第七章 有限长单位脉冲响应（FIR）滤波器的设计方法

王柯俨
kywang@mail.xidian.edu.cn
http://web.xidian.edu.cn/kywang/teach.html

主要内容

- 线性相位FIR数字滤波器的特性
- 窗函数设计法（时间窗口法）
- 频率取样法
- IIR与FIR数字滤波器的比较

FIR数字滤波器的特点(与IIR数字滤波器比较):

- 优点：
  - 很容易获得严格的线性相位，避免被处理的信号产生相位失真，这一特点在宽频带信号处理、阵列信号处理、数据传输等系统中非常重要；
  - 极点全部在原点（永远稳定），无稳定性问题；
  - 任何一个非因果的有限长序列，总可以通过一定的延时，转变为因果序列， 所以因果性总是满足；
  - 无反馈运算，运算误差小。

FIR数字滤波器的特点(与IIR数字滤波器比较):

- 缺点:
  - 因为无极点，要获得好的过渡带特性，需以较高的阶数为代价;
  - 无法利用模拟滤波器的设计结果，一般无解析设计公式，要借助计算机辅助设计程序完成。

FIR滤波器的设计方法

- 基于逼近理想滤波器特性的方法
  - 窗函数法
  - 频率采样法
  - 等波纹最佳逼近法
- 最优设计法

7.1 线性相位FIR滤波器及其特性

- 线性相位系统的时域特性
- 线性相位系统的频域特性
- 线性相位系统H(z)的零点分布特性

1．FIR滤波器的定义

- 传输函数

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)e^{-j\omega n}=H_g(\omega)e^{j\theta(\omega)}$$

  - 幅度特性（可为负值）$H_g(\omega)$ --- 与幅频响应不同
  - 相位特性 $\theta(\omega)$ --- 与相频响应不同
- 第一类线性相位FIRDR
  - 严格线性函数：$\theta(\omega)=-\tau\omega$
- 第二类线性相位FIRDR
  - 满足：$\theta(\omega)=\theta_0-\tau\omega$

τ 为常数，θ_0 为起始相位 $\theta_0=-\dfrac{\pi}{2}$

系统的群时延

$$\tau(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}$$

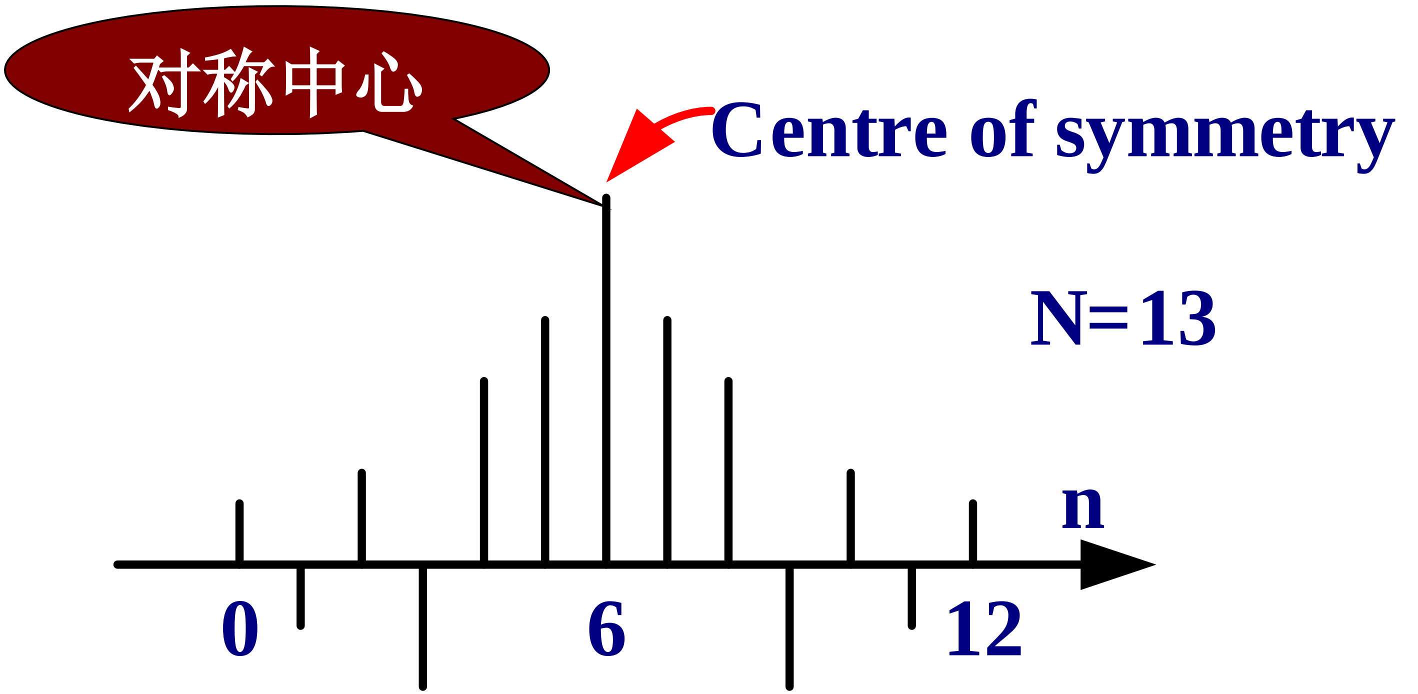
群时延均为常数，称为恒定群延时滤波器：

$$-\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} = \tau$$

（ $\theta(\omega) = -\tau\omega$ ， $\theta(\omega) = \theta_0 - \tau\omega$ ）

第一类线性相位FIRDR $\theta(\omega) = -\tau\omega$

情况1:

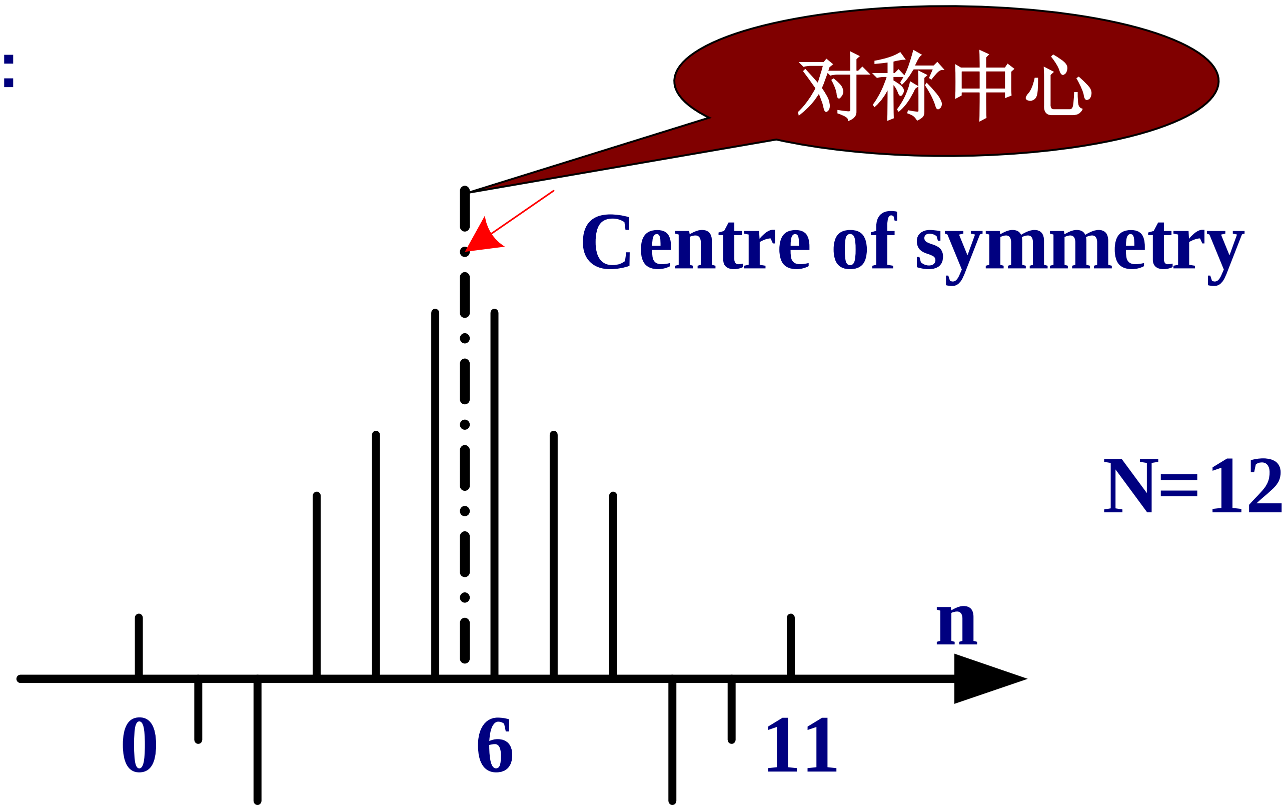


N odd, positive symmetry

N为奇数，偶对称

第一类线性相位FIRDR $\theta(\omega) = -\tau\omega$

情况 2:

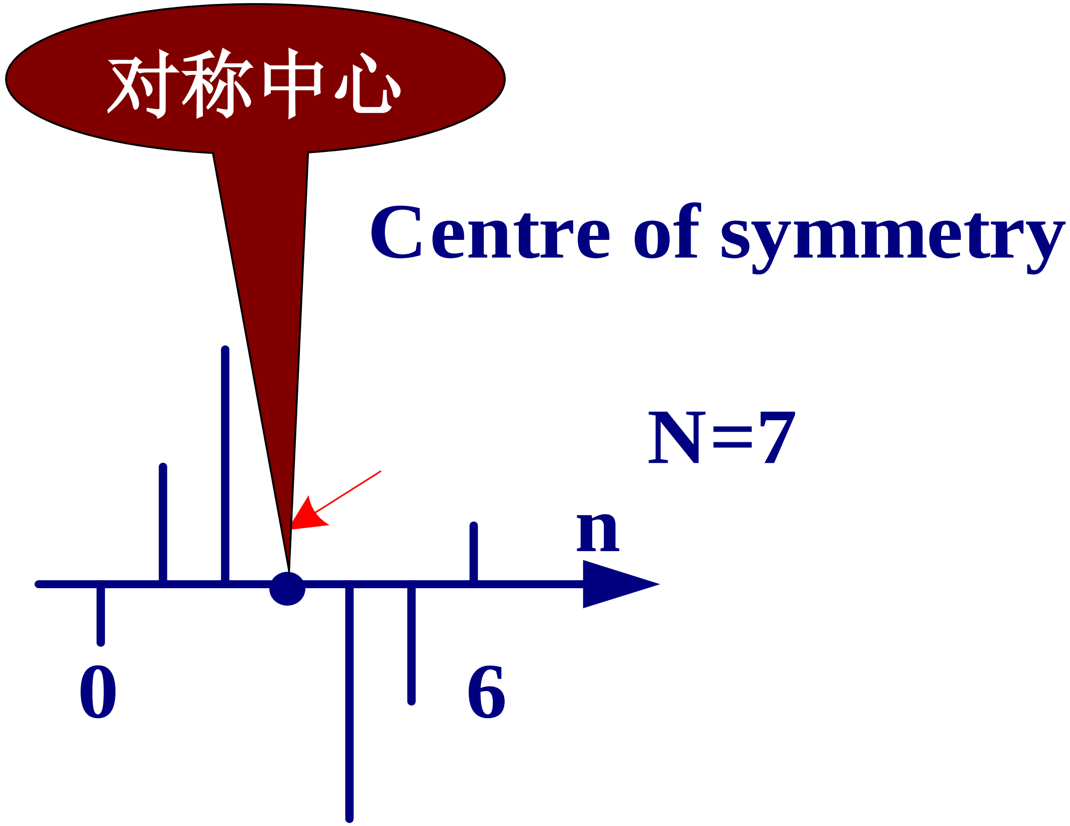


N even, positive symmetry

N为偶数，偶对称

第二类线性相位FIRDR $\theta(\omega)=\theta_0-\tau\omega$

情况 3:

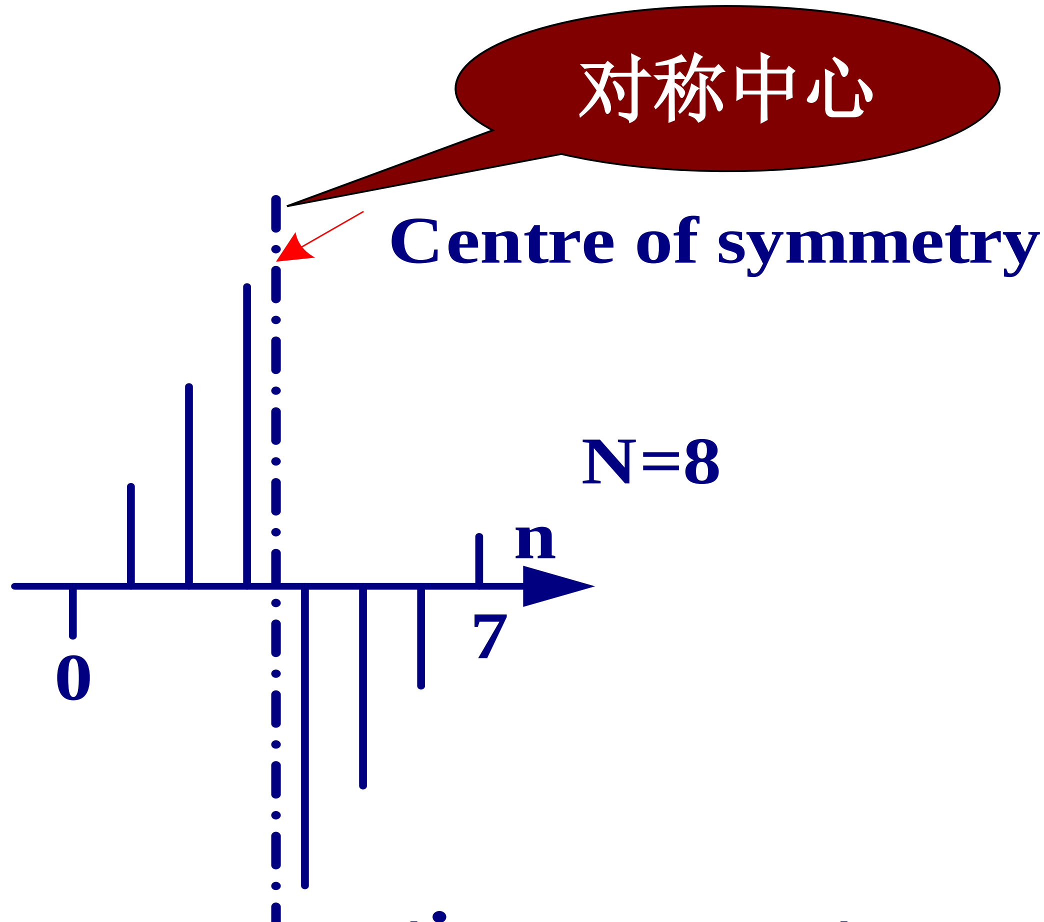


N odd, negative symmetry

N为奇数，奇对称

第二类线性相位FIRDR $\theta(\omega)=\theta_0-\tau\omega$

情况4:



N even, negative symmetry

N为偶数，奇对称

2. 线性相位条件对FIRDF时域和频域的约束

2.1 时域约束（ 对h(n)的约束 ）

- 第一类线性相位: $\theta(\omega) = -\tau\omega$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = H_g(\omega)e^{j\theta(\omega)} = H_g(\omega)e^{-j\omega\tau}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n)(\cos\omega n - j\sin\omega n) = H_g(\omega)(\cos\omega\tau - j\sin\omega\tau)$$

$$H_g(\omega)\cos\omega\tau = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos\omega n$$

$$H_g(\omega)\sin\omega\tau = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin\omega n$$

$$H_g(\omega)\cos\omega\tau=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos\omega n \quad H_g(\omega)\sin\omega\tau=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin\omega n$$

$$\frac{\cos\omega\tau}{\sin\omega\tau}=\frac{\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos\omega n}{\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin\omega n}$$

$$\sin\omega\tau\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos\omega n=\cos\omega\tau\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin\omega n$$

- 三角函数的恒等关系

$$\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin\omega(n-\tau)=0$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin\omega(n-\tau)=0$$

- 满足上式的一组解
  - $h(n)\sin\omega(n-\tau)$ 关于求和区间的中心 $(N-1)/2$ 奇对称
- 因为 $\sin\omega(n-\tau)$ 关于 $n=\tau$ 奇对称，令 $\tau=(\mathrm{N}-1)/2$

则要求 $h(\mathrm{n})$ 关于 $(N-1)/2$ 偶对称

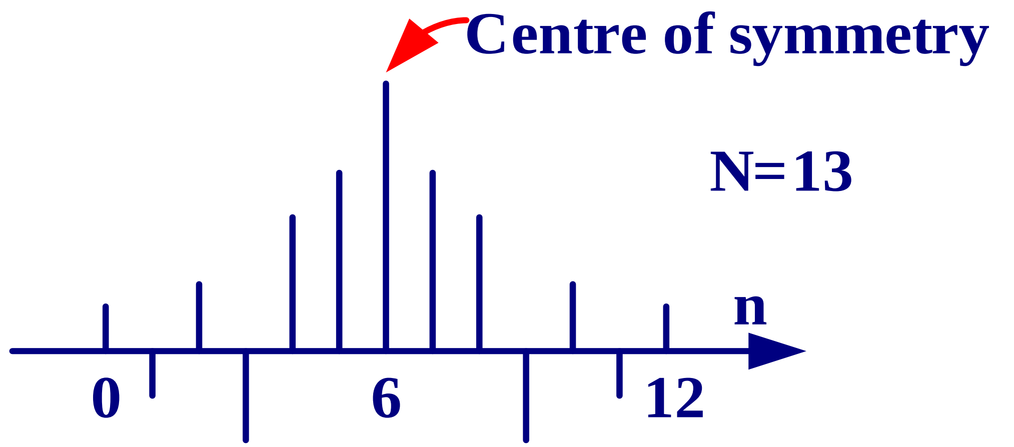
即：

$$h(n)=h(N-1-n)\quad 0\le n\le N-1$$

$$\begin{cases}\theta(\omega)=-\omega\tau\\ \tau=\dfrac{1}{2}(N-1)\end{cases}\Rightarrow \theta(\omega)=-\frac{1}{2}(N-1)\omega$$

情况1:

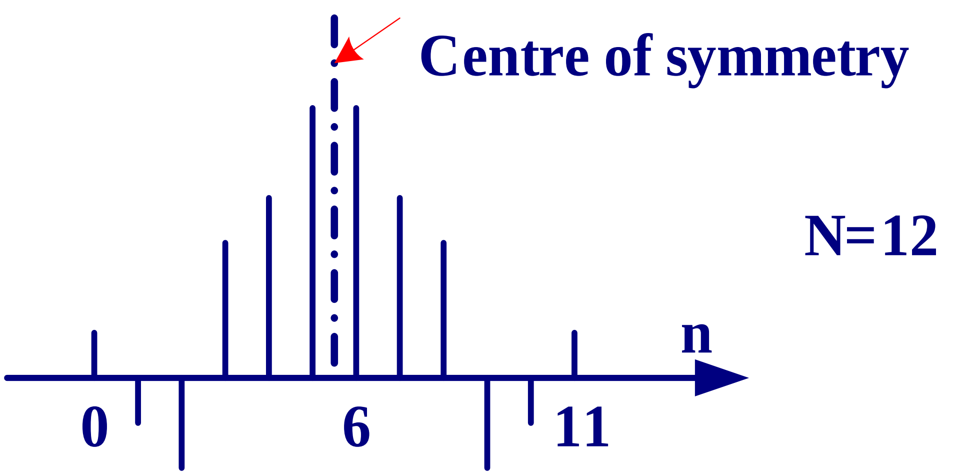
N为奇数



N odd, positive symmetry

情况2:

N为偶数



N even, positive symmetry

- 第二类线性相位 $\theta(\omega) = -\pi/2 - \omega\tau$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = H_g(\omega)e^{-j(\pi/2+\omega\tau)}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n)(\cos\omega n - j\sin\omega n) = -H_g(\omega)(\sin\omega\tau + j\cos\omega\tau)$$

$$-H_g(\omega)\sin\omega\tau = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos\omega n$$

$$H_g(\omega)\cos\omega\tau = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin\omega n$$

$$-H_g(\omega)\sin\omega\tau=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos\omega n \quad H_g(\omega)\cos\omega\tau=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin\omega n$$

$$-\frac{\sin\omega\tau}{\cos\omega\tau}=\frac{\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos\omega n}{\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin\omega n}$$

$$\cos\omega\tau\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos\omega n+\sin\omega\tau\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin\omega n=0$$

- 三角函数的恒等关系

$$\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos\omega(n-\tau)=0$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos\omega(n-\tau)=0$$

- 满足上式的一组解
  - $h(n)\cos\omega(n-\tau)$关于求和区间的中心 $(N-1)/2$奇对称
- 因为 $\cos\omega(n-\tau)$ 关于$n=\tau$ 偶对称， 令$\tau=(\mathrm{N}-1)/2$

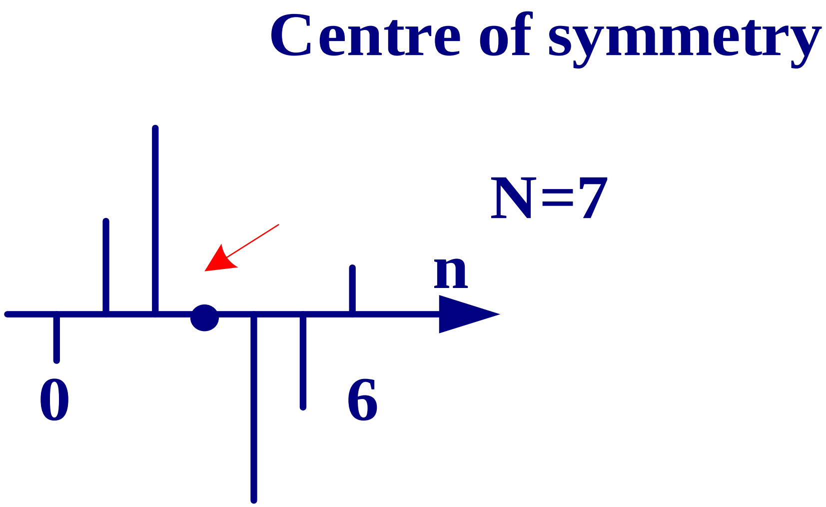
则要求 $h(\mathrm{n})$ 关于 $(N-1)/2$ 奇对称

即：

$$\begin{cases} \theta(\omega)=-\dfrac{\pi}{2}-\omega\tau \quad ,\tau=\dfrac{1}{2}(N-1) \\ h(n)=-h(N-1-n) \quad 0\le n\le N-1 \end{cases}$$

情况3:

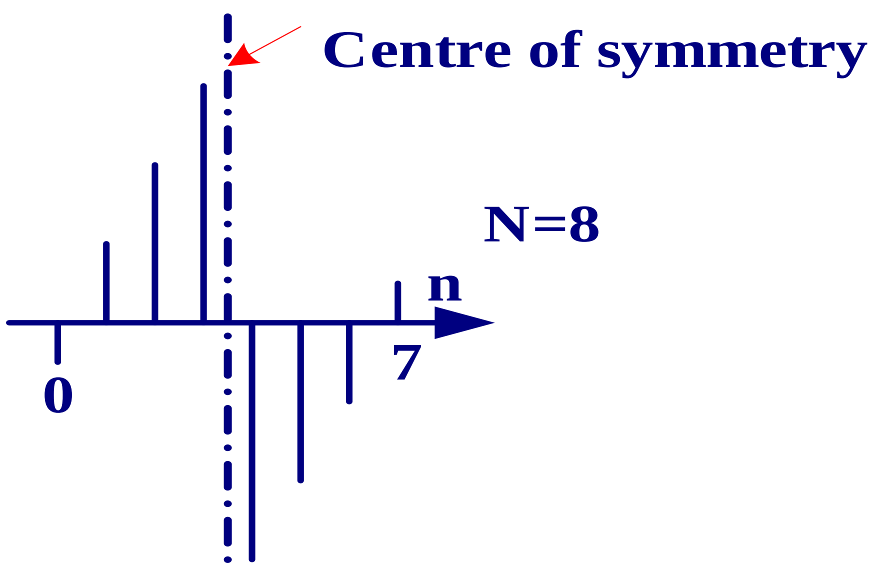
N为奇数



N odd, negative symmetry

情况4:

N为偶数



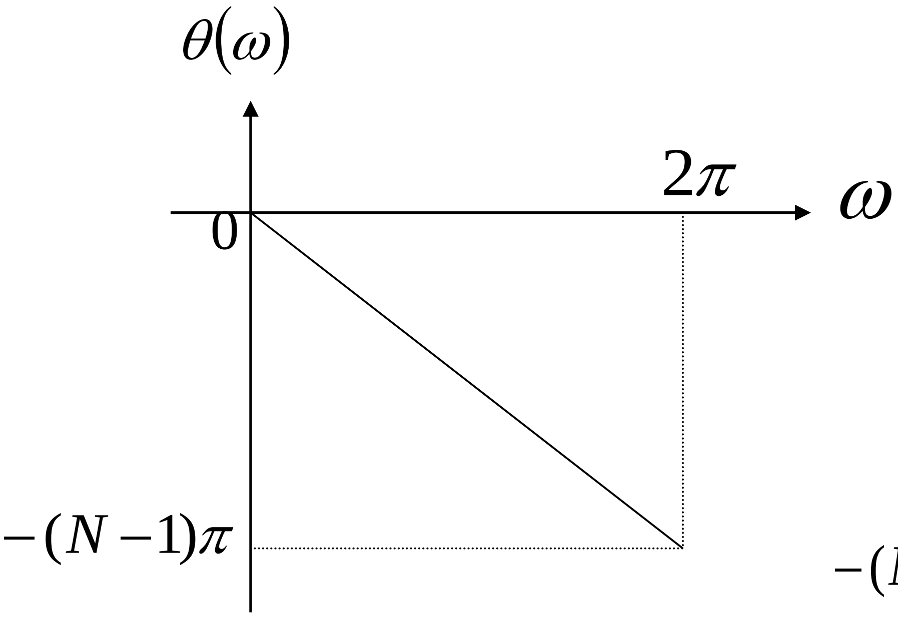
N even, negative symmetry

第一类线性相位FIRDF

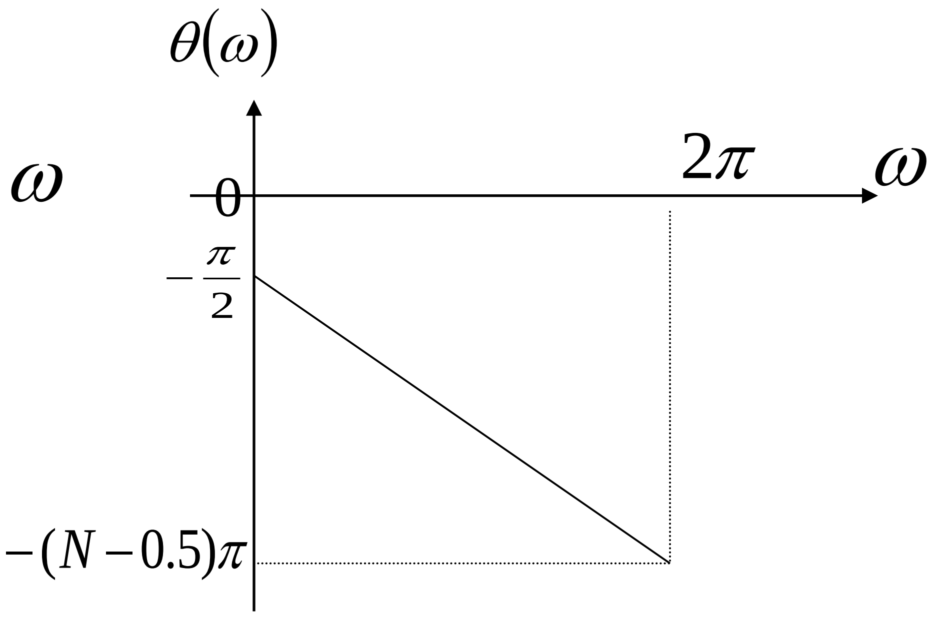
$\theta(\omega) = -\omega(N-1)/2$

第二类线性相位FIRDF

$\theta(\omega) = -\pi/2 - \omega(N-1)/2$



$h(n)$ 偶对称



$h(n)$ 奇对称

图1　线性相位特性

2.2 频域约束（ 对$H_g(\omega)$的约束 ）

- 两类线性相位FIR滤波器在N取奇数和偶数时，幅度特性各不相同。
- 两个参数：

$$\tau = \frac{N-1}{2} \qquad M = \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor$$

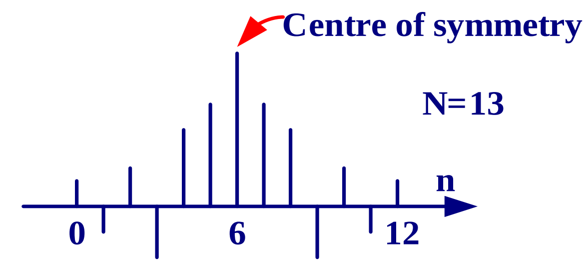
（1）情况1：h(n)=h(N-n-1)，N为奇数

（2）情况2：h(n)=h(N-n-1)，N为偶数

（3）情况3：h(n)=-h(N-n-1)，N为奇数

（4）情况4：h(n)=-h(N-n-1)，N为偶数

（1）情况1：h(n)=h(N-n-1)，N为奇数



N odd, positive symmetry

- 幅度特性：

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\boxed{H_g(\omega)e^{-j\omega\tau}}=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)e^{-j\omega n}$$

$$=h\left(\frac{N-1}{2}\right)e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}+\sum_{n=0}^{M-1}[h(n)e^{-j\omega n}+h(N-n-1)e^{-j\omega(N-n-1)}]$$

$$=e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}\left\{h\left(\frac{N-1}{2}\right)+\sum_{n=0}^{M-1}[h(n)e^{-j\omega(n-\frac{N-1}{2})}+h(n)e^{j\omega(n-\frac{N-1}{2})}]\right\}$$

$$=\boxed{e^{-j\omega\tau}\left\{h(\tau)+\sum_{n=0}^{M-1}[2h(n)\cos\omega(n-\tau)]\right\}}\qquad(\tau=\frac{N-1}{2})$$

$$\therefore\quad H_g(\omega)=h(\tau)+\sum_{n=0}^{M-1}2h(n)\cos\left[\omega\left(n-\tau\right)\right],\quad \theta(\omega)=-\omega\tau$$

（1）情况1：h(n)=h(N-n-1)，N为奇数

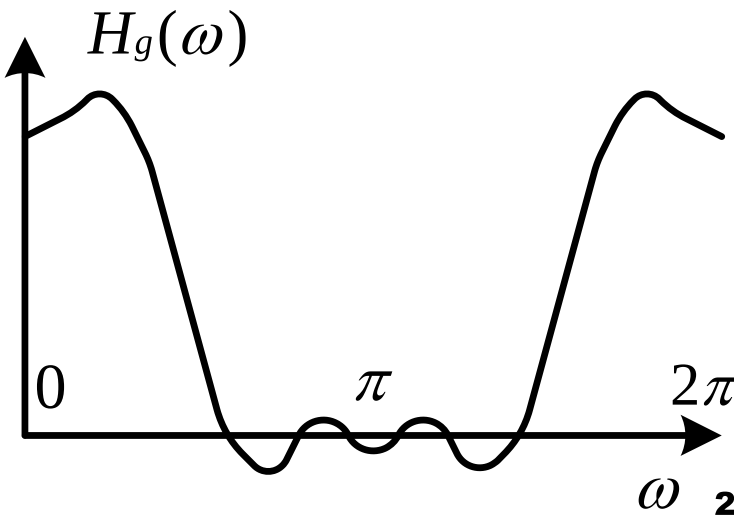
- 幅度特性：

$$H_g(\omega)=h(\tau)+\sum_{n=0}^{M-1}2h(n)\cos\left[\omega\left(n-\tau\right)\right]$$

- 相位特性：

$$\theta(\omega)=-\omega\tau$$

- 由于 $\cos\omega(n-\tau)$关于$\omega=0,\pi,2\pi$ 偶对称，因此 $H_g(\omega)$ 对这些频率也呈偶对称

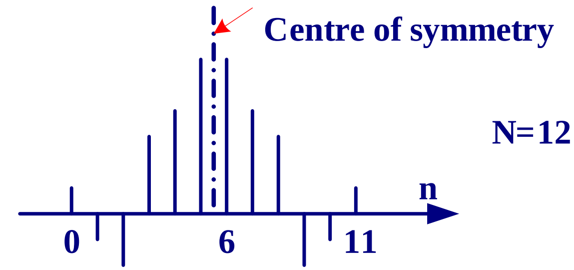


- 可实现的滤波器类型？

低通、高通、

带通、带阻

（2）情况2：h(n)=h(N-n-1)，N为偶数



N even, positive symmetry

- 幅度特性：

$$H\left(e^{j\omega}\right)=H_g\left(\omega\right)e^{-j\omega\tau}=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{n=0}^{M}[h(n)e^{-j\omega n}+h(N-n-1)e^{-j\omega(N-n-1)}]$$

$$=e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}\left\{\sum_{n=0}^{M}[h(n)e^{-j\omega(n-\frac{N-1}{2})}+h(n)e^{j\omega(n-\frac{N-1}{2})}]\right\}$$

$$=e^{-j\omega\tau}\sum_{n=0}^{M}2h(n)\cos\omega(n-\tau)$$

$$\therefore H_g(\omega)=\sum_{n=0}^{M}2h(n)\cos\left[\omega\left(n-\tau\right)\right]\ ,\quad \theta(\omega)=-\omega\tau$$

（2）情况2：h(n)=h(N-n-1)，N为偶数

- 幅度特性： $H_g(\omega)=\sum_{n=0}^{M}2h(n)\cos\left[\omega\left(n-\tau\right)\right]$
- 相位特性： $\theta(\omega)=-\omega\tau$
- 由于 $\cos\omega(n-\tau)$关于$\omega=0,2\pi$ 偶对称，因此 $H_g(\omega)$ 对这些频率也呈偶对称。
- 由于 $\cos\left[\pi\left(n-\tau\right)\right]=\cos[\pi(n-N/2+1/2)]=-\sin[\pi(n-N/2)]=0$

$$\therefore \quad H_g(\pi)=0$$

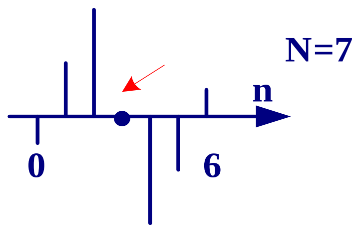
且$\cos\omega(n-\tau)$关于$\omega=\pi$奇对称，故$H_g(\omega)$ 也呈奇对称。

- 可实现的滤波器类型？

不能用于设计高通、带阻滤波器。 $(H_g(\pi)=0)$

（3）情况3：h(n)=-h(N-n-1)，N为奇数

Centre of symmetry



N odd, negative symmetry

- 相位特性： $\theta(\omega) = -\pi/2 - \omega\tau$
- 幅度特性：

$$H\left(e^{j\omega}\right) = H_g\left(\omega\right)e^{j\theta(\omega)} = \sum_{n=0}^{N-1} h\left(n\right)e^{-j\omega n} \qquad h\left(\frac{N-1}{2}\right) = 0$$

$$= \sum_{n=0}^{M-1}\left[h\left(n\right)e^{-j\omega n} + h\left(N-n-1\right)e^{-j\omega\left(N-n-1\right)}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{M-1}[h\left(n\right)e^{-j\omega n} - h\left(n\right)e^{-j\omega\left(N-n-1\right)}]$$

（3）情况3：h(n)=-h(N-n-1)，N为奇数

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=0}^{M-1}[h\left(n\right)e^{-j\omega n}-h\left(n\right)e^{-j\omega\left(N-n-1\right)}]$$

$$=e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)}\sum_{n=0}^{M-1}[h(n)e^{-j\omega(n-\frac{N-1}{2})}-h(n)e^{j\omega(n-\frac{N-1}{2})}]$$

$$=-je^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)}\sum_{n=0}^{M-1}2h\left(n\right)\sin\left[\omega\left(n-\frac{N-1}{2}\right)\right]$$

$$=e^{-j\left[\omega\tau+\frac{\pi}{2}\right]}\sum_{n=0}^{M-1}2h\left(n\right)\sin\left[\omega\left(n-\tau\right)\right]=H_g\left(\omega\right)e^{j\theta(\omega)}$$

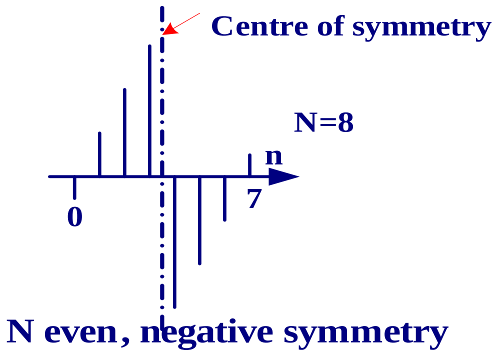
$$\therefore\quad H_g(\omega)=\sum_{n=0}^{M-1}2h\left(n\right)\sin\left[\omega\left(n-\tau\right)\right]$$

（3）情况3：h(n)=-h(N-n-1)，N为奇数

- 相位特性： $\theta(\omega) = -\pi/2 - \omega\tau$
- 幅度特性： $H_g(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n)\sin\left[\omega\left(n-\tau\right)\right]$
- $\sin[\omega(n-\tau)]$关于$\omega=0,\pi,2\pi$ 点呈奇对称，故 $H_g(\omega)$ 对这些点也呈奇对称
- $\omega=0,\pi,2\pi$ 时，$\sin n\omega = 0, H_g(\omega) = 0$，即$H(z)$在 $z = \pm 1$ 处有两个零点
- 可实现的滤波器类型？

  不能设计 $H(0) \neq 0$和$H(\pi) \neq 0$ 的滤波器，故不能实现低通、高通和带阻滤波器，只能实现带通滤波器。

（4）情况4：h(n)=-h(N-n-1)，N为偶数



- 相位特性： $\theta(\omega) = -\pi/2 - \omega\tau$

$$\tau = N/2 - 1/2$$

- 幅度特性： $H_g(\omega) = \sum_{n=0}^{M} 2h(n)\sin\left[\omega(n-\tau)\right]$

- $H_g(\omega)$ 在 $\omega=0, 2\pi$ 处为零，即**H(z)**在 **z=1**处有零点
- $H_g(\omega)$ 关于$\omega=0, 2\pi$ 奇对称，关于 $\omega=\pi$ 偶对称
- 可实现的滤波器类型？

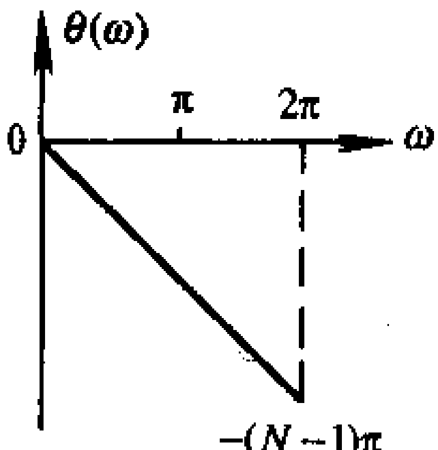
不能用于设计低通和带阻滤波器 $(H_g(0)=0)$

$$(H_g(2\pi)=0)$$

偶对称单位脉冲响应　$h(n)=h(N-1-n)$

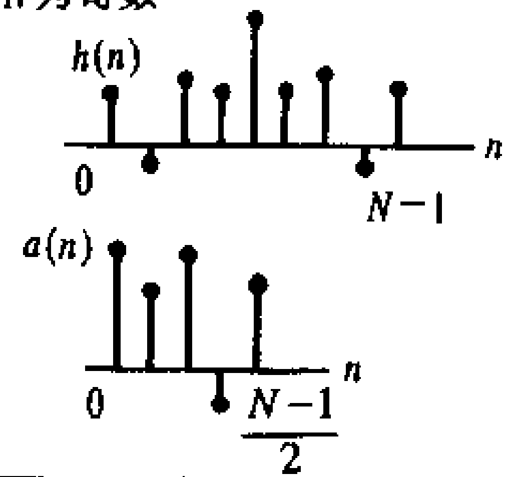
相位响应（情况1、情况2）

$$\theta(\omega)=-\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)$$

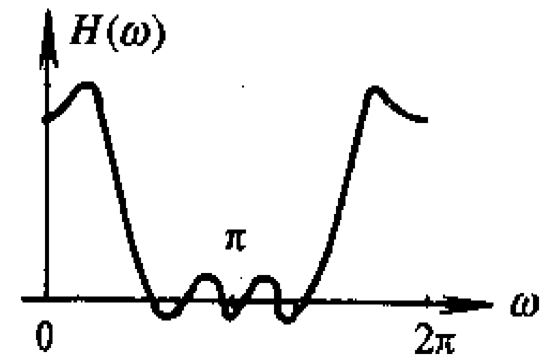


情况1

N为奇数

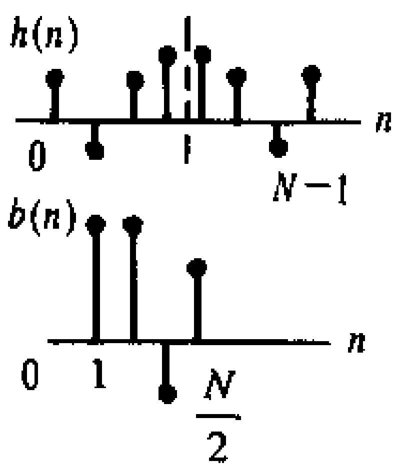


$$H_g(\omega)=\sum_{n=0}^{(N-1)/2}a(n)\cos n\omega$$

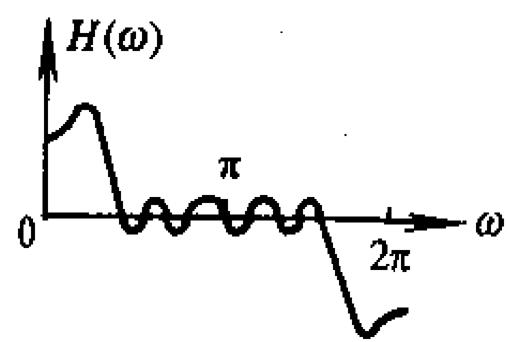


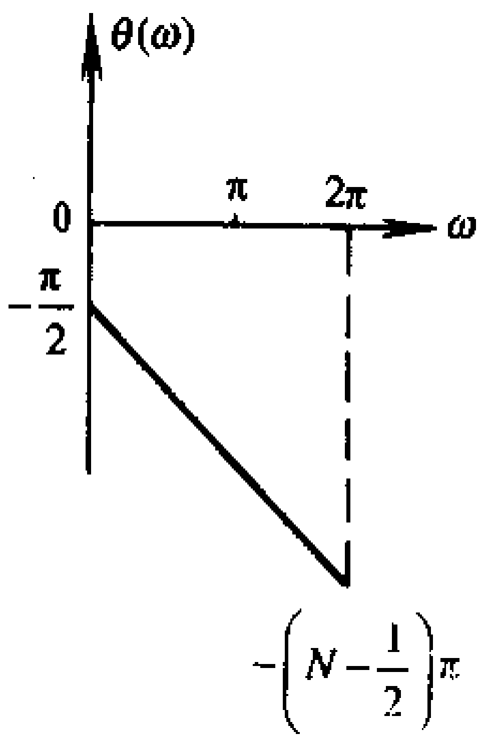
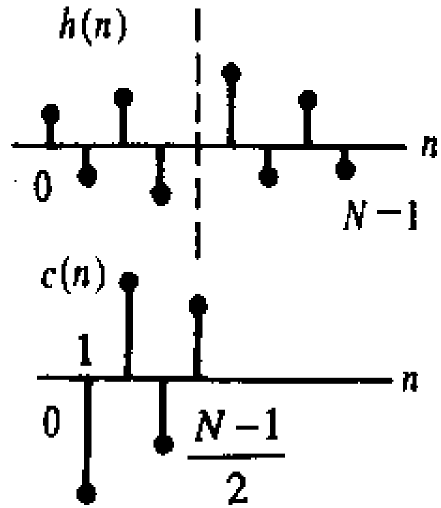
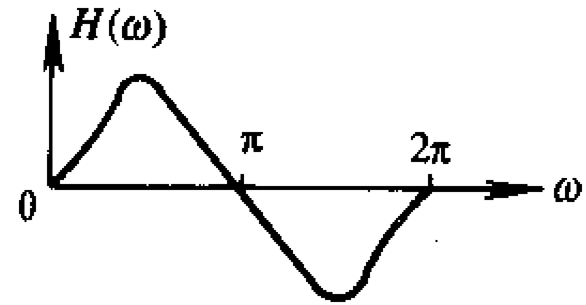
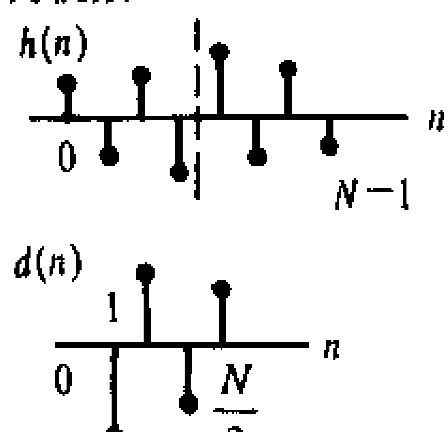
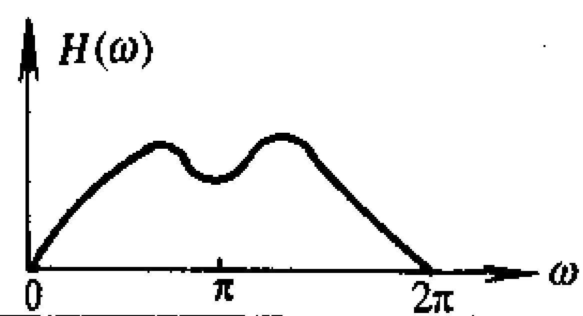
情况2

N为偶数



$$H_g(\omega)=\sum_{n=1}^{N/2}b(n)\cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\omega\right]$$



<table>
<tr>
<td>情况3</td>
<td rowspan="2">相位响应
$$\theta(\omega)=-\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)-\frac{\pi}{2}$$

</td>
<td>N为奇数

</td>
<td>$$H_g(\omega)=\sum_{n=1}^{(N-1)/2}c(n)\sin(n\omega)$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>情况4</td>
<td>N为偶数

</td>
<td>$$H_g(\omega)=\sum_{n=1}^{N/2}d(n)\sin\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]$$

</td>
</tr>
</table>

【总结】四种线性相位FIR DF特性

第一种情况，h(n)偶、N奇，四种滤波器都可设计

第二种情况， h(n)偶、N偶，可设计低、带通滤波器，不能设计 高通和带阻。

第三种情况， h(n)奇、N奇，只能设计带通滤波器，其它滤波器都不能设计。

第四种情况， h(n)奇、N偶，可设计高通、带通滤波器，不能设计低通和带阻。

一般微分器与90°相移器用3、4;

选频性滤波器用1、2。

例1 $N=5$, $h(0) = h(1) = h(3) = h(4) = -1/2$, $h(2) = 2$， 求幅度函数$H(\omega)$。

解： N为奇数并且$h(n)$满足偶对称关系

$a(0) = h(2) = 2$

$a(1) = 2h(1) = -1$

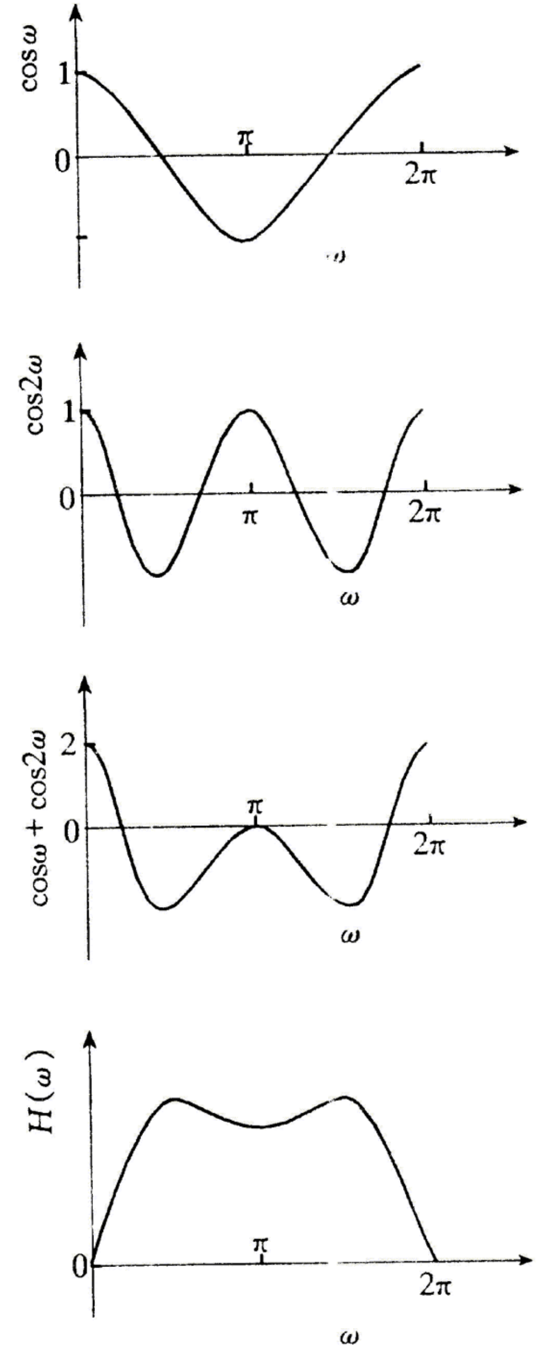
$a(2) = 2h(0) = -1$

$H(\omega) = 2 - \cos\omega - \cos 2\omega$

$= 2 - (\cos\omega + \cos 2\omega)$

$$a(0)=h\left(\frac{N-1}{2}\right), a(n)=2h\left(\frac{N-1}{2}-n\right), n=1,2,\cdots,\frac{N-1}{2}$$

$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1/2} a(n)\cos n\omega$$



小结：

- 四种FIR数字滤波器的相位特性只取决于h(n)的对称性，而与h(n)的值无关。
- 幅度特性取决于h(n)。
- 设计FIR数字滤波器时，在保证h(n)对称的条件下，只要完成幅度特性的逼近即可。

2.3 线性相位FIR滤波器的零点特性

$$\because h(n) = \pm h(N-1-n)$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = \pm \sum_{n=0}^{N-1} h(N-n-1) z^{-n}$$

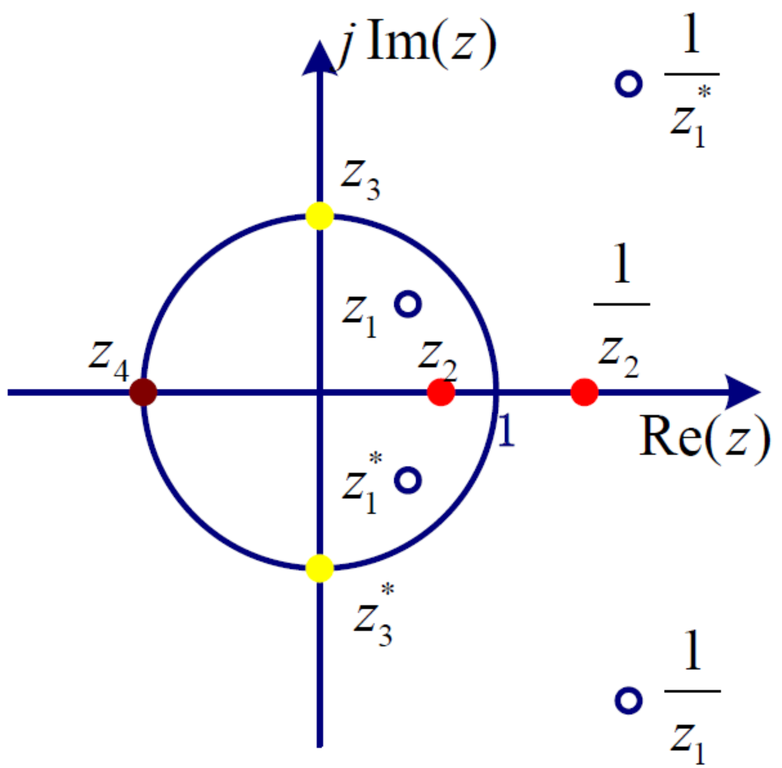
$$= \pm \sum_{m=0}^{N-1} h(m) z^{-(N-1-m)} = \pm z^{-(N-1)} \sum_{m=0}^{N-1} h(m) z^{+m}$$

$$= \pm z^{-(N-1)} H\left(z^{-1}\right)$$

- 如 $z = z_i$ 是H(z)的零点，其倒数 z_i^{-1} 也是其零点；
- 因h(n)是实序列，H(z)的零点必共轭成对，z_i^* 和 $(z_i^{-1})^*$ 也是其零点；

$$H(z)=\pm z^{-(N-1)}H\left(z^{-1}\right)$$

- 所以线性相位滤波器的零点必须是互为倒数的共轭对，即成四出现，确定其中一个零点，其他零点也随之确定。

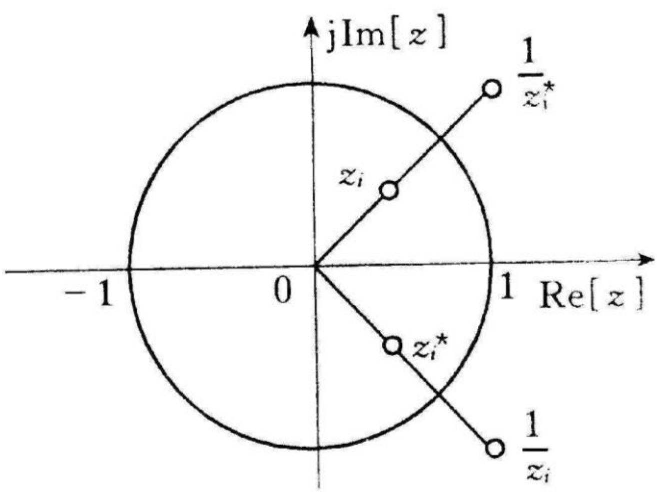


零点分别是复数、纯虚数、实数和单位圆上的实数

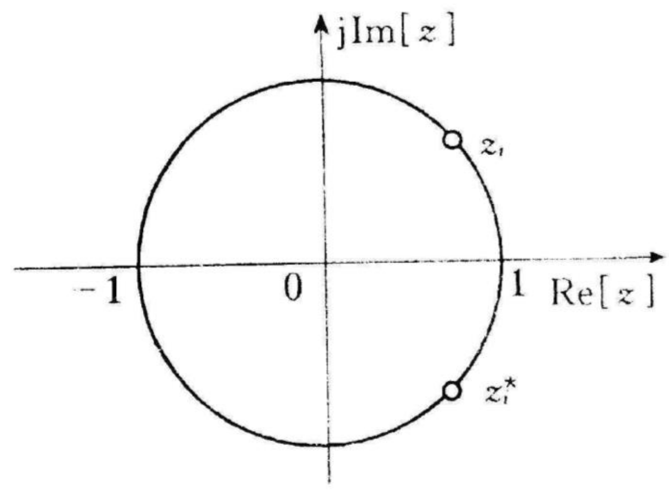
这种共轭对共有四种可能的情况：

①既不在单位园上，也不在实轴上，有四个互为倒数的两组共轭对，z_i，z^*_i，$1/z_i$ 和 $1/z^*_i$，图(a)

②在单位圆上，但不在实轴上，因倒数就是自己的共轭，所以有一对共轭零点，z_i，z^*_i，图(b)



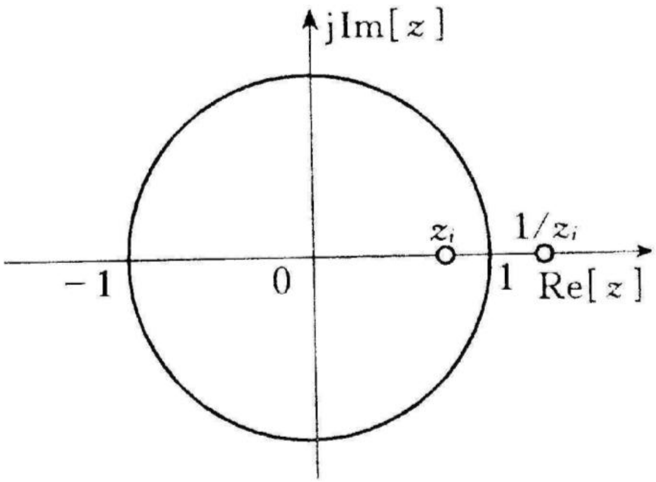
(a) z_i既不在单位圆上也不在实轴上



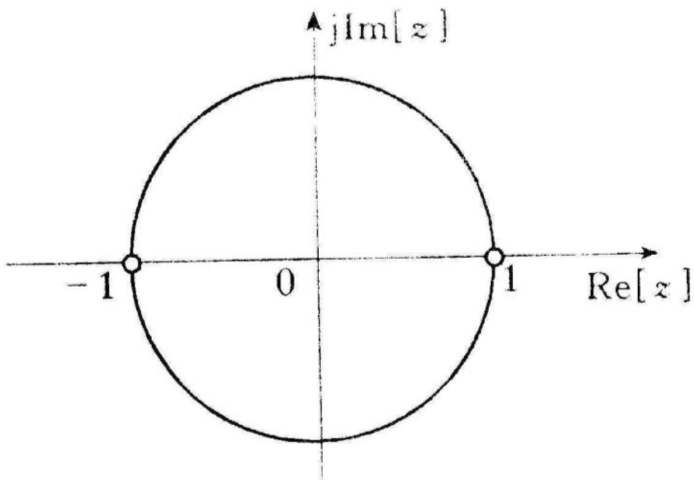
(b) z_i在单位圆上但不在实轴上

③不在单位圆上，但在实轴上，是实数，共轭就是自己，所以有一对互为倒数的零点， z_i 和 $1/z_i$ ， 图(c)

④又在单位圆上，又在实轴上，共轭和倒数都合为一点，所以成单出现，只有两种可能， $z_i=1$ 或 $z_i=-1$ ， 图(d)



(c) z_i在实轴上但不在单位圆上



(d) z_i既在单位圆上又在实轴上

7.2窗函数设计FIRDF（Window Method）

- **FIRDF的设计思想**
  - 保证线性相位
  - 逼近理想滤波器 $H_d(e^{j\omega})$
    - 窗函数设计法（时域逼近）
    - 频率采样法（频域逼近）
    - 最优化设计（等波纹逼近）
- 窗函数设计法：
  - $h_d(n)$ 一般情况下是无穷序列，不能直接作为**FIRDF**的单位脉冲响应；需对其进行截断，即时域加窗
  - 加窗的影响？
  - 窗函数的设计？（用合适的窗函数对截取的有限长序列进行加权）

7.2窗函数设计FIRDF的基本方法

1. 构造希望逼近的理想滤波器，如：理想低通滤波器

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau}, |\omega| \le \omega_c \\ 0, \quad \omega_c < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

2. 求 $h_d(n)$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega\tau}e^{j\omega n}d\omega$$

$$h_d(n)=\frac{\omega_c}{\pi}Sa[\omega_c(n-\tau)]=\frac{\sin(\omega_c(n-\tau))}{\pi(n-\tau)}$$

- 无限长、非因果的

3. 用窗函数法设计FIR滤波器，时域加窗

$$h(n)=h_d(n)w(n)$$

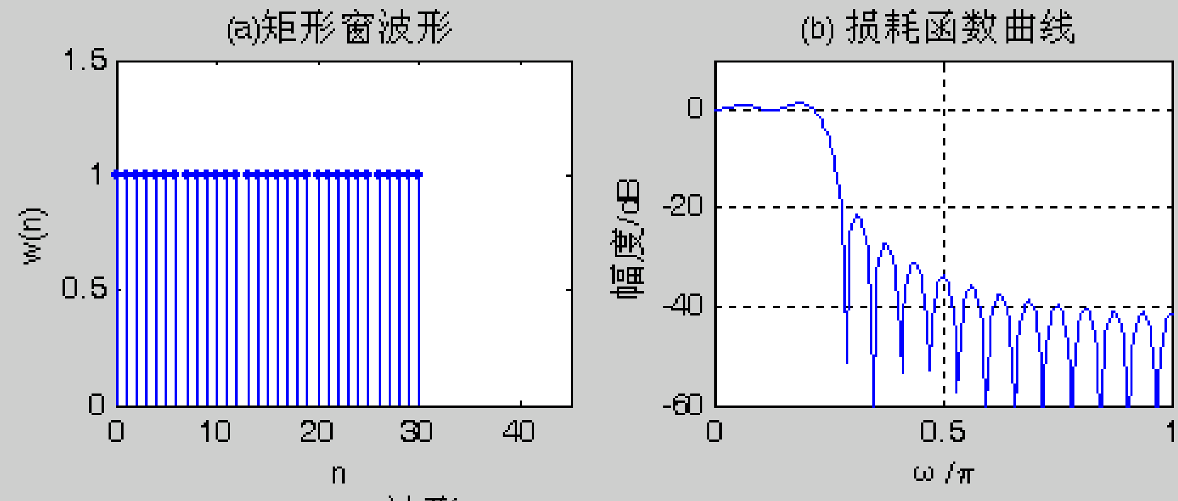
- $w(n)$ 称为窗函数，长度为N
- 如设计第一类线性相位，要求 $h(n)=h(N-1-n)$
- $h_d(n)$ 关于 $n=\tau$ 点偶对称，则 $\tau=(N-1)/2$
- 同时 $w(n)$ 关于 $(N-1)/2$ 点偶对称

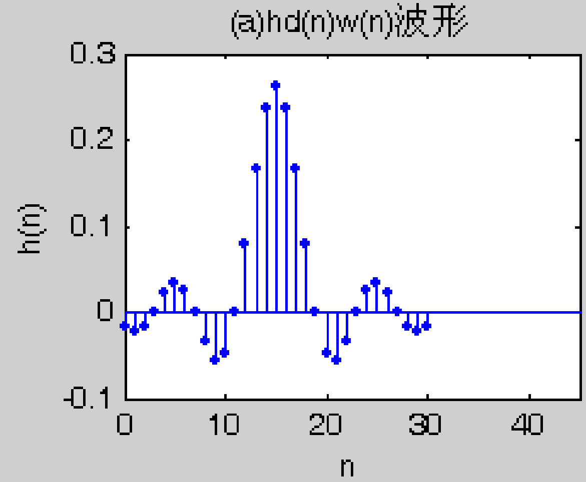
➡ $$H\left(e^{j\omega}\right)=FT[h(n)]=H_g(\omega)e^{j\theta(\omega)}$$

■ 例：理想低通滤波器 $\omega_c = \pi/4$ ，矩形窗N=31

存在误差！

- 原因？
- 逼近误差定量估计？





$$h(n) \neq h_d(n)$$

$$H(e^{j\omega}) \neq H_d(e^{j\omega})$$

7.2.2 窗函数法的设计性能分析

- 矩形窗函数：

$$w_R(n) = R_N(n) = \begin{cases} 1, 0 \le n \le N-1 \\ 0, 其它 n \end{cases}$$

- 其频率响应为：

$$W_R(e^{j\omega}) = FT[w_R(n)] = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\frac{1}{2}(N-1)\omega}$$

$$= W_{Rg}(\omega)e^{-j\omega\tau}$$

$$\tau = N/2 - 1/2$$

- 理想滤波器

$$H_d(e^{j\omega}) = H_{dg}(\omega)e^{-j\omega\tau}$$

- 加窗得到的FIRDF的单位脉冲响应为

$$h(n) = h_d(n)w_R(n)$$

- h(n)的频率响应函数

$$H(e^{j\omega}) = FT[h(n)] = \frac{1}{2\pi}H_d(e^{j\omega}) * W_R(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} H_d(e^{j\omega}) * W_R(e^{j\omega})$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) W_R(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_{dg}(\theta) e^{-j\theta\tau} W_{Rg}(\omega-\theta) e^{-j(\omega-\theta)\tau} d\theta$$

$$= e^{-j\omega\tau} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_{dg}(\theta) W_{Rg}(\omega-\theta) d\theta$$

$$= e^{-j\omega\tau} \frac{1}{2\pi} H_{dg}(\omega) * W_{Rg}(\omega)$$

$$= e^{j\theta(\omega)} H_g(\omega)$$

$$H_g(\omega)=\frac{1}{2\pi}H_{dg}(\omega)*W_{Rg}(\omega)$$

$$\theta(\omega)=-\omega\tau=-\omega(N-1)/2$$

- 幅度特性等于理想低通滤波器的幅度特性与窗函数幅度特性的卷积
- 相位保持严格线性
- 因此，只需分析幅度逼近误差

$$H_g(\omega)=\frac{1}{2\pi}H_{dg}(\omega)*W_{Rg}(\omega)$$

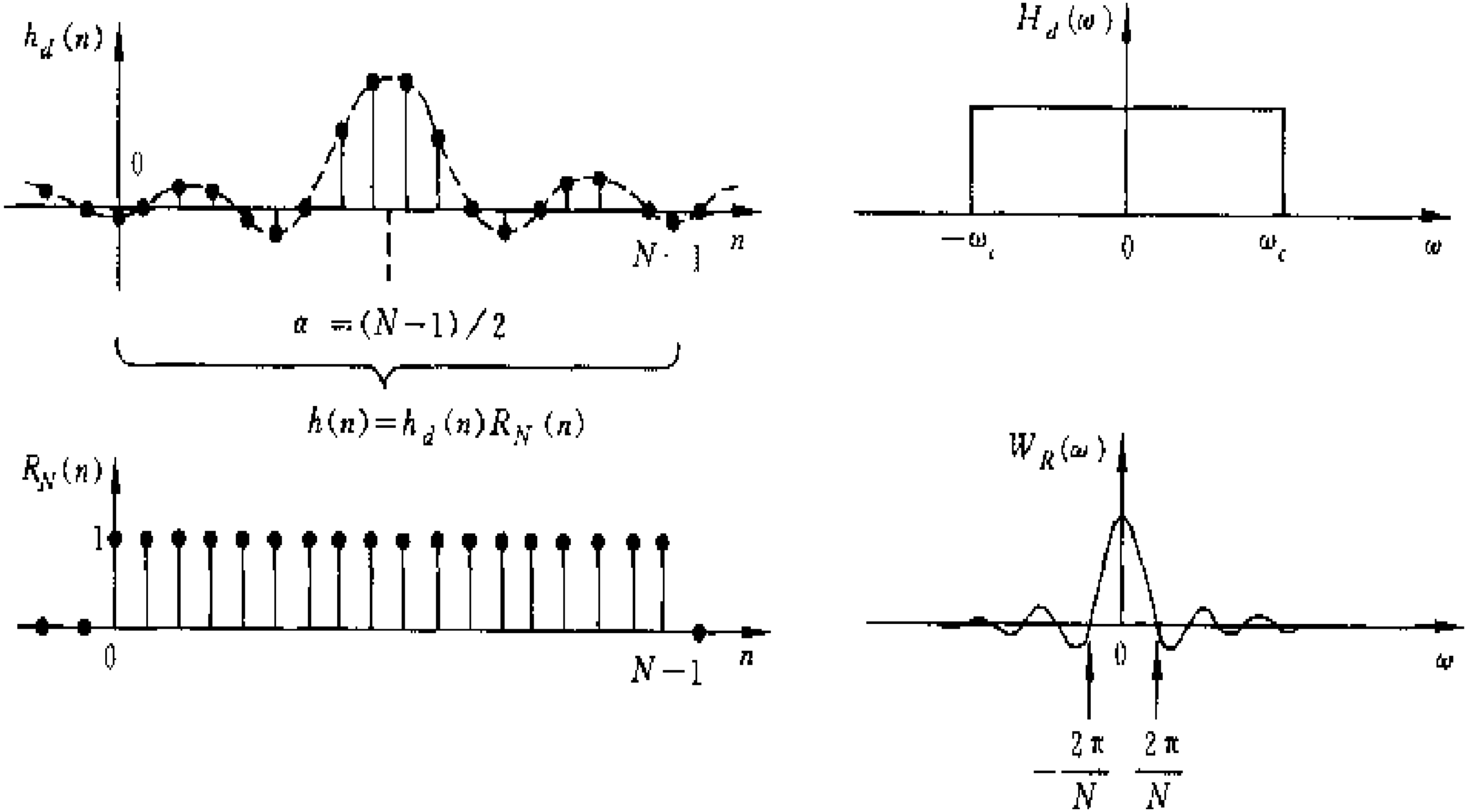
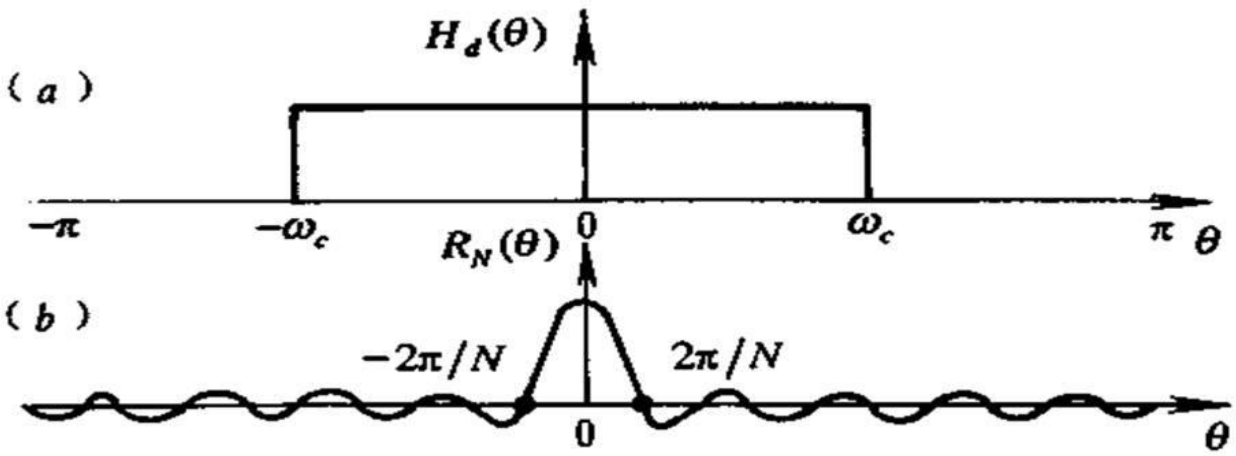


图 7-7 理想矩形幅频特性的 $h_d(n)$ 和 $H_d(\omega)$ 以及矩形窗函数序列的 $w(n)=R_N(n)$ 及 $W_R(\omega)$

对 $h_d(n)$ 加矩形窗处理后，其频率响应的几点影响：

$\omega=0$时，$H_g(0)$等于$W_{Rg}(\omega)$在$[-\omega_c,\omega_c]$内的积分面积，

因$\omega_c >> \dfrac{2\pi}{N}$，故$H_g(0)$近似等于在$[-\pi,\pi]$内的积分面积。

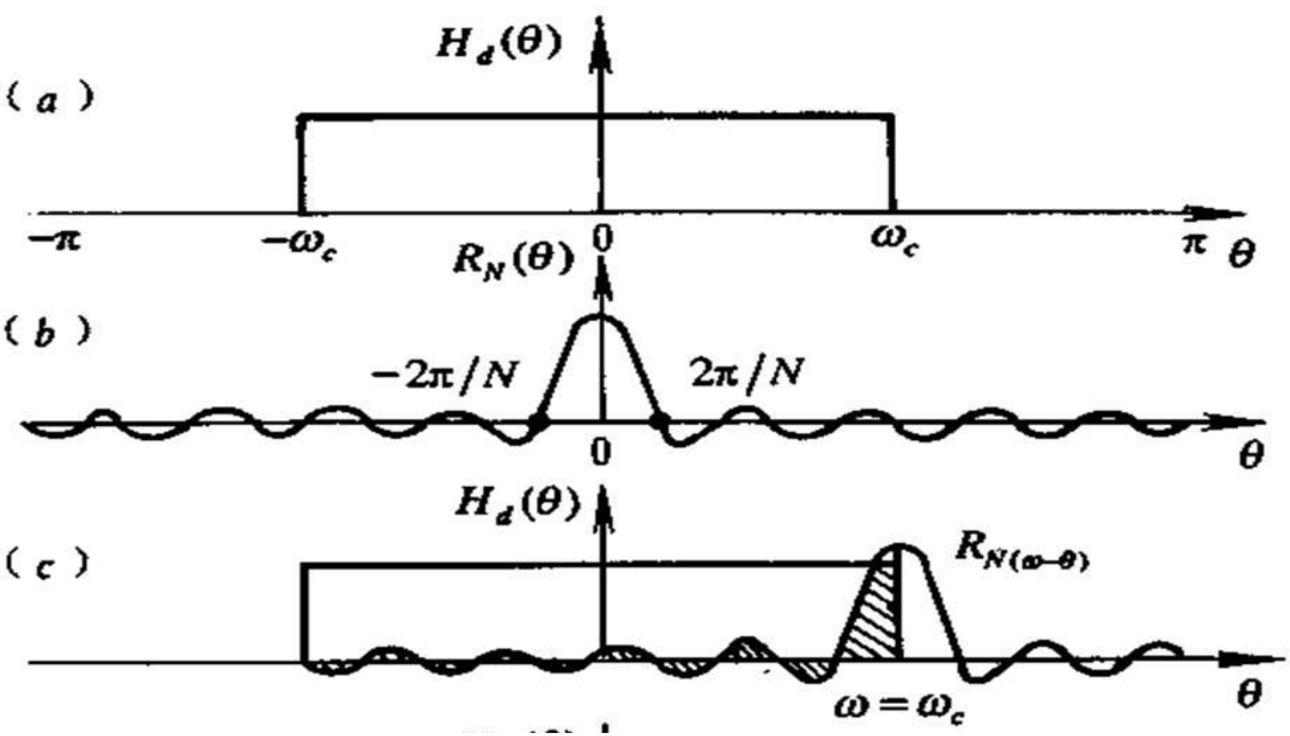


$$H_g(\omega)=\frac{1}{2\pi}H_{dg}(\omega)*W_{Rg}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_{dg}(\theta)W_{Rg}(\omega-\theta)d\theta$$

对 $h_d(n)$ 加矩形窗处理后，其频率响应的几点影响：

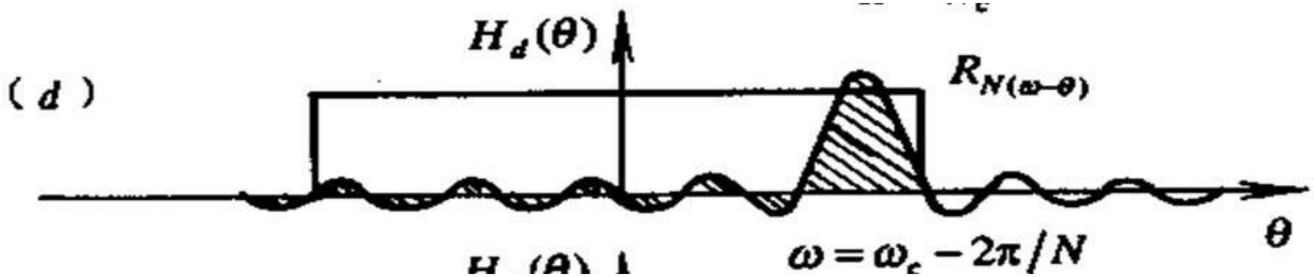
$\omega=\omega_c$时，$W_{Rg}(\omega)$与理想滤波器幅度特性一半重叠，

$$H_g(\omega_c)=\frac{1}{2}H_g(0)$$

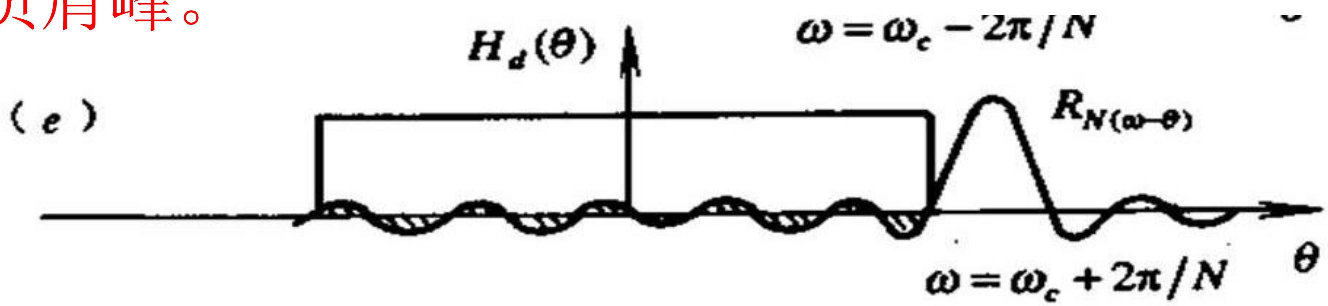


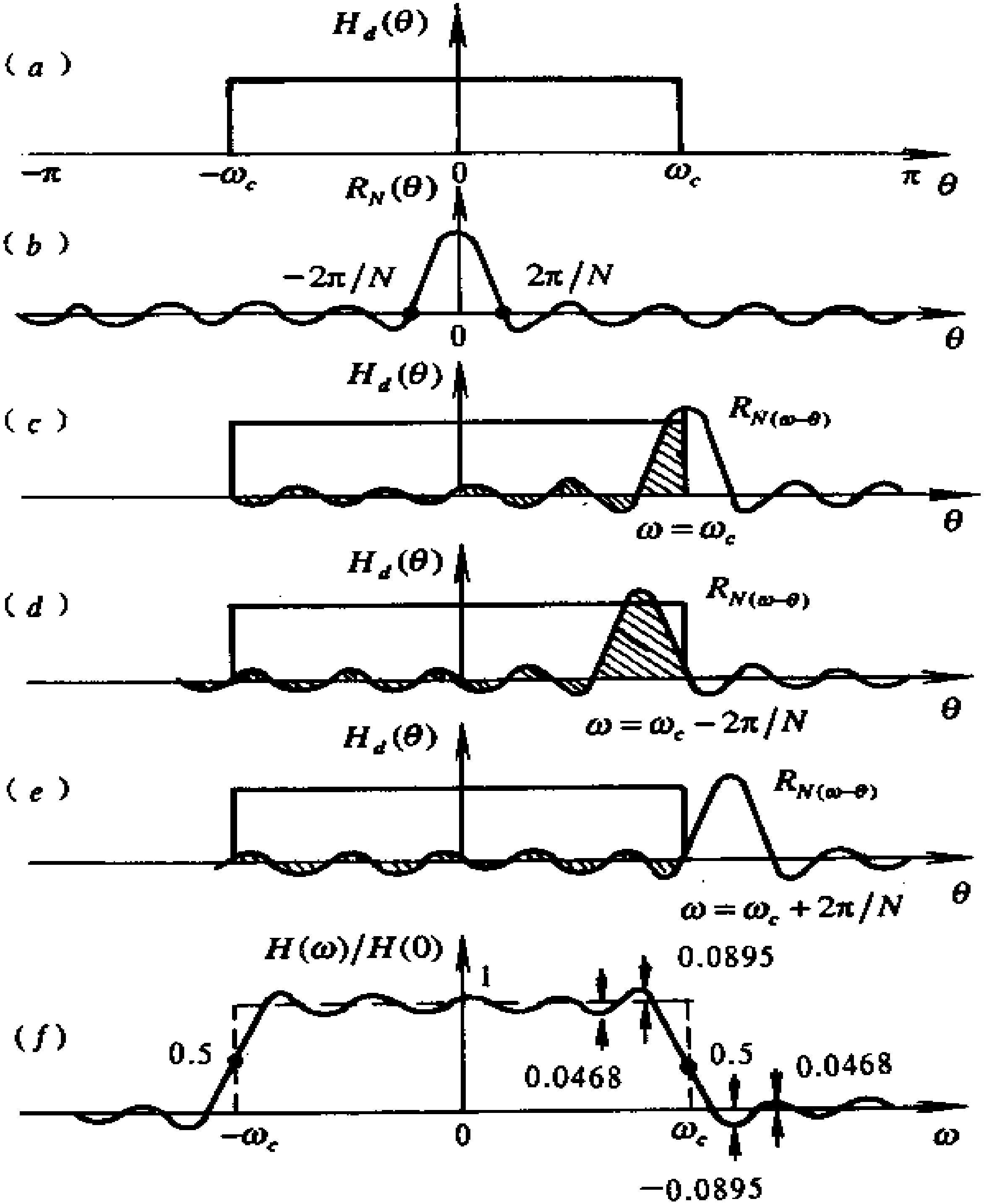
对 $h_d(n)$ 加矩形窗处理后，其频率响应的几点影响：

$\omega=\omega_c-2\pi/N$ 时，$W_{Rg}(\omega)$的一个负旁瓣在理想滤波器的通带外，出现正肩峰。



$\omega=\omega_c+2\pi/N$ 时，$W_{Rg}(\omega)$的一个主瓣在理想滤波器的通带外，一个负旁瓣在理想滤波器的通带内，出现负肩峰。



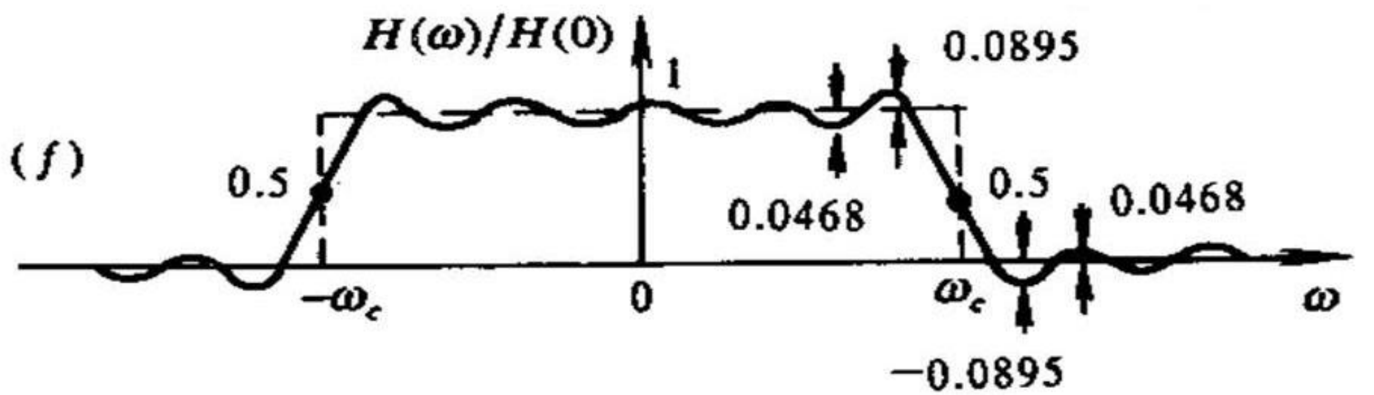


卷积结果

矩形窗对理想低通幅度特性的影响

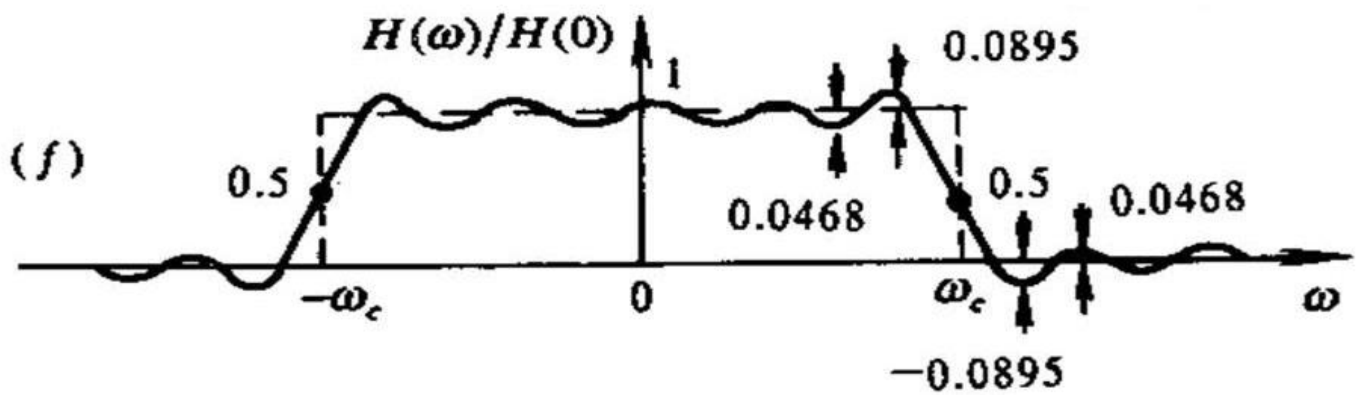
对 $h_d(n)$ 加矩形窗处理后，其频率响应的几点影响：

- 改变了理想频响的边沿特性，形成过渡带，宽为 $4\pi/N$ ，等于 $W_{Rg}(\omega)$ 的主瓣宽度。（决定于窗长）
- 通带、阻带均有纹波，纹波取决于 $W_{Rg}(\omega)$ 的旁瓣，旁瓣幅度大，纹波幅度大，与窗口长度 **N**无关。（决定于窗口形状）



对 $h_d(n)$ 加矩形窗处理后，其频率响应的几点影响：

- N增加,过渡带宽减小,肩峰值不变。
- N的变化不能改变主瓣与旁瓣的比例关系，只能改变绝对值大小和起伏的密度，当N增加时，幅值变大，起伏变密，而最大肩峰永远为8.95%，这种现象称为吉布斯（Gibbs）效应。



结论：改变窗函数的形状，可改善滤波器的特性。

窗函数有许多种，但要满足以下两点要求：

① 窗谱主瓣宽度要窄，以获得较陡的过渡带；

② 相对于主瓣幅度，旁瓣要尽可能小，使能量尽量集中在主瓣中，这样就 可以减小肩峰和余振，以提高阻带衰减和通带平稳性。

然而，实际上这两点不能兼得，一般总是通过增加主瓣宽度，即加宽过渡带为代价，来换取对旁瓣的抑制。

7.2.3 典型窗函数介绍（6种）

- 典型窗函数及其幅度特性，窗函数设计FIRDF的性能指标

  → 选择合适的窗函数类型和长度

  - 矩形窗
  - 三角窗
  - 升余弦（汉宁）窗
  - 改进升余弦（哈明）窗
  - 布莱克曼窗
  - 凯塞窗

7.2.3 典型窗函数介绍（6种）

1. 矩形窗

$$w_R(n) = R_N(n)$$

$$W_R(e^{j\omega}) = FT[w_R(n)] = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\frac{1}{2}(N-1)\omega}$$

$$= W_{Rg}(\omega) e^{-j\omega\tau}$$

- 描述参数
  - 旁瓣峰值 α_n ：窗函数的幅度函数 $|W_{Rg}(\omega)|$ 的最大旁瓣相对于主瓣最大值的衰减（dB）。

  矩形窗 $\alpha_n = -13dB$

描述参数

- 过渡带宽度（FIRDF） $\Delta B = 4\pi / N$
- 阻带最小衰减（FIRDF） $\alpha_s = -21dB$

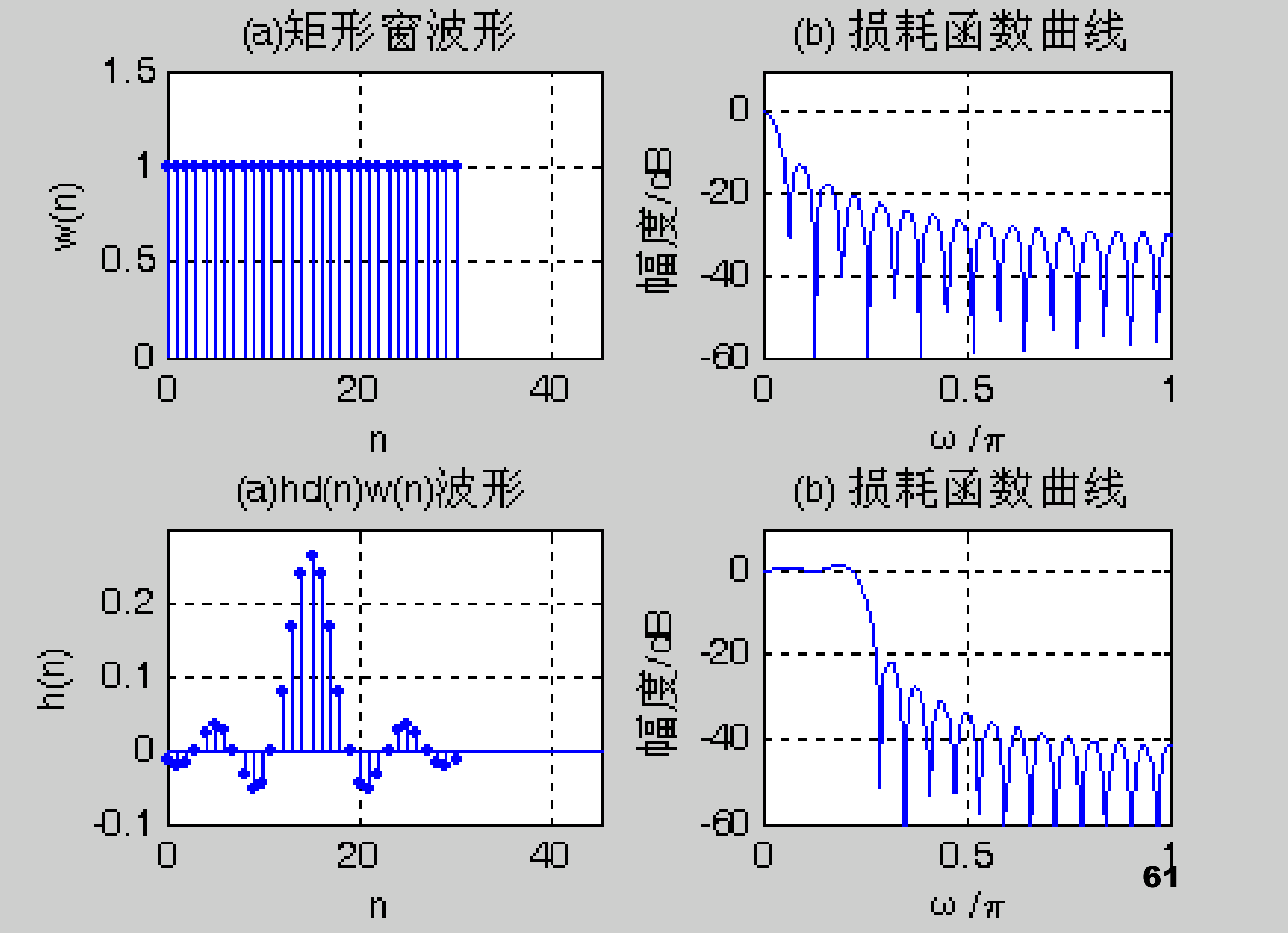
四种波形：

窗函数时域波形、幅度特性函数曲线、FIRDF的单位脉冲响应和损耗函数曲线

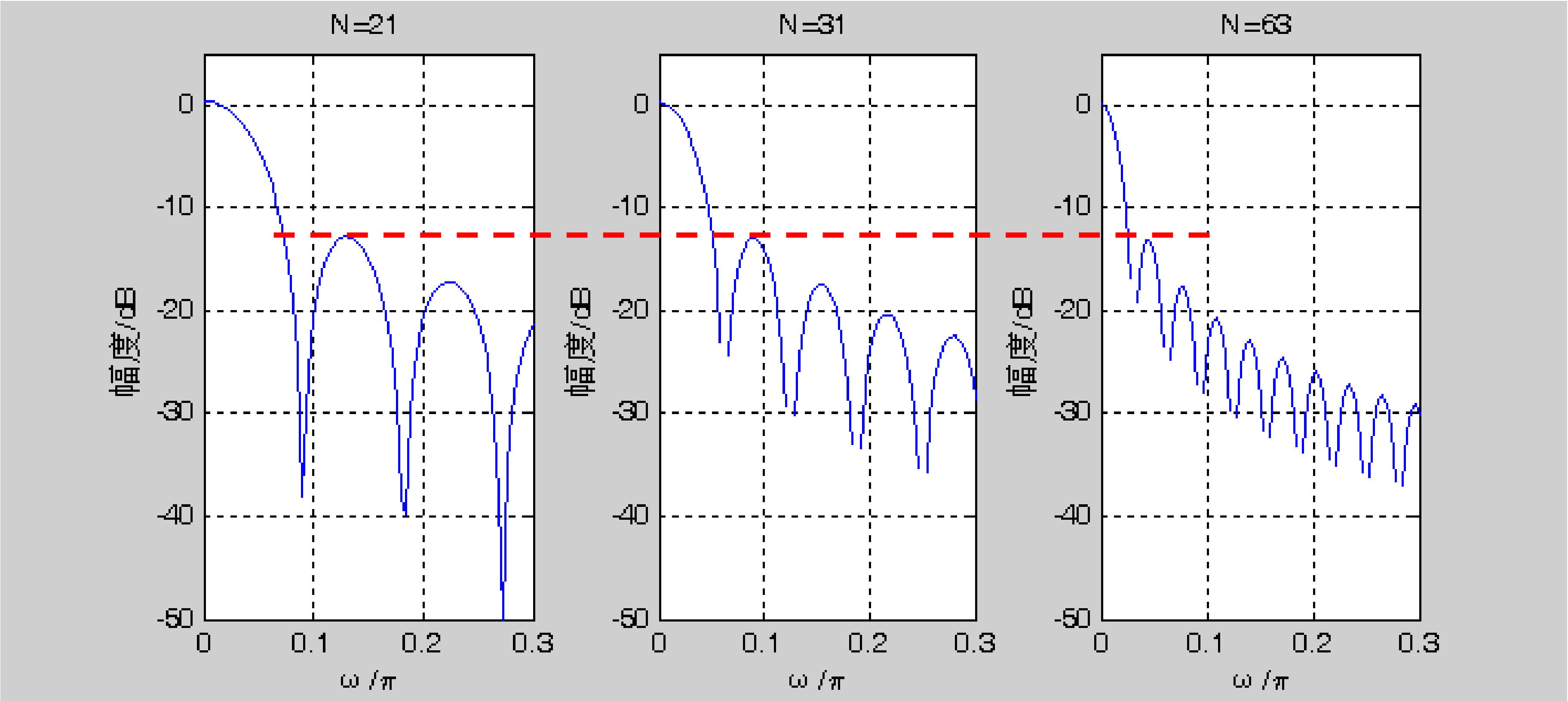
理想低通

$\omega_c = \pi / 2$

$N = 31$



窗函数长度对幅度特性主瓣宽度的影响



- 主瓣宽度与N成反比，即滤波器过渡带宽与N成反比
- N增大，旁瓣峰值不变，不能改善阻带的衰减特性

2.三角窗（Bartlett Window）

- 窗函数

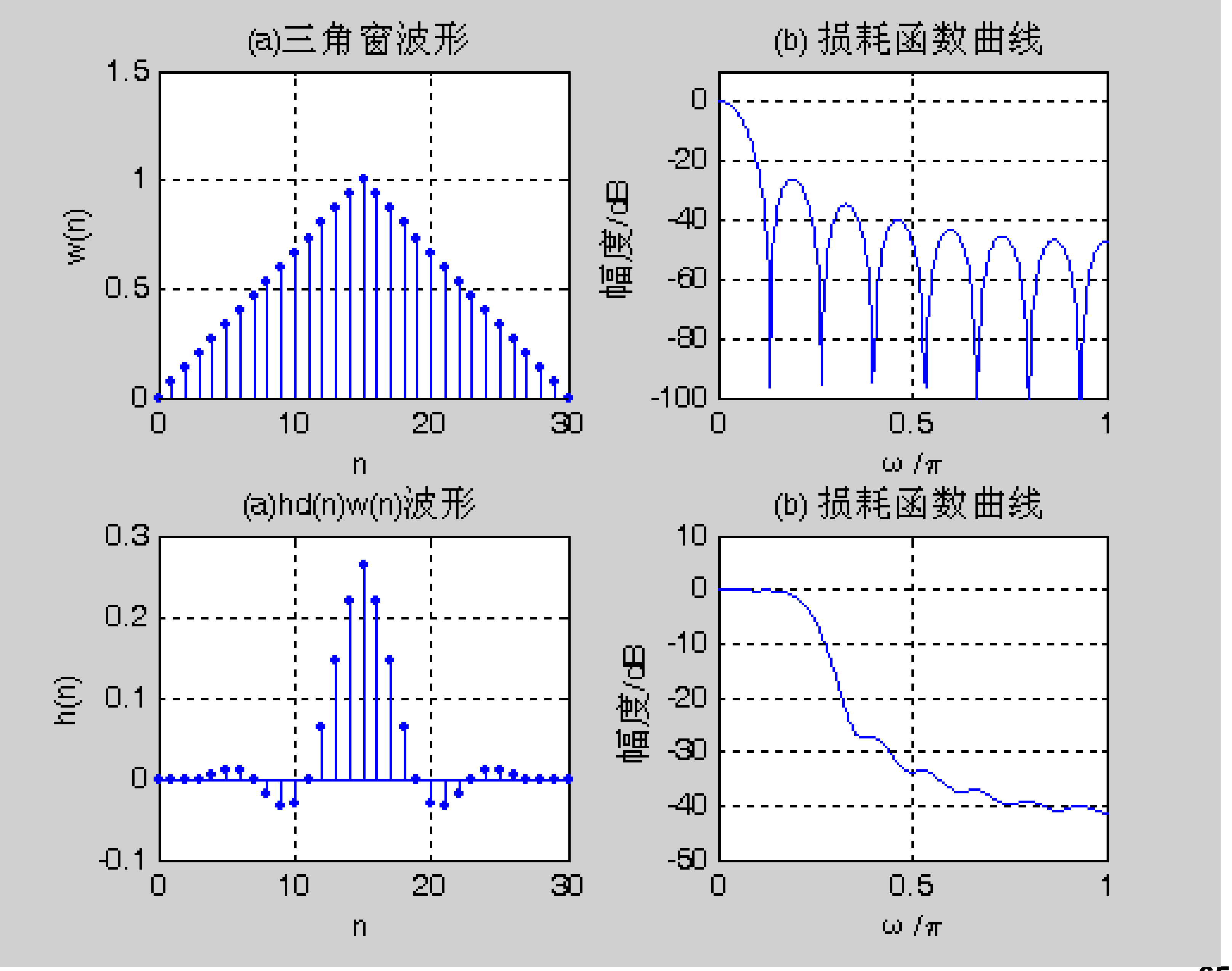
$$w_B(n)=\begin{cases}\dfrac{2n}{N-1}, & 0\le n\le \dfrac{1}{2}(N-1)\\[2ex] 2-\dfrac{2n}{N-1}, & \dfrac{1}{2}(N-1)<n\le N-1\end{cases}$$

- 频率响应

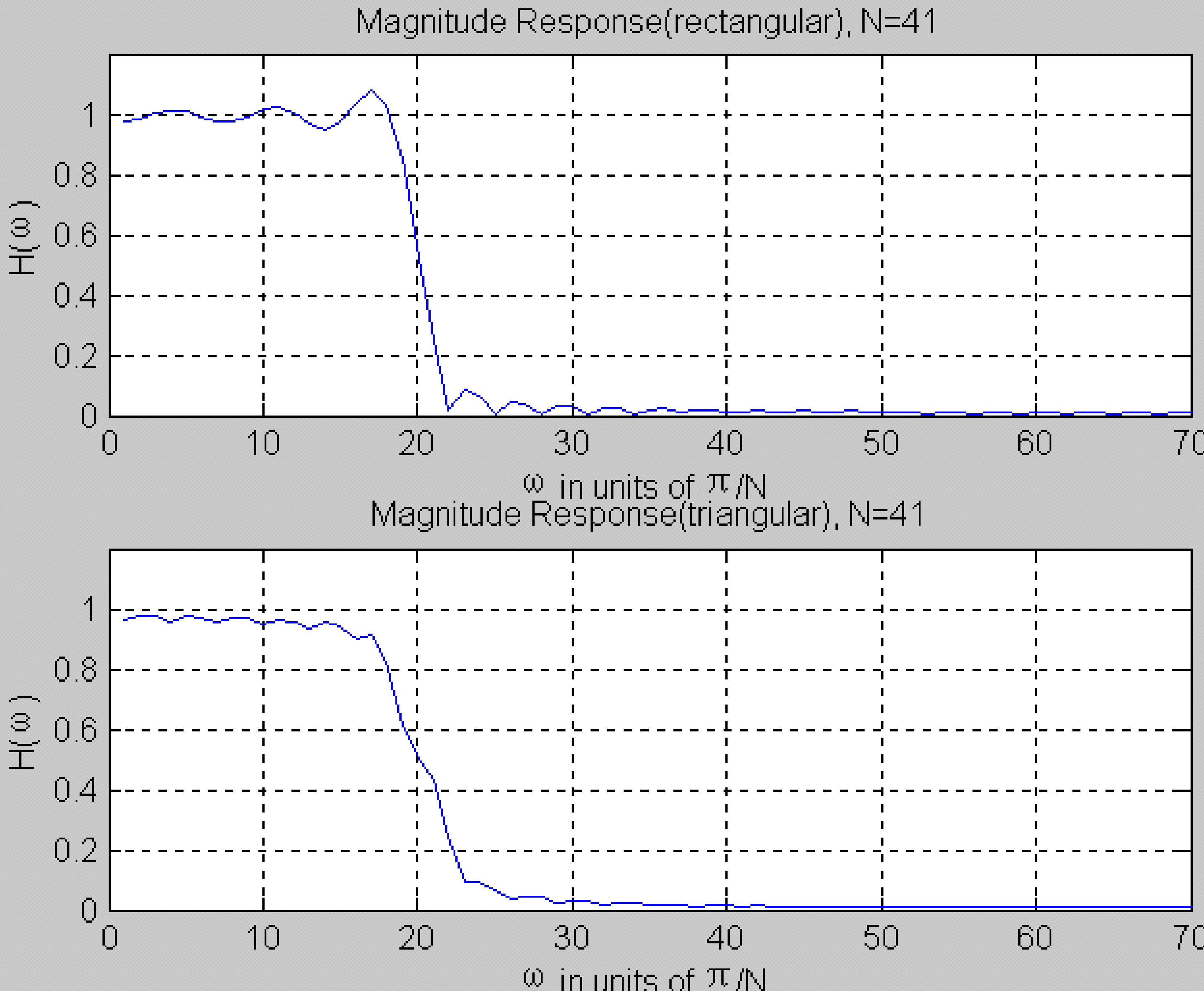
$$W_B(e^{j\omega})=\frac{2}{N}\left[\frac{\sin(\dfrac{N}{4}\omega)}{\sin(\dfrac{\omega}{2})}\right]^2 e^{-j\omega(N-1)/2}$$

$$W_{Bg}(\omega)=\frac{2}{N}\left[\frac{\sin(\frac{N}{4}\omega)}{\sin(\frac{\omega}{2})}\right]^2$$

- 其主瓣宽度为 $8\pi/N$ ，第一旁瓣比主瓣低**25dB**。
- $\alpha_n=-25dB,\quad \alpha_s=-25dB,\quad \Delta B=8\pi/N$



(a)三角窗波形
w(n)
n
(b) 损耗函数曲线
幅度/dB
ω /π
(a)hd(n)w(n)波形
h(n)
n
(b) 损耗函数曲线
幅度/dB
ω /π


Magnitude Response(rectangular), N=41
H(ω)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
10
20
30
40
50
60
70
ω in units of π /N
Magnitude Response(triangular), N=41
H(ω)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
10
20
30
40
50
60
70
ω in units of π /N

3.汉宁窗（升余弦窗）（Hanning Window）

$$w_{hm}(n)=\frac{1}{2}[1-\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)]R_N(n)$$

$$=0.5R_N(n)-0.25\left(e^{j\frac{2\pi n}{N-1}}+e^{-j\frac{2\pi n}{N-1}}\right)R_N(n)$$

- 频率响应

$$W_{hn}\left(e^{j\omega}\right)=0.5W_{Rg}(\omega)e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}-0.25[W_{Rg}\left(\omega-\frac{2\pi}{N-1}\right)e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\left(\omega-\frac{2\pi}{N-1}\right)}$$

$$+W_{Rg}\left(\omega+\frac{\pi}{N-1}\right)e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\left(\omega+\frac{2\pi}{N-1}\right)}]$$

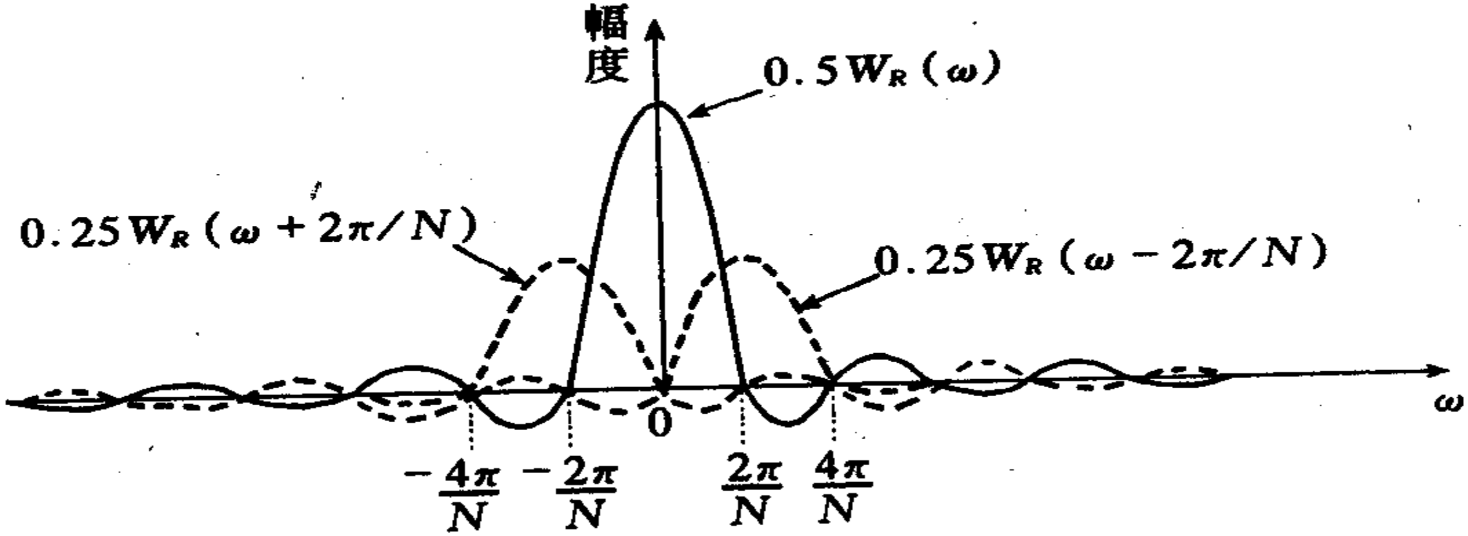
$$=\left\{0.5W_{Rg}(\omega)+0.25\left[W_{Rg}\left(\omega-\frac{2\pi}{N-1}\right)+W_{Rg}\left(\omega+\frac{2\pi}{N-1}\right)\right]\right\}e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}$$

$$W_{hn}\left(e^{j\omega}\right)=\left\{0.5W_{Rg}(\omega)+0.25\left[W_{Rg}\left(\omega-\frac{2\pi}{N-1}\right)+W_{Rg}\left(\omega+\frac{2\pi}{N-1}\right)\right]\right\}e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}$$

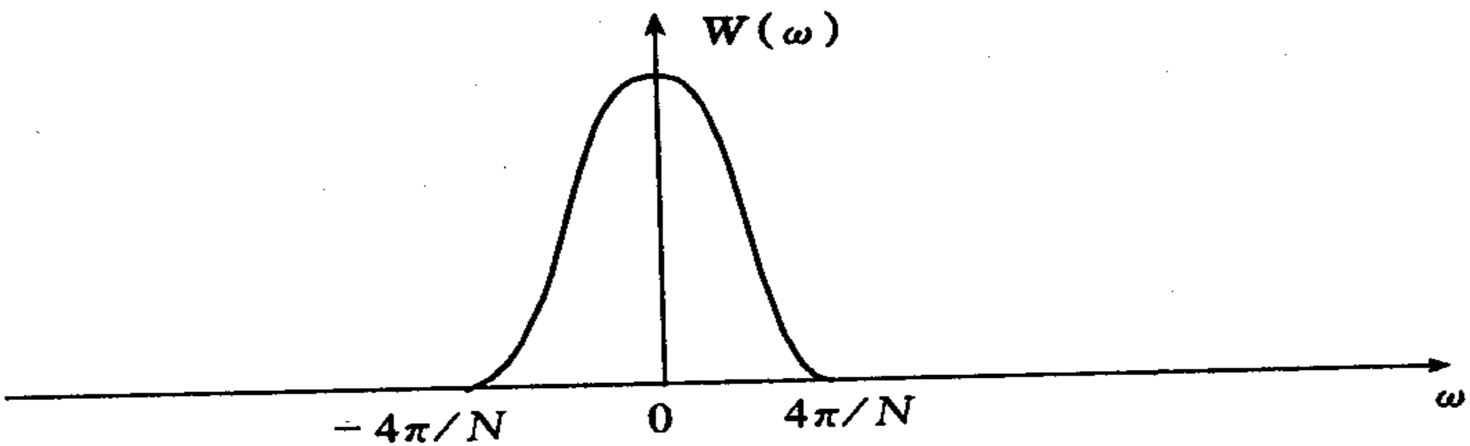
- **当N>>1，可近似为：**

$$W_{hn}\left(e^{j\omega}\right)=\left\{0.5W_{Rg}(\omega)+0.25\left[W_{Rg}\left(\omega-\frac{2\pi}{N}\right)+W_{Rg}\left(\omega+\frac{2\pi}{N}\right)\right]\right\}e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}$$

$$W_{hng}(\omega)=0.5W_{Rg}(\omega)+0.25\left[W_{Rg}\left(\omega-\frac{2\pi}{N}\right)+W_{Rg}\left(\omega+\frac{2\pi}{N}\right)\right]$$



(a) 三部分频谱相加



(b) 相加结果

图 4.6　汉宁窗频谱

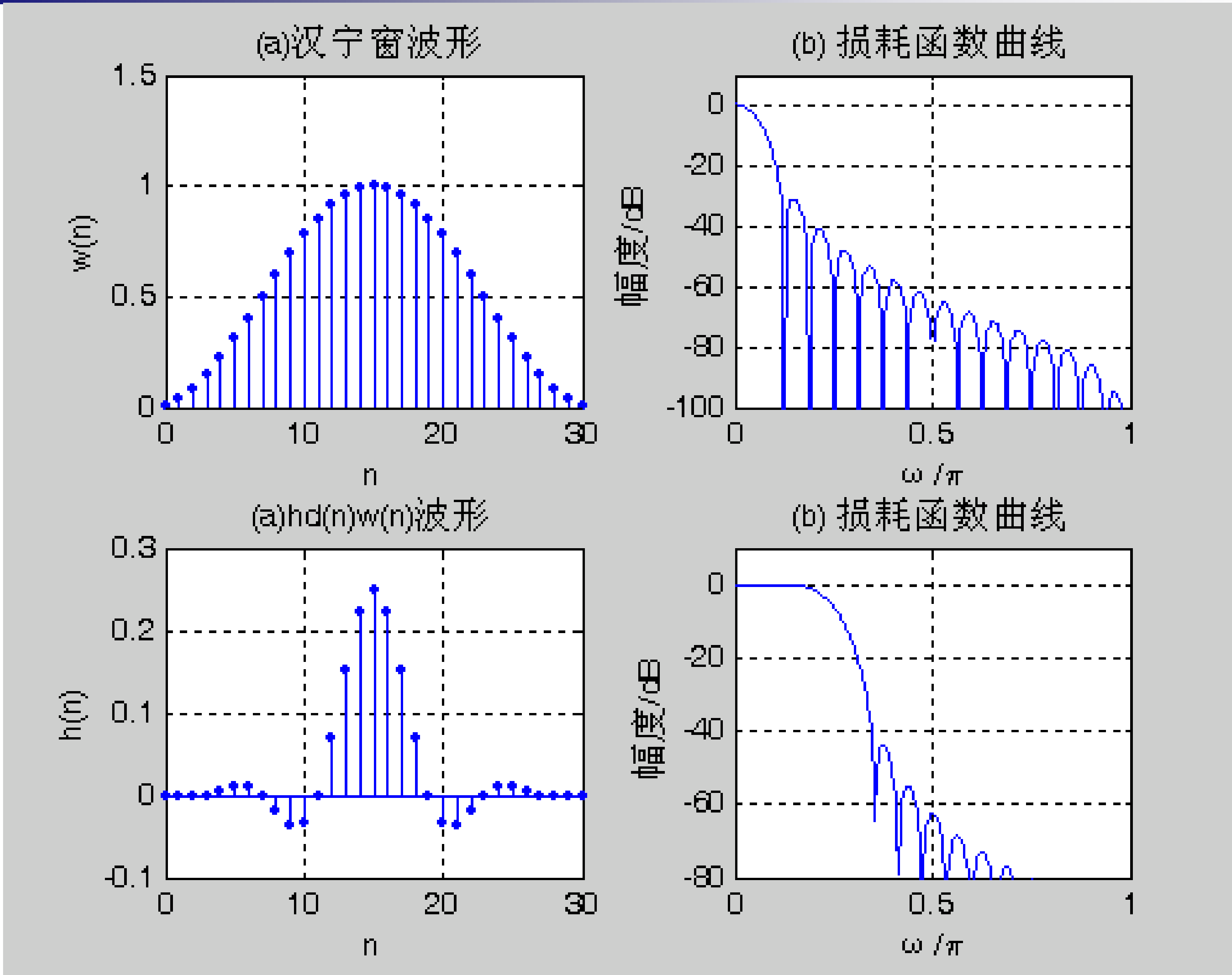
- 当N>>1时，

$$W_{hng}(\omega) = 0.5W_{Rg}(\omega) + 0.25\left[W_{Rg}\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right) + W_{Rg}\left(\omega + \frac{2\pi}{N}\right)\right]$$

- 三部分矩形窗频谱相加，使旁瓣互相抵消，能量集中在主瓣，旁瓣大大减小，但主瓣宽度增加1倍，为 $\frac{8\pi}{N}$

$$\Delta B = 8\pi / N$$

$$\alpha_n = -31dB, \quad \alpha_s = -44dB$$


(a)汉宁窗波形
w(n)
1.5
1
0.5
0
0
10
20
30
n
(b) 损耗函数曲线
幅度/dB
0
-20
-40
-60
-80
-100
0
0.5
1
ω /π
(a)hd(n)w(n)波形
h(n)
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
0
10
20
30
n
(b) 损耗函数曲线
幅度/dB
0
-20
-40
-60
-80
0
0.5
1
ω /π

4.哈明窗（改进升余弦窗）（Hamming Window）

- 窗函数

$$w_{hm}(n) = [0.54 - 0.46\cos(\frac{2\pi n}{N-1})]R_N(n)$$

- 其频率响应的幅度函数为

$$W_{hm}(e^{j\omega}) = \{0.54W_{Rg}(\omega) + 0.23[W_{Rg}(\omega - \frac{2\pi}{N-1})$$

$$+ W_{Rg}(\omega + \frac{2\pi}{N-1})]\}e^{-j\omega(N-1)/2}$$

- 当N>>1，可近似为：

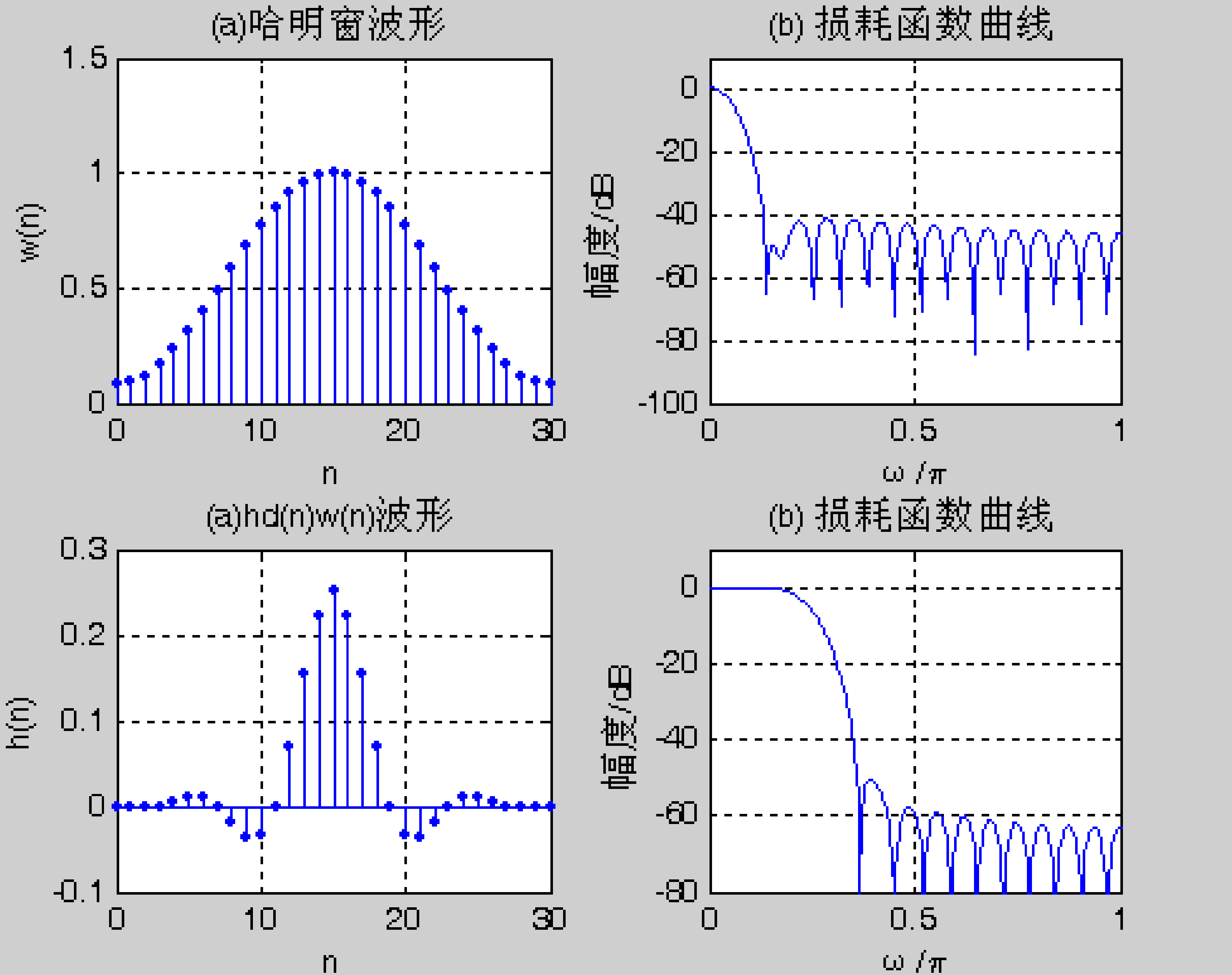
$$W_{hm}(e^{j\omega})=\{0.54W_{Rg}(\omega)+0.23[W_{Rg}(\omega-\frac{2\pi}{N})$$

$$+W_{Rg}(\omega+\frac{2\pi}{N})]\}e^{-j\omega(N-1)/2}$$

$$W_{hmg}(\omega)=0.54W_{Rg}(\omega)+0.23[W_{Rg}(\omega-\frac{2\pi}{N})+W_{Rg}(\omega+\frac{2\pi}{N})]$$

- 是对汉宁窗的改进，在主瓣宽度（对应第一零点的宽度）相同的情况下，旁瓣进一步减小，可使**99.96%**的能量集中在窗谱的主瓣内。

$$\alpha_n=-40dB \quad \Delta B=8\pi/N \quad \alpha_s=-53dB$$



(a)哈明窗波形
w(n)
n
(b) 损耗函数曲线
幅度/dB
ω /π
(a)hd(n)w(n)波形
h(n)
n
(b) 损耗函数曲线
幅度/dB
ω /π

5.布莱克曼窗（Blackman Window）

- 窗函数

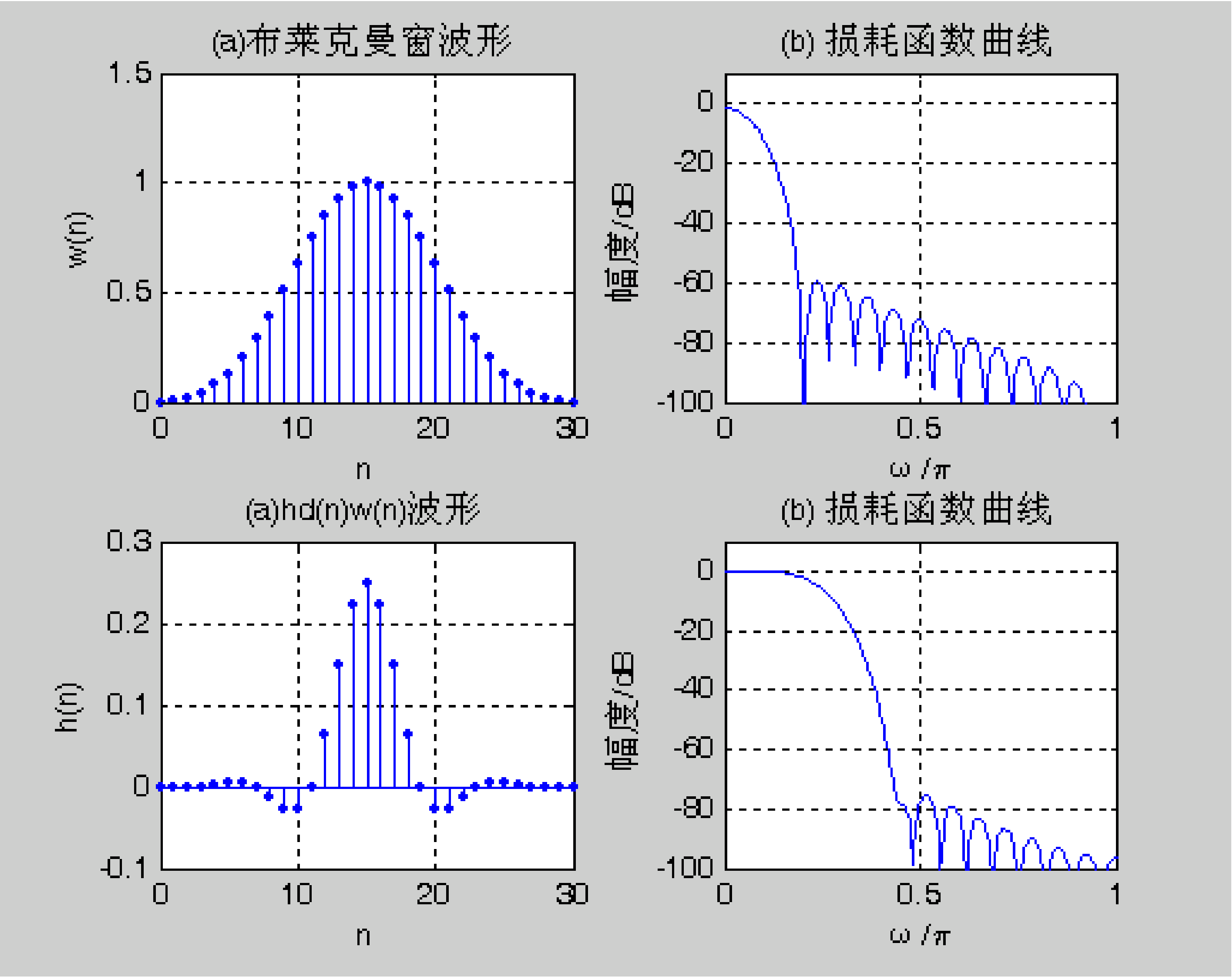
$$w_{bl}(n)=\left[0.42-0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)+0.08\cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)\right]R_N(n)$$

- 增加一个二次谐波余弦分量，可进一步降低旁瓣，但主瓣宽度进一步增加，增加N可减少过渡带

$$W(\omega)=0.42W_R(\omega)+0.25\left[W_R(\omega-\frac{2\pi}{N-1})+W_R(\omega+\frac{2\pi}{N-1})\right]$$

$$+0.04\left[W_R(\omega-\frac{4\pi}{N-1})+W_R(\omega+\frac{4\pi}{N-1})\right]$$

$$\alpha_n=-57dB \quad \Delta B=12\pi/N \quad \alpha_s=-74dB$$



(a)布莱克曼窗波形
w(n)
n
(b) 损耗函数曲线
幅度/dB
ω /π
(a)hd(n)w(n)波形
h(n)
n
(b) 损耗函数曲线
幅度/dB
ω /π

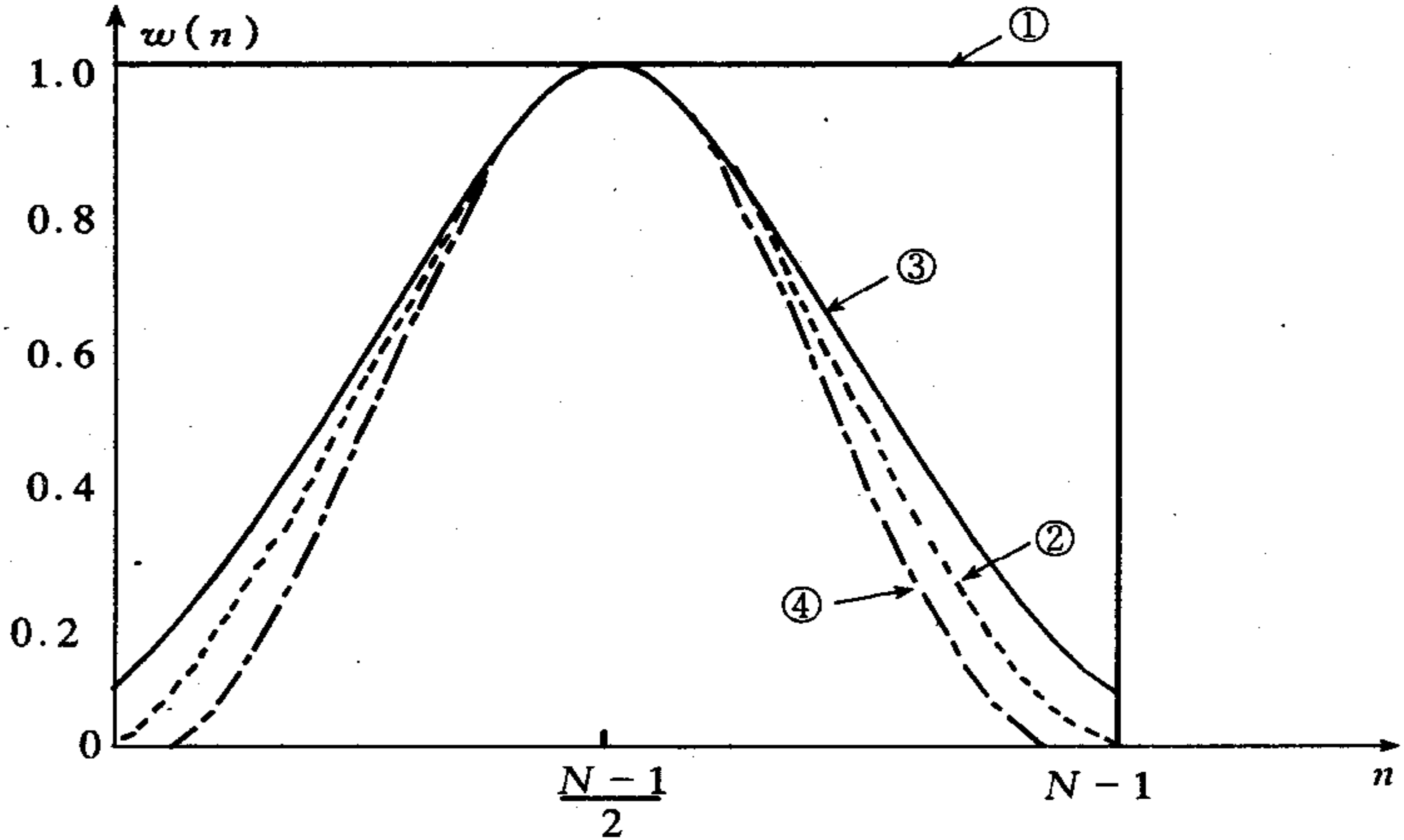


图 4.7 四种常用的窗口函数

(1)矩形窗； (2)汉宁窗； (3)汉明窗； (4)布莱克曼窗

四种窗函数的比较

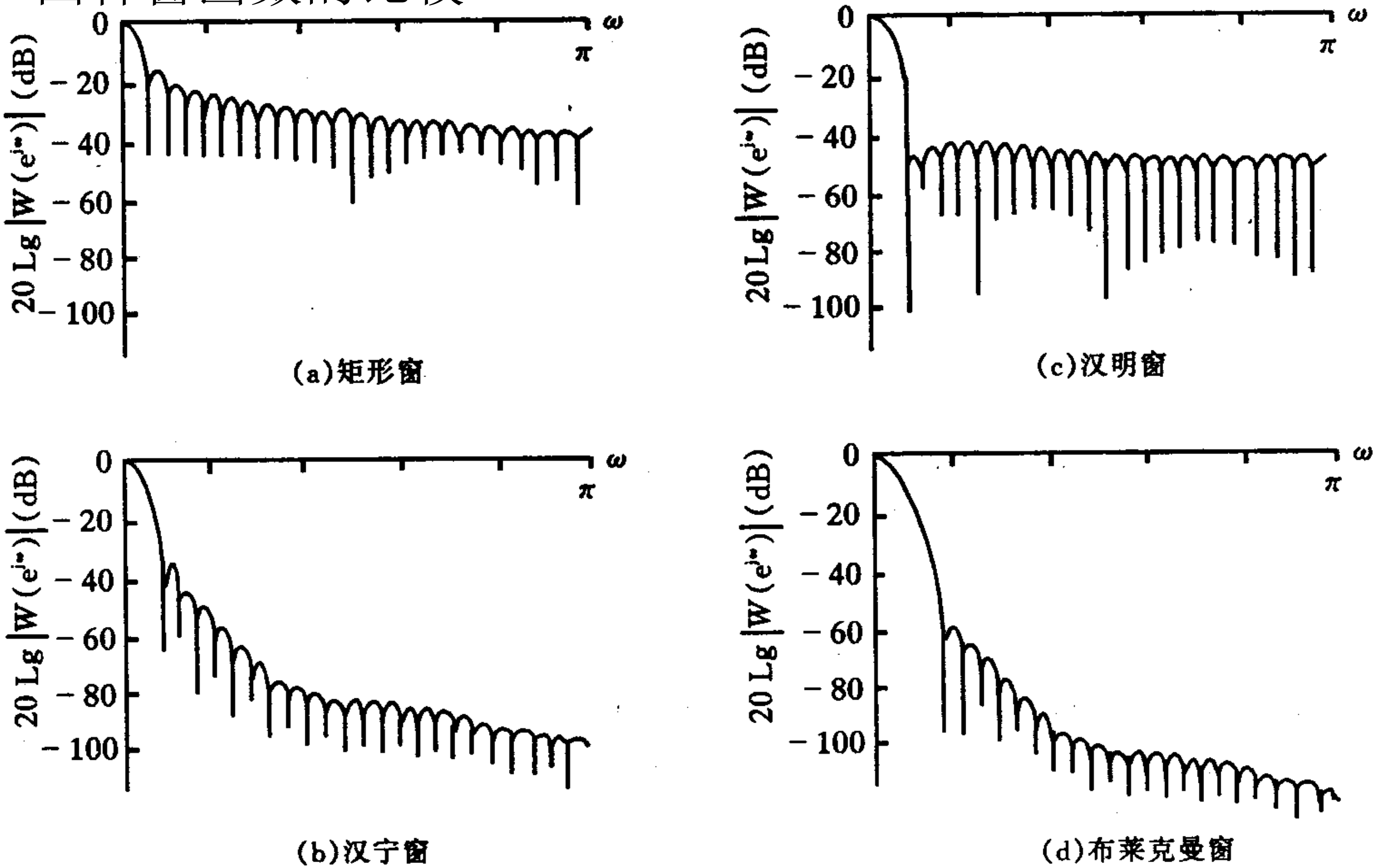


图 4.8　四种窗函数的频谱($N=51$)

窗口函数的频谱　N=51，$A=20\lg|W(\omega)/W(0)|$

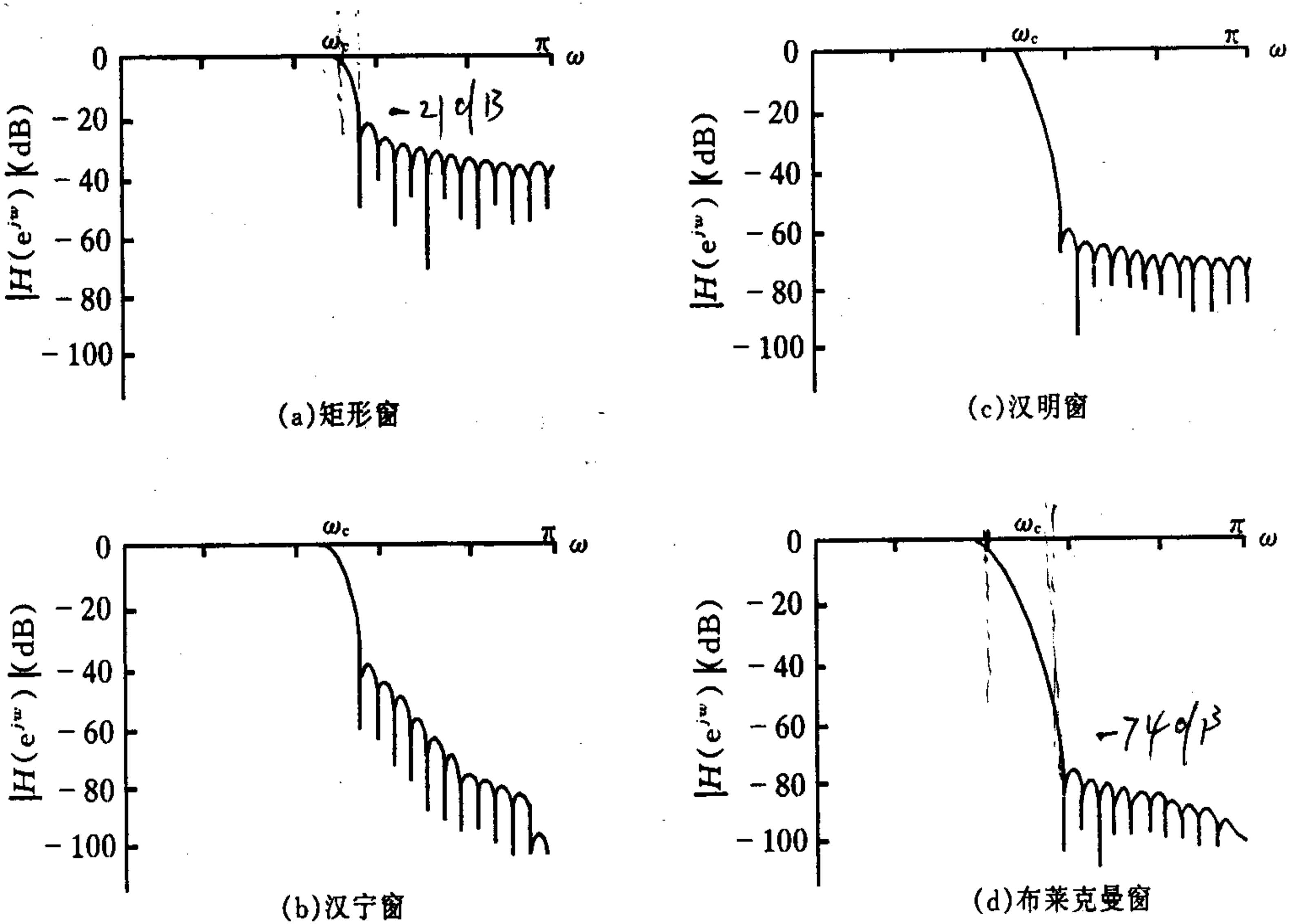


图 4.9　四种窗口在同一指标下设计的滤波器的频率特性

$$N = 51, \quad \omega_c = 0.5\pi$$

窗函数	主瓣宽度 (近似值)	过渡带宽 (精确值)	旁瓣峰值衰减 (dB)	阻带最小衰减 (dB)
矩形	$4\pi / N$	$1.8\pi / N$	-13	-21
三角	$8\pi / N$	$6.1\pi / N$	-25	-25
汉宁	$8\pi / N$	$6.2\pi / N$	-31	-44
汉明	$8\pi / N$	$6.6\pi / N$	-41	-53
布莱克曼	$12\pi / N$	$11\pi / N$	-57	-74

6.凯塞窗（Kaiser Window）

- 以上五种窗函数，滤波器的阻带衰减是固定的
- 不同的窗函数通过增加主瓣宽度为代价来降低旁瓣
- 凯塞窗则可自由选择主瓣宽度和旁瓣衰减；对于给定指标，其滤波器阶数最小
- 凯塞窗函数

$$w_k(n)=\frac{I_o\left(\beta\sqrt{1-\left[1-\frac{2n}{N-1}\right]^2}\right)}{I_o(\beta)}R_N(n)$$

- 凯塞窗函数

$$w_k(n)=\frac{I_o\left(\beta\sqrt{1-\left[1-\frac{2n}{N-1}\right]^2}\right)}{I_o(\beta)}R_N(n)$$

- β 是调整参数，可自由选择
  - 决定主瓣宽度与 旁瓣衰减。**β越大，$w_k(n)$窗越窄，其频谱的主瓣变宽，旁瓣变小。一般取 4<β<9。**
  - **β=5.44** 接近汉明
  - **β=8.5** 接近布莱克曼
  - **β=0** 为矩形

- $I_0(x)$是零阶第一类修正贝塞尔函数

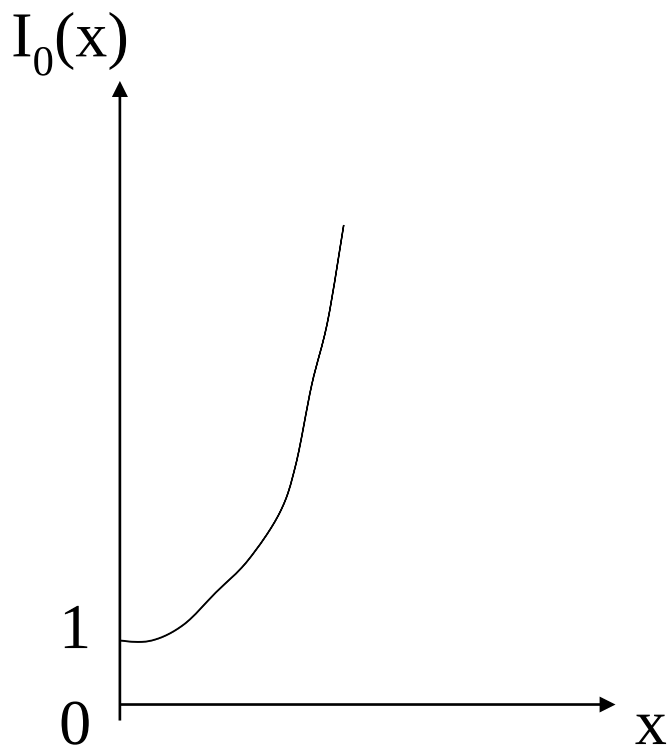
$$I_0(x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}[\frac{(x/2)^k}{k!}]^2$$

- 参数 β 控制滤波器阻带的最小衰减 α_s

$$\beta=\begin{cases}0.1102(\alpha_s-8.7) & \alpha_s\ge 50dB\\ 0.5842(\alpha_s-21)^{0.4}+0.07886(\alpha_s-21) & 21dB<\alpha_s<50dB\\ 0 & \alpha_s\le 21dB\end{cases}$$

$$N\approx\frac{\alpha_s-8}{2.285\Delta B} \qquad \left|\Delta B=\omega_s-\omega_p\right|$$

- 通带纹波幅度近似等于阻带纹波幅度，未单独控制



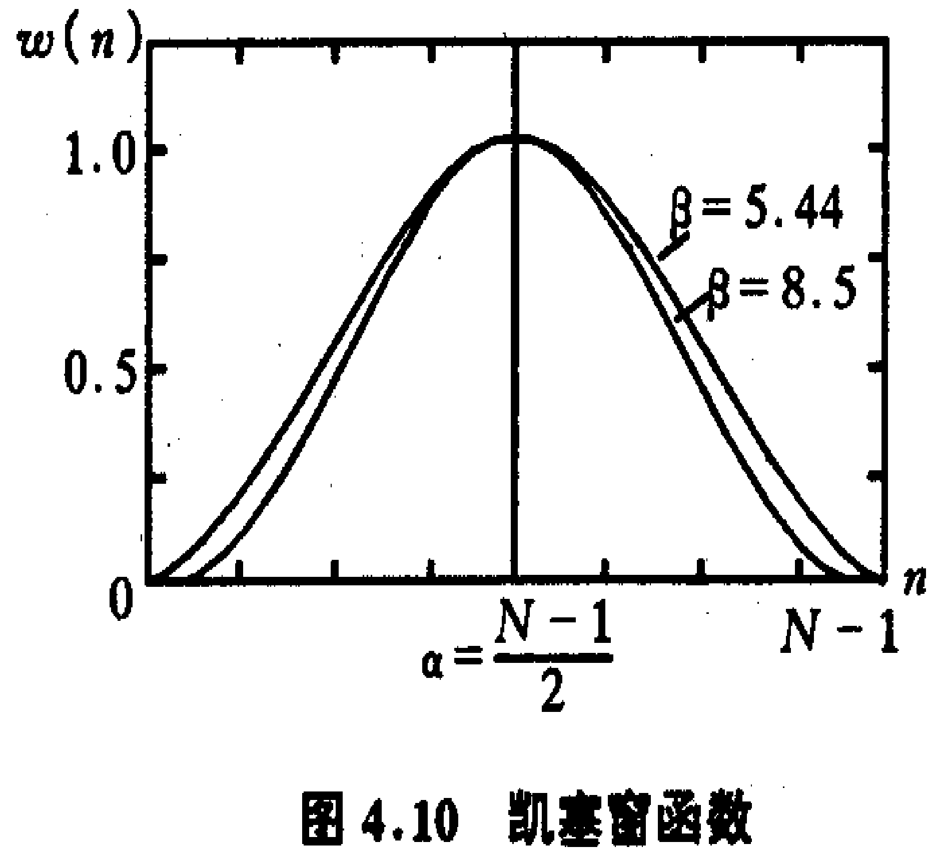
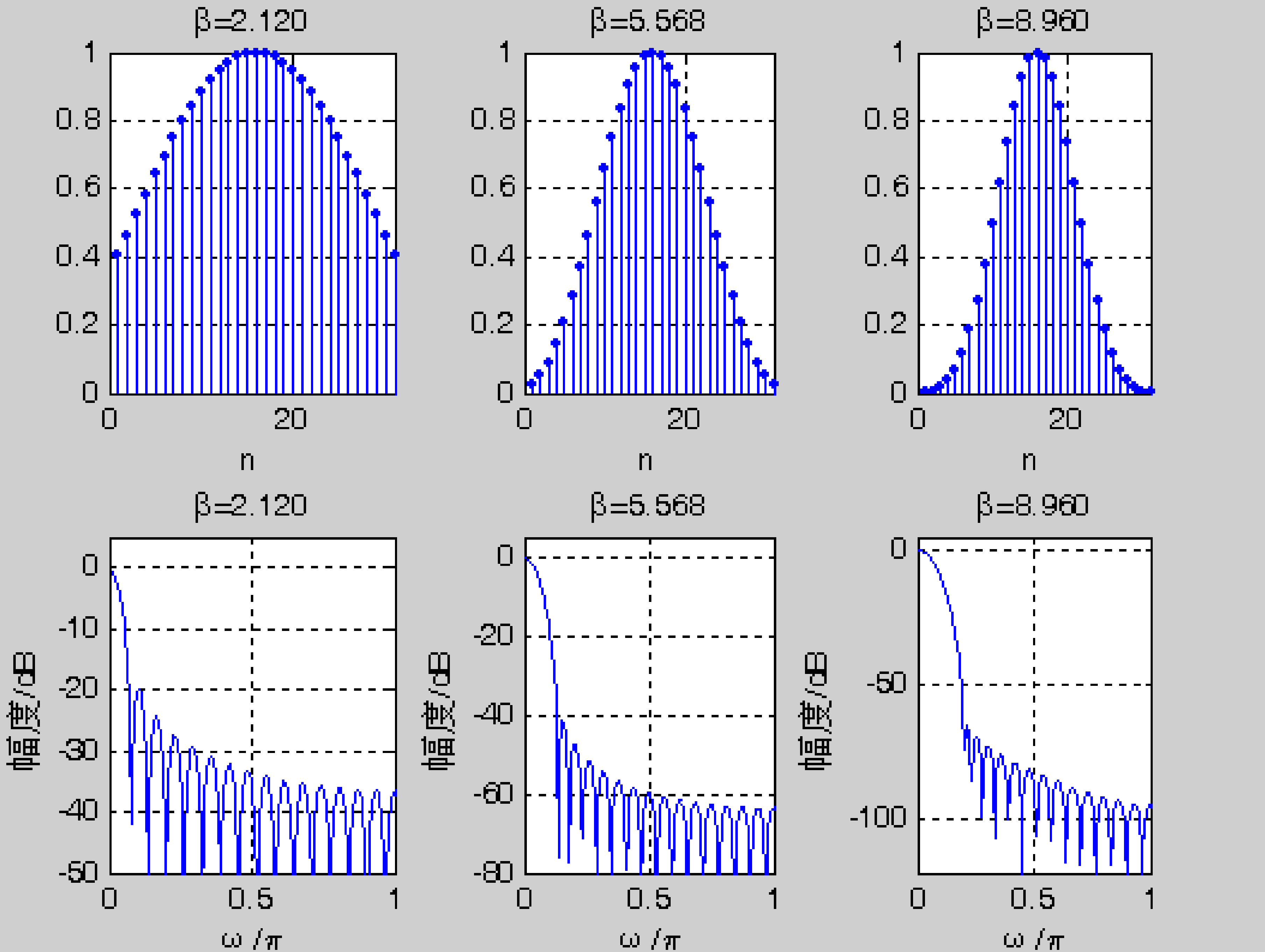


图1 零阶修正贝塞尔函数　　　　图2 凯塞窗函数

β	过渡带	通带波纹（dB）	阻带最小衰减(dB)
2.120	3.00π/N	±0.27	-30
3.384	4.46π/N	±0.08647	-40
4.538	5.86π/N	±0.0274	-50
5.658	7.24π/N	±0.00868	-60
6.764	8.64π/N	±0.00275	-70
7.865	10.0π/N	±0.000868	-80
8.960	11.4π/N	±0.000275	-90
10.056	12.8π/N	±0.000087	-100



β=2.120
β=5.568
β=8.960
n
n
n
β=2.120
β=5.568
β=8.960
幅度/dB
幅度/dB
幅度/dB
ω /π
ω /π
ω /π

7.2.4 用窗函数设计FIR滤波器的步骤：

- 选择窗函数的类型和长度
  - 根据阻带最小衰减 α_s 选择窗函数的类型
    - 原则：在保证阻带衰减满足要求的情况下，尽量选择主瓣窄的窗函数。
  - 根据过渡带的宽度选择窗函数的长度*N*
- 按性能指标要求，构造希望频率响应函数

$$H_d(e^{j\omega}) = H_{dg}(\omega)e^{-j\omega(N-1)/2}$$

  - ω_c 近似为过渡带中心频率，幅度函数衰减一半（-6dB)

$$\omega_c = (\omega_p + \omega_s)/2$$

- 确定期望滤波器的单位脉冲响应

$$h_d(n) = IFT[H_d(e^{j\omega})]$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

- 加窗得到设计结果

$$h(n) = h_d(n)w(n)$$

例：用窗函数设计第一类线性相位高通FIRDF，要求通带边界频率 $\omega_p = \pi / 2rad$，通带最大衰减 $\alpha_p = 1dB$，阻带截止频率 $\omega_s = \pi / 4rad$，阻带最小衰减 $\alpha_s = 40dB$

解：1）选择窗函数

因为阻带最小衰减 $\alpha_s = 40dB$，可选择汉宁窗、哈明窗。这里选择汉宁窗。

N=？

根据过渡带宽 $\because \Delta B = 6.2\pi / N \le \omega_p - \omega_s$

$$\therefore N = 6.2\pi / \Delta B \ge \frac{6.2\pi}{\omega_p - \omega_s} = \frac{6.2\pi}{\pi / 4} = 24.8$$

- 高通，N为奇数， N=25

$$w_{hn}(n) = \frac{1}{2}[1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)]R_N(n)$$

$$= \frac{1}{2}[1 - \cos\left(\frac{\pi n}{12}\right)]R_{25}(n)$$

2）期望理想滤波器的频率响应

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau}, & \omega_c < |\omega| \le \pi \\ 0, & |\omega| \le \omega_c \end{cases}$$

$$\tau = (N-1)/2 = 12, \quad \omega_c = (\omega_p + \omega_s)/2 = 3\pi/8$$

3）确定期望滤波器的单位脉冲响应

$$h_d(n) = IFT[H_d(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\omega_c} e^{-j\omega\tau}e^{j\omega n}d\omega + \int_{\omega_c}^{\pi} e^{-j\omega\tau}e^{j\omega n}d\omega\right)$$

$$= \frac{\sin\pi(n-\tau)}{\pi(n-\tau)} - \frac{\sin\omega_c(n-\tau)}{\pi(n-\tau)}$$

$$= \delta(n-12) - \frac{\sin\left[3\pi(n-12)/8\right]}{\pi(n-12)}$$

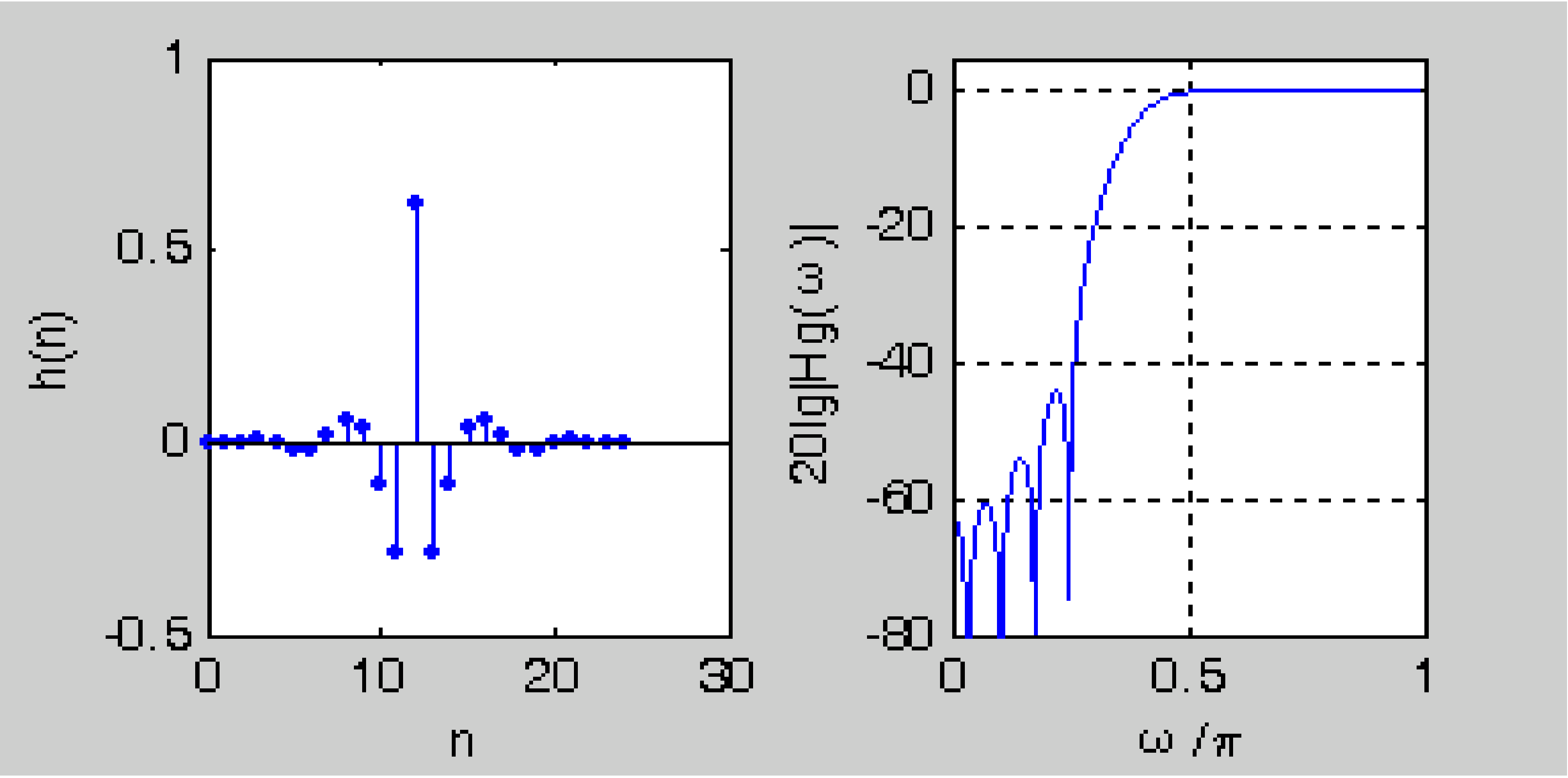
全通滤波器

低通滤波器

4）加窗

$$h(n)=h_d(n)w(n)$$

$$=\left\{\delta(n-12)-\frac{\sin\left[3\pi(n-12)/8\right]}{\pi(n-12)}\right\}[0.5-0.5\cos\left(\frac{\pi n}{12}\right)]R_{25}(n)$$



例7.2.2，7.2.3

例：用凯塞窗设计一 FIR 低通滤波器，低通边界频率 $\omega_p = 0.3\pi$ ，阻带边界频率 $\omega_s = 0.5\pi$ ，阻带衰减 α_s 不小于 50dB。

解：1）选择窗函数

$$\omega_c = \frac{\omega_p + \omega_s}{2} = \frac{0.3\pi + 0.5\pi}{2} = 0.4\pi$$

$$\beta = 0.112(\alpha_s - 8.7) = 0.112(50 - 8.7) = 4.55$$

$$\Delta B = \omega_s - \omega_p = 0.2\pi$$

$$N = \frac{\alpha_s - 8}{2.285 \times \Delta B} = \frac{50 - 8}{2.285 \times 0.2\pi} \approx 30$$

2）理想低通函数

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau}, |\omega| \le \omega_c \\ 0, \quad \omega_c < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

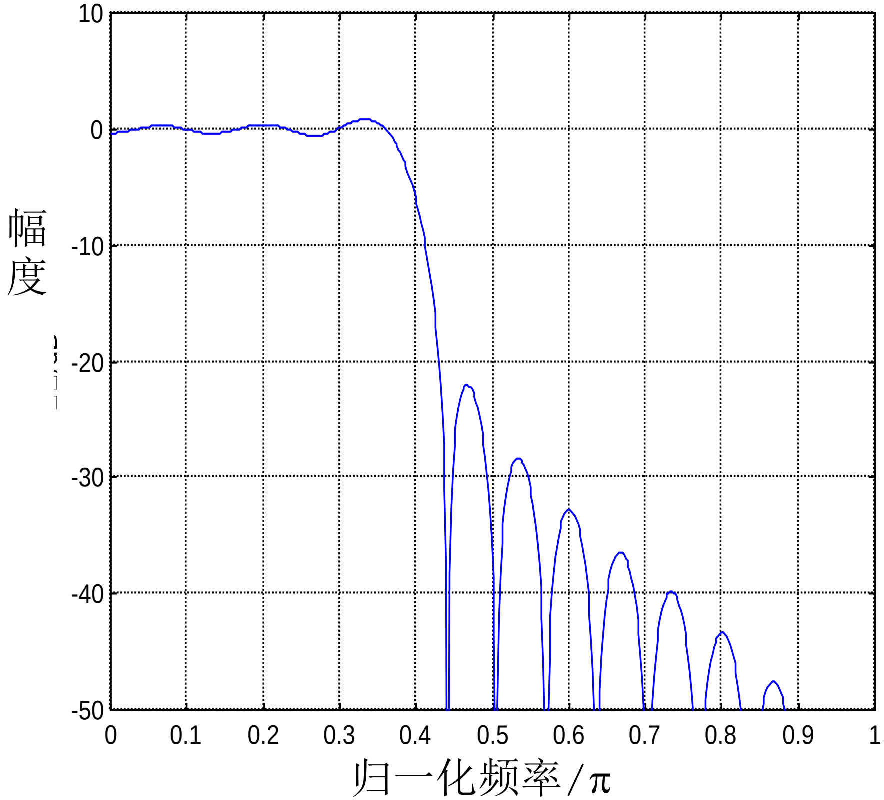
3）理想脉冲响应序列

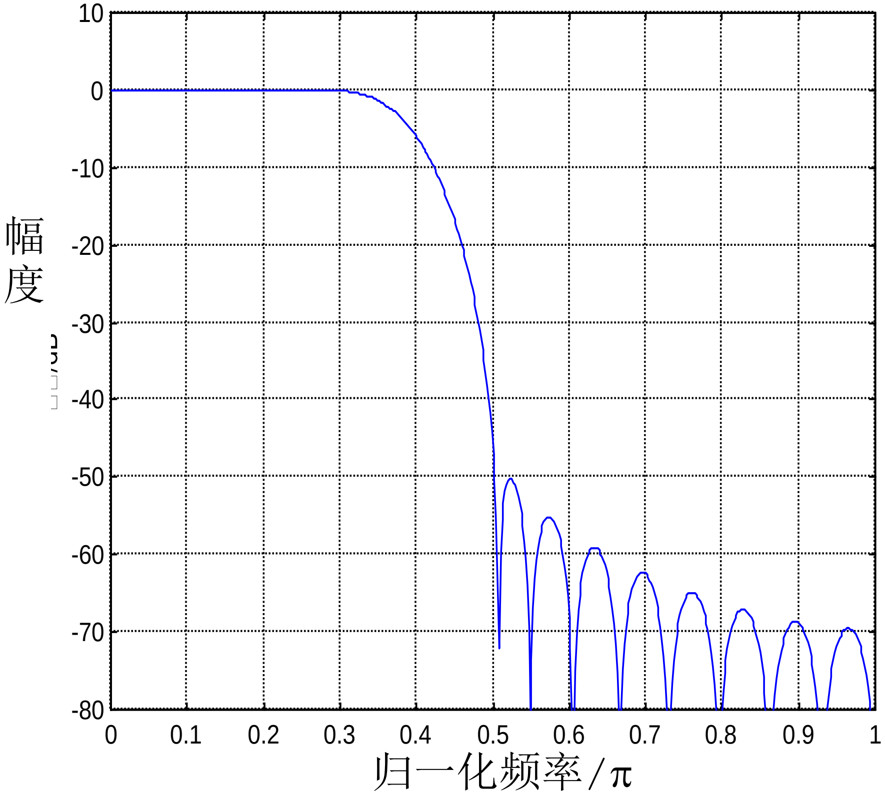
$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega\tau} e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\sin[\omega_c(n-\tau)]}{\pi(n-\tau)}, & n \ne \tau \\ \omega_c / \pi & n = \tau \end{cases}$$

4）加窗，得设计滤波器

$$h(n) = h_d(n) w(n)$$


10
0
-10
-20
-30
-40
-50
幅度
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
归一化频率/π
（a）


10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
-80
幅度
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
归一化频率/π
（b）

凯塞窗设计举例

```
wn=kaiser(30,4.55);
nn=[0:1:29];
alfa=(30-1)/2;
hd=sin(0.4*pi*(nn-alfa))./(pi*(nn-alfa));
h=hd.*wn';
[h1,w1]=freqz(h,1);
plot(w1/pi,20*log10(abs(h1)));
axis([0,1,-80,10]);
grid;
xlabel('归一化频率/π')
ylabel('幅度/dB')
```

7.3 利用频率采样法设计FIRDF

- 对理想滤波器频响函数 $H_d(e^{j\omega})$ 在[0,2π]上等间隔采样N点，得到频域采样值序列：

$$H(k) = H_d(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \qquad k = 0,1,\ldots,N-1$$

- 单位脉冲响应

$$h(n) = IDFT[H(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn},$$

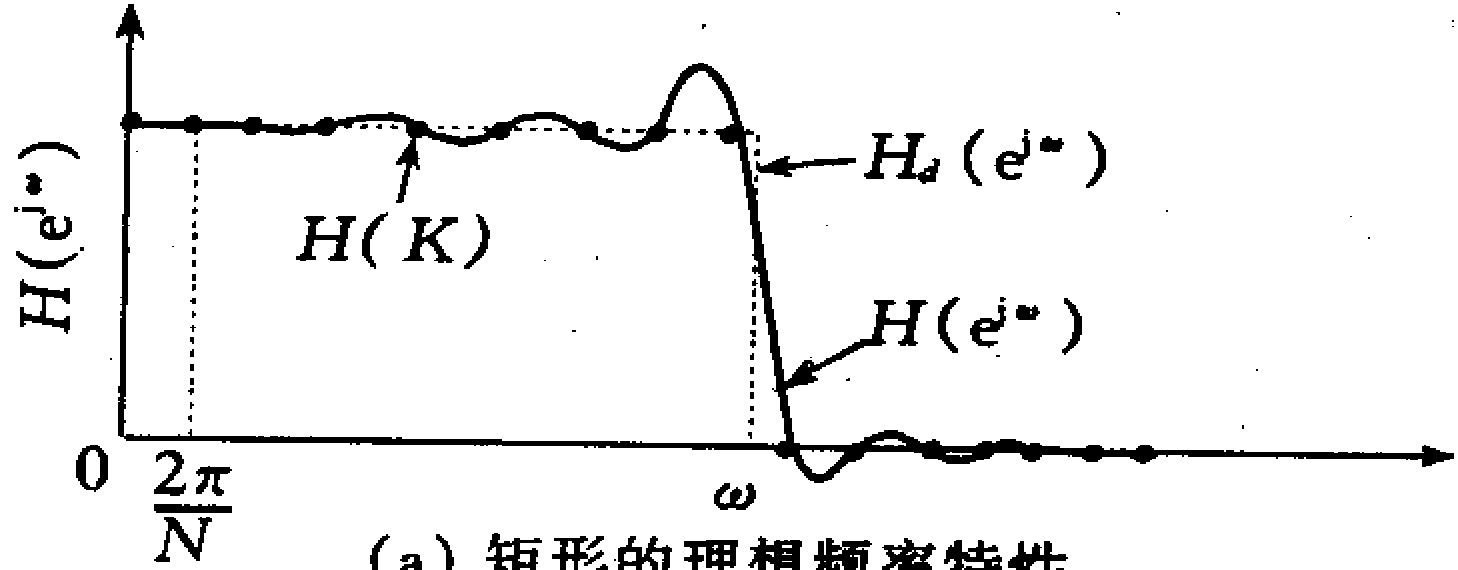
- 其系统函数为：

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

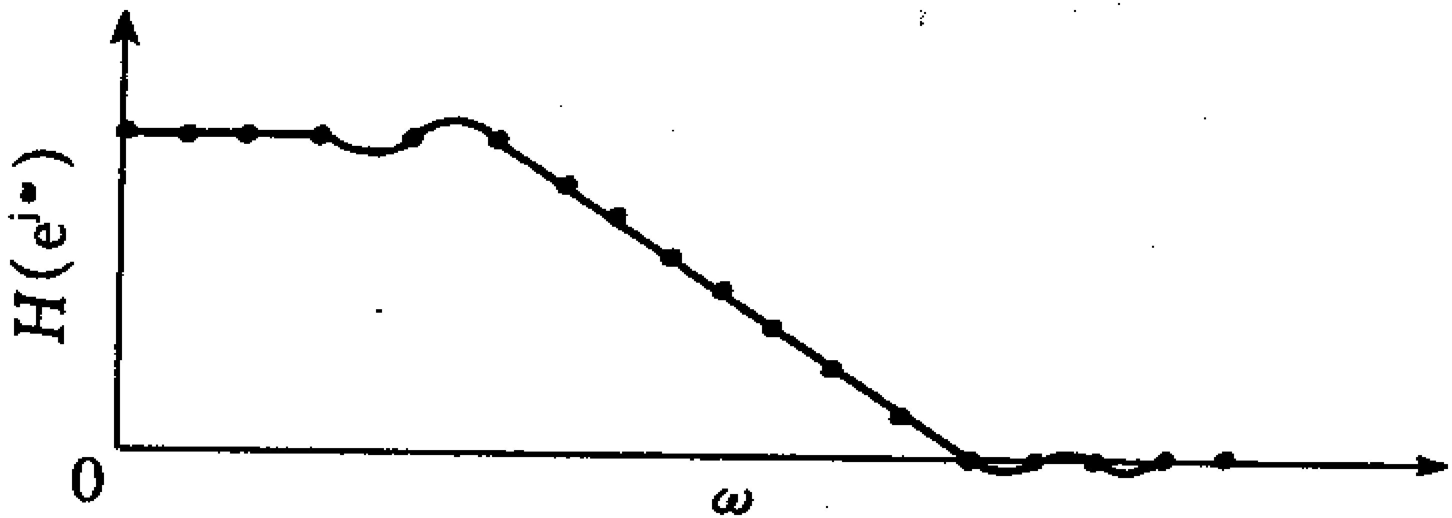
- 由内插公式，可从频率采样值直接实现**FIR**滤波器的系统函数

$$H(z)=\frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

$$=\frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k}z^{-1}}$$



(a) 矩形的理想频率特性



(b) 梯形的理想频率特性

- 用频率采样法设计FIR数字滤波器主要关心两个问题：
  - 实现线性相位 H(k) 应满足的条件？
  - 逼近误差有多大？与什么因素有关？改进措施？

7.3.2线性相位的约束条件 H(k)=?

- 如果FIR数字滤波器为线性相位的，则必满足第一或第二类线性相位的条件

$$h(n) = \pm h(N-n-1)$$

- 频域采样

$$H(k) = H_d(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = H_{dg}(\omega)e^{j\theta(\omega)}\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = A(k)e^{j\theta(k)}$$

  - $A(k)$，$\theta(k)$ 分别为幅度采样、相位采样

$$A(k) = H_{dg}(\omega)\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = H_{dg}(\frac{2\pi}{N}k)$$

$$\theta(k) = \theta(\omega)\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

$$k = 0,1,\ldots,N-1$$

1）第一类线性相位

$$\theta(k) = -\omega \frac{N-1}{2}\bigg|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = -\frac{N-1}{N}\pi k$$

- N为奇数 $$H_g(\omega) = H_g(2\pi - \omega)$$

$$A(k) = A(N-k) \qquad k = 0,1,\ldots,N-1$$

- N为偶数 $$H_g(\omega) = -H_g(2\pi - \omega)$$

$$A(k) = -A(N-k) \qquad k = 0,1,\ldots,N-1$$

2）第二类线性相位

$$\theta(k) = -\frac{\pi}{2} - \omega\frac{N-1}{2}\bigg|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = -\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{N}\pi k$$

- N为奇数 $$H_g(\omega) = -H_g(2\pi - \omega)$$

$$A(k) = -A(N-k) \qquad k = 0,1,\ldots,N-1$$

- N为偶数 $$H_g(\omega) = H_g(2\pi - \omega)$$

$$A(k) = A(N-k) \qquad k = 0,1,\ldots,N-1$$

对理想低通滤波器，截止频率为 $\omega_c = \frac{2\pi}{N} k_c$，采样点数N，则有：

N为奇数时（第一类线性相位）

$$A(k) = A(N-k) = 1, k = 0, 1, \ldots, k_c$$

$$A(k) = 0, k = k_c + 1, k_c + 2, \ldots, N - k_c - 1$$

$$\theta(k) = -\frac{N-1}{N} \pi k, k = 0, 1, \ldots, N-1$$

N为偶数时（第一类线性相位）

$$A(k)=1, k=0,1,\ldots,k_c$$

$$A(k)=0, k=k_c+1, k_c+2,\ldots,N-k_c-1$$

$$A(N-k)=-1, k=0,1,\ldots,k_c$$

$$\theta(k)=-\frac{N-1}{N}\pi k, k=0,1,\ldots,N-1$$

另外，对于高通和带阻，N只能为奇数

7.3.3 逼近误差及其改进措施

例7.3.1：用频率采样法设计第一类线性相位低通FIRDF，要求截止频率 $\omega_c=\dfrac{\pi}{3}$ ，频率采样点数分别取N=15和N=75，绘制h(n)及其频率响应，误差如何？

解：1）理想低通滤波器

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases} e^{-j\omega\tau}, |\omega|\le\omega_c \\ 0, \quad \omega_c<|\omega|\le\pi \end{cases}$$

$$\tau=(N-1)/2$$

$$H_d(e^{j\omega})=H_{dg}(\omega)e^{-j\omega(N-1)/2}$$

$$k_c = ?$$

$$\omega_c = \frac{2\pi}{N} k_c \Rightarrow \quad k_c = \frac{N\omega_c}{2\pi} = \frac{15 \times \frac{\pi}{3}}{2\pi} = 2.5$$

- **频域采样，N=15**

$$A(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, 1, 2, 13, 14 \\ 0, & k = 3, 4, \cdots 12 \end{cases} \qquad A(k) = A(N-k)$$

$$\theta(k) = -\omega \frac{N-1}{2} \bigg|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k} = -\frac{14}{15}\pi k \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

$$H(k) = A(k) e^{j\theta(k)} = \begin{cases} e^{-j14\pi k/15}, & k = 0, 1, 2, 13, 14 \\ 0, & k = 3, 4, \cdots 12 \end{cases}$$

- **H(k)的单位脉冲响应**

$$h(n)=IDFT\left[H(k)\right]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{14}H(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn},\quad n=0,1,\cdots 14$$

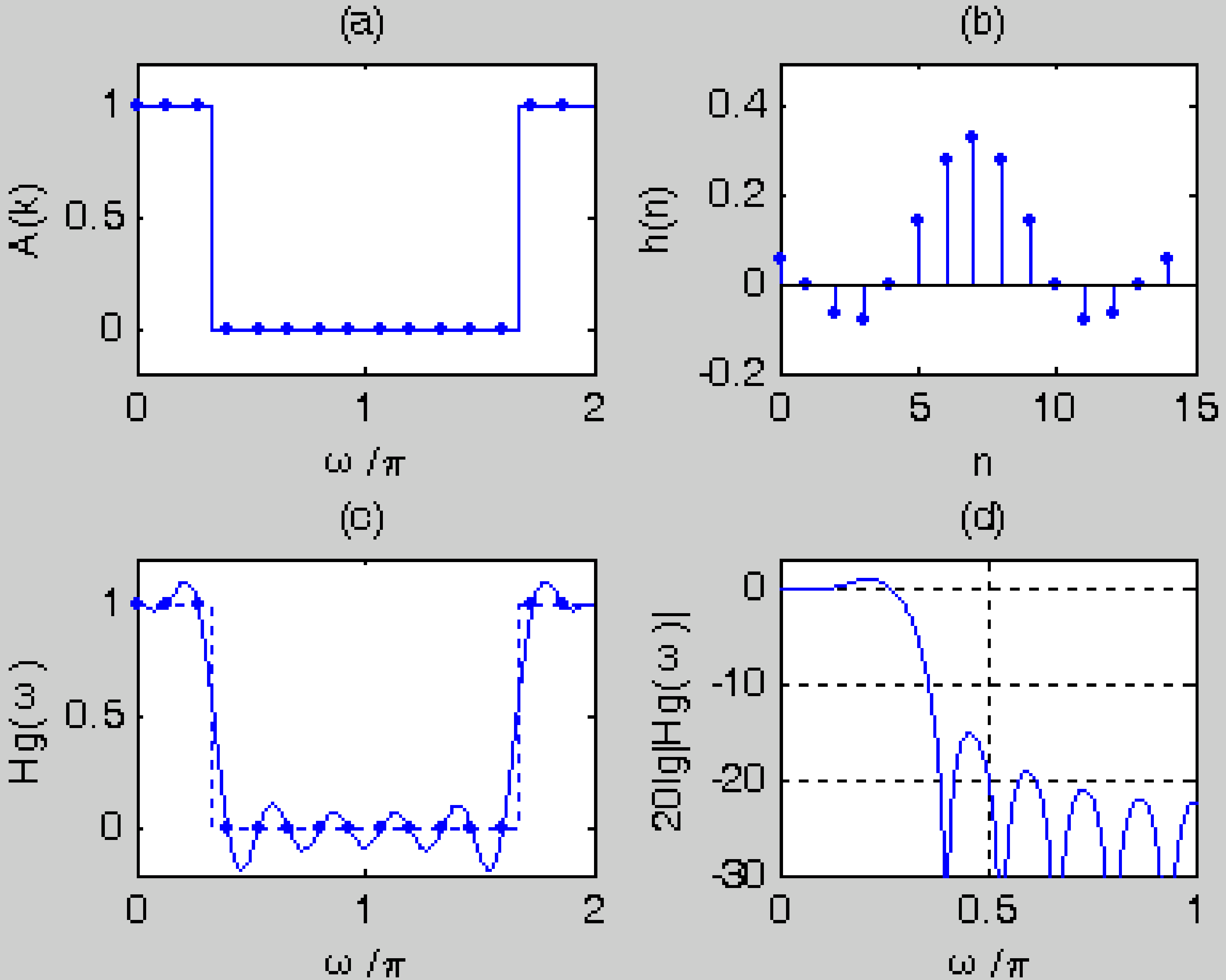
- **频率响应函数**

$$H(e^{j\omega})=FT[h(n)]$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}H(k)\varphi(\omega-\frac{2\pi}{N}k)=H_g(\omega)e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}$$

$$\varphi(\omega)=\frac{1}{N}\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}$$

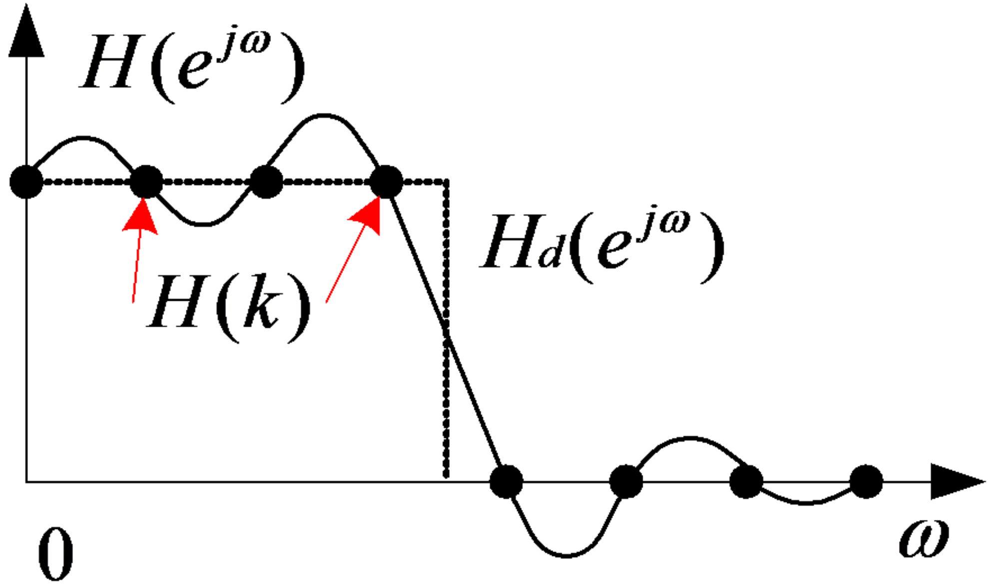
$$\varphi_k(\omega)=\varphi(\omega-\frac{2\pi}{N}k)=\begin{cases}1, & \omega=\frac{2\pi}{N}k\\ 0, & \omega=\frac{2\pi}{N}i, i\neq k\end{cases}$$



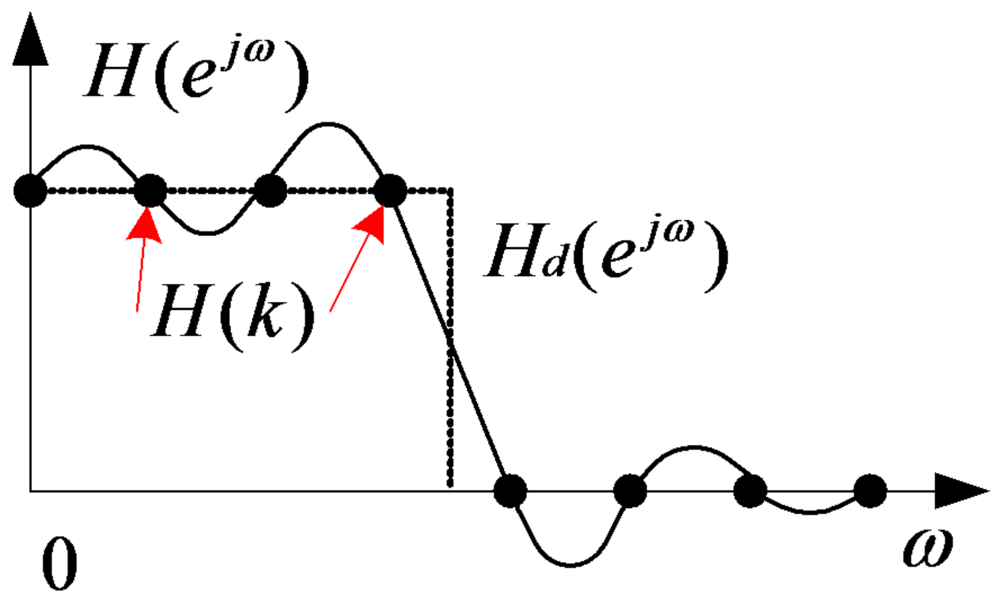
(a)
A(k)
ω /π
(b)
h(n)
n
(c)
Hg(ω)
ω /π
(d)
20lg|Hg(ω)|
ω /π

- 逼近误差?
- 在每个频率采样点上，滤波器的频响严格地与理想滤波器的频响采样值 **H(k)**相等，即逼近误差为零。

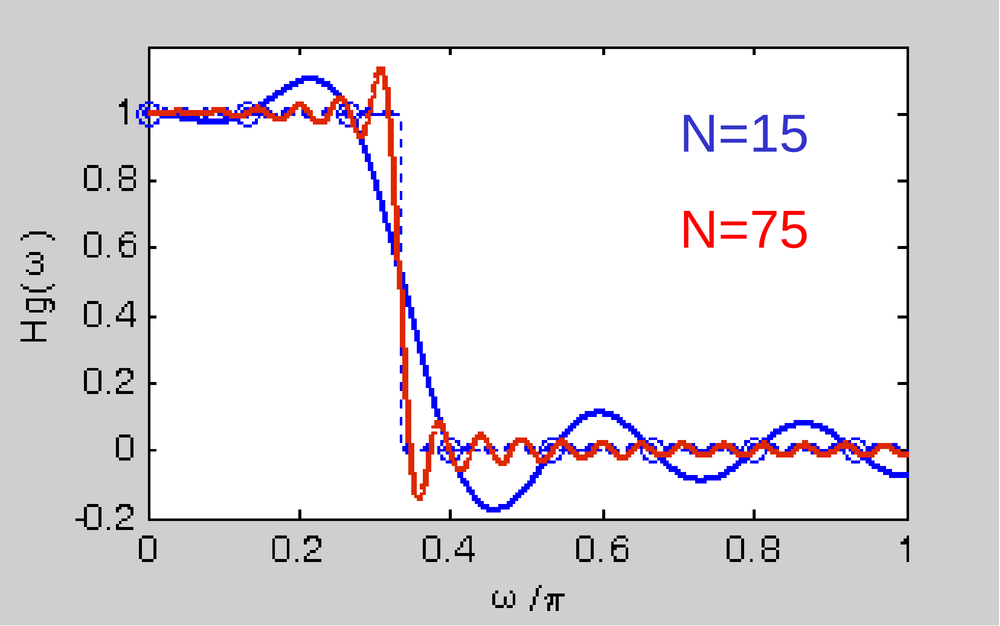
$$H(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = H(k) = H_d(k) = H_d(e^{j\frac{2\pi}{N}k})$$



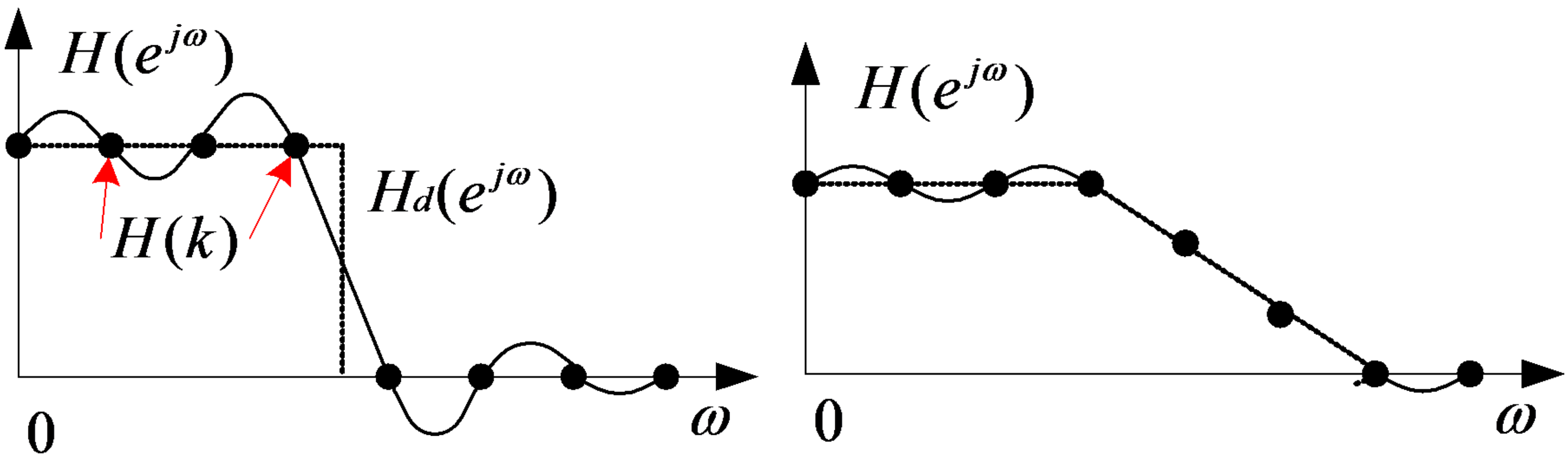
- 在采样点之间则由内插公式确定，因而有一定的逼近误差。
  - 在理想频率响应的不连续点附近误差最大，形成过渡带（$2\pi/N$），$H(e^{j\omega})$ 会产生肩峰和波纹。



- 在采样点之间则由内插公式确定，因而有一定的逼近误差。
  - 在理想频率响应的不连续点附近误差最大，形成过渡带（$2\pi/N$），$H(e^{j\omega})$ 会产生肩峰和波纹。
  - **N**增大，则采样点变密，波纹变化快，平坦区逼近误差减小，过渡带变窄，但通带最大衰减和阻带最小衰减无明显改善。



- 在采样点之间则由内插公式确定，因而有一定的逼近误差。
  - 误差大小与理想频率响应的曲线形状有关，理想特性平滑，则误差小；反之，误差大。



- 改进措施：

（1）增加N，减少逼近误差，但间断点附近的误差仍很大；

（2）在频响间断点附近区间增加一个或 多个过渡采样点（也称为加频窗），使不连续点变成缓慢过渡。代价是加大了过渡带，但增大了阻带衰减。

$$2\pi / N \Rightarrow (m+1)2\pi / N$$

- 根据过渡带的宽度要求，选择合适的滤波器长度N。采用如下估算公式，其中m为增加的过渡带采样点个数：

$$(m+1)2\pi / N \le \Delta B$$

$$\Rightarrow N \ge (m+1)2\pi / \Delta B$$

- 过渡带采样点数m和阻带最小衰减 α_s 的经验数据

m	1	2	3
α_s	44-54dB	65-75dB	85-95dB

频率采样法设计步骤

1. 根据阻带最小衰减，选择过渡带采样点的个数m
2. 确定过渡带宽度，估算滤波器长度N
3. 构造希望逼近的频率响应函数
4. 频域采样 H(k)
5. 求h(n)
6. 检验设计结果，微调边界频率

<小结>

频率采样设计法的优点：

① 直接从频域进行设计，物理概念清楚，直观方便；可以设计任意形状频率响应特性的FIRDF；

② 适合于窄带滤波器设计，这时频率响应只有少数几个非零值。

典型应用：用一串窄带滤波器组成多卜勒雷达接收机，覆盖不同的频段，多卜勒频偏可反映被测目标的运动速度；

缺点：截止频率难以控制。

因频率取样点都局限在2π/N的整数倍点上，所以在指定通带和阻带截止频率时，这种方法受到限制，比较死板。充分加大N，可以接近任何给定的频率，但计算量和复杂性增加。

7.5 IIR与FIR数字滤波器的比较

	FIR	IIR
设计方法	一般无解析的设计公式，要借助计算机程序完成	利用AF的成果，可简单、有效地完成设计
设计结果	可得到幅频特性和线性相位（最大优点）	只能得到幅频特性，相频特性未知（一大缺点），如需要线性相位，须用全通网络校准，但增加滤波器阶数和复杂性
稳定性	极点全部在原点（永远稳定）无稳定性问题	有稳定性问题
阶数	高	低
结构	非递归系统	递归系统
运算误差	一般无反馈，运算误差小	有反馈，由于运算中的四舍五入会产生极限环
快速算法	可用FFT实现，减少运算量	无快速运算方法

作业

- **P255-258**

  1，2，3，5，13，17

- **编程：**

  P258-259: 20