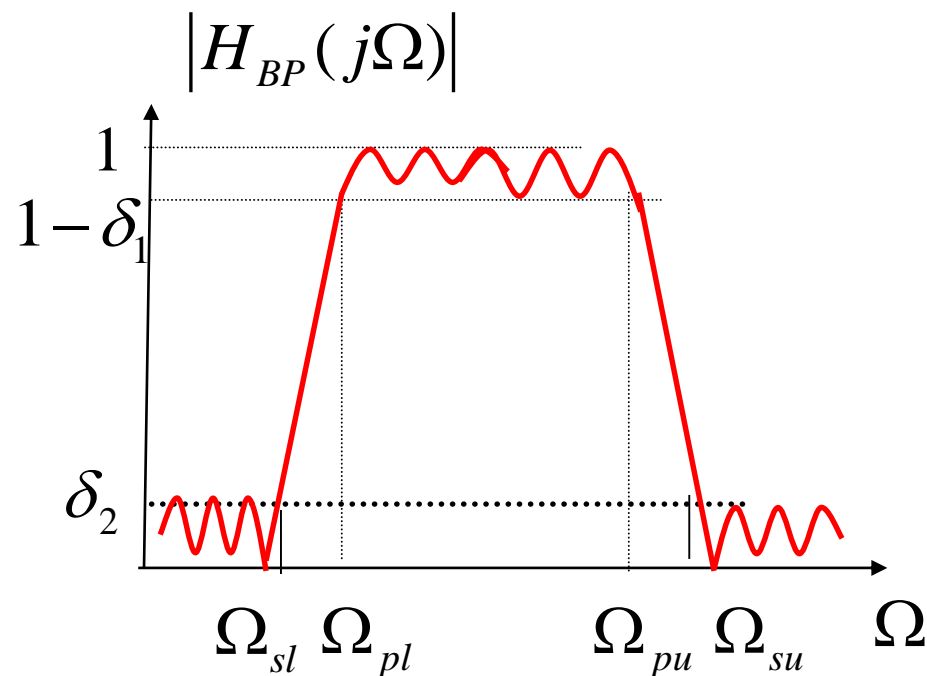
■ 阻带边界频率：

□ 上边界频率 Ω_{su}

□ 下边界频率 Ω_{sl}

■ 通带纹波幅度： δ_1

■ 阻带纹波幅度： δ_2



带阻滤波器的指标

■ 通带边界频率：

□ 上边界频率 Ω_{pu}

□ 下边界频率 Ω_{pl}

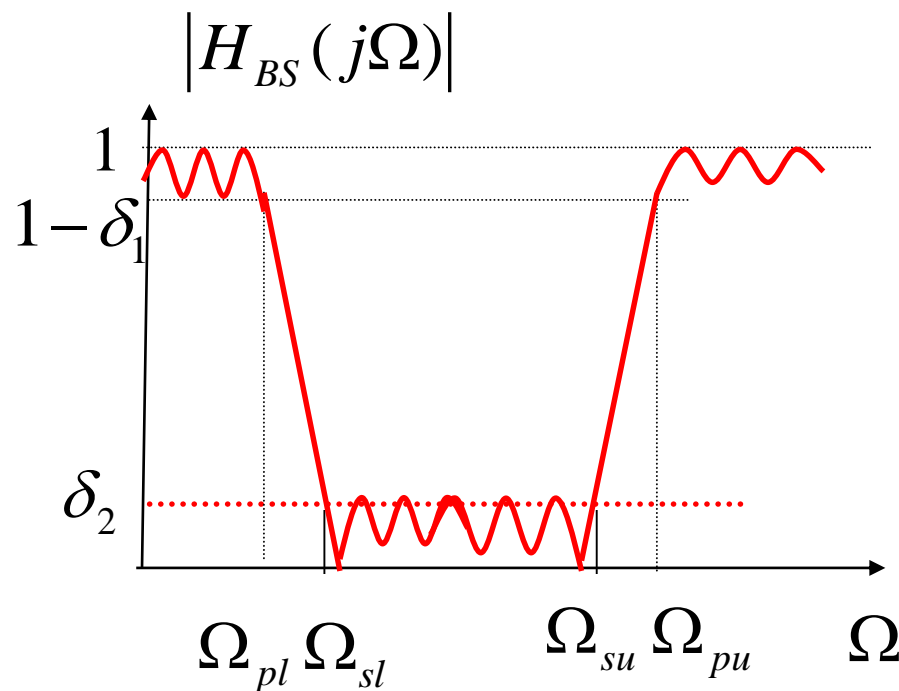
■ 阻带边界频率：

□ 上边界频率 Ω_{su}

□ 下边界频率 Ω_{sl}

■ 通带纹波幅度： δ_1

■ 阻带纹波幅度： δ_2



高通、带通及带阻滤波器的设计

归一化低通滤波器原型 $\xrightarrow{\text{频率变换}}$ 所希望的低通、高通、带通、带阻

■ 归一化低通滤波器原型

□ 通带边界频率为1的模拟滤波器 $\Omega_p = 1$

■ 高通、带通及带阻滤波器的设计过程

- 采用频率变换公式，将滤波器的技术指标转换成归一化低通滤波器指标
- 利用经典滤波器的设计公式、图表，设计归一化低通滤波器的系统函数 $Q(p)$
- 通过频率变换公式，由 $Q(p)$ 获得所希望的滤波器的系统函数

符号规定

- 归一化低通滤波器原型 $Q(p) \quad p = \eta + j\lambda$
 - 通带边界频率 λ_p
- 希望模拟滤波器的系统函数 $H_d(s) \quad s = \sigma + j\Omega$
- 频率变换公式 $p = F(s) \quad s = F^{-1}(p)$
- 于是 $H_d(s) = Q(p) \Big|_{p=F(s)}$
 $Q(p) = H_d(s) \Big|_{s=F^{-1}(p)}$

$$p = \eta + j\lambda \quad s = \sigma + j\Omega$$

1 模拟高通滤波器的设计

■ 低通原型到高通滤波器的频率变换

$$p = \lambda_p \Omega_{ph} / s$$

□ 在虚轴上

$$\lambda = -\lambda_p \Omega_{ph} / \Omega$$

□ 高通滤波器通带边界频率 Ω_{ph}

□ 映射关系：低通 -----> 高通

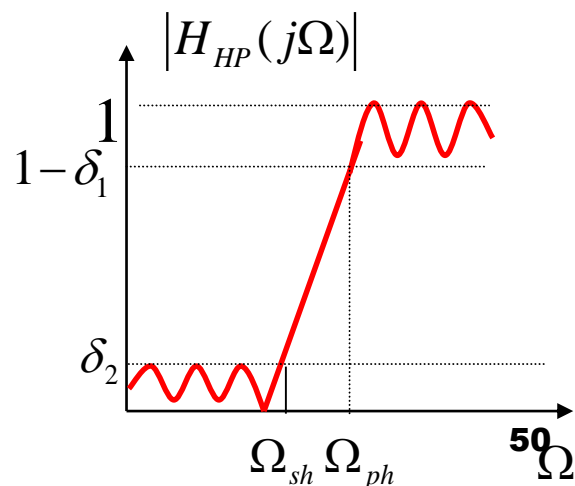
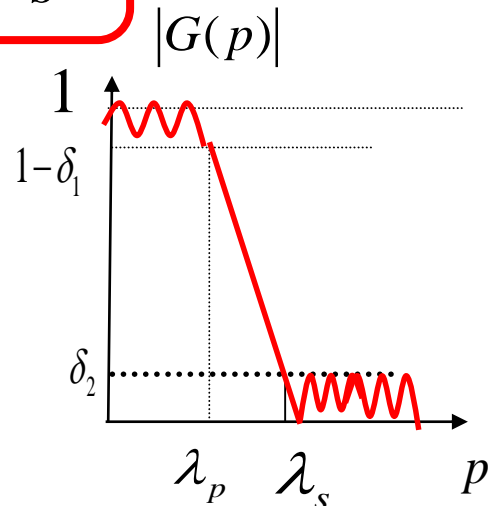
$$[0, \lambda_p] \quad [-\infty, -\Omega_{ph}]$$

$$[-\lambda_p, 0] \quad [\Omega_{ph}, \infty]$$

$$[-\infty, -\lambda_s] \quad [0, \Omega_{sh}]$$

$$[\lambda_s, \infty] \quad [-\Omega_{sh}, 0]$$

$$[-\lambda_p, \lambda_p] \quad |\Omega| \geq \Omega_{ph}$$



$$H_{HP}(s) = G(p) \Big|_{p = \lambda_p \Omega_{ph} / s}$$

$$\lambda = -\lambda_p \Omega_{ph} / \Omega$$

例：设计巴特沃思模拟高通滤波器,通带边界频率为 **$f_p=4\text{kHz}$** ，阻带边界频率为 **$f_s=1\text{kHz}$** ，通带最大衰减为 **0.1dB** （ f_p 处），阻带最小衰减 **$\alpha_s=40\text{dB}$** 。

解：高通滤波器指标

$$f_p = 4\text{kHz}, \quad f_s = 1\text{kHz}, \quad \alpha_p = 0.1\text{dB}, \quad \alpha_s = 40\text{dB}$$

1) 确定相应低通原型滤波器的指标

$$\lambda_p = 1 \quad \lambda_s = \lambda_p \Omega_{ph} / \Omega_s = 2\pi \times 4000 / 2\pi \times 1000 = 4$$

$$\alpha_p = 0.1\text{dB} \quad \alpha_s = 40\text{dB}$$

$$\lambda_p = 1 \quad \lambda_s = 4 \quad \alpha_p = 0.1dB \quad \alpha_s = 40dB$$

2)设计巴特沃斯低通滤波器

■ 确定阶次N:

$$\varepsilon = \sqrt{10^{\alpha_p/10} - 1} = \sqrt{10^{0.1/10} - 1} = 0.1526204 \quad A = 10^{\alpha_s/20} = 10^{40/20} = 100$$

$$k = \frac{\Omega_p}{\Omega_s} = \frac{1}{4} = 0.25 \quad k_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2 - 1}} = \frac{0.1526204}{\sqrt{9999}} = 0.00152628$$

■ 可得N

$$N = \frac{\lg k_1}{\lg k} = 4.7 \Rightarrow N = 5 \quad \Omega_c = \frac{\Omega_s}{(A^2 - 1)^{1/2N}} = \frac{4}{9999^{1/10}} = 1.59$$

■ 按照以上技术指标设计巴特沃斯低通滤波器:

■ 归一化的 5 阶滤波器的系统函数

$$D'_5(p) = p^5 + 3.2361p^4 + 5.2361p^3 + 5.2361p^2 + 3.2361p + 1$$

$$G(p) = \frac{1}{D'_N(p/\Omega_c)}$$

$$= \frac{\Omega_c^5}{p^5 + 3.2361\Omega_c p^4 + 5.2361\Omega_c^2 p^3 + 5.2361\Omega_c^3 p^2 + 3.2361\Omega_c^4 p + \Omega_c^5}$$

$$= \frac{10.2405}{p^5 + 5.1533p^4 + 13.278p^3 + 21.1445p^2 + 20.8101p + 10.2405}$$

■ 3) 高通滤波器的系统函数

$$H_{HP}(s) = G(p) \Big|_{p=\lambda_p \Omega_{ph} / s}$$

$$= \frac{1}{s^5 + 5.1073 \times 10^4 s^4 + \cdots + 9.7921 \times 10^{20}}$$

MATLAB

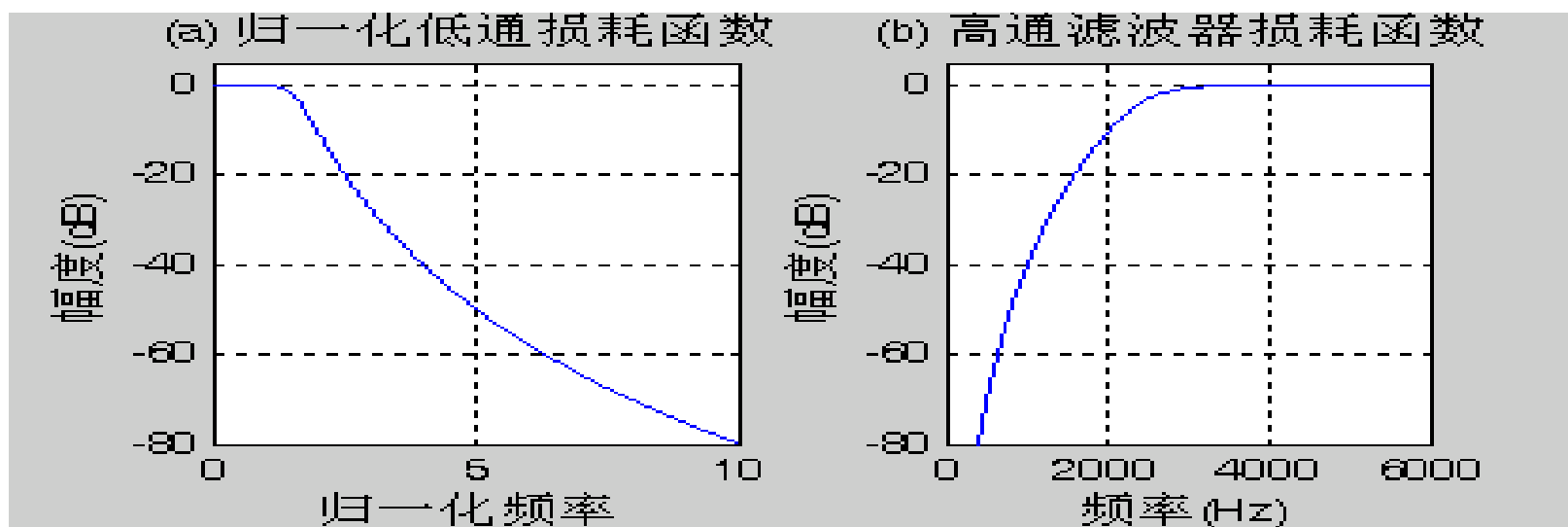
```
wp=1;ws=4;Rp=0.1;As=40; %设置滤波器指标参数
```

```
[N,wc]=buttord(wp,ws,Rp,As,'s'); %滤波器G(p)阶数N和3dB截止频率
```

```
[B,A]=butter(N,wc,'s'); %计算低通滤波器G(p)系统函数分子分母多项式系数
```

```
wph=2*pi*4000; %高通模拟滤波器通带边界频率
```

```
[BH,AH]=lp2hp(B,A,wph) %低通到高通转换
```



6.2 IIR数字滤波器设计

- 目标：满足给定频率响应指标、因果稳定的系统函数 $H(z)$

- 间接法设计过程

- 确定数字滤波器的指标 ω_p ω_s α_p α_s
- 转换成过渡模拟滤波器的指标 Ω_p Ω_s α_p α_s
- 设计过渡模拟滤波器 $H_a(s)$
- 将过渡模拟滤波器 $H_a(s)$ 转换为数字滤波器 $H(z)$

- 指标转换

$$\begin{aligned} [0, F_s] &\Rightarrow [0, 2\pi] \\ \omega = \Omega T_s = \Omega / F_s = 2\pi f / F_s &\quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \omega_p &= \Omega_p / F_s = 2\pi f_p / F_s \\ \omega_s &= \Omega_s / F_s = 2\pi f_s / F_s \end{aligned} \end{aligned}$$

过渡模拟滤波器转换为数字滤波器的要求

设计模拟 $H_a(s) \Rightarrow$ 转换成数字 $H(z)$

- 保证因果稳定性：
 - $H_a(s)$ 的因果稳定性映射成 $H(z)$ 后保持不变，即 S 平面的左半平面 $\text{Re}\{S\} < 0$ 应映射到 Z 平面的单位圆以内 $|Z| < 1$ 。
- $H(z)$ 的频响要近似模仿 $H_a(s)$ 的片段常数频响：
 - 即 S 平面的虚轴应映射到 Z 平面的单位圆 $e^{j\omega}$ 上。
- 下面讨论两种常用的映射变换方法：
 - 脉冲响应不变法
 - 双线性变换法

6.2.1 脉冲响应不变法

■ 基本思想

- 波形逼近 --- 使数字滤波器能模仿模拟滤波器的特性；
- 从滤波器的脉冲响应出发，使数字滤波器的单位脉冲响应序列 $h(n)$ 正好等于模拟滤波器的冲激响应 $h_a(t)$ 的采样值，即

$$h(n) = h_a(nT), \quad H(z) = ZT[h(n)]$$

由模拟滤波器设计理论得： $H_a(s)$

⇒ 取拉氏逆变换得： $h_a(t)$

⇒ 进行采样得： $h_a(nT)$

⇒ 取 z 变换得数字滤波器传递函数 $H(z)$

$$H_a(s) \Rightarrow H(z)$$

- 滤波器系统函数（部分分式）

- 只有单阶极点，分母阶次高于分子

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k}$$

- 模拟滤波器的单位冲激响应

$$h_a(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} u(t)$$

- 采样

$$h(n) = h_a(nT) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k nT} u(n) = \sum_{k=1}^N A_k (e^{s_k T})^n u(n)$$

- Z变换

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

- 结论：

单极点、分母阶次高于分子阶次，可直接由 $H_a(s)$ 获得 $H(z)$

因果稳定性分析:

■ S平面到Z平面的极点映射关系

$$s_k \rightarrow z_k: z_k = e^{s_k T}$$

■ S平面与Z平面之间的映射关系

$$z = e^{sT}$$

$$(s = \sigma + j\Omega, z = re^{j\omega})$$

$$re^{j\omega} = e^{sT} = e^{(\sigma + j\Omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\Omega T}$$

$$r = e^{\sigma T} \quad \omega = \Omega T$$

数字频率与模拟频率之间是线性关系

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k}$$

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

$$r = e^{\sigma T}$$

S平面

Z平面

$$\sigma = 0$$

虚轴

$$r = 1$$

单位圆

$$\sigma < 0$$

左半平面

$$r < 1$$

单位圆内部

$$\sigma > 0$$

右半平面

$$r > 1$$

单位圆外部

s平面到z平面的映射:

保持因果
稳定性

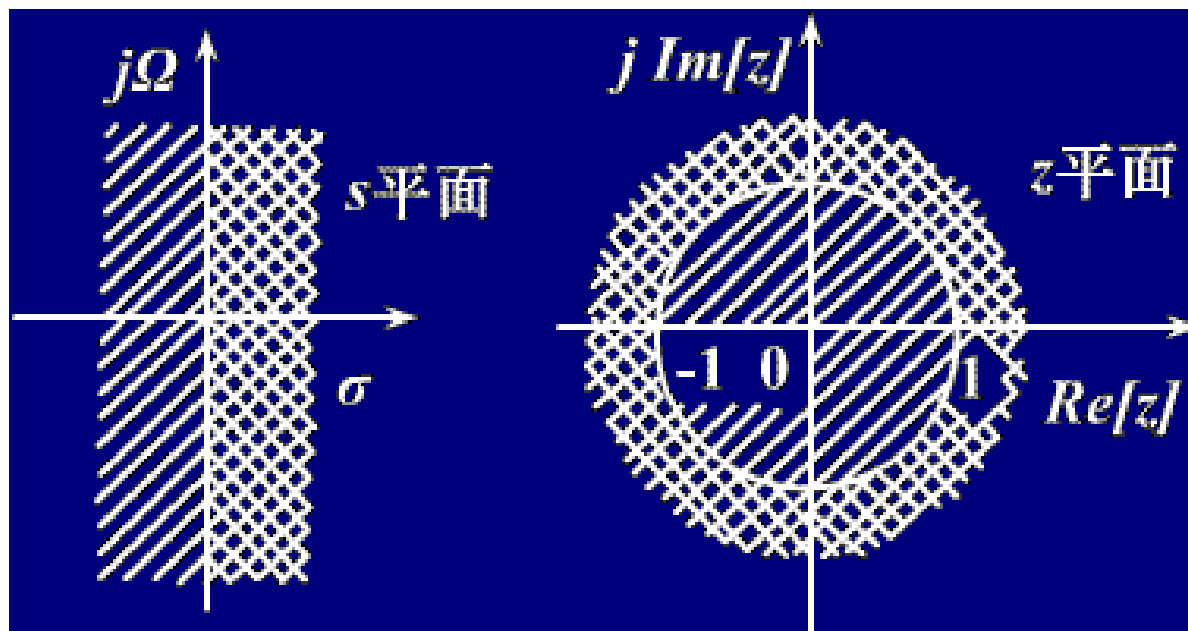


图 2-17 $\sigma \leq 0$ 分别映射成 $r \leq 1$

S平面

$\Omega = 0$ 实轴 零频

$\Omega = \Omega_0$ 平行直线 频率

$$\Omega = \pm \Omega_s / 2$$

$$\Omega : -\frac{\Omega_s}{2} \rightarrow \frac{\Omega_s}{2} \quad -\pi/T \rightarrow \pi/T$$

Z平面

$\omega = 0$ 正实轴 零频

$\omega = \Omega_0 T$ 辐射线 角度

$$\omega : = \pm \pi$$

$$\omega : -\pi \rightarrow \pi$$

$$\begin{aligned} \omega = \Omega T &= 2\pi \frac{\Omega}{2\pi/T} \\ &= 2\pi \frac{\Omega}{\Omega_s} \end{aligned}$$

s平面到z平面的

映射是多值映射。

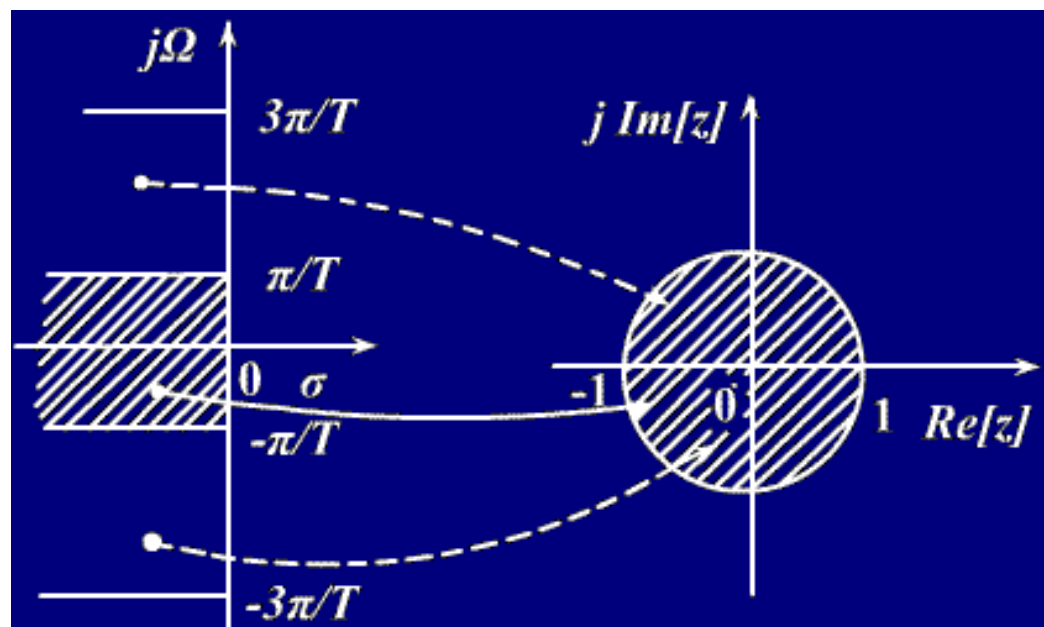


图 2-18

结论

■ 稳定性

- 如果模拟滤波器是因果稳定的，则所有极点 都在**S**左半平面，那么变换后**H(Z)**的极点也都在单位圆以内，因此数字滤波器保持因果稳定。

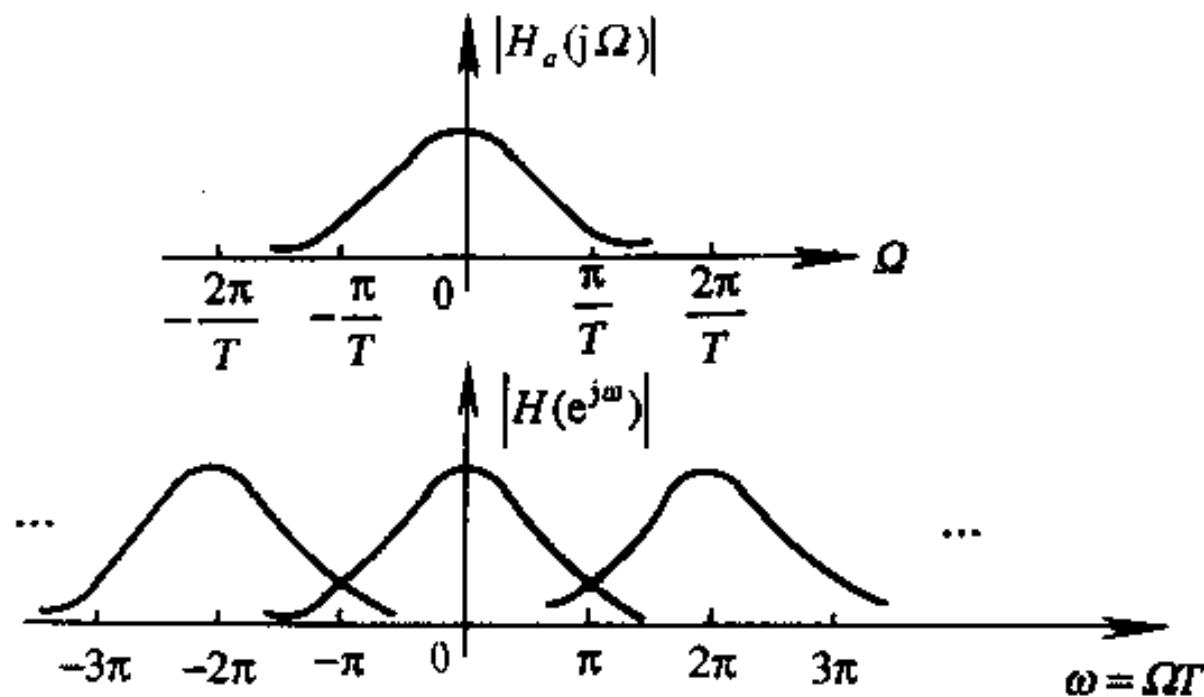
■ 频率响应特性的近似性

$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jk\Omega_s)$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\frac{\omega - 2k\pi}{T})$$

$$\begin{array}{ccc}
 h(n) = h_a(t) \Big|_{t=nT} & & \\
 \downarrow & \quad \downarrow & \\
 H(e^{j\omega}) & H_a(j\Omega) & H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(j \frac{\omega - 2k\pi}{T})
 \end{array}$$

数字滤波器的频响
并不是简单重现模
拟滤波器的频响，
而是模拟滤波器频
响的周期延拓。



■ 无混叠失真的条件:

- 带限、满足采样定理 $H_a(j\Omega) = 0 \quad |\Omega| \geq \frac{\Omega_s}{2}$

■ 混叠失真的影响

- 相似性变差、无法满足阻带衰减指标

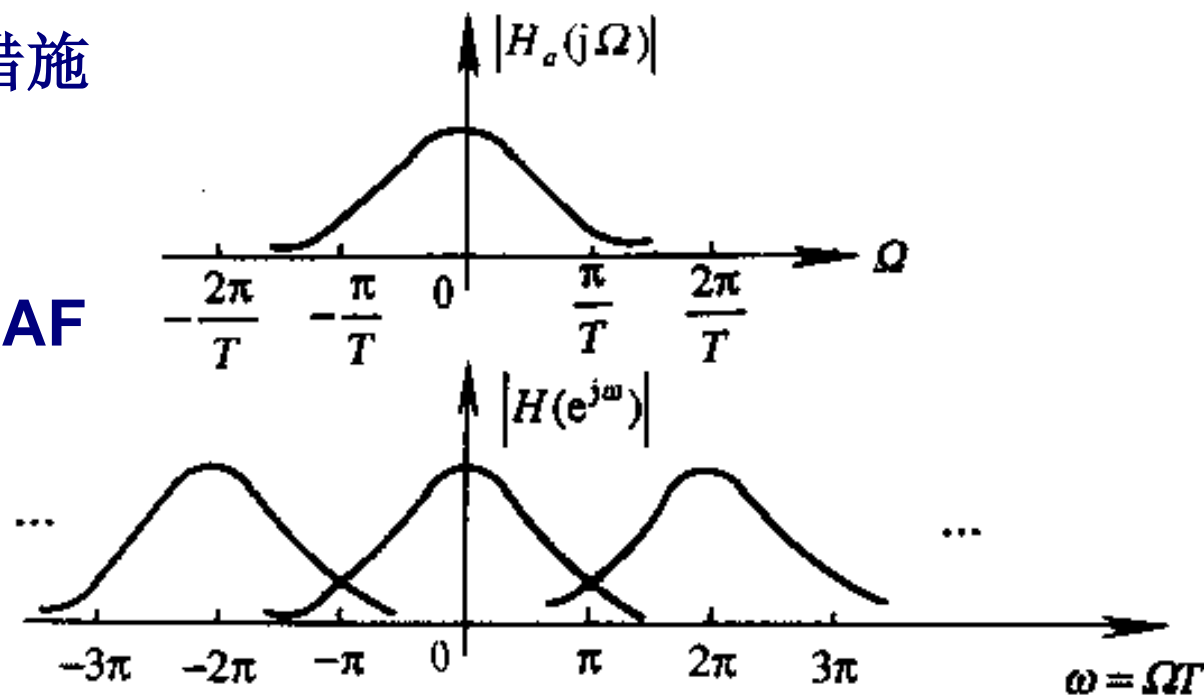
■ 减少混叠失真的措施

- 措施1

■ 锐截止特性AF

- 措施2

■ 提高 F_s



■ 脉冲响应不变法的优缺点：

- (1) 频率坐标变换是线性的，数字滤波器在无频率混叠时能较好地重现原模拟滤波器的频率特性；
- (2) 由于数字域的脉冲响应模仿模拟域的冲激响应，故时域特性逼近好；
- (3) 模拟滤波器频响在折叠频率以上衰减越大，失真则越小，这时采用脉冲响应不变法设计的数字滤波器才能得到良好的效果；
- (4) 产生频率混叠现象，不适合高通、带阻滤波器的设计。

增益的补偿

$$\therefore H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(j \frac{\omega - 2k\pi}{T})$$

频响增益随T变化，
T越小增益越大，易
造成溢出。

$$h(n) = Th_a(t) \Big|_{t=nT}$$

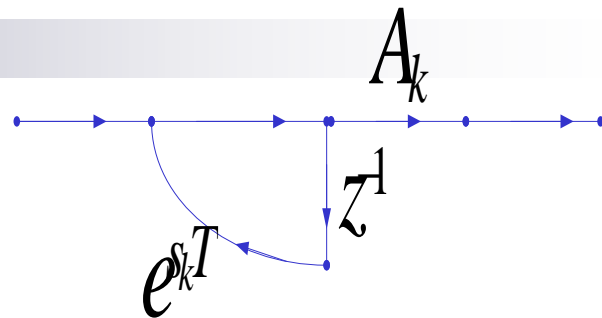
$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{TA_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

$$\therefore H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(j \frac{\omega - 2k\pi}{T})$$

数字滤波器频响增益与模拟滤波器频响增益相同

共轭极点的合并

■ 避免复数乘法 $H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{TA_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$



$$\frac{TA_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}} + \frac{TA_k^*}{1 - e^{s_k^* T} z^{-1}} = \frac{b_{0k} + b_{1k} z^{-1}}{1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2}}$$

■ 其中 $s_k = \sigma_k + j\Omega_k$ $s_k^* = \sigma_k - j\Omega_k$

$$b_{0k} = 2T \operatorname{Re}[A_k], \quad b_{1k} = 2Te^{\sigma_k T} \operatorname{Re}[A_k e^{j\Omega_k T}]$$

$$a_{1k} = -2e^{\sigma_k T} \cos(\Omega_k T), \quad a_{2k} = 2e^{\sigma_k T}$$

$$H(z) = \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{b_{0k} + b_{1k} z^{-1}}{1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2}}$$

例：将一个具有如下传递函数

$$H(s) = \frac{2}{(s+1)(s+3)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}$$

的模拟滤波器数字化。

解：

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{1 - z^{-1}e^{-T}} - \frac{1}{1 - z^{-1}e^{-3T}} \\ &= \frac{z^{-1}(e^{-T} - e^{-3T})}{1 - z^{-1}(e^{-T} + e^{-3T}) + e^{-4T}z^{-2}} \end{aligned}$$

模拟滤波器的频率响应为:

$$Ha(j\Omega) = H(s) \Big|_{s=j\Omega} = \frac{2}{(j\Omega + 1)(j\Omega + 3)} = \frac{2}{(3 - \Omega^2) + j4\Omega}$$

数字滤波器的频率响应为:

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{(e^{-T} - e^{-3T})e^{-j\omega}}{1 - (e^{-T} + e^{-3T})e^{-j\omega} + e^{-4T}e^{-j2\omega}}$$

显然 $H(e^{j\omega})$ 与采样间隔 T 有关, 如图b。

T 越小, f_s 越大, 阻带衰减越大, 混叠越小
当 $f_s=24\text{Hz}$, 混叠可忽略不计

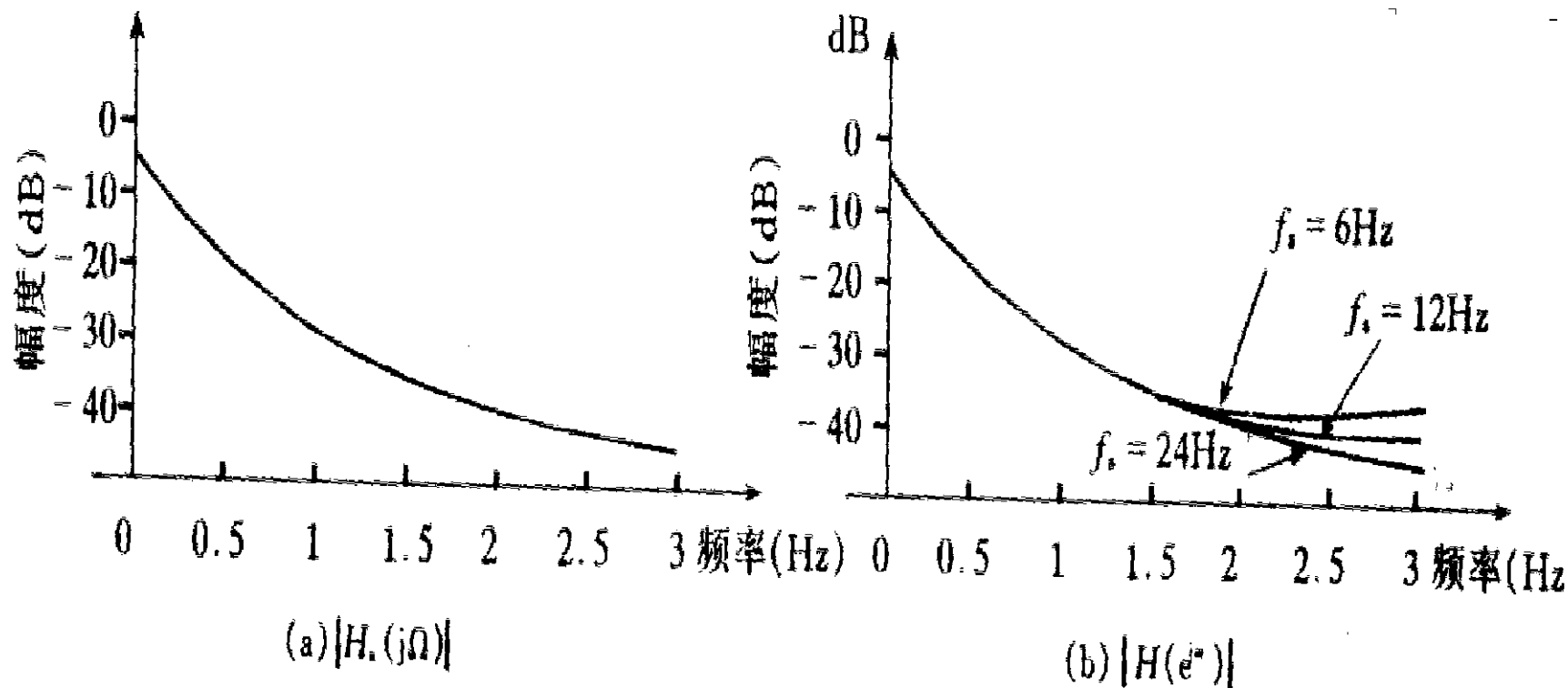


图 3.2 脉冲响应不变法的幅频响应

小结 (1)

- 脉冲响应不变法的一个重要特点是频率坐标的变换是线性的，即 $\omega = \Omega T$ ， ω 与 Ω 是线性关系。

因此如果模拟滤波器的频响带限于折叠频率以内的话，通过变换后数字滤波器的频响可不失真地反映原响应与频率的关系。

$$H(e^{j\omega}) = H_a(j\Omega) \quad |\Omega| < \pi / T$$

例如线性相位的贝塞尔低通滤波器，通过脉冲响应不变法得到的仍是线性相位的低通数字滤波器。

- 在某些场合，要求数字滤波器在时域上能模仿模拟滤波器的功能时，如要实现时域冲激响应的模仿，一般使用脉冲响应不变法。

小结 (2)

- 如果 $H_a(s)$ 是稳定的, 即其极点在 S 左半平面, 映射后得到的 $H(z)$ 也是稳定的。
- 脉冲响应不变法的最大缺点: 有频谱周期延拓效应, 因此只能用于带限的频响特性, 如衰减特性很好的低通或带通, 且高频衰减越大, 频响的混淆效应越小。至于高通和带阻滤波器, 由于它们在高频部分不衰减, 因此将完全混淆在低频响应中。此时可增加一保护滤波器, 滤掉高于 $\Omega_s/2$ 的频带, 再用脉冲响应不变法转换为数字滤波器, 这会增加设计的复杂性和滤波器阶数, 只有在一定要满足频率线性关系或保持网络瞬态响应时才采用。

6.2.2 双线性变换法设计IIR数字滤波器

- 克服脉冲响应不变法的频谱混叠现象

- ☐ 改变多值映射关系
- ☐ 采用非线性频率压缩方法

- 双线性变换法的基本设计思想

- ☐ 脉冲响应不变法：波形逼近
- ☐ 双线性变换法：算法逼近

用线性常系数差分方程逼近线性常系数微分方程

■ 微分方程到差分方程的近似

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} = \sum_{k=1}^N H_{ak}(s) \quad H_{ak}(s) = \frac{A_k}{s - s_k}$$

□ 微分方程 $\frac{dy_a(t)}{dt} - s_k y_a(t) = A_k x_a(t)$

□ 近似 $\frac{dy_a(t)}{dt} \Rightarrow [y(n) - y(n-1)]/T, \quad y(n) = y_a(nT)$

$$y_a(t) \Rightarrow [y(n) + y(n-1)]/2$$

$$x_a(t) \Rightarrow [x(n) + x(n-1)]/2, \quad x(n) = x_a(nT)$$

□ 差分方程

$$[y(n) - y(n-1)]/T - s_k [y(n) + y(n-1)]/2 = A_k [x(n) + x(n-1)]/2$$

■ 系统函数

$$H_{ak}(s) = \frac{A_k}{s - s_k}$$

$$H_k(z) = \frac{A_k}{\frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} - s_k} = H_{ak}(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}$$

$$\therefore H(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}$$

■ S域到z域的映射为双线性变换

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

单值 可逆

双线性变换的性能分析

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

■ 稳定性

□ 映射关系

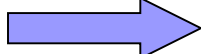
$$z = \left(1 + \frac{T}{2}S\right) / \left(1 - \frac{T}{2}S\right) = \left(1 + \frac{T}{2}(\sigma + j\Omega)\right) / \left(1 - \frac{T}{2}(\sigma + j\Omega)\right)$$

$$|z|^2 = \frac{(1 + \sigma T / 2)^2 + (\Omega T / 2)^2}{(1 - \sigma T / 2)^2 + (\Omega T / 2)^2}$$

$$\sigma < 0 \Rightarrow |z| < 1$$

$$\sigma = 0 \Rightarrow |z| = 1$$

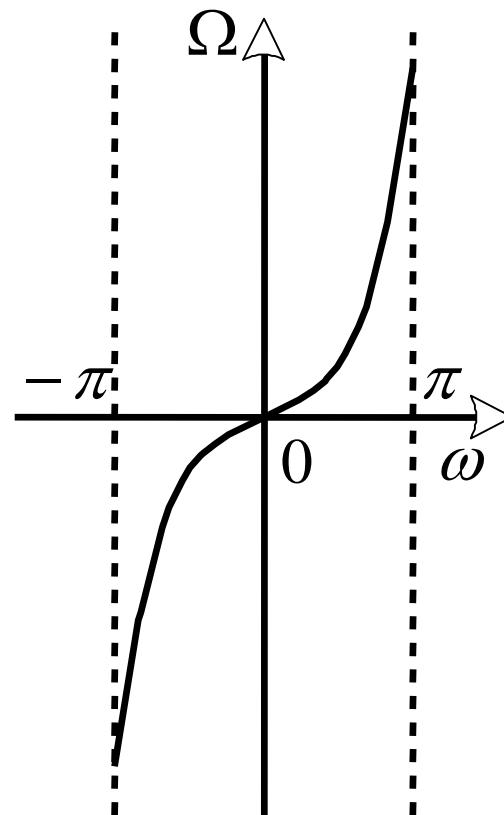
$$\sigma > 0 \Rightarrow |z| > 1$$

$H_a(s)$ 因果稳定  $H(z)$ 因果稳定

数字频率与模拟频率之间的映射关系

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

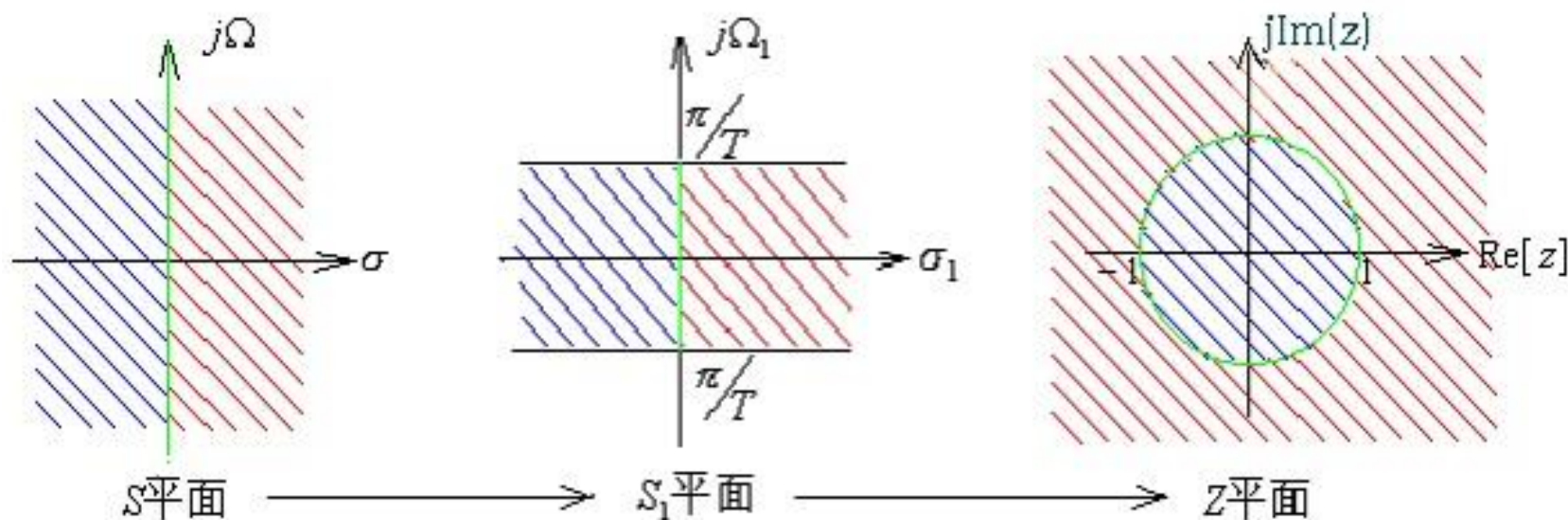
$$\begin{aligned} j\Omega &= \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} \\ &= \frac{2}{T} \frac{e^{-j\omega/2}}{e^{-j\omega/2}} \frac{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}}{e^{j\omega/2} + e^{-j\omega/2}} \\ &= \frac{2}{T} \frac{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}}{e^{j\omega/2} + e^{-j\omega/2}} \\ &= \frac{2}{T} \frac{j \sin(\omega/2)}{\cos(\omega/2)} \\ &= j \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \end{aligned}$$



非线性频率压缩

双线性变换法：从 S 平面到 Z 平面的两步映射

- 将整个 S 平面压缩至 S_1 平面的一条横带中；
- 再利用标准变换关系将这个横带变换到整个 Z 平面。



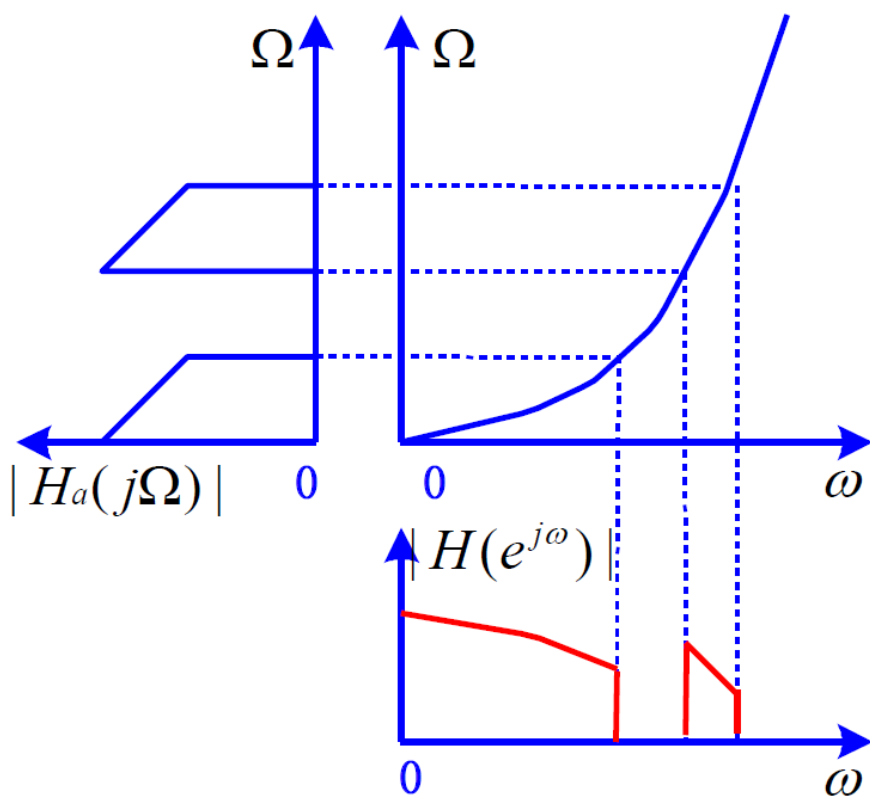
——对应的单值映射，消除了频率混叠现象

- 非线性关系消除了频率混叠，但会带来幅度和相位失真。

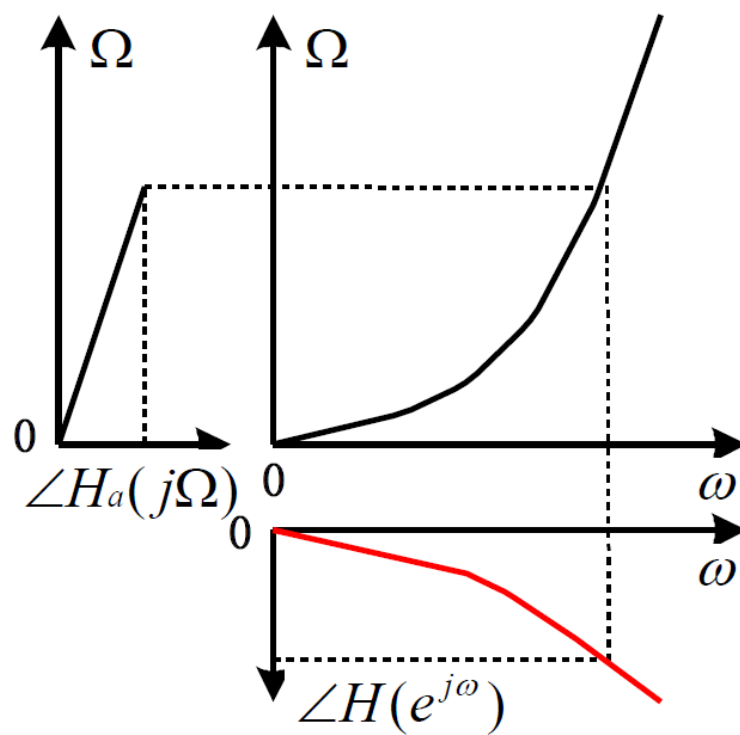
频率响应的畸变

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

■ 幅频特性



相频特性



预畸变校正

- 将数字低通指标转换成相应的模拟低通指标时，按非线性频率变换公式计算其边界频率，称为预畸变校正，即：

$$\Omega_p = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right) \quad \Omega_s = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_s}{2}\right)$$

- 双线性变换法仅保持原模拟滤波器的片段常数幅频响应特性，不能保持其相频响应特性。
- 双线性变换法仅适用于要求片段常数幅频响应指标的数字滤波器的设计。

双线性变换法设计数字低通滤波器的步骤

1) 确定数字低通技术指标:

通带边界频率 ω_p 、 通带衰减 α_p 、

阻带边界频率 ω_s 、 阻带衰减 α_s ；

2) 将数字低通指标转换成模拟低通指标:

α_p α_s 不变

边界频率非线性频率预畸校正: $\Omega = \frac{2}{T} \tan(\frac{\omega}{2})$

$$\Omega_p = \frac{2}{T} \tan(\frac{\omega_p}{2}) \quad \Omega_s = \frac{2}{T} \tan(\frac{\omega_s}{2})$$

3) 设计模拟低通滤波器 $H_a(s)$ ；

4) 转换成数字低通滤波器: $H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$

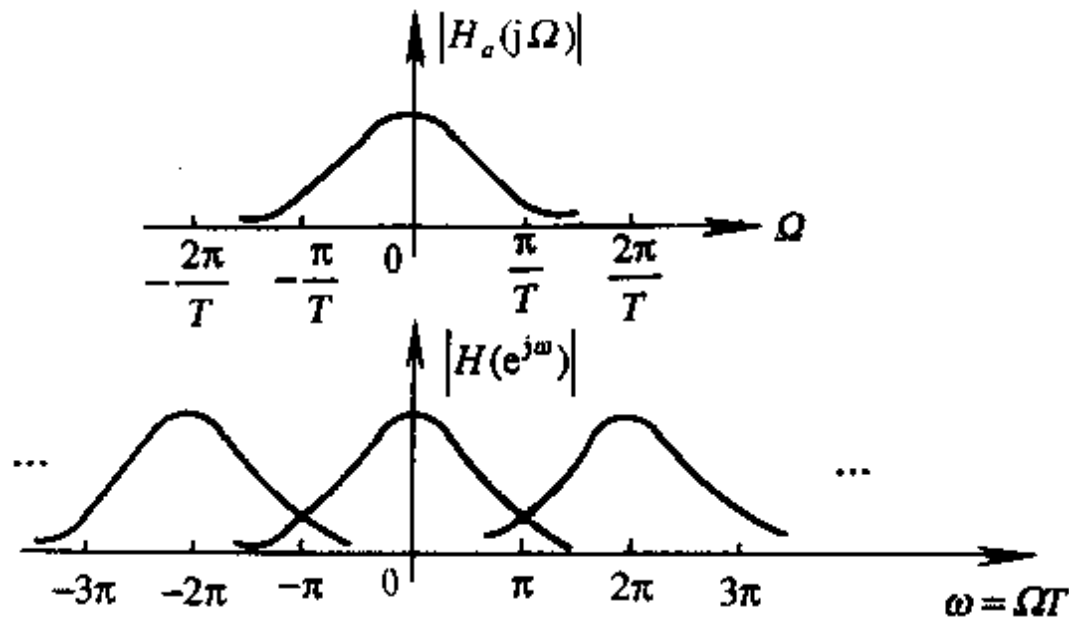
T的选择

■ 给定模拟滤波器

□ T如何选择?

$$\text{LP: } \frac{\pi}{T} > \Omega_s$$

(阻带边界频率)



■ 给定数字滤波器

□ T可以任意选

□ 脉冲响应不变法: $T=1$

□ 双线性变换法: $T=2$

例：用双线性变换法设计低通滤波器，通带阻带单调下降，指标要求如下：

$$\omega_p = 0.2\pi rad \quad \alpha_p = 1dB \quad \omega_s = 0.35\pi rad \quad \alpha_s = 10dB$$

解：

1) 转换成模拟低通指标，令 **T=2s**

$$\alpha_p = 1dB \quad \alpha_s = 10dB$$

$$\Omega_p = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right) = \frac{2}{2} \tan\left(\frac{0.2\pi}{2}\right) = 0.32492 rad / s$$

$$\Omega_s = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_s}{2}\right) = \frac{2}{2} \tan\left(\frac{0.35\pi}{2}\right) = 0.612801 rad / s$$

2) 设计过渡模拟滤波器，选用巴特沃思滤波器

2) 设计过渡模拟滤波器，选用巴特沃思滤波器

$$\varepsilon = \sqrt{10^{\alpha_p/10} - 1} = \sqrt{10^{1/10} - 1} = 0.508847 \quad A = 10^{\alpha_s/20} = 10^{10/20} = 3.16228$$

$$k = \frac{\Omega_p}{\Omega_s} = 0.53022 \quad k_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2 - 1}} = \frac{0.508847}{\sqrt{9}} = 0.1696157$$

$$N = \frac{\lg k_1}{\lg k} = 2.7964 \Rightarrow N = 3 \quad \Omega_c = \frac{\Omega_s}{(A^2 - 1)^{1/2N}} = \frac{0.612801}{9^{1/6}} = 0.424889$$

3) 归一化滤波器

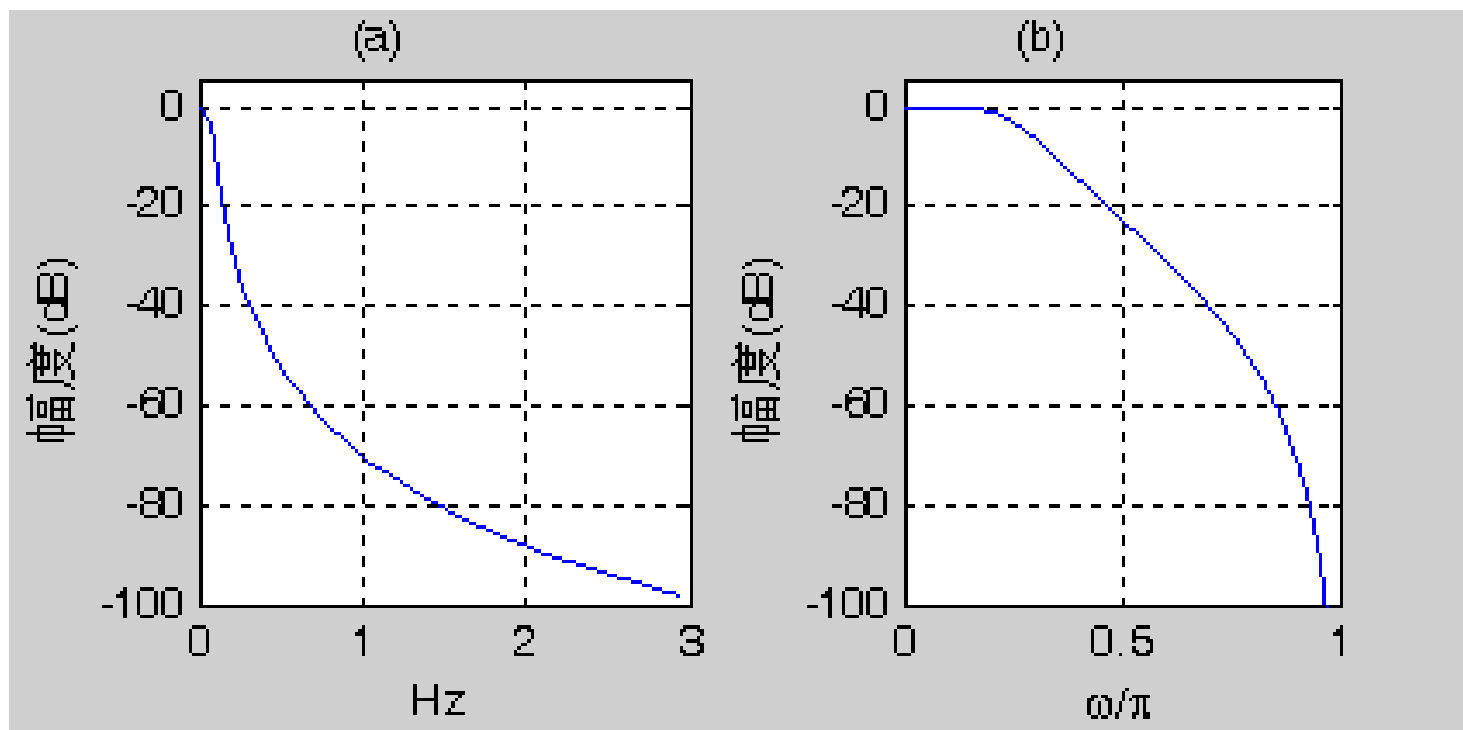
$$D'_3(p) = (p+1)(p^2 + p + 1)$$

$$H_a(s) = \frac{1}{D'_3(s/\Omega_c)}$$

$$= \frac{0.076707}{(s + 0.424892)(s^2 + 0.424892s + 0.180533)}$$

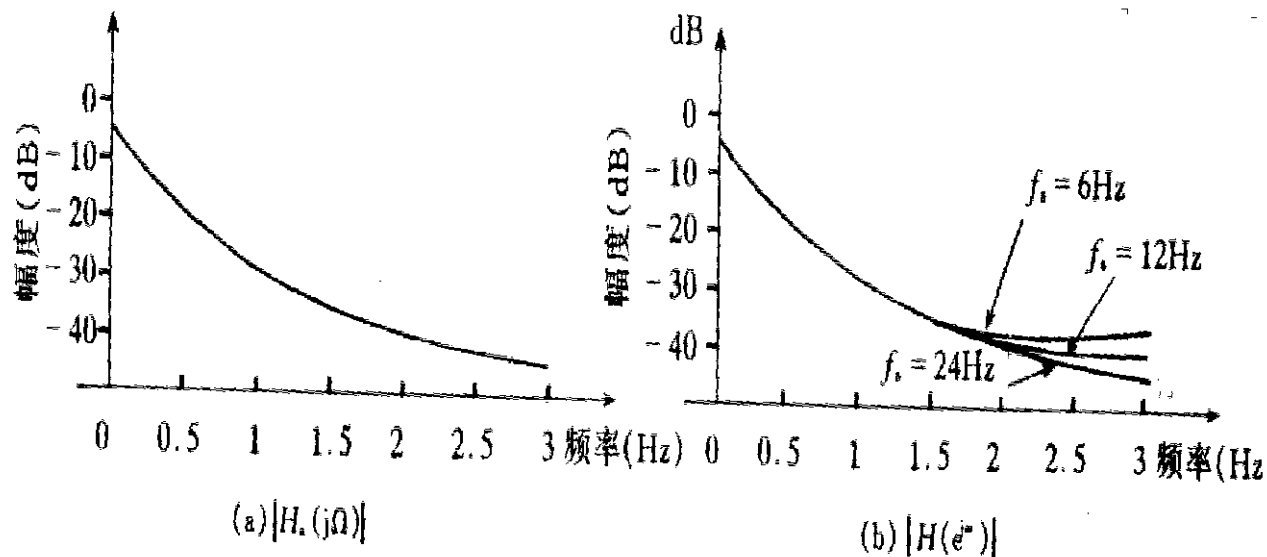
4) 转换成数字低通滤波器:

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$



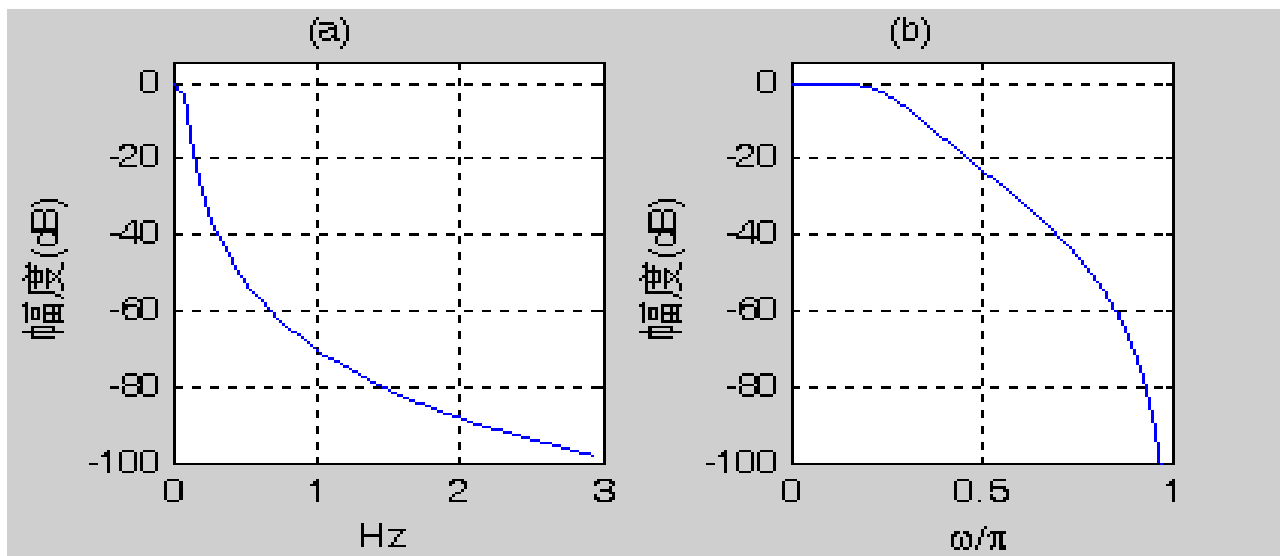
- DF没有频谱混叠，满足片段常数幅频响应特性指标
- 非线性频率畸变，导致DF与AF损耗函数曲线差别很大

脉冲响应 不变法



V.S.

双线性 变换法



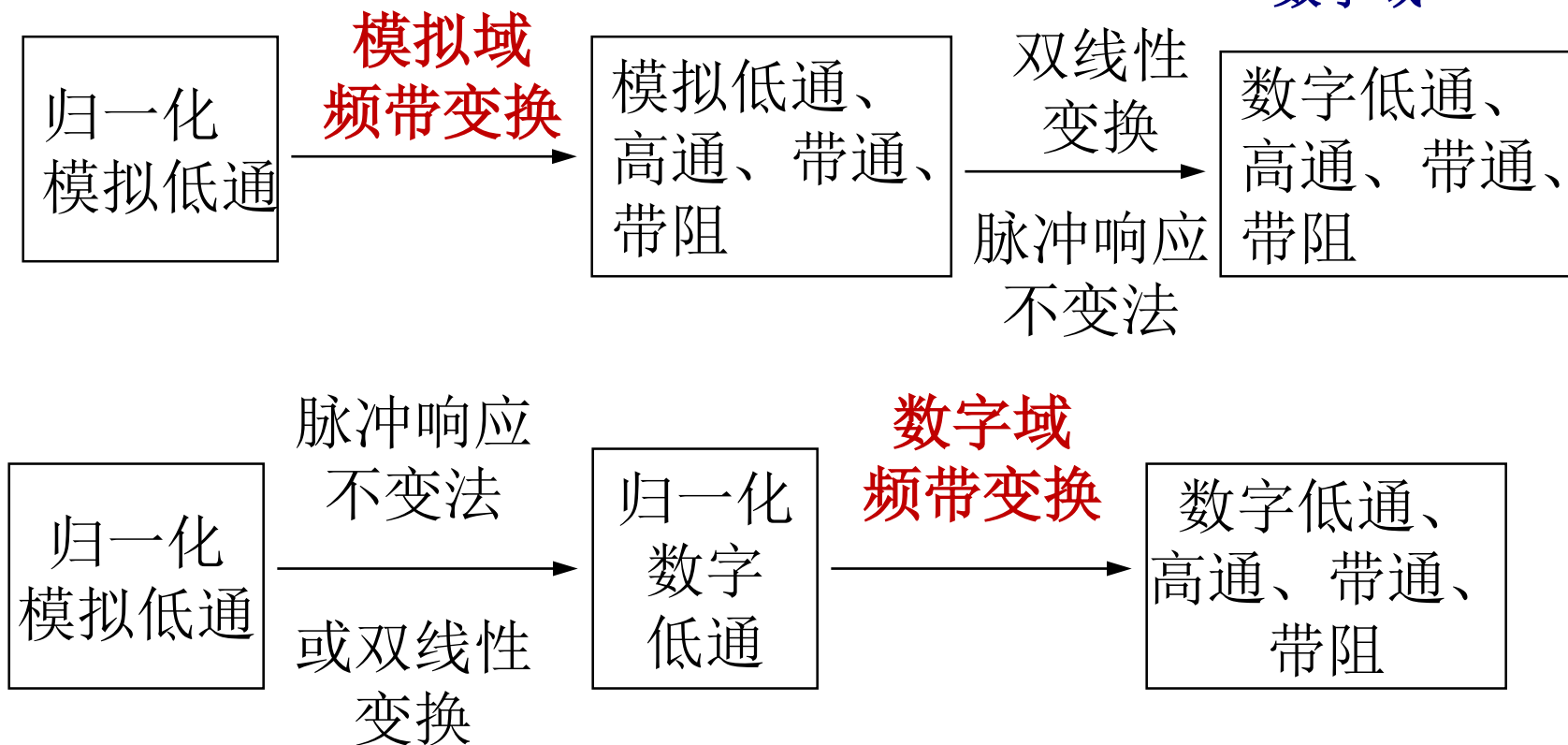
小结

- 利用双线性变换法，将 S 平面分两步映射映射到 Z 平面，最终实现从 S 平面到 Z 平面的单值可逆映射。
- 双线性变换法将因果稳定的模拟滤波器转换成数字滤波器仍保持因果稳定。
- 双线性变换法的最大优点是从原理上彻底消除了频谱混叠，可以设计各种滤波器（低通、高通、带通、带阻），在实际中应用更为广泛。
- 其缺点是模拟频率与数字频率具有非线性映射关系，会造成滤波器的幅频响应和相频响应的失真。
- 双线性变换法仅保持原模拟滤波器的片段常数幅频响应特性，不能保持其相频响应特性。双线性变换法适用于要求片段常数幅频响应指标的数字滤波器设计。

6.2.3 高通、带通、带阻IIR数字滤波器设计

数字域指标 \longrightarrow 模拟域指标 \longrightarrow 模拟域转换 \longrightarrow 模拟域设计

\downarrow
数字域



小结:

- 基于模拟滤波器，设计IIR数字滤波器
 - 模拟滤波器的设计
 - 模拟滤波器的指标
 - 典型模拟滤波器、设计公式、图表
 - 模拟滤波器到数字滤波器的转换
 - 脉冲响应不变法（时域逼近）
 - 双线性变换法（算法逼近）
 - 各自的优缺点及适用范围
 - 非低通滤波器的设计
 - 模拟域变换
 - 数字域变换
- } 基本原理、设计步骤、转换公式