2.4 利用Z变换对信号和系统进行分析

王柯俨
kywang@mail.xidian.edu.cn
http://web.xidian.edu.cn/kywang/teach.html

Z变换域分析的意义

- 便于考察信号、系统的特征
- 便于系统的分析与设计
- 比傅立叶变换的应用范围广

2.4.1系统的传输函数和系统函数

- 系统的时域描述 —— 单位脉冲响应h(n)

$$h(n) = T[\delta(n)]$$

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

- 系统的频域描述 —— 传输函数

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$$

表示系统的频率响应特性

系统的传输函数的意义（1）

$$x(n)=e^{j\omega_0 n} \quad -\infty<n<\infty$$ （单频复指数序列）

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)e^{j\omega_0(n-m)}=e^{j\omega_0 n}\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)e^{-j\omega_0 m}$$

$$=e^{j\omega_0 n}H(e^{j\omega_0})=\left|H(e^{j\omega_0})\right|e^{j\left[\omega_0 n+\arg H(e^{j\omega_0})\right]}$$

- 输出同频(ω_0)复指数序列
- 幅度受频率响应幅度 $\left|H(e^{j\omega_0})\right|$ 加权
- 相位为输入相位与系统相位响应之和
- 传输函数的作用：改变复指数序列的幅度和相位

系统的传输函数的意义（2）

- 输入一般信号x(n)，其输出信号y(n)的频谱函数为

$$Y(e^{j\omega})=H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

- 输出信号的频谱取决于输入信号的频谱特性和系统的传输函数
- 传输函数起着改变信号频谱结构的作用，$H(e^{j\omega})$ 称为系统的频率响应函数
- 设计不同的频率响应函数，实现对信号的放大、滤波、相位均衡等功能

系统函数

- 定义

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n}$$

- 表征系统的复频域特性

- 如果 **H(z)**的收敛域包含单位圆 $|z|=1$，则序列的傅立叶变换存在

$$\boxed{H(e^{j\omega})=H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}}$$

- 系统的传输函数是系统单位脉冲响应在单位圆上的Z变换，有时亦将系统函数称为传输函数

2.4.2 根据系统函数极点的分布分析系统的因果性和稳定性

- 系统函数的极点

$$y(n)=\sum_{i=0}^{M}b_i x(n-i)-\sum_{i=1}^{N}a_i y(n-i) \Rightarrow \sum_{i=0}^{M}b_i x(n-i)=\sum_{i=0}^{N}a_i y(n-i)$$

- Z变换，得系统函数

$$\sum_{i=0}^{M}b_i z^{-i}X(z)=\sum_{i=0}^{N}a_i z^{-i}Y(z) \Rightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{i=0}^{M}b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{N}a_i z^{-i}}$$

- 因式分解

$$H(z)=A\frac{\prod_{r=1}^{M}(1-c_r z^{-1})}{\prod_{r=1}^{N}(1-d_r z^{-1})}$$

$$H(z)=A\frac{\prod_{r=1}^{M}(1-c_r z^{-1})}{\prod_{r=1}^{N}(1-d_r z^{-1})}$$

- **A是常数，仅影响输出信号的幅度**
- c_r **是** $H(z)$ **的零点，** d_r **是** $H(z)$ **的极点**
- **零、极点分布都将影响系统的频率特性**
- **只有极点分布影响系统的因果性和稳定性**
  - **h(n) → H(z) → 收敛域 → 极点**

因果性

- 单位脉冲响应是因果序列，其Z变换的收敛域为

$$R_{x-} < |z| \le \infty$$

- 因果序列Z变换的极点在以 R_{x-} 为半径的圆内
- 结论：

因果系统的系统函数的极点均集中在某个圆内；

收敛域如下，包含 ∞ 。

$$R_{x-} < |z| \le \infty$$

稳定性

- 单位脉冲响应h(n)绝对可和，即 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$
- h(n)的Z变换：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h(n)z^{-n}\right|\Big|_{z=1}<\infty$$

- Z变换的收敛域：包含z=1（单位圆）
- <u>结论</u>：

系统稳定：系统函数的收敛域包含单位圆；
系统函数的极点不在单位圆上

因果稳定系统：系统函数的极点在单位圆内

例：一系统的极点有：

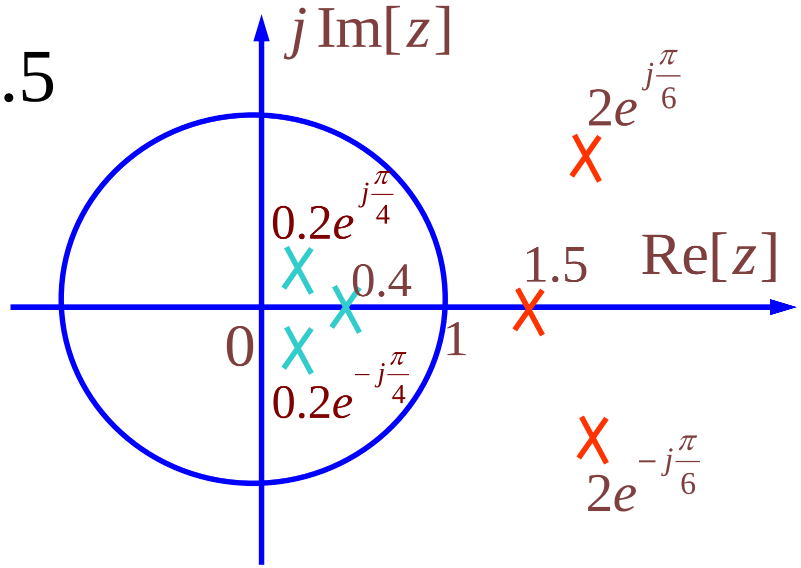
$$0.2e^{j\pi/4},\quad 0.2e^{-j\pi/4},\quad 0.4,\quad 2e^{j\pi/6},\quad 2e^{-j\pi/6},\quad 1.5$$

问什么情况下，系统为因果系统，

什么情况下，系统为稳定系统

解：因果系统： $|z|>2$

稳定系统： $0.4<|z|<1.5$



例：已知 $H(z)=\dfrac{1-a^2}{(1-az^{-1})(1-az)}$ $|a|<1$，分析系统的因果性和稳定性

解：系统的极点为 $z=a,a^{-1}$

（1）收敛域取 $|a^{-1}|<z\le\infty$

收敛域包含 ∞ **，是因果系统**

收敛域不包含单位圆，系统不稳定

单位脉冲响应为 $h(n)=a^n-a^{-n}$

（2）收敛域取 $a<|z|<a^{-1}$

收敛域不包含 ∞ **，不是因果系统**

收敛域包含单位圆，系统稳定

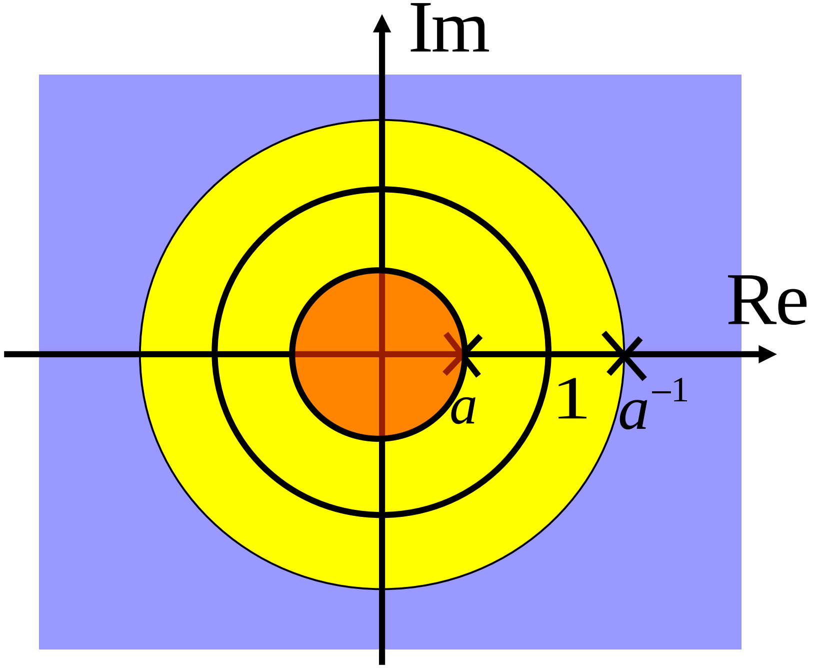
单位脉冲响应为 $h(n)=a^{|n|}$

（3）收敛域取 $|z|<|a|$

收敛域不包含 ∞ **，不是因果系统**

收敛域不包含单位圆，系统不稳定

单位脉冲响应为 $h(n)=(a^{-n}-a^n)u(-n-1)$



2.4.3 用Z变换求解系统的输出响应

- 递推法：已知差分方程、初始条件，递推求解差分方程
- 卷积
- Z变换:
  - 系统输出响应：零状态响应和零输入相应
    稳态响应和暂态响应
- Matlab

1.零状态响应与零输入响应

- 已知系统的*N*阶差分方程，输入信号**x(n)**是因果序列，系统初始条件为***y*(-1),*y*(-2),…,*y*(-*N*).**

$$y(n)=\sum_{i=0}^{M}b_i x(n-i)-\sum_{i=1}^{N}a_i y(n-i)$$

- 系统的零状态响应和零输入响应？

1.零状态响应与零输入响应

$$y(n)=\sum_{i=0}^{M}b_i x(n-i)-\sum_{i=1}^{N}a_i y(n-i)$$

- 移位序列的Z变换

$$ZT[y(n-m)u(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(n-m)u(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}y(n-m)z^{-n}$$

$$\underset{n-m=l}{=}\sum_{l=-m}^{\infty}y(l)z^{-(l+m)}=z^{-m}\sum_{l=0}^{\infty}y(l)z^{-l}+\sum_{l=-m}^{-1}y(l)z^{-(l+m)}$$

$$=z^{-m}Y(z)+z^{-m}\sum_{l=-m}^{-1}y(l)z^{-l}$$

$$ZT[y(n-1)]=z^{-1}Y(z)+y(-1)$$

$$ZT[y(n-2)]=z^{-2}Y(z)+z^{-1}y(-1)+y(-2)$$

$$ZT[y(n-3)]=z^{-3}Y(z)+z^{-2}y(-1)+z^{-1}y(-2)+y(-3)$$

$$ZT[x(n-m)u(n)] = z^{-m}[X(z) + \sum_{l=-m}^{-1} x(l)z^{-l}] \ = z^{-m}X(z)$$

- **系统的差分方程**

$$\sum_{i=0}^{M} b_i x(n-i) = \sum_{i=0}^{N} a_i y(n-i)$$

- **Z变换**

$$\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i} X(z) = \sum_{i=0}^{N} a_i \left[z^{-i} Y(z) + z^{-i} \sum_{l=-i}^{-1} y(l) z^{-l} \right]$$

$$\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i} X(z) - \sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i} \sum_{l=-i}^{-1} y(l) z^{-l} = \sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i} Y(z)$$

$$\therefore Y(z) = \frac{\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i} X(z)}{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}} - \frac{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i} \sum_{l=-i}^{-1} y(l) z^{-l}}{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}}$$

$$Y(z)=\frac{\sum_{i=0}^{M}b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{N}a_i z^{-i}}X(z)-\frac{\sum_{i=0}^{N}a_i z^{-i}\sum_{l=-i}^{-1}y(l)z^{-l}}{\sum_{i=0}^{N}a_i z^{-i}}$$

- 第一项与系统和输入信号有关，与初始状态无关

  系统的零状态响应

- 第二项与系统和初始状态有关，与输入信号无关

  系统的零输入响应

- 系统的响应

  全响应＝系统的零输入响应＋系统的零状态响应

例2.4.2 已知系统的差分方程为 $y(n)=by(n-1)+x(n), |b|<1$

输入信号为 $x(n)=a^n u(n), \quad |a|\le 1$，初始条件为 $y(-1)=2$

求系统的输出。

分析：求系统输出

- 时域：递推解法
  - 根据差分方程、输入信号、初始条件，依次递推求解
- 复频域：Z变换法（时 -> 频 -> 时）
  - 对输入信号和差分方程进行（单边）Z变换
  - 代入初始条件，整理得到Y(z)
  - 确定收敛域，对Y(z)进行逆z变换，得到y(n)

例2.4.2 已知系统的差分方程为 $y(n) = by(n-1) + x(n), |b| < 1$

输入信号为 $x(n) = a^n u(n), \quad |a| \le 1$，初始条件为 $y(-1) = 2$

求系统的输出。

解：对输入信号和差分方程进行Z变换

$$X(z) = ZT[a^n u(n)] = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

$$Y(z) = bz^{-1}Y(z) + by(-1) + X(z)$$

$$Y(z) = \frac{by(-1) + X(z)}{1 - bz^{-1}}$$

$$Y(z)=\frac{by(-1)+X(z)}{1-bz^{-1}}=\boxed{\frac{by(-1)}{1-bz^{-1}}}+\boxed{\frac{X(z)}{1-bz^{-1}}}$$

代入初始条件及输入

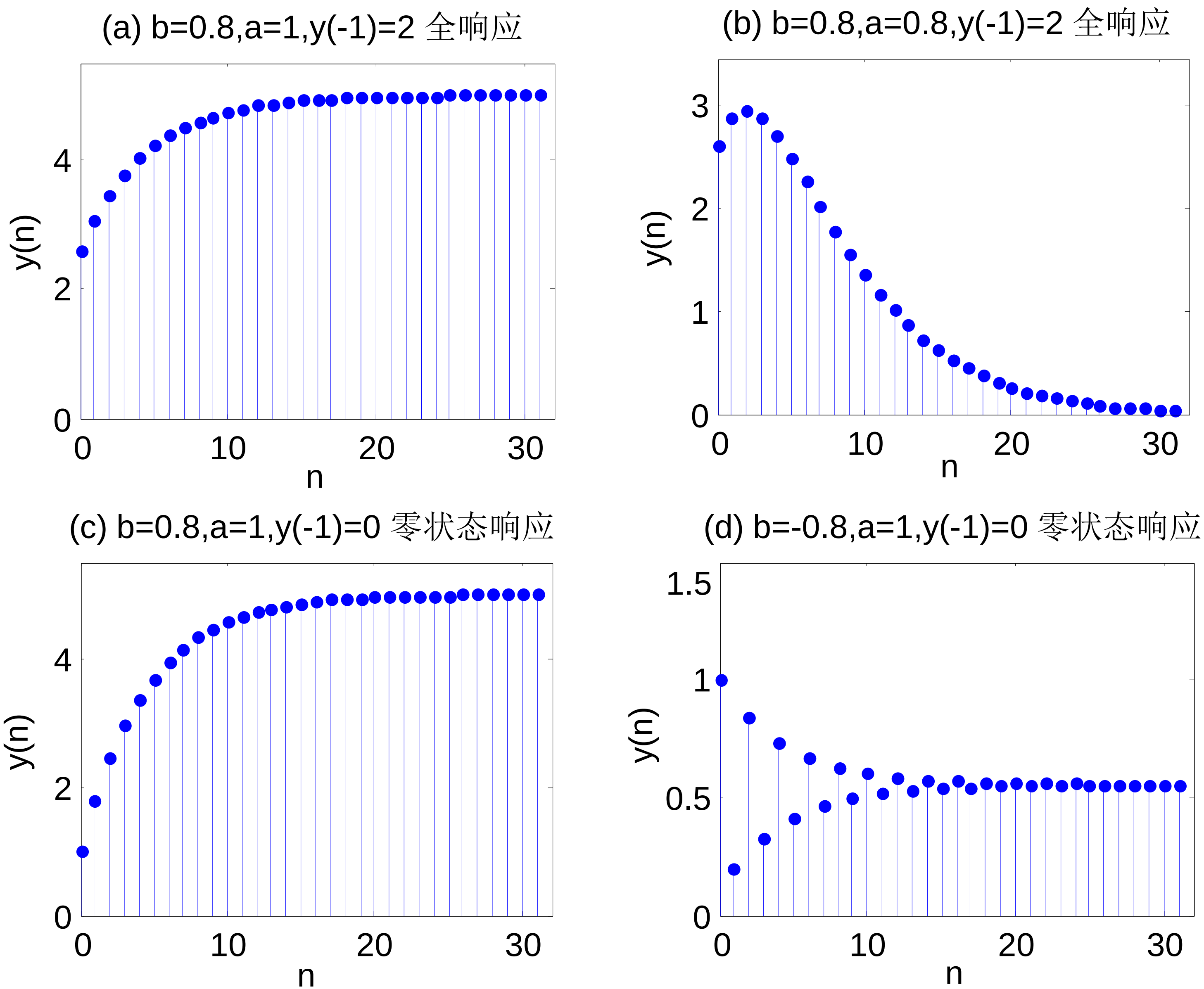
$$Y(z)=\boxed{\frac{2b}{1-bz^{-1}}}+\boxed{\frac{1}{(1-bz^{-1})(1-az^{-1})}}$$

$$Y(z)=\frac{2b}{1-bz^{-1}}+\frac{1}{a-b}\left[\frac{a}{(1-az^{-1})}-\frac{b}{(1-bz^{-1})}\right]$$

收敛域取： $|z|>\max\{|a|,|b|\}$

系统输出： $y(n)=2b\cdot b^{n}u(n)+\frac{1}{a-b}(a\cdot a^{n}-b\cdot b^{n})u(n)$

$$y(n)=\underbrace{\boxed{2b^{n+1}u(n)}}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{\boxed{\frac{1}{a-b}(a^{n+1}-b^{n+1})u(n)}}_{\text{零状态响应}}$$



观察：$n \to \infty, \quad y \to ?$

2.稳态响应和暂态响应

$$Y(z)=\boxed{\frac{\sum_{i=0}^{M}b_i z^{-i}X(z)}{\sum_{i=0}^{N}a_i z^{-i}}}-\frac{\sum_{i=0}^{N}a_i z^{-i}\sum_{l=-i}^{-1}y(l)z^{-l}}{\sum_{i=0}^{N}a_i z^{-i}}$$

- 系统的零状态响应

$$Y(z)=H(z)X(z)$$

- 系统的时域零状态响应

$$y(n)=IZT[Y(z)]$$

- 系统的稳态响应

$$y_{ss}(n)=\lim_{n\to\infty}y(n)$$

- 如果系统不稳定，$y_{ss}(n)$ 将会无限制的增长，而和输入信号无关
- 如果系统稳定，$y_{ss}(n)$将取决于输入信号和系统的频率特性。

例： $x(n) = Au(n)$

$$X(z) = ZT[x(n)] = \frac{A}{1-z^{-1}}$$

- 零状态响应

$$Y(z) = H(z)X(z) = H(z)\frac{A}{1-z^{-1}}$$

- 展为部分分式

$$Y(z) = \frac{r}{1-z^{-1}} + [H(z)\text{的极点构成的部分分式之和}]$$

其中， $r = (z-1)H(z)\left.\frac{Az}{z-1}\right|_{z=1} = AH(1)$

$$Y(z)=\frac{AH(1)}{1-z^{-1}}+[H(z)\text{的极点构成的部分分式之和}]$$

- 若系统稳定，**H(z)**的极点在单位圆内，第二部分所对应的时域序列收敛，即当 $n\to\infty$，这部分序列趋于0，称为系统的暂态响应

- 稳态响应为：

$$y_{ss}(n)=\lim_{n\to\infty}[y(n)]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[AH(1)1^{n}u(n)\right]=AH(1)$$

- 稳态响应与系统的输入信号和频率特性有关

A ***H*(1)**

$$Y(z)=\frac{AH(1)}{1-z^{-1}}+[H(z)\text{的极点构成的部分分式之和}]$$

- 如果系统不稳定，**H(z)**的部分或全部极点在单位圆外，第二部分所对应的序列发散。当 $n\to\infty$ ，这部分序列趋于无限大。
- 系统的输出与输入信号无关。

例2.4.3 已知系统的输入信号 $x(n)=u(n)$，系统函数为

$$H(z)=\frac{2z^{-1}-z^{-2}}{(1-2z^{-1})(1+0.5z^{-1})}$$

求系统的零状态输响应，并分析系统及输出响应的稳定性。

解：系统的零状态响应为：

$$Y(z)=H(z)X(z)=\frac{2z^{-1}-z^{-2}}{(1-2z^{-1})(1+0.5z^{-1})}\frac{1}{1-z^{-1}}$$

展为部分分式

$$Y(z)=\frac{-2/3}{1-z^{-1}}+\frac{6/5}{1-2z^{-1}}+\frac{-18/15}{1+0.5z^{-1}}$$

$$Y(z)=\frac{-2/3}{1-z^{-1}}+\frac{6/5}{1-2z^{-1}}+\frac{-18/15}{1+0.5z^{-1}}$$

极点为：z=1，2，-0.5

取收敛域 $|z| > 2$ ，

输出响应为：

$$y(n)=-\frac{2}{3}1^{n}+\frac{6}{5}2^{n}-\frac{18}{15}(-0.5)^{n} \qquad n\geq 0$$

输入信号

系统的不稳定极点

系统的稳定极点

系统的稳定性？ $n\to\infty,\quad y\to ?$

$$Y(z)=\frac{-2/3}{1-z^{-1}}+\frac{6/5}{1-2z^{-1}}+\frac{-18/15}{1+0.5z^{-1}}$$

极点变为：z=1，0.8，-0.5

$$H_1(z)=\frac{2z^{-1}-z^{-2}}{(1-0.8z^{-1})(1+0.5z^{-1})}$$

$$Y_1(z)=H_1(z)X(z)=\frac{10/3}{1-z^{-1}}+\frac{-13/30}{1-0.8z^{-1}}+\frac{-40/39}{1+0.5z^{-1}}$$

系统稳定，取收敛域 $|z|>1$

输出响应为：

$$y_1(n)=\frac{10}{3}1^n\boxed{-\frac{30}{13}(0.8)^n-\frac{40}{39}(-0.5)^n}\qquad n\geq 0$$

稳态响应为：

$$y_{1ss}(n)=\lim_{n\to\infty}y_1(n)=\frac{10}{3}1^n=\frac{10}{3}\quad =H_1(z)\big|_{z=1}$$

稳态输出的结论

- 条件：系统稳定，输入为单位阶跃序列 $u(n)$，
- 系统的稳态输出为

$$\boxed{y_{ss}(n)=\lim_{n\to\infty}[y(n)]=H(z)\big|_{z=1}}$$

例：设二阶系统 $H(z)=\dfrac{z^{-2}}{1+\alpha z^{-1}+\beta z^{-2}}$，输入为 $u(n)$，

其稳态输出为

$$y_{ss}(n)=H(z)\big|_{z=1}=\frac{1}{1+\alpha+\beta}$$

基于差分方程的稳态输出求解

$$H(z)=\frac{z^{-2}}{1+\alpha z^{-1}+\beta z^{-2}}$$

- 该系统稳定，其差分方程如下：

$$y(n)+\alpha y(n-1)+\beta y(n-2)=x(n-2)$$

- 输入为 $u(n)$ ，当 $n\to\infty$

$$y(n)\approx y(n-1)\approx y(n-2)=y_{ss}(n)$$

$$x(n-2)=1$$

- 于是

$$y_{ss}(n)(1+\alpha+\beta)=1 \quad \Rightarrow \quad y_{ss}(n)=\frac{1}{1+\alpha+\beta}$$

例2.4.4 因果稳定系统的传输函数和系统函数分别为：$H(e^{j\omega})$ $H(z)$，幅频特性表示为 $A(\omega)=\left|H(e^{j\omega})\right|$，相频特性表示为：$\theta(\omega)=\arg[H(e^{j\omega})]$，输入为 $x(n)=\cos(\omega_0 n)u(n)$，求 $y_{ss}(n)$

解：先求复指数序列 $e^{j\omega_0 n}$ 的稳态输出

令 $x(n)=e^{j\omega_0 n}u(n)$，其Z变换为

$$X(z)=\frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}}$$

- 系统的零状态输出为

$$Y(z)=H(z)X(z)=\frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}}H(z)$$

- 部分分式展开

$$Y(z)=\frac{r}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}}+[H(z)\text{极点形成的部分分式}]$$

式中， $r=\frac{1}{z}(z-e^{j\omega_0})\frac{z}{z-e^{j\omega_0}}H(z)\Big|_{z=e^{j\omega_0}}=H(e^{j\omega_0})$

$$=A(\omega_0)e^{j\theta(\omega_0)}$$

- 系统稳定，系统函数的极点在单位圆内，当 $n\to\infty$

H(z)极点引起的序列趋于零。

$$y_{ss}(n)=\lim_{n\to\infty}y(n)=IZT[\frac{r}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}}]$$

$$=re^{j\omega_0 n}=H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n}=A(\omega_0)e^{j[\omega_0 n+\theta(\omega_0)]}$$

$$y_{ss}(n)=H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n}=A(\omega_0)e^{j[\omega_0 n+\theta(\omega_0)]}$$

- 对于因果稳定系统
  - 输入复指数序列 $e^{j\omega_0 n}$，稳态响应为同频率的复指数序列
  - 输出的幅度与相位取决于 ω_0 处的传输函数
- 余弦序列是复指数序列的实部，因果稳定系统对于余弦序列的稳态输出为：

$$y_{css}(n)=\mathrm{Re}[y_{ss}(n)]=A(\omega_0)\cos[\omega_0 n+\theta(\omega_0)]$$

- 因果稳定系统对于正弦序列的稳态输出为：

$$y_{sss}(n)=\mathrm{Im}[y_{ss}(n)]=A(\omega_0)\sin[\omega_0 n+\theta(\omega_0)]$$

2.4.4系统稳定性的测定及稳定时间的计算

- 稳定性的判定
  - 判断极点是否在单位圆内；
  - 用单位阶跃信号进行测试；
- 稳定时间

工程上，系统的输出中暂态响应的幅度减小到最大值的**1%**，就认为系统进入稳态。

$$\left|\frac{y(M)}{\max[y(n)]}\right| < 1\% \quad n = 0,1,\cdots$$

当**n>M**时，上式成立，则**MT**为稳定时间

例： 设$H(Z)$有一个实数极点ρ_1和一对复数极点$\rho_2 e^{j\omega_0}$，$\rho_2 e^{-j\omega_0}$，

系统的输入是单位阶跃序列，系统的输出为：

$$Y(z)=\frac{H(1)}{1-z^{-1}}+[H(z)\text{的极点构成的部分分式之和}]$$

$$Y(z)=\frac{k_1}{1-\rho_1 z^{-1}}+\frac{a}{1-\rho_2 e^{j\omega_0} z^{-1}}+\frac{a^*}{1-\rho_2 e^{-j\omega_0} z^{-1}}+\frac{H(1)}{1-z^{-1}}$$

$$y(n)=k_1\rho_1^{\,n}+a\rho_2^{\,n}e^{j\omega_0 n}+a^*\rho_2^{\,n}e^{-j\omega_0 n}+\text{稳态响应}$$

$$y(n)=\boxed{k_1\rho_1^{\,n}+k_2\rho_2^{\,n}\sin(j\omega_0 n+k_3)}+\text{稳态响应}$$

暂态响应

$$y_1(n)=k_1\rho_1^{\ n}+k_2\rho_2^{\ n}\sin(j\omega_0 n+k_3)$$

- 系统稳定 $|\rho_1|<1, |\rho_2|<1$
- 稳定时间估算公式：

  设 $\rho=\max[|\rho_1|,|\rho_2|]$

  定义时间常数 $-1/\ln\rho$

  则达到暂态峰值的1%所需采样间隔数

  $$\alpha=\lfloor -4.5/\ln\rho \rfloor$$

- 估算系统到达稳态值的时间（右表）

ρ	α	ρ^{α}
0.99	448	0.011
0.95	88	0.011
0.9	43	0.011
0.8	21	0.009
0.5	7	0.007
0.3	4	0.008

2.4.5根据系统的零极点分布，分析系统的频率特性

- 系统差分方程：

$$\sum_{i=0}^{M} b_i x(n-i) = \sum_{i=0}^{N} a_i y(n-i)$$

- 系统函数

$$H(z) = A\frac{\prod_{r=1}^{M}(1-c_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_r z^{-1})} \quad , \quad A=\frac{b_0}{a_0}$$

- 时域输出与系统函数的零极点有关
- 频率特性与系统函数的零极点有关，希望根据零极点的分布进行定性的分析

$\longrightarrow$ 系统的频率响应的几何确定 $\left|H(e^{j\omega})\right|$

$$H(z) = A\frac{\prod_{r=1}^{M}(1-c_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_r z^{-1})} \quad , \quad A = \frac{b_0}{a_0}$$

- **M个零点，N个极点**
- **分子分母同乘** z^{N+M} **，得** $$H(z) = Az^{N-M}\frac{\prod_{r=1}^{M}(z-c_r)}{\prod_{k=1}^{N}(z-d_r)}$$

若(N-M)<0， z^{N+M} **表示延时N-M个单位**

若 (N-M)>0，则表示超前N-M个单位

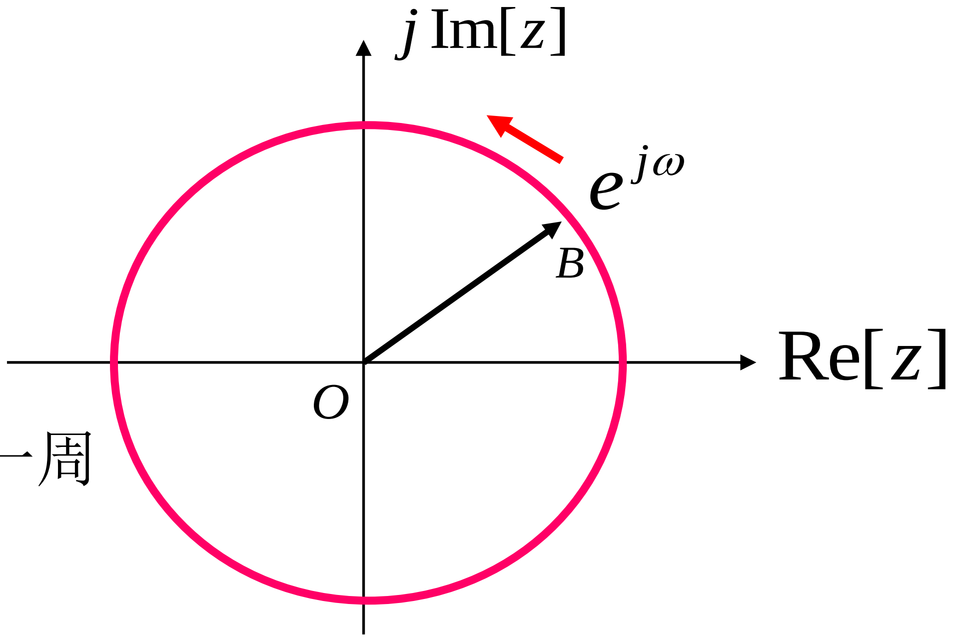
- 设系统稳定，令 $z = e^{j\omega}$

$$H(e^{j\omega}) = Ae^{j\omega(N-M)}\frac{\prod_{r=1}^{M}(e^{j\omega}-c_r)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j\omega}-d_r)}$$

$z = e^{j\omega}$在Z平面上用矢量$\overrightarrow{OB}$表示

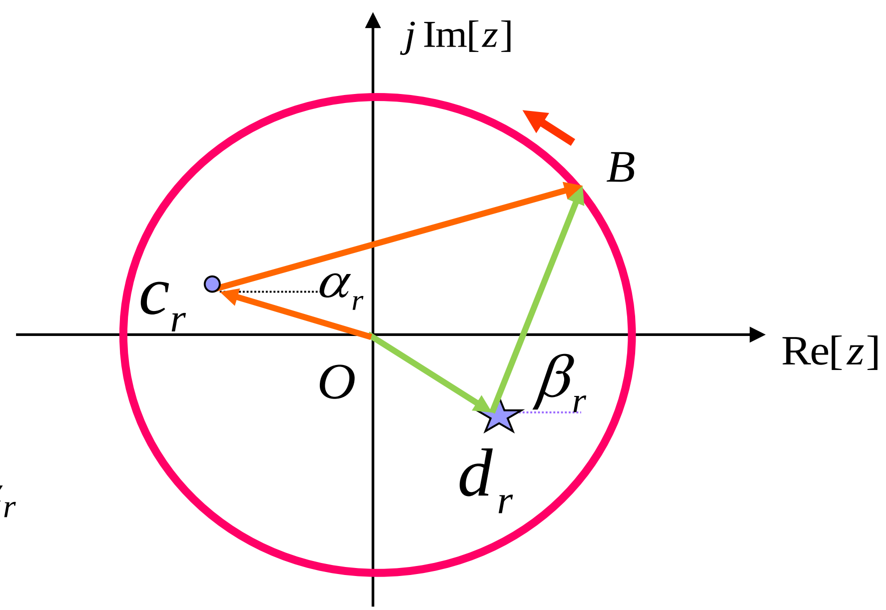
当ω从0增大，$0 \Rightarrow \pi \Rightarrow 2\pi$，

矢量$\overrightarrow{OB}$绕坐标原点逆时针旋转一周



$$H(e^{j\omega}) = Ae^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{r=1}^{M}(e^{j\omega} - c_r)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j\omega} - d_r)}$$

- 极点 $z = d_r$ 矢量 $\overrightarrow{Od_r}$
- $e^{j\omega} - d_r$ 极点矢量 $\overrightarrow{d_r B}$
- 零点 $z = c_r$ 矢量 $\overrightarrow{Oc_r}$
- $e^{j\omega} - c_r$ 零点矢量 $\overrightarrow{c_r B}$



$$\overrightarrow{d_r B} = \overline{d_r B} e^{j\beta_r} \qquad \overrightarrow{c_r B} = \overline{c_r B} e^{j\alpha_r}$$

$$H(e^{j\omega}) = Ae^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{r=1}^{M}(e^{j\omega}-c_r)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j\omega}-d_r)}$$

$$\overrightarrow{d_r B} = \overline{d_r B} e^{j\beta_r} \qquad \overrightarrow{c_r B} = \overline{c_r B} e^{j\alpha_r}$$

$$H(e^{j\omega}) = Ae^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{r=1}^{M}\overrightarrow{c_r B}}{\prod_{k=1}^{N}\overrightarrow{d_r B}} = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi(\omega)}$$

- **幅频特性**

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = |A| \frac{\prod_{r=1}^{M}\overline{c_r B}}{\prod_{k=1}^{N}\overline{d_r B}}$$

- **相频特性**

$$\varphi(\omega) = \omega(N-M) + \sum_{r=1}^{M}\alpha_r - \sum_{r=1}^{N}\beta_r$$

$$\boxed{H(e^{j\omega})} = Ae^{j\omega(N-M)}\frac{\prod_{r=1}^{M}\boxed{(e^{j\omega}-c_r)}}{\prod_{k=1}^{N}\boxed{(e^{j\omega}-d_r)}}$$

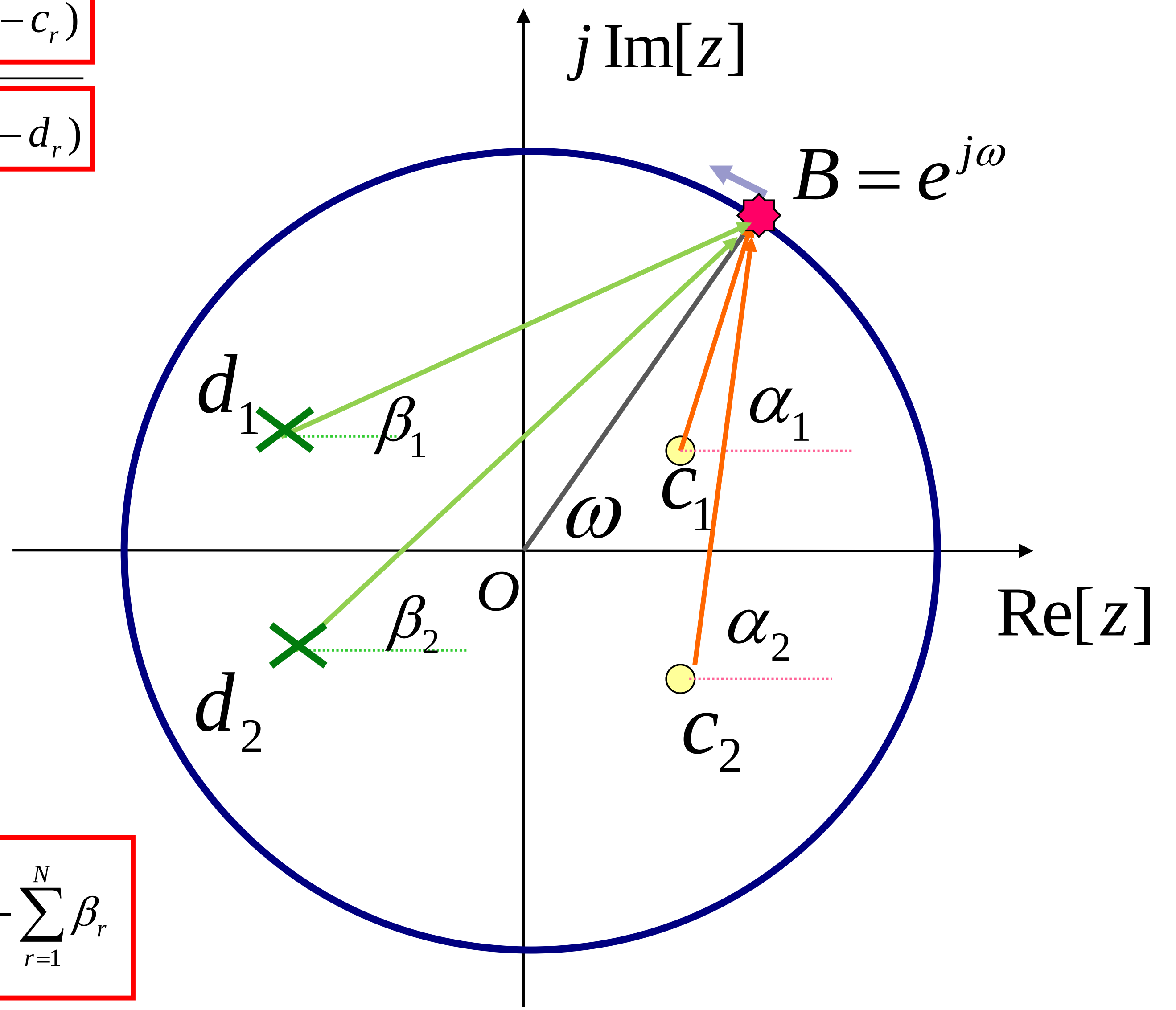
$$H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi(\omega)}$$

- **幅频特性**

$$\boxed{\left|H(e^{j\omega})\right| = |A|\frac{\prod_{r=1}^{M}\overline{c_r B}}{\prod_{k=1}^{N}\overline{d_r B}}}$$

- **相频特性**

$$\boxed{\varphi(\omega) = \omega(N-M) + \sum_{r=1}^{M}\alpha_r - \sum_{r=1}^{N}\beta_r}$$



观察：(1)零极点位于z=0处 (2)B旋转到极点附近 (3)B旋转到零点附近

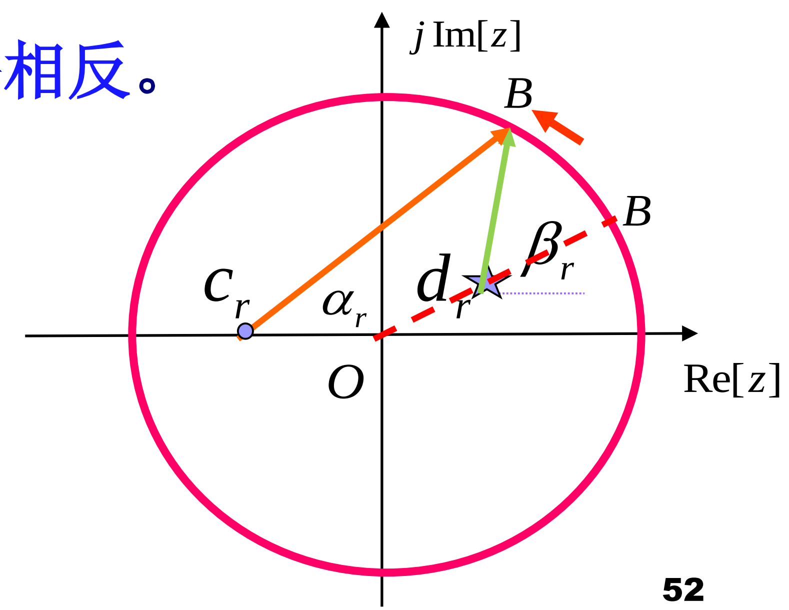
由几何法可以看出：

（1）z=0处的零极点对幅频特性 $\left|H(e^{j\omega})\right|$ 没有影响，只对相位有影响

（2）当 B 旋转到某个极点 d_r 附近时，例如在同一半径上时， $\overline{d_rB}$ 较短，则 $\left|H(e^{j\omega})\right|$ 在该点应当出现一个峰值，$\overline{d_rB}$ 越短，ω 附近越尖锐。若 d_r 落在单位圆上，则 $\overline{d_rB}=0$，则 ω 处的峰值趋于无穷大。

（3）零点的作用与极点的作用正好相反。

幅频特性 $$\left|H(e^{j\omega})\right|=|A|\frac{\prod_{r=1}^{M}\overline{c_rB}}{\prod_{k=1}^{N}\overline{d_rB}}$$



例2.4.6一阶系统的差分方程如下，定性分析系统的幅频特性

$$y(n) = by(n-1) + x(n) \quad 0 < b < 1$$

？
通
滤
波
器

解：系统函数为 $$Y(z) = bz^{-1}Y(z) + X(z)$$

$$H(z) = \frac{1}{1-bz^{-1}} = \frac{z}{z-b}$$

零点z=0，极点z=b

B点从 $\omega = 0$ 开始，沿单位圆逆时针转一圈

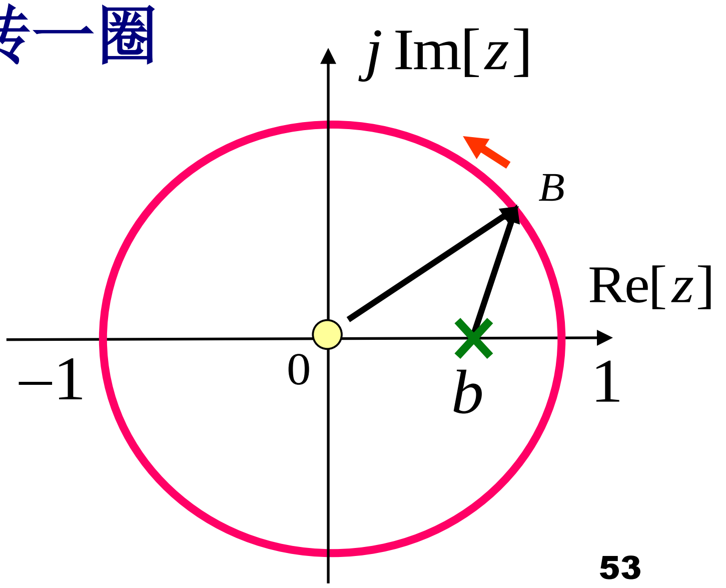
零点：对幅频特性没有影响

极点： $\omega = 0$ ，极点矢量长度最短，

峰值为1/(1-b)

$\omega = \pi$ ，极点矢量长度最长,

谷值为1/(1+b)



例2.4.6一阶系统的差分方程如下，定性分析系统的幅频特性

$$y(n) = by(n-1) + x(n) \quad 0 < b < 1$$

低通滤波器

解：系统函数为 $$Y(z) = bz^{-1}Y(z) + X(z)$$

$$H(z) = \frac{1}{1-bz^{-1}} = \frac{z}{z-b}$$

零点z=0，极点z=b

B点从 $\omega = 0$ 开始，沿单位圆逆时针转一圈

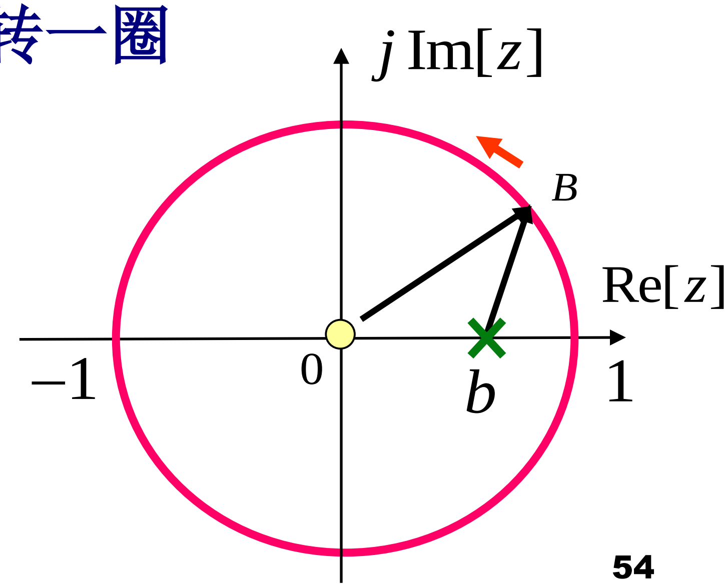
零点：对幅频特性没有影响

极点：$\omega = 0$ ，极点矢量长度最短，

峰值为1/(1-b)

$\omega = \pi$ ，极点矢量长度最长，

谷值为1/(1+b)



例2.4.7 系统函数如下，定性分析系统的幅频特性

$$H(z)=1-z^{-N}$$

解：计算零极点

$$H(z)=1-z^{-N}=\frac{z^N-1}{z^N}$$

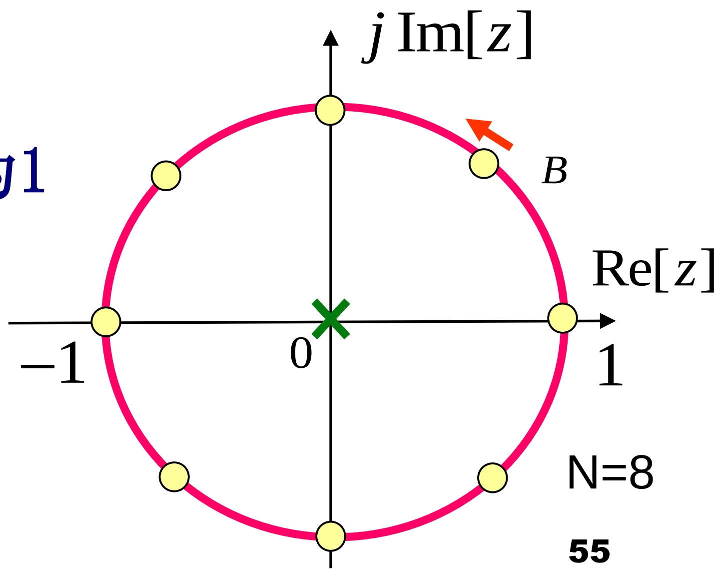
极点：N阶极点 z=0

零点：N个零点 $z_k=e^{j\frac{2\pi}{N}k} \quad k=0,1,2,\cdots,N-1$

N个零点等间隔的分布在单位圆上

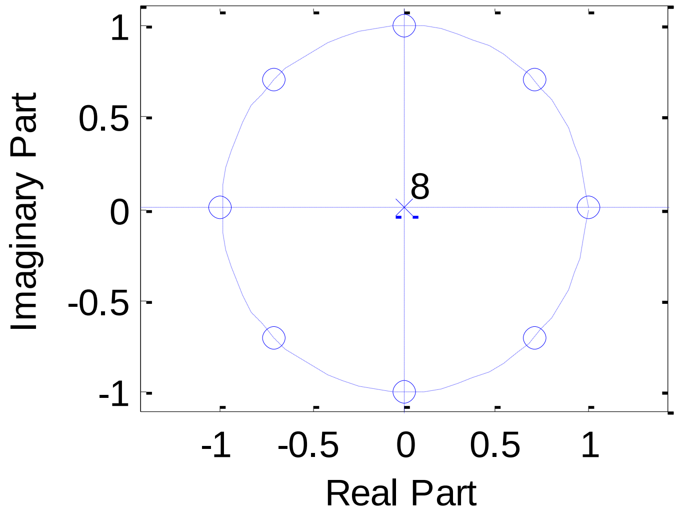
当ω变化时，极点矢量长度不变，且为1

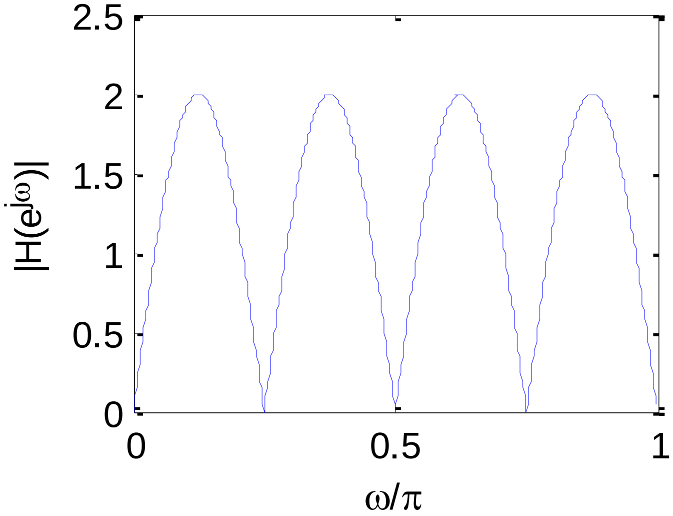
零点对幅频特性的影响？

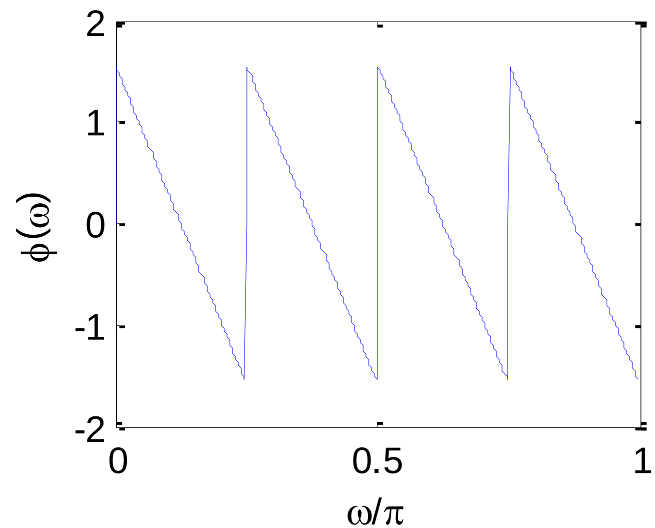


梳状滤波器

$$H(z) = 1 - z^{-N} = \frac{z^N - 1}{z^N}$$







例2.4.8 系统如下，定性分析系统的幅频特性

$$h(n) = R_N(n)$$

解：求Z变换及零极点

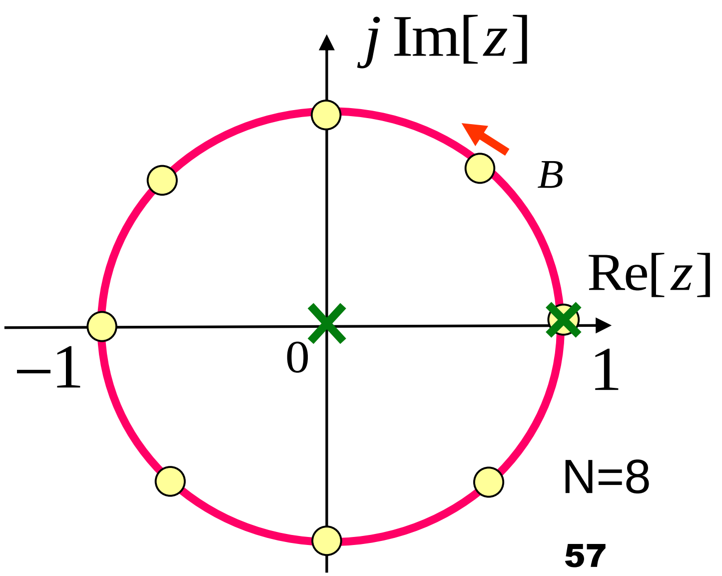
$$H(z) = ZT[R_N(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} R_N(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} = \frac{z^N - 1}{z^{N-1}(z-1)}$$

零点：N个零点 $z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k} \quad k = 0,1,2,\cdots,N-1$

极点：z=1，z=0（ N-1阶）

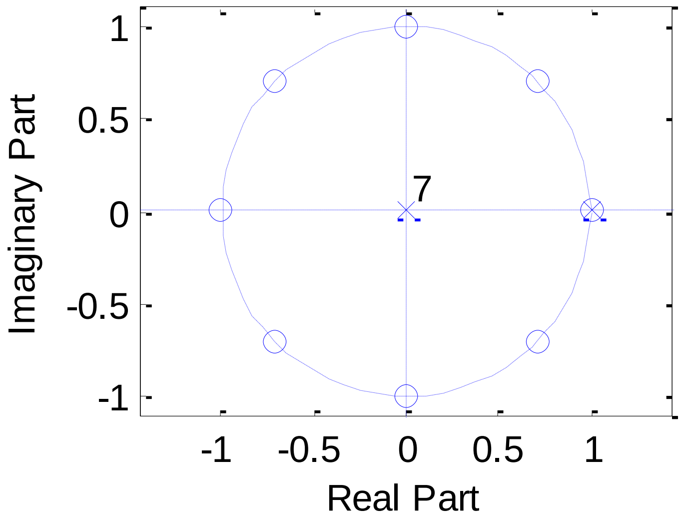
零点z=1与极点z=1相消

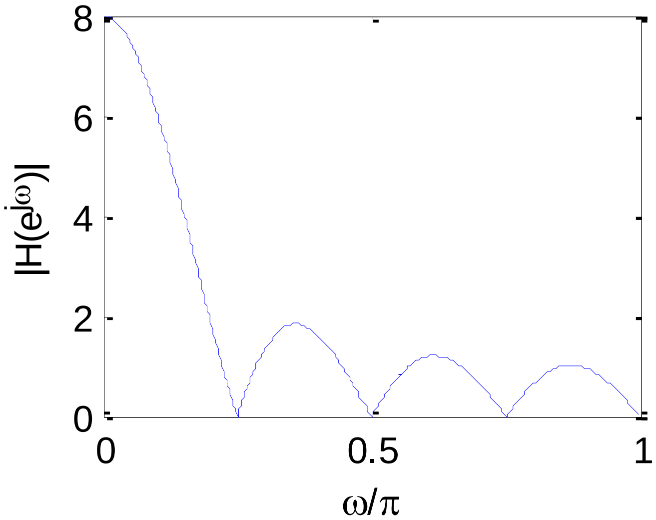
设N=8，幅频特性？



?通滤波器 **低通滤波器**

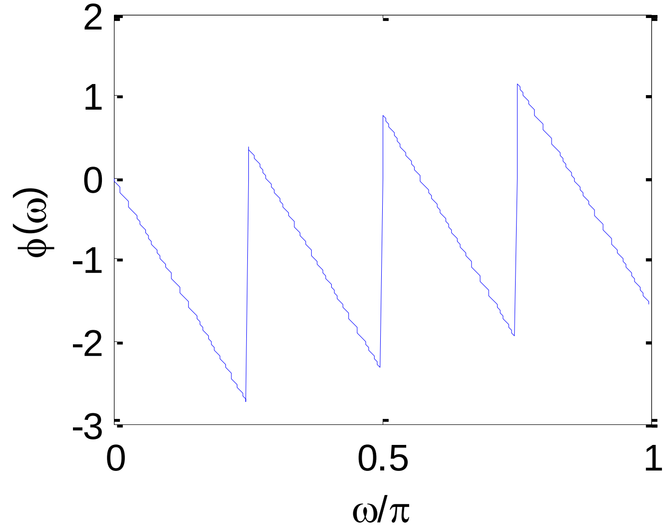
$$h(n)=R_N(n) \qquad H(z)=\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}=\frac{z^N-1}{z^{N-1}(z-1)}$$





Q: 这是学过的什么滤波器?

滑动平均滤波器



总结：零极点分布对幅频特性的影响

- 极点影响幅频特性的峰值，峰值频率在极点的附近；
- 极点越靠近单位圆，峰值越高，越尖锐；
- 极点在单位圆上，峰值幅度为无穷，系统不稳定。
- 零点影响幅频特性的谷值，谷值频率在零点的附近；
- 零点越靠近单位圆，谷值越接近零；
- 零点在单位圆上，谷值为零。
- 处于坐标原点的零极点不影响幅频特性
- 该方法适于低阶系统

用MATLAB计算零极点及频率响应

小结

- 传输函数与系统函数的概念
- 极点与因果性和稳定性之间的关系
- Z变换求解系统输出响应，时域与频域的关系
- 零极点与系统频率特性之间的关系

本章小结

- 讨论时域离散信号和系统的频域分析；
- 时域到频域的变换
  - 离散信号的傅里叶变换
  - 周期信号的傅里叶级数
  - 周期信号的傅里叶变换
  - 离散信号的z变换
- 频域分析
  - 稳定性、因果性的判定
  - 系统的频率特性
  - 系统的输出响应

作业

- 第四版新书 P78-82:

  1(3,6,7,9), 3, 4, 5(2,3,4,6), 6(4), 7, 8, 11,

  14(2,6), 15(2), 16, 21(2), 24, 25, 29

- 编程:

  P82: 31, 32