第九章
多采样率数字信号处理

王柯俨
kywang@mail.xidian.edu.cn
http://web.xidian.edu.cn/kywang/teach.html

9.1引言

- 需要多采样率的场合：
  - □ 需求不同（数字电视、数字电话等）
  - □ 非平稳信号的分析
  - □ 冗余数据的存在
- 采样率转换 、 多采样率数字信号处理

采样率转换方法：

- 方法一：间接转换

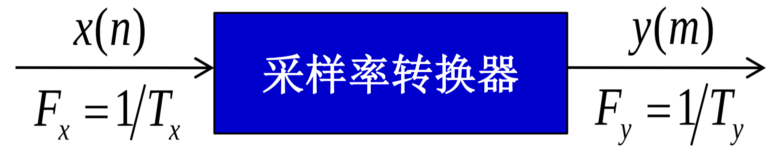
  把离散时间信号（序列）**x(n)**经过**D/A**变换器变成模拟信号**x(t)**，再经**A/D**变换器对**x(t)**以另一种采样率进行采样。

  但经过**D/A**和**A/D**变换器都会产生量化误差，影响精度。

- 方法二：直接转换

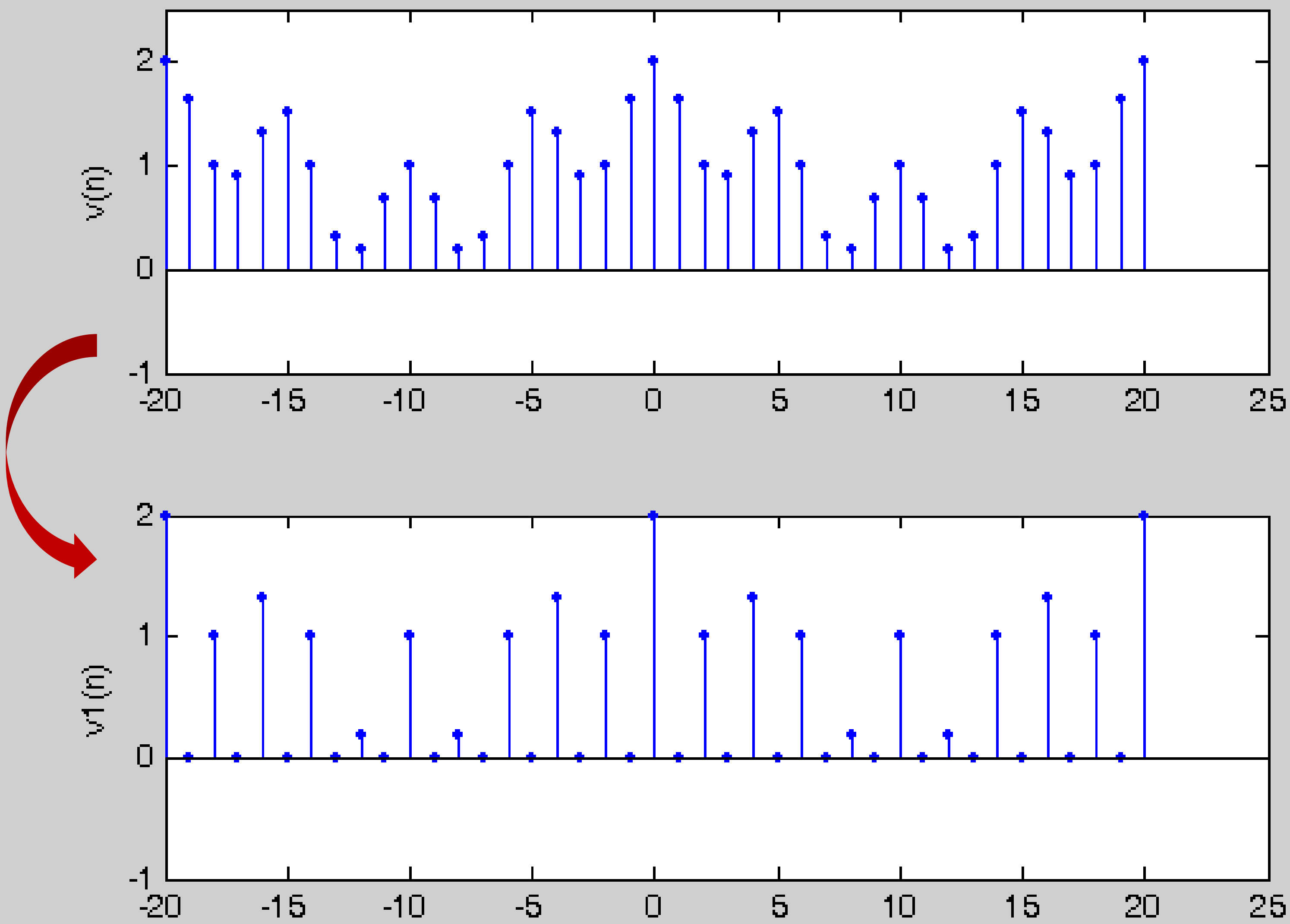
  直接在数字域对抽样信号**x(n)**作抽样频率的变换，以得到新的抽样信号**y(m)**。

- 采样率转换通常分为：



$\begin{cases} \text{“抽取”（Dacimation）：高->低} \\ \text{“插值”（Interpolation）：低->高} \end{cases}$

- 采样率转换类型 （转换前后采样率Fx和Fy的比例关系）
  - 整数因子抽取 $F_y = F_x / D$ D为正整数
  - 整数因子插值 $F_y = IF_x$ I为正整数
  - 有理数因子采样率转换 $F_y / F_x = I / D$ D, I互素整数
  - 任意因子采样率转换 $F_y / F_x =$ 任意有限数

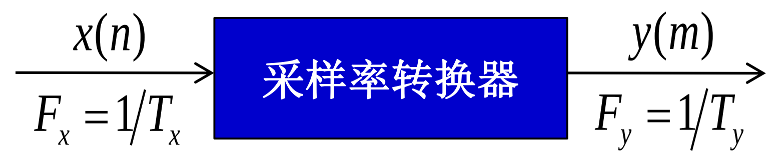


采样率转换类型？

9.2 整数因子抽取

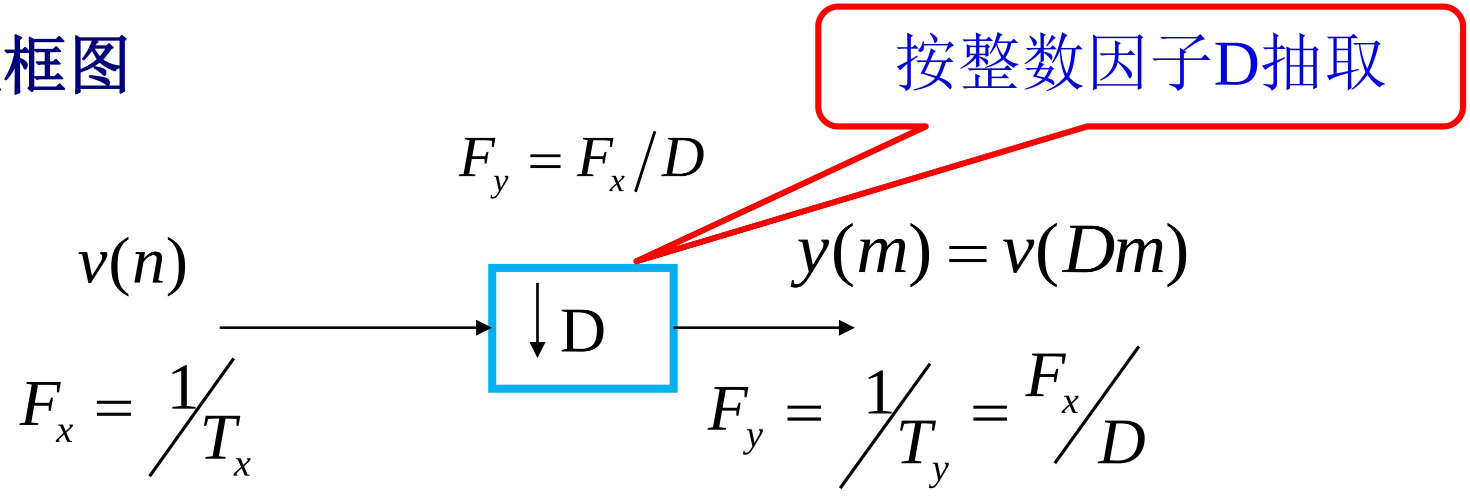
- 问题：

  采样率降低，导致…？



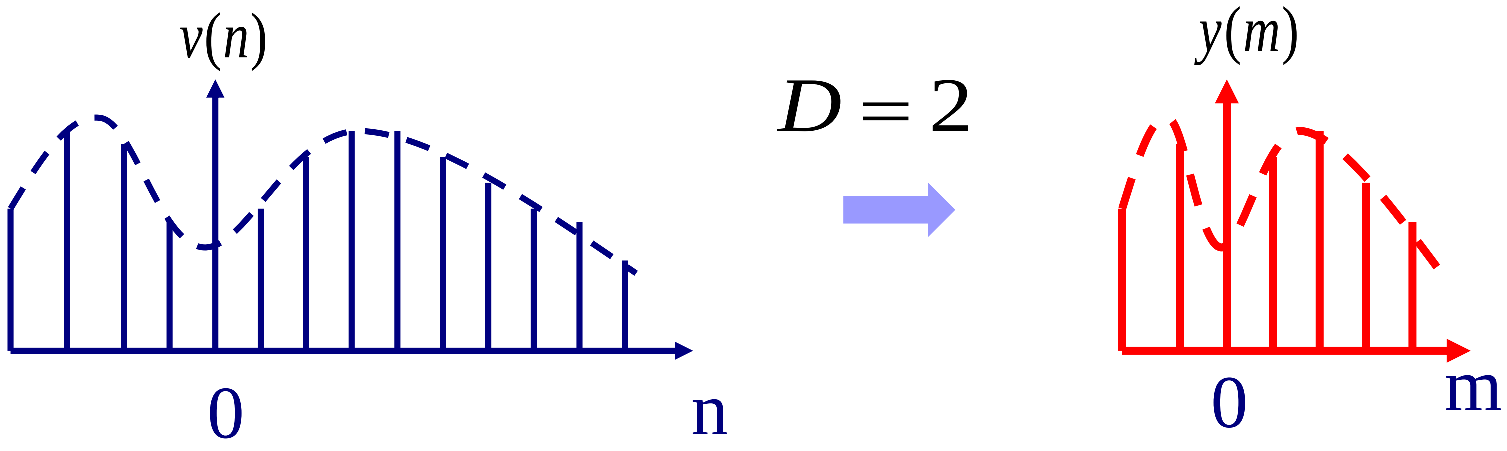
$$F_y = F_x / D$$

■ 原理框图



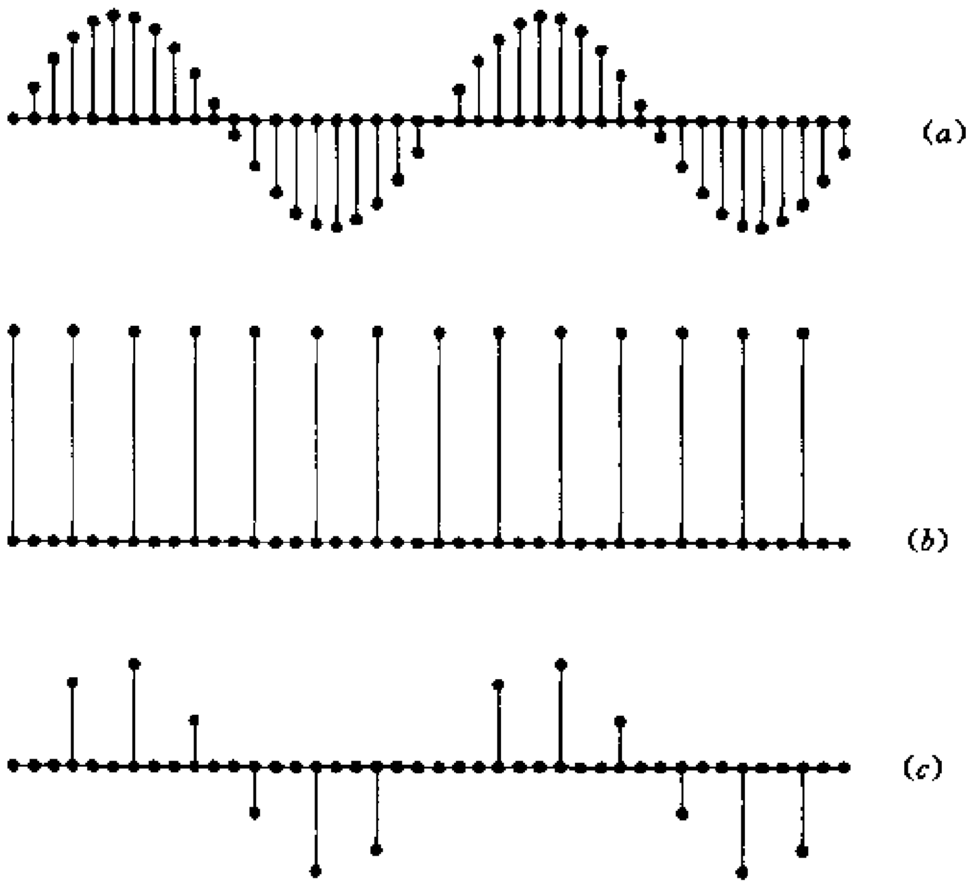
按整数因子D抽取
$F_y = F_x / D$
$v(n)$
$\downarrow D$
$y(m) = v(Dm)$
$F_x = 1/T_x$
$F_y = 1/T_y = F_x/D$

$$y(m) = v(Dm)$$



$v(n)$
0
n
$D = 2$
$y(m)$
0
m

时域分析



原始信号v(n)

脉冲串p(n)

$$p(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta(n-iD)$$

$$s(n)=\begin{cases}v(n), & n=0,\pm D,\pm 2D,\ldots \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=v(n)p(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}v(iD)\delta(n-iD)$$

D=3

抽取后的序列y(m)

$$y(m)=s(Dm)=v(Dm)p(Dm)=v(Dm)$$

频谱关系

- 令 $s(n) = v(n)p(n)$

$$y(m) = s(Dm) = v(Dm)p(Dm)$$

$$Y(Z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y(m)z^{-m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(Dm)z^{-m} \underset{n=Dm}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)z^{-n/D}$$

$$Y(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)z^{-n/D} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n)p(n)z^{-n/D}$$

$$DFS: \qquad p(n) = \frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1} e^{j\frac{2\pi}{D}nk}$$

$$Y(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(n)\left[\frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1} e^{j\frac{2\pi}{D}nk}\right]z^{-n/D}$$

$$Y(Z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}v(n)\left[\frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1}e^{j\frac{2\pi}{D}nk}\right]z^{-n/D}=\frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}v(n)e^{j\frac{2\pi}{D}nk}z^{-n/D}$$

$$=\frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}v(n)\left(e^{-j\frac{2\pi}{D}k}z^{1/D}\right)^{-n}=\frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1}V(e^{-j\frac{2\pi}{D}k}z^{1/D})$$

$$v(n)\Leftrightarrow V(e^{j\omega_x})$$

$$Y(e^{j\omega_y})=\frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1}V(e^{-j\frac{2\pi}{D}k}\left(e^{j\omega_y}\right)^{1/D})=\frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1}V(e^{-j\frac{\omega_y-2\pi k}{D}})$$

$$\because\ \omega_y=\Omega T_y\quad \omega_x=\Omega T_x\quad T_y=DT_x$$

$$\therefore\ \omega_y=D\omega_x$$

$$\boxed{Y(e^{j\omega_y})=\frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1}V(e^{-j(\omega_x-\frac{2\pi k}{D})})}$$

整数倍抽取的频域关系

$$Y(e^{j\omega_y}) = \frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1} V(e^{-j(\omega_x - \frac{2\pi k}{D})})$$

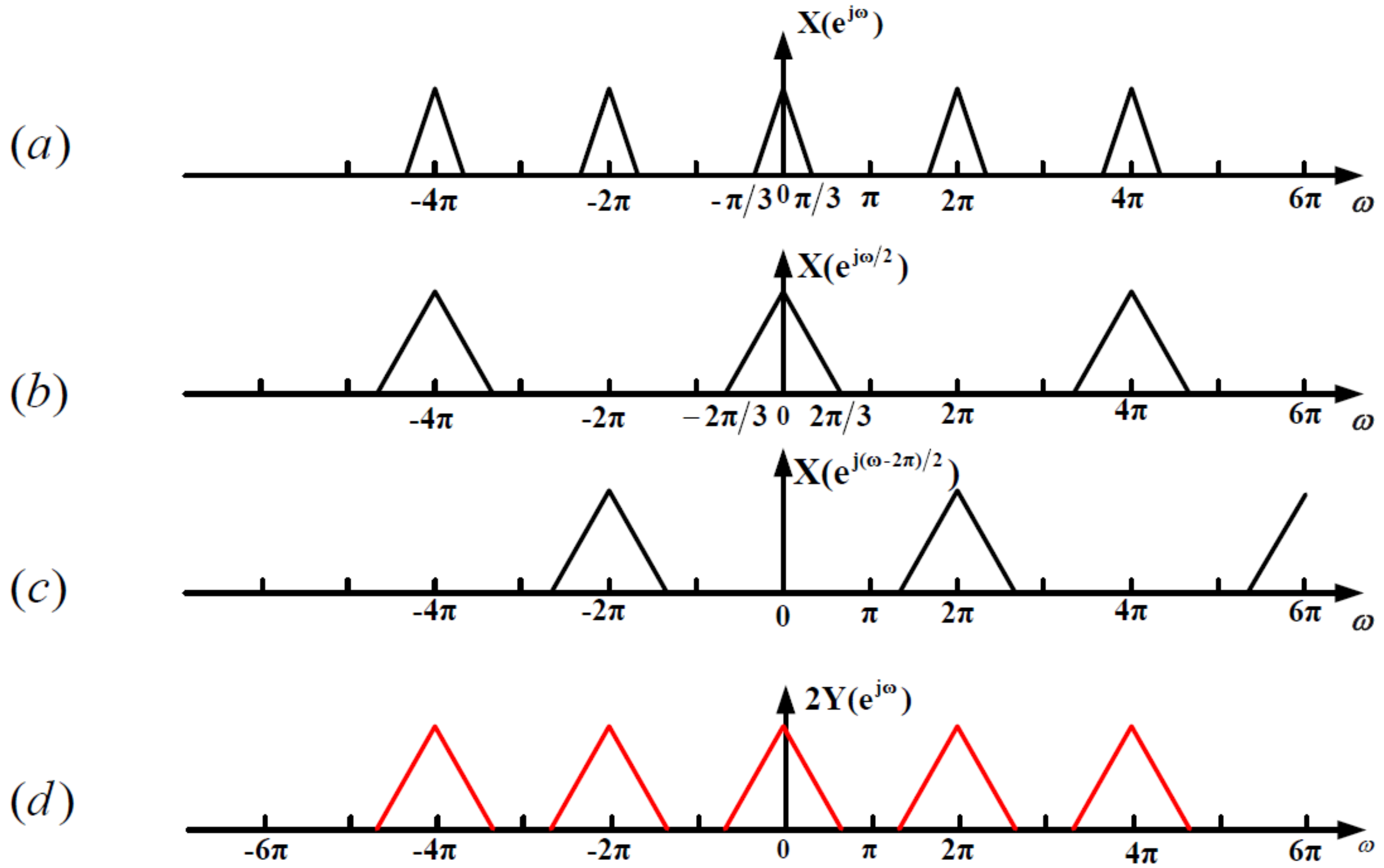
$$\omega_y = D\omega_x$$

$Y(e^{j\omega})$的频谱可由下列步骤获得：

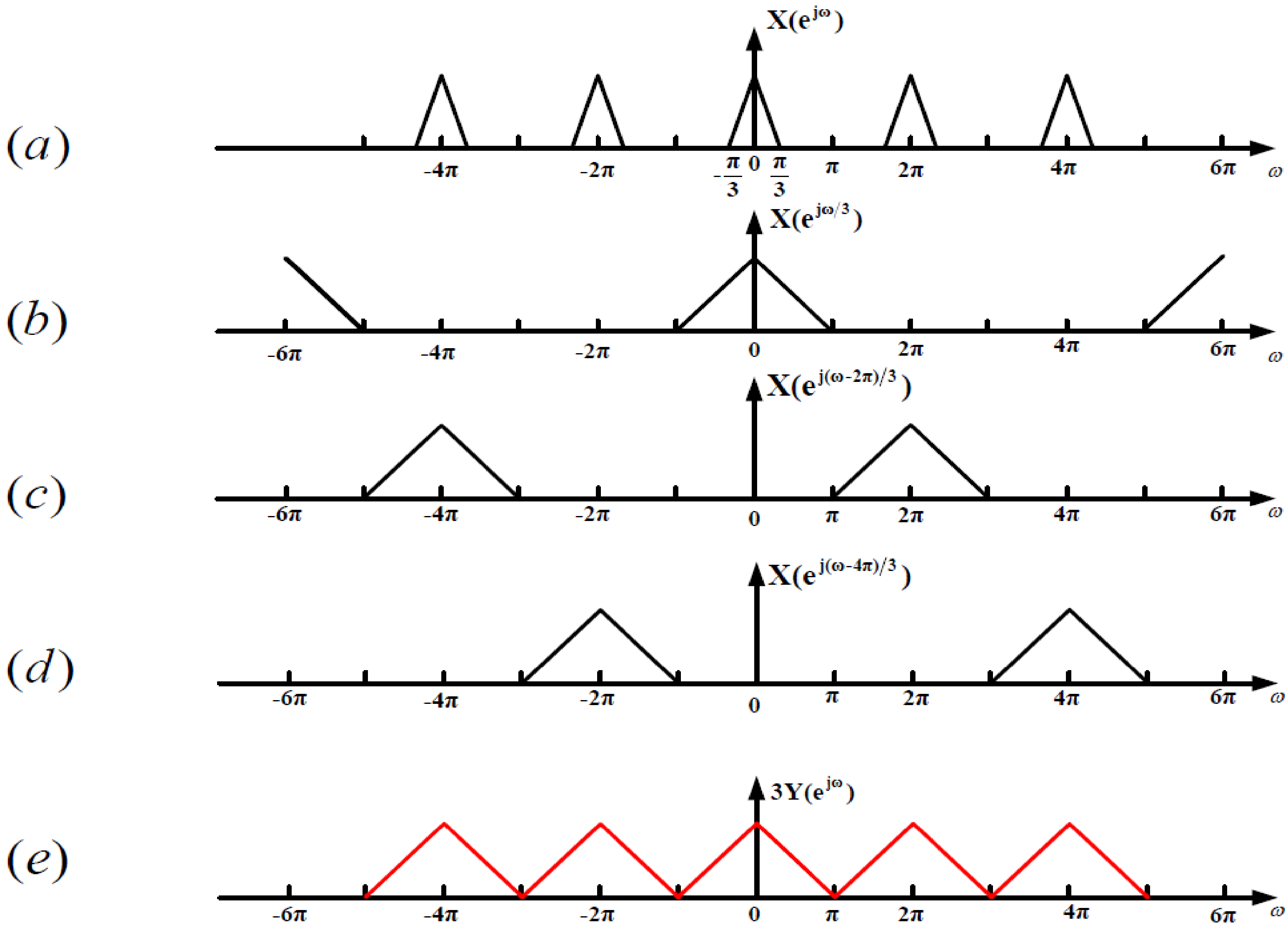
（1）将 $X(e^{j\omega})$扩展***D***倍得 $X(e^{j\omega/D})$ （ $X(e^{j\omega/D})$周期为 $2\pi D$）。

（2）将 $X(e^{j\omega/D})$右移 2π 的整数倍得到 $X(e^{j(\omega-2\pi k)/D})$ ， $k=0,1,\text{L}\ D-1$

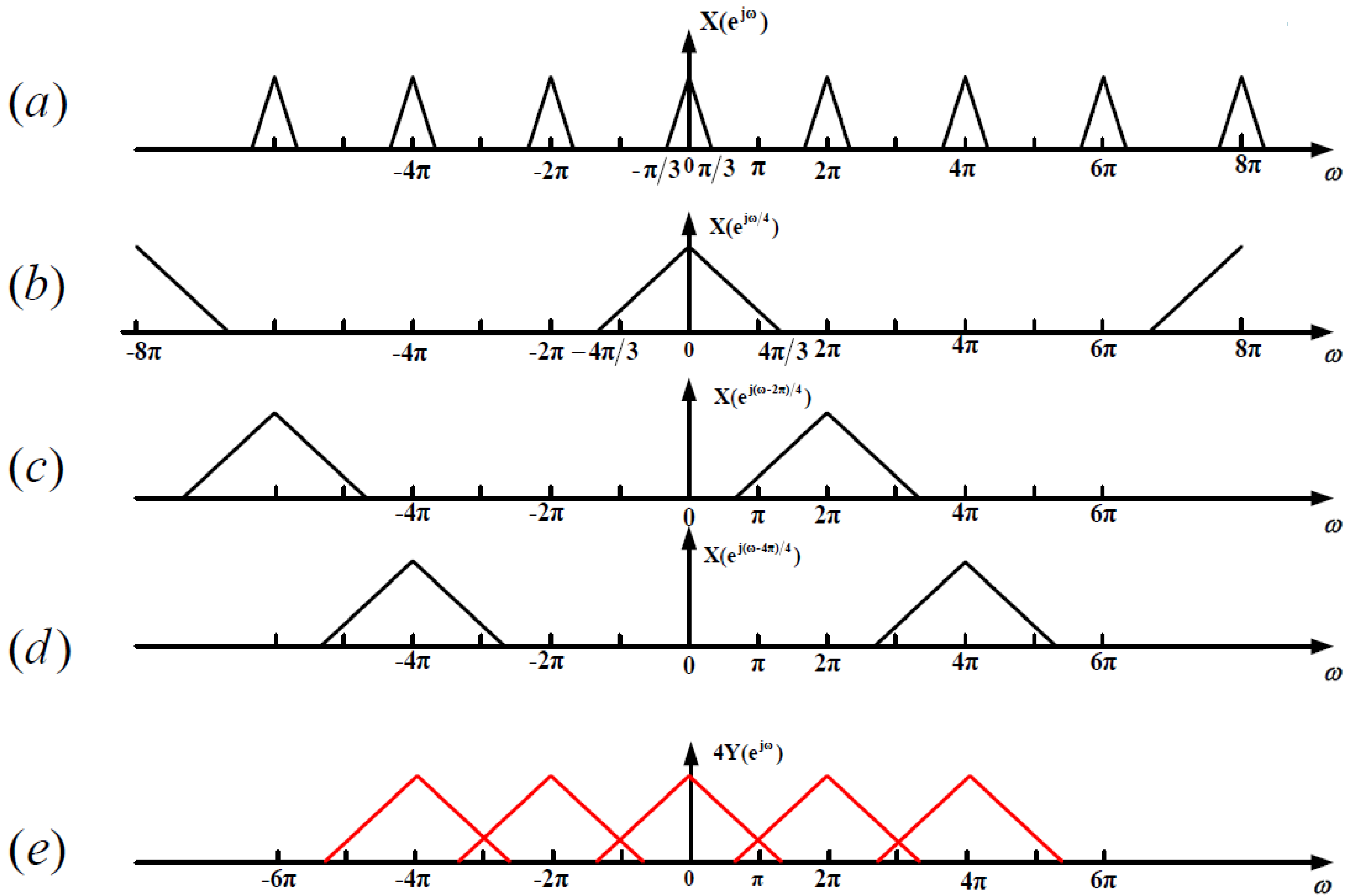
（3）将（2）中的***D***个周期为 $2\pi D$的函数相加并乘以因子 $1/D$ ，即可得到周期为 2π 的D倍抽取后的序列的频谱$Y(e^{j\omega})$。


(a)
X(e^{jω})
-4π
-2π
-π/3 0 π/3
π
2π
4π
6π
ω
(b)
X(e^{jω/2})
-4π
-2π
-2π/3 0 2π/3
2π
4π
6π
ω
(c)
X(e^{j(ω-2π)/2})
-4π
-2π
0
π
2π
4π
6π
ω
(d)
2Y(e^{jω})
-6π
-4π
-2π
0
π
2π
4π
6π
ω

抽取因子D=2


(a)
(b)
(c)
(d)
(e)
X(e^{jω})
X(e^{jω/3})
X(e^{j(ω-2π)/3})
X(e^{j(ω-4π)/3})
3Y(e^{jω})
-6π
-4π
-2π
-π/3
0
π/3
π
2π
4π
6π
ω

抽取因子D=3


(a)
$X(e^{j\omega})$
-4π -2π $-\pi/3$ 0 $\pi/3$ π 2π 4π 6π 8π ω
(b)
$X(e^{j\omega/4})$
-8π -4π -2π $-4\pi/3$ 0 $4\pi/3$ 2π 4π 6π 8π ω
(c)
$X(e^{j(\omega-2\pi)/4})$
-4π -2π 0 π 2π 4π 6π ω
(d)
$X(e^{j(\omega-4\pi)/4})$
-4π -2π 0 π 2π 4π 6π ω
(e)
$4Y(e^{j\omega})$
-6π -4π -2π 0 π 2π 4π 6π ω

抽取因子D=4

$$\omega_y = D\omega_x \qquad Y(e^{j\omega_y}) = \frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1} V(e^{-j(\omega_x - \frac{2\pi k}{D})})$$

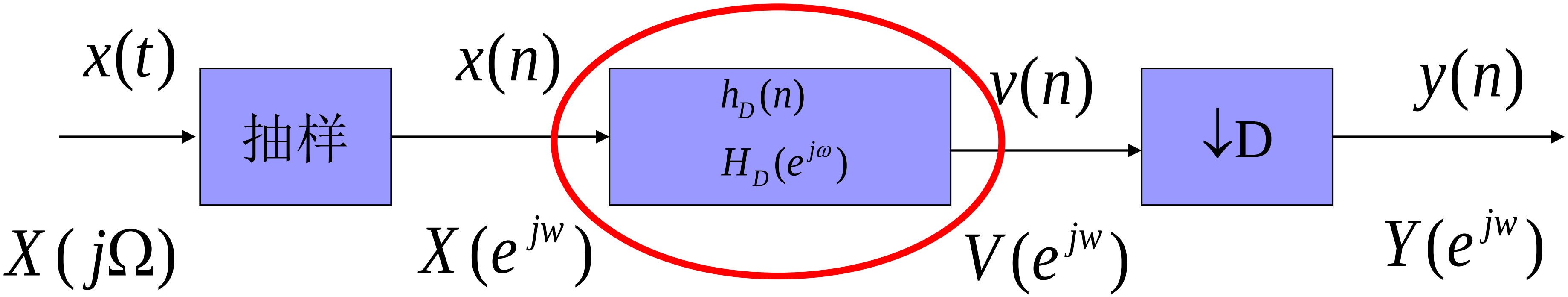
$$\omega_x = \frac{2\pi}{D} \quad \Rightarrow \quad \omega_y = 2\pi$$

- 经过整数因子D抽取，使数字频率区间 $0 \le |\omega_x| \le \frac{\pi}{D}$ 扩展成相应的频率区间 $0 \le |\omega_y| \le \pi$
- 原采样信号频谱中 $|\omega_x| > \frac{\pi}{D}$ 的非零频谱就会在 $\omega_y = \pi$ 附近产生频谱混叠

- 时域抽取得愈大，即D愈大，或抽样率愈低，则频域周期延拓的间隔愈近，因而有可能产生频率响应的混叠失真。

- 结论：对x(n)不能随意抽取，只有在抽取之后的抽样率仍满足抽样定理要求时，才不会产生混叠失真，才能恢复出原来的信号，否则必须采取另外的措施。

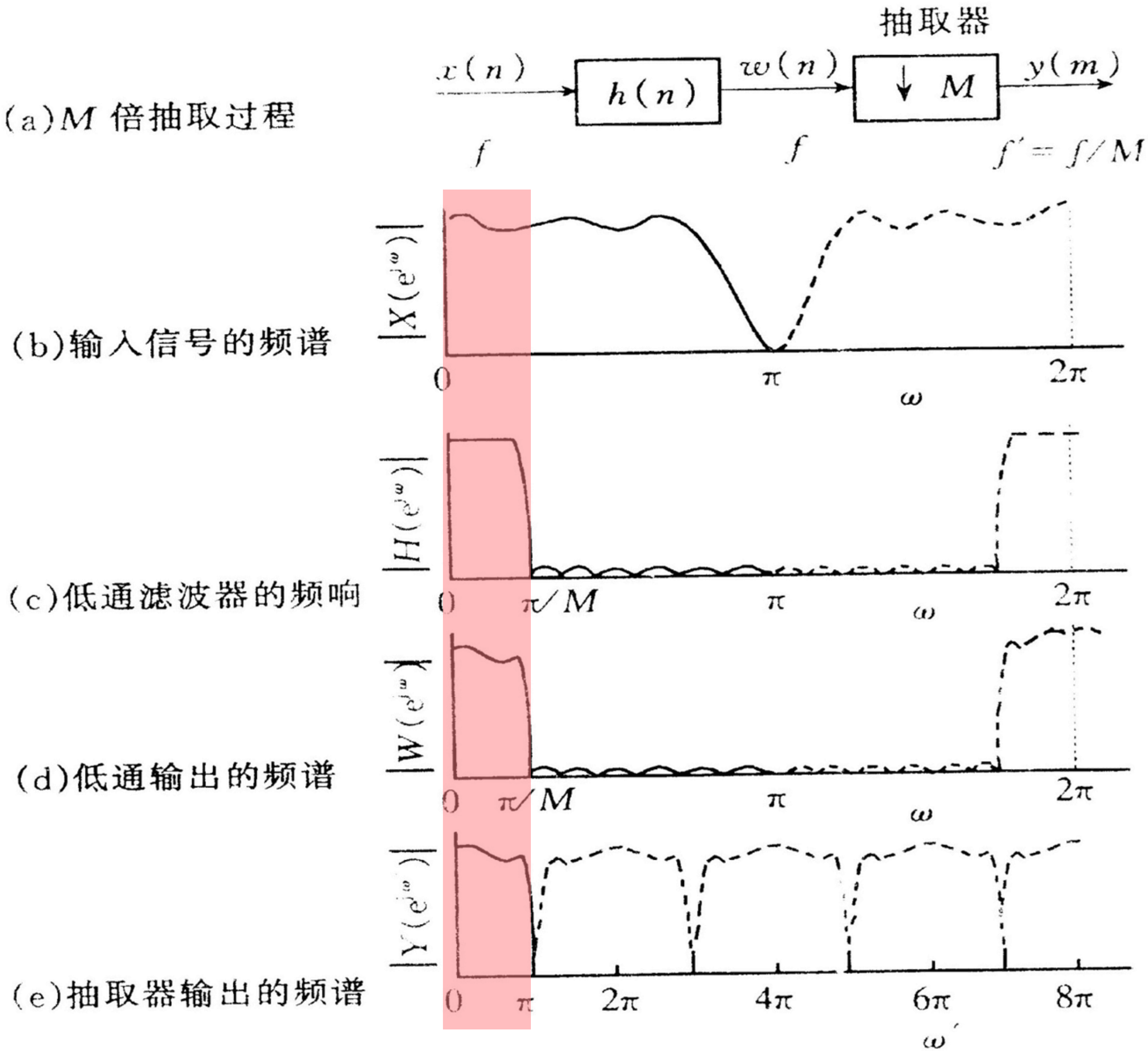
整数因子D抽取过程框图



抗混叠滤波器

- 在抽取器之前加上抗混叠滤波器。即：把序列**x(n)**先通过数字低通滤波器 $H_D(e^{j\omega})$，使信号的频带限制在：

$$\frac{1}{2}\frac{2\pi}{D}$$



抽取器
x(n)
h(n)
w(n)
↓ M
y(m)
f
f
f′ = f/M
(a)M 倍抽取过程
(b)输入信号的频谱
|X(e^jω)|
0
π
2π
ω
(c)低通滤波器的频响
|H(e^jω)|
0
π/M
π
ω
2π
(d)低通输出的频谱
|W(e^jω)|
0
π/M
π
ω
2π
(e)抽取器输出的频谱
|Y(e^jω′)|
0
π
2π
4π
6π
8π
ω′

$$x(n),\ X(e^{jw}) \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} h_D(n) \\ H_D(e^{j\omega}) \end{matrix}} \xrightarrow{v(n),\ V(e^{jw})} \boxed{\downarrow D} \longrightarrow y(n),\ Y(e^{jw})$$

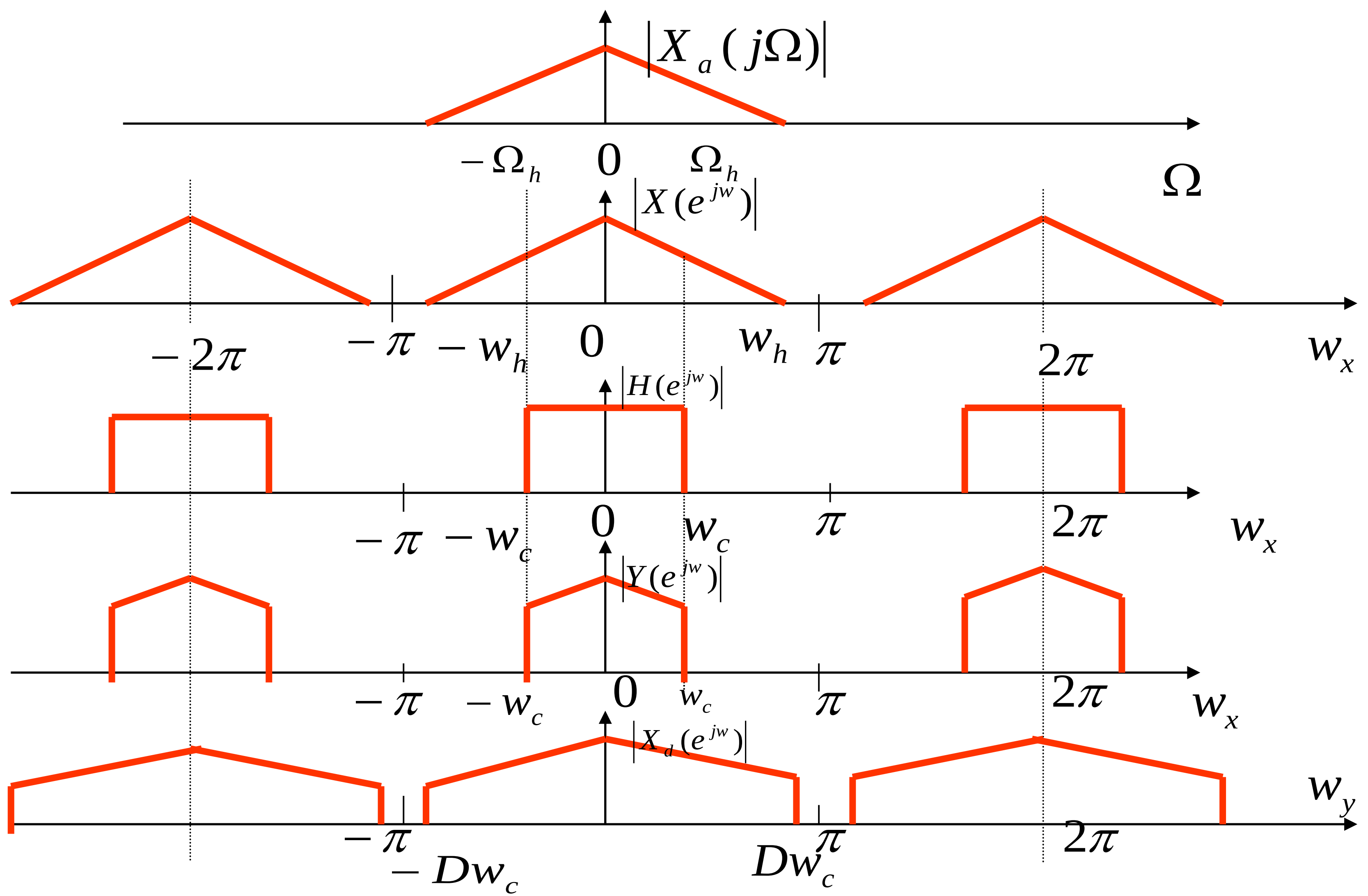
$$H_D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/D \\ 0, & \pi/D \le |\omega| \le \pi \end{cases}$$

$$V(z) = H_d(z)X(z)$$

$$Y(e^{j\omega_y}) = \frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1} V(e^{-j(\frac{\omega_y}{D} - \frac{2\pi k}{D})})$$

$$= \frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1} H_d(e^{-j(\frac{\omega_y}{D} - \frac{2\pi k}{D})})X(e^{-j(\frac{\omega_y}{D} - \frac{2\pi k}{D})})$$

$$= \frac{1}{D} H_d(e^{-j\frac{\omega_y}{D}})X(e^{-j\frac{\omega_y}{D}}) \qquad |\omega_y| \le \pi$$

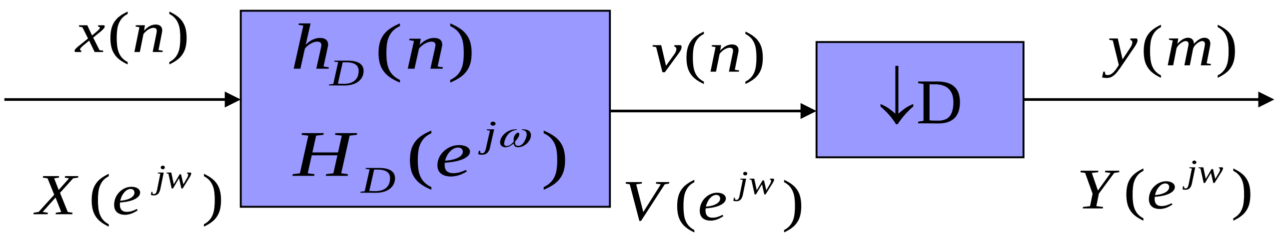


$|X_a(j\Omega)|$
$-\Omega_h$
0
Ω_h
Ω
$|X(e^{jw})|$
-2π
$-\pi$
$-w_h$
0
w_h
π
2π
w_x
$|H(e^{jw})|$
$-\pi$
$-w_c$
0
w_c
π
2π
w_x
$|Y(e^{jw})|$
$-\pi$
$-w_c$
0
w_c
π
2π
w_x
$|X_d(e^{jw})|$
w_y
$-\pi$
$-Dw_c$
Dw_c
π
2π

特点

- 已抽样序列x(n)和抽取序列y(n)的频谱差别在频率尺度上不同。
- 抽取的效果使数据量降低（1/D），但同时将原序列的频谱带宽扩展（D）。
- 为避免在抽取过程中发生频率响应的混叠失真，原序列x(n)的频谱就不能占满频带(0~π).
- 如果序列能够抽取而又不产生频率响应的混叠失真，其原来的连续时间信号是过抽样，使原抽样率可以减小而不发生混叠。

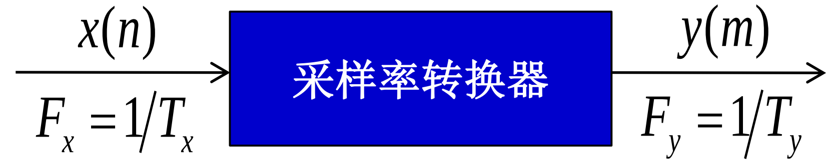
时域关系



$$v(n) = x(n) * h_D(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h_D(k) v(n-k)$$

$$y(m) = v(Dm) = \sum_{k=0}^{M-1} h_D(k) v(Dm-k)$$

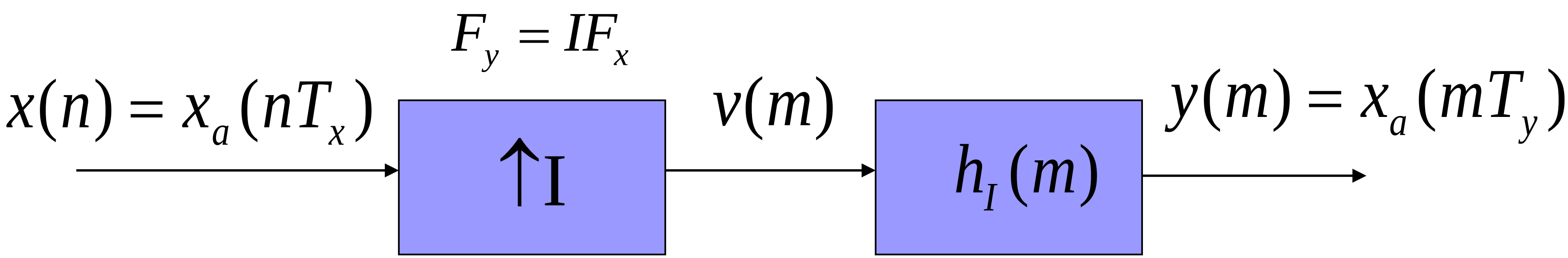
9.3整数因子内插



- 采样频率

$$F_y = IF_x$$

- **整数因子I内插：将x(n)的抽样频率 F_x 增加 I 倍，即为I倍插值结果**



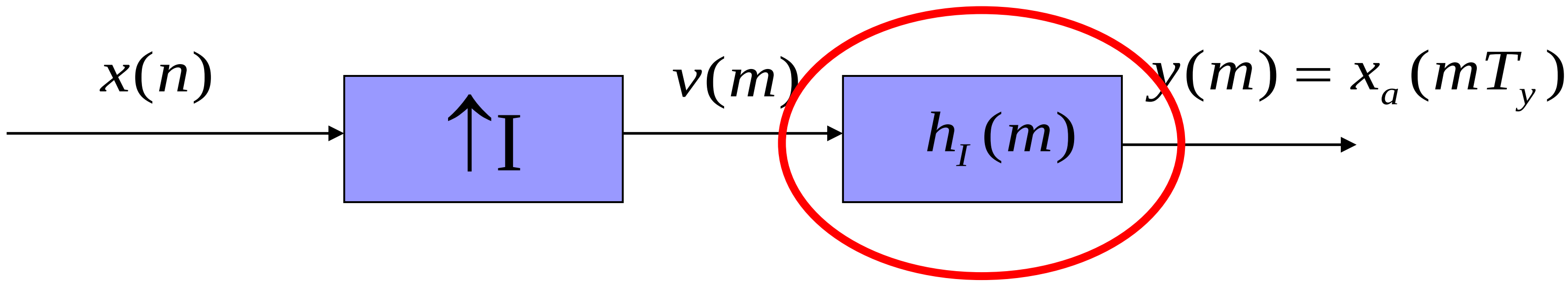
- 插值的目标

$$y(m) = x_a(mT_y) \quad T_y = T_x / I$$

- **I倍插值能否恢复?**

零值内插方案

- 在已知抽样序列x(n)的相邻两抽样点之间等间隔地插入(I-1)个零值点
- 然后进行数字低通滤波，即可求得I倍插值的结果。



证明：

$$v(m)=\begin{cases} x(m/I), & m=0,\pm I,\pm 2I,\cdots \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

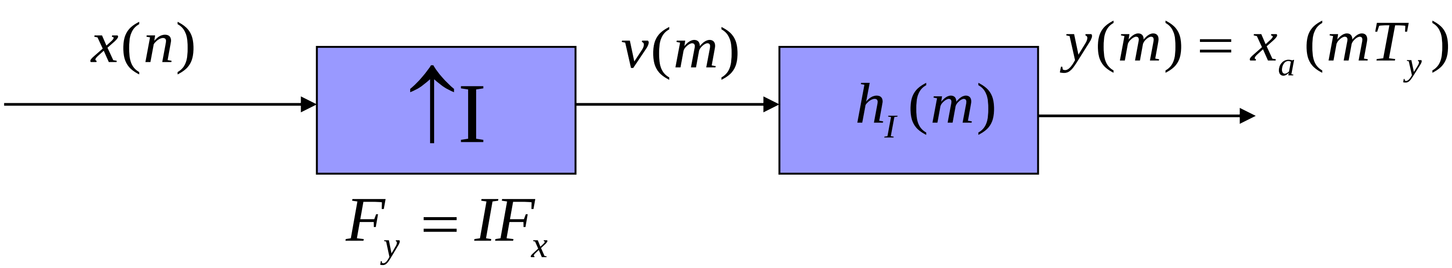
$$v(m)=\begin{cases} x(m/I), & m=0,\pm I,\pm 2I,\cdots \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

- **z变换**

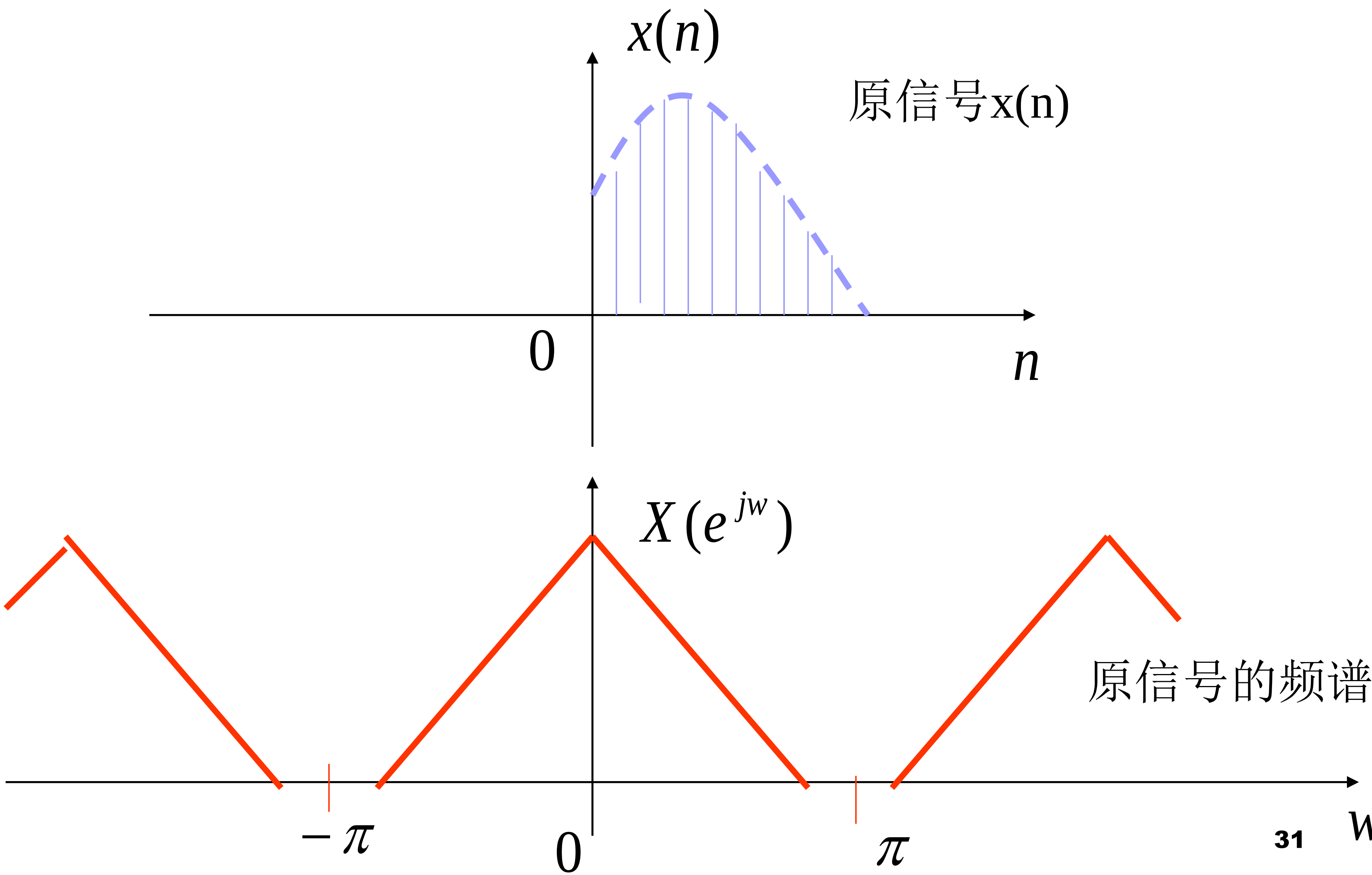
$$V(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} v(m)z^{-m}=\sum_{m=-\infty}^{\infty} v(Im)z^{-Im}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)z^{-Im}=X(z^{I})$$

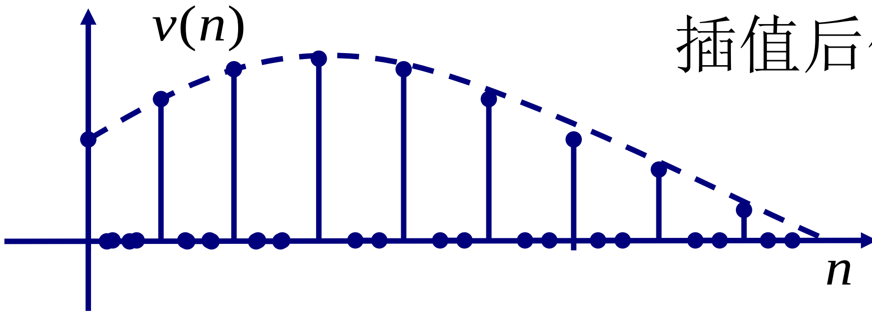
$$V(e^{j\omega_y})=V(z)\Big|_{z=e^{j\omega_y}}=X(e^{jI\omega_y}) \qquad \omega_y={\omega_x}/{I}$$



原信号x(n)及其频谱$X(e^{jw})$

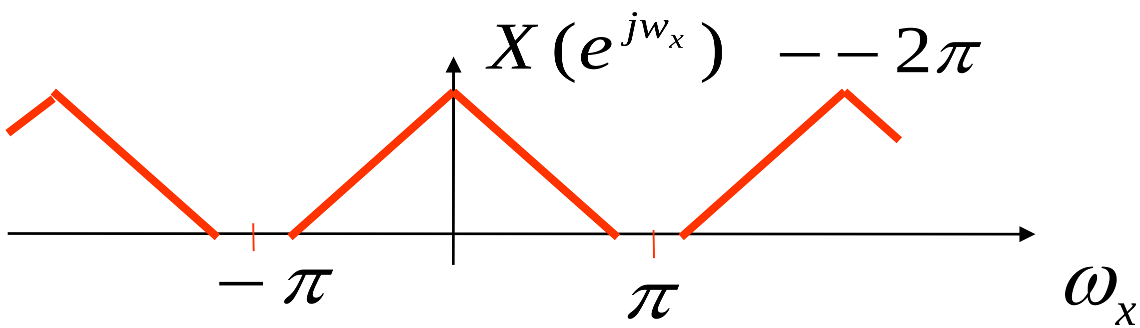


插入零值点后的信号及其频谱（I=3）



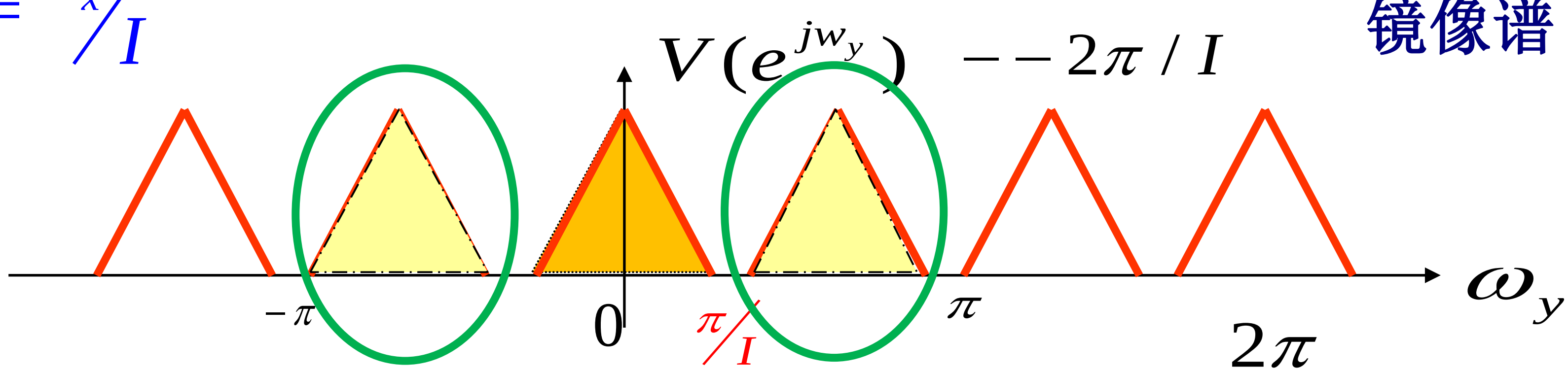
插值后信号

$$V(e^{j\omega_y}) = X(e^{jI\omega_y})$$



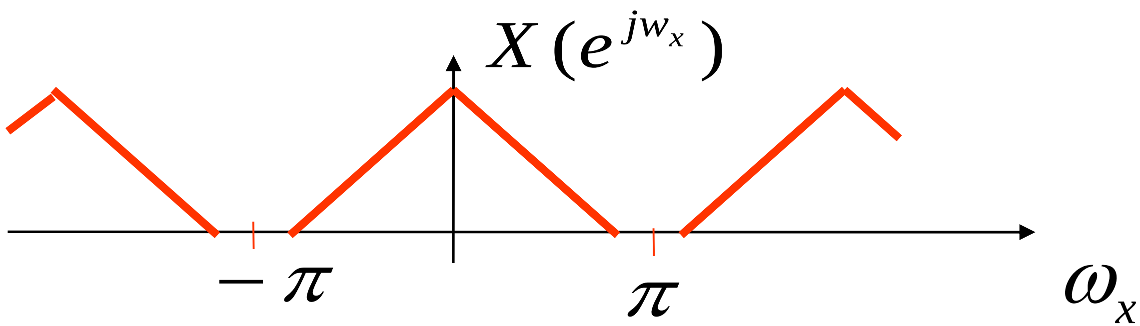
$$\omega_y = \omega_x / I$$

镜像谱

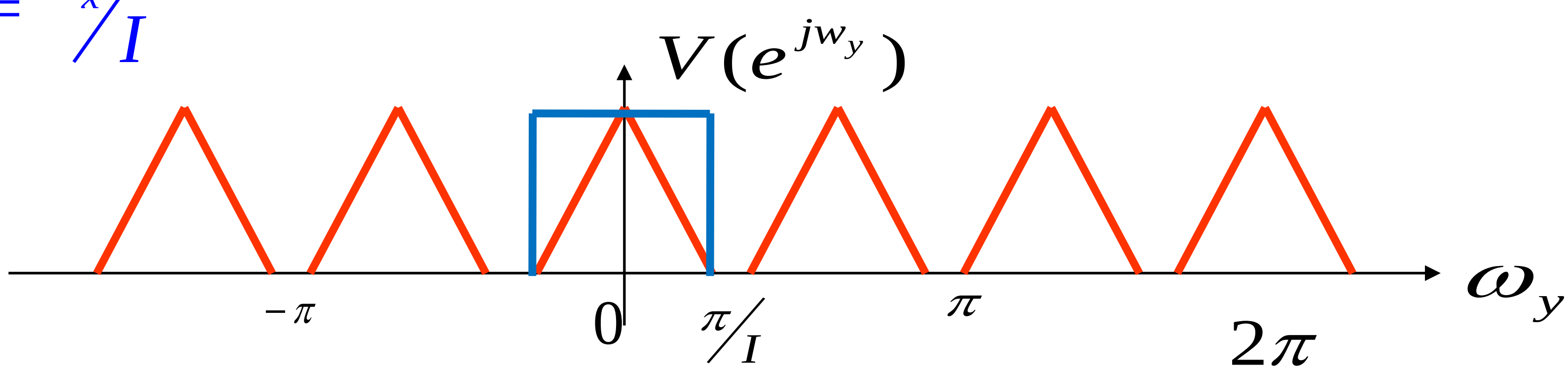


- 如何实现 $y(m)=x_a(mT_y)\quad T_y = {T_x}/{I}\quad \omega_y = {\omega_x}/{I}$?

- 如何实现 $y(m)=x_a(mT_y)$ $T_y = T_x/I$ $\omega_y = \omega_x/I$
- 加滤波器 $H_I(e^{j\omega_y}) = \begin{cases} C, & |\omega_y| < \pi/I \\ 0, & \pi/I \le |\omega_y| \le \pi \end{cases}$ 镜像滤波器



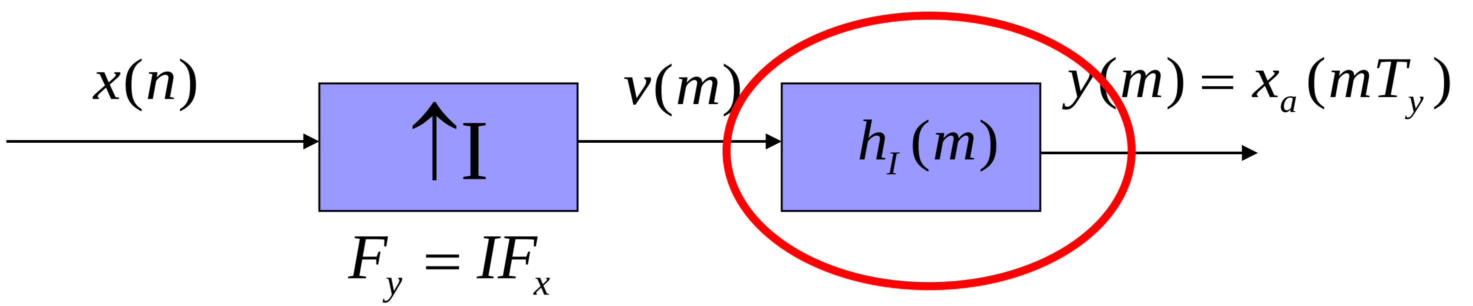
$\omega_y = \omega_x/I$



- 如何实现 $y(m)=x_a(mT_y)\quad T_y={T_x}/{I}\quad \omega_y={\omega_x}/{I}$
- 加滤波器 $H_I(e^{j\omega_y})=\begin{cases}C, & |\omega_y|<{\pi}/{I}\\ 0, & {\pi}/{I}\le|\omega_y|\le\pi\end{cases}$ 镜像滤波器

$$Y(e^{j\omega_y})=\begin{cases}CV(e^{j\omega_y})=CX(e^{jI\omega_y}), & |\omega_y|<{\pi}/{I}\\ 0, & {\pi}/{I}\le|\omega_y|\le\pi\end{cases}$$

- **C=?**



- 如何实现 $y(m)=x_a(mT_y)\quad T_y={T_x}/{I}\quad \omega_y={\omega_x}/{I}$
- 加滤波器 $H_I(e^{j\omega_y})=\begin{cases} C, & |\omega_y|<{\pi}/{I} \\ 0, & {\pi}/{I}\le|\omega_y|\le\pi \end{cases}$ 镜像滤波器

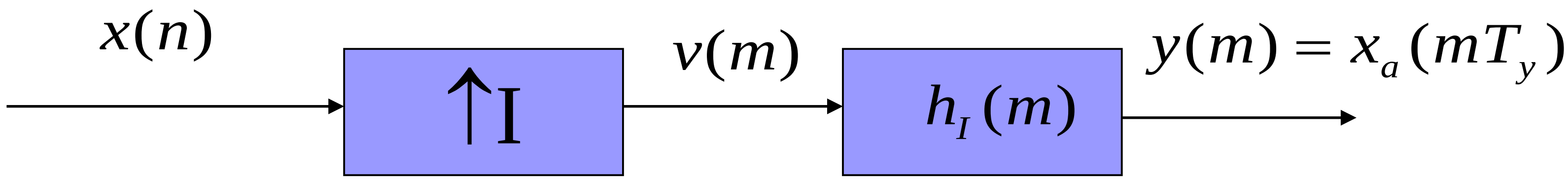
$$Y(e^{j\omega_y})=\begin{cases} CV(e^{j\omega_y})=CX(e^{jI\omega_y}), & |\omega_y|<{\pi}/{I} \\ 0, & {\pi}/{I}\le|\omega_y|\le\pi \end{cases}$$

- C=? $y(m)=x(m/I)\quad m=0,\pm I,\pm 2I,\cdots$

$$y(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Y(e^{j\omega_y})d\omega_y=\frac{1}{2\pi}\int_{-{\pi}/{I}}^{{\pi}/{I}}CX(e^{jI\omega_y})d\omega_y$$

$$=\frac{C}{2\pi I}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega_x})d\omega_x=\frac{C}{I}x(0)\qquad\Rightarrow C=I$$

时域关系

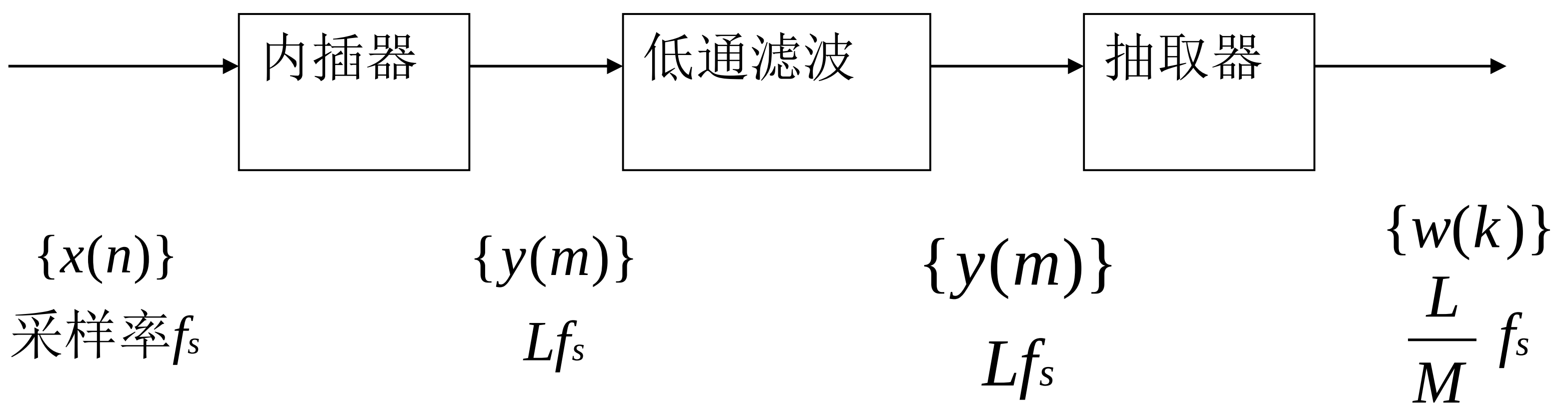


$$y(m) = v(m) * h_I(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_I(m-k)v(k)$$

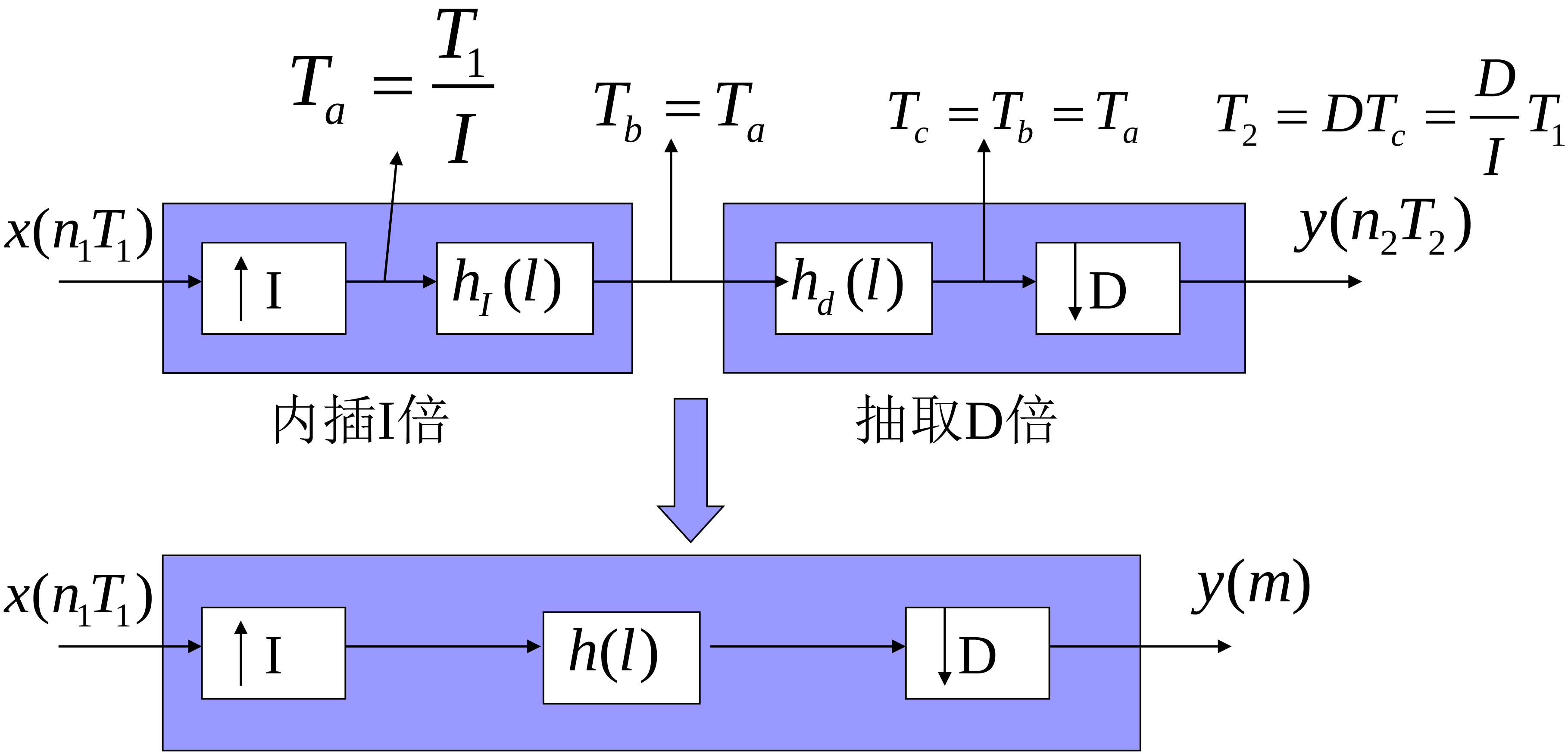
$$\because \begin{cases} v(kI) = x(k), \\ v(k) = 0, \quad k \neq 0, \pm I, \pm 2I, \cdots \end{cases}$$

$$y(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_I(m-kI)x(k)$$

采样率变换一个有理因数



问题:低通滤波的指标如何确定?



$$H\left(e^{j\omega}\right) = H_I\left(e^{j\omega}\right) H_D\left(e^{j\omega}\right)$$

$$H_D\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}1, & |\omega|<\dfrac{\pi}{D}\\ 0, & \dfrac{\pi}{D}\le|\omega|\le\pi\end{cases}\qquad H_I(e^{j\omega})=\begin{cases}I, |\omega|\le\dfrac{\pi}{I}\\ 0, \dfrac{\pi}{I}\le|\omega|\le\pi\end{cases}$$

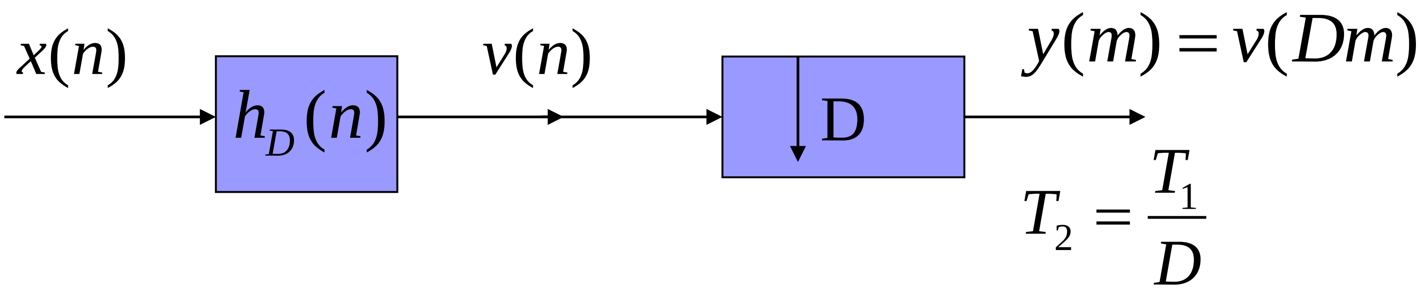
所以,

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}1, & |\omega|<\min\{\dfrac{\pi}{D},\dfrac{\pi}{I}\}\\ 0, & \min\{\dfrac{\pi}{D},\dfrac{\pi}{I}\}\le|\omega|\le\pi\end{cases}$$

- 无论是抽取或是插值，其输入到输出的变换都相当于经过一个线性移变（时变）系统。

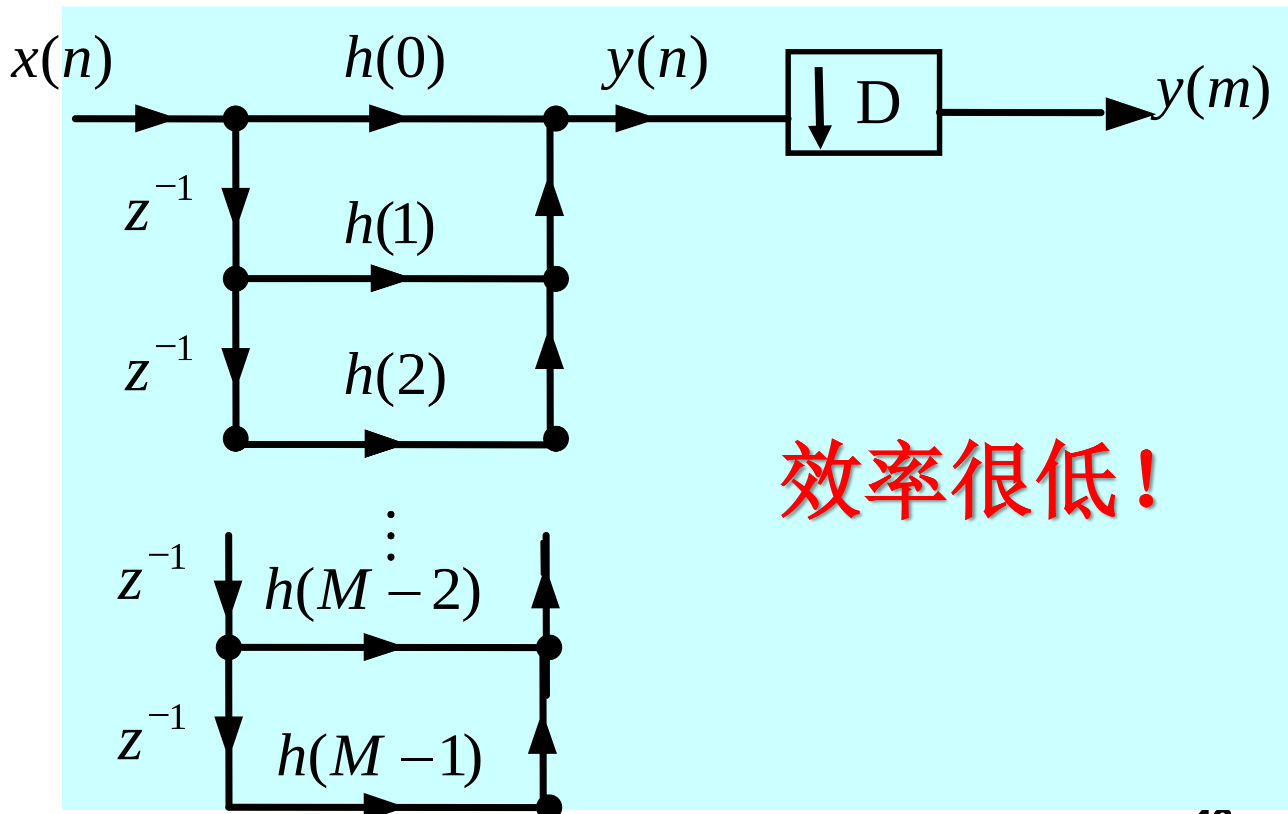
9.5 采样率转换滤波器的高效实现方法

一、整数因子D抽取系统的直接型FIR结构：

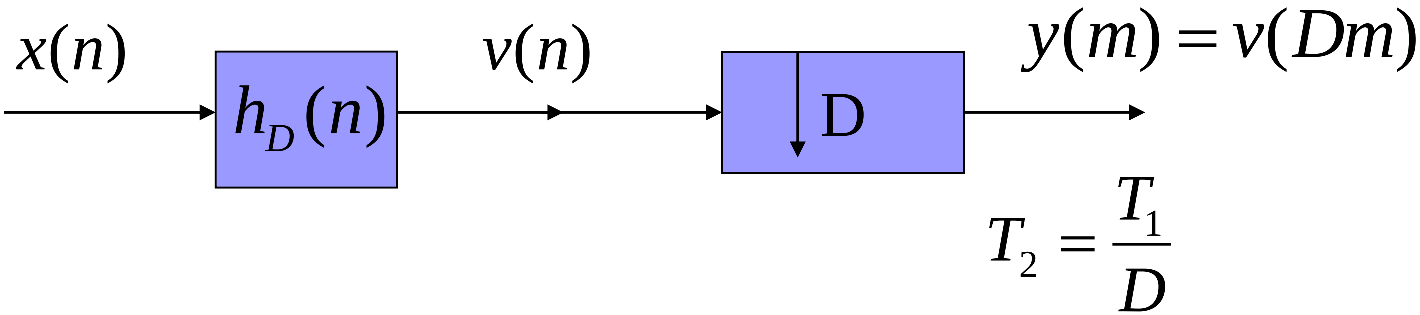


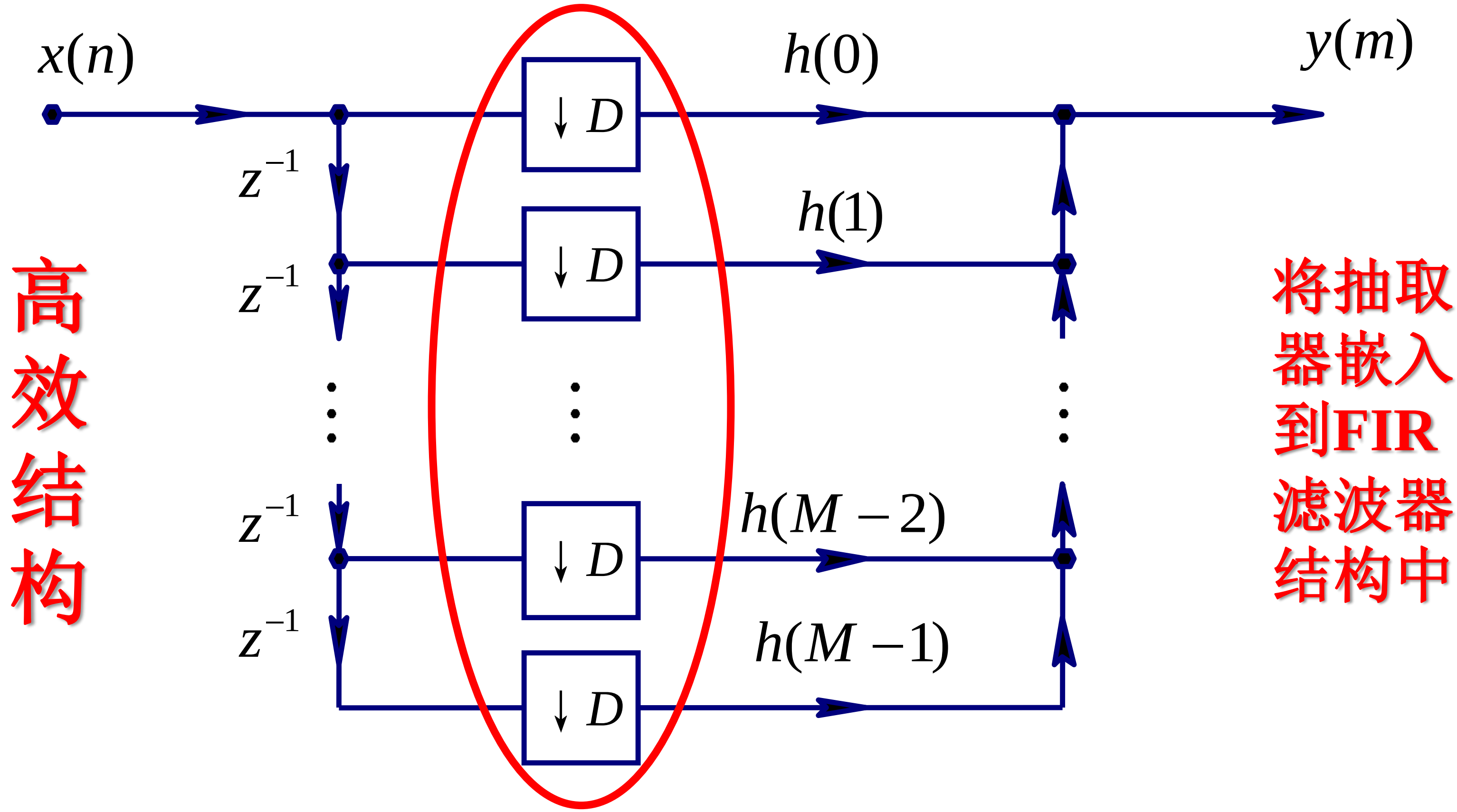
问题：

- **滤波器工作在高采样频率上；**
- **D个滤波器输出的样值中，仅一个输出**

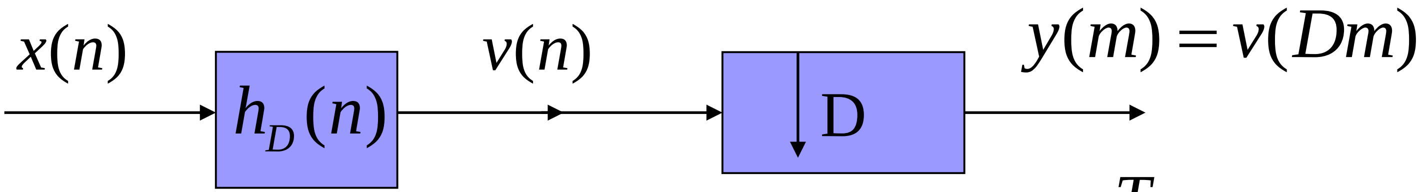


一、整数因子D抽取系统的直接型FIR结构：

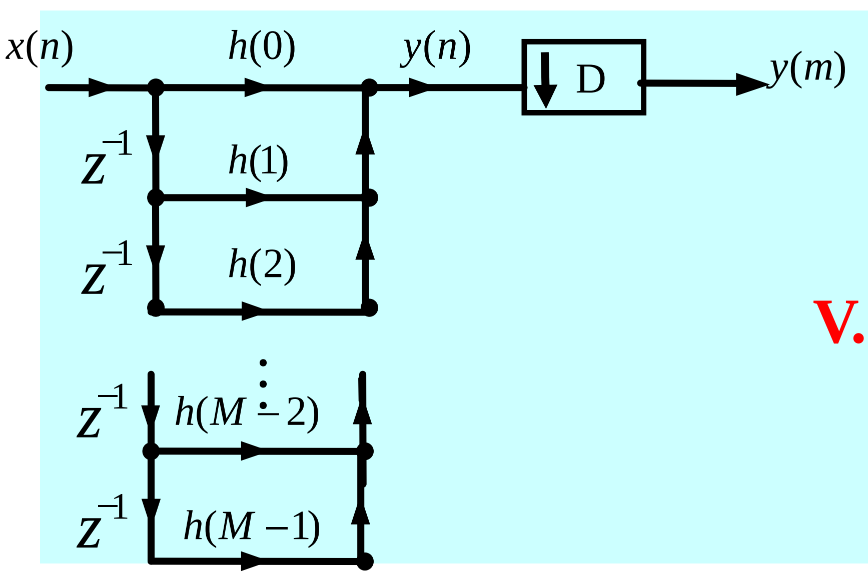




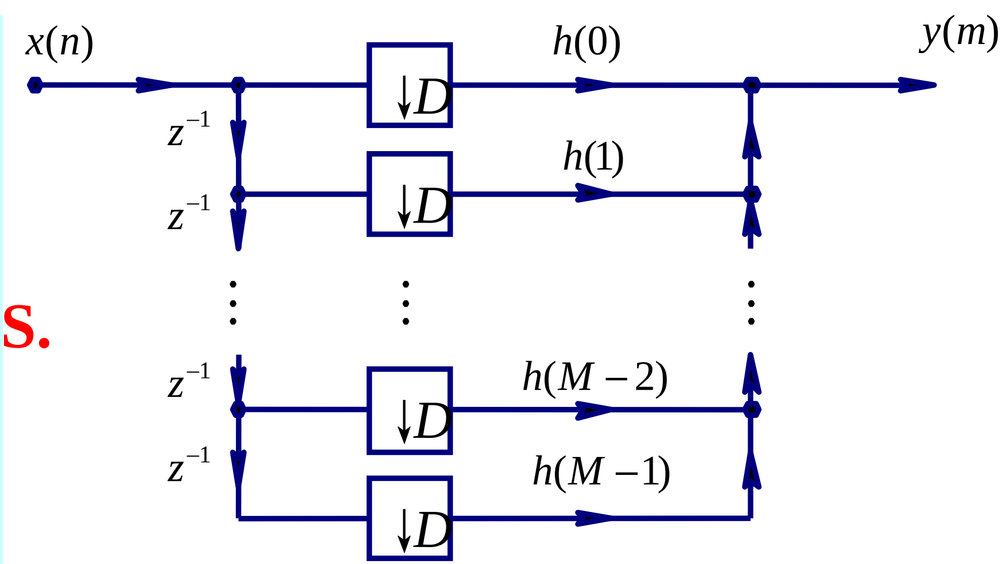
一、整数因子D抽取系统的直接型FIR结构：



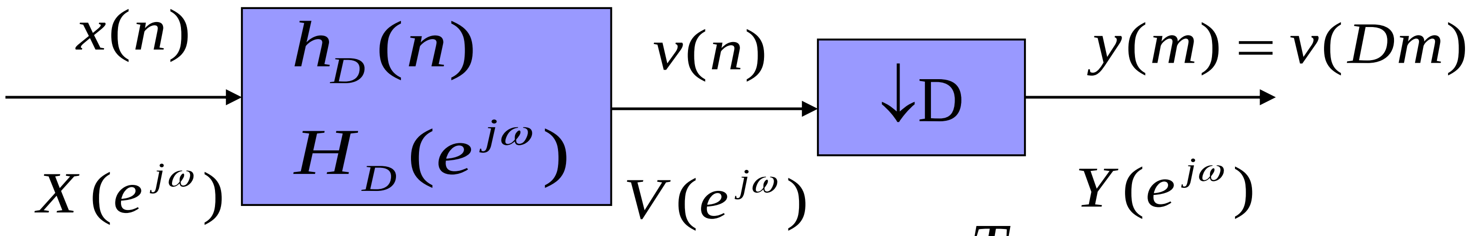
$$T_2 = \frac{T_1}{D}$$



V.S.



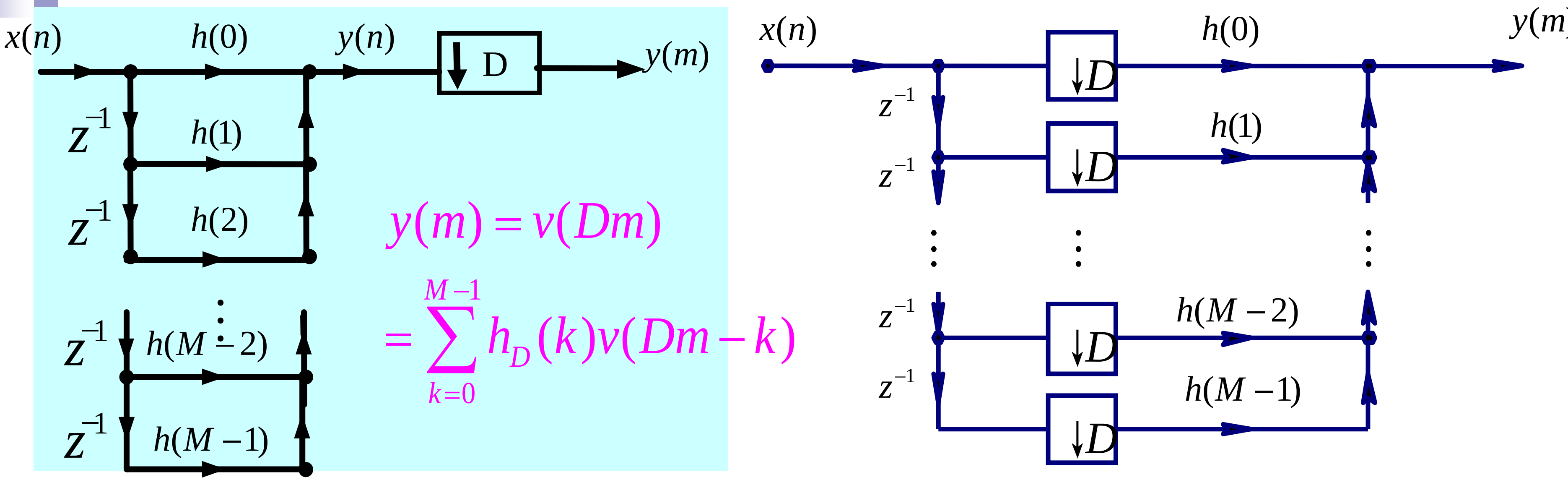
一、整数因子D抽取系统的直接型FIR结构：



$$T_2 = \frac{T_1}{D}$$

$$v(n) = x(n) * h_D(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h_D(k) v(n-k)$$

$$y(m) = v(Dm) = \sum_{k=0}^{M-1} h_D(k) v(Dm-k)$$



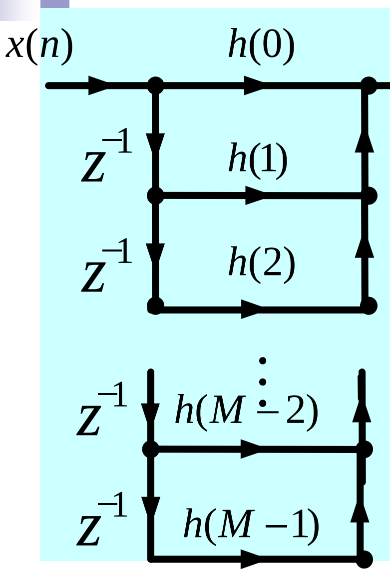
$$y(m)=v(Dm)=\sum_{k=0}^{M-1}h_D(k)v(Dm-k)$$

(a) (b)

- **n=Dm，抽取器开通**
  - **图(a)：选通FIR滤波器的一个输出作为y(m)**
  - **图(b)：选通FIR滤波器输入信号x(n)的一组延时**

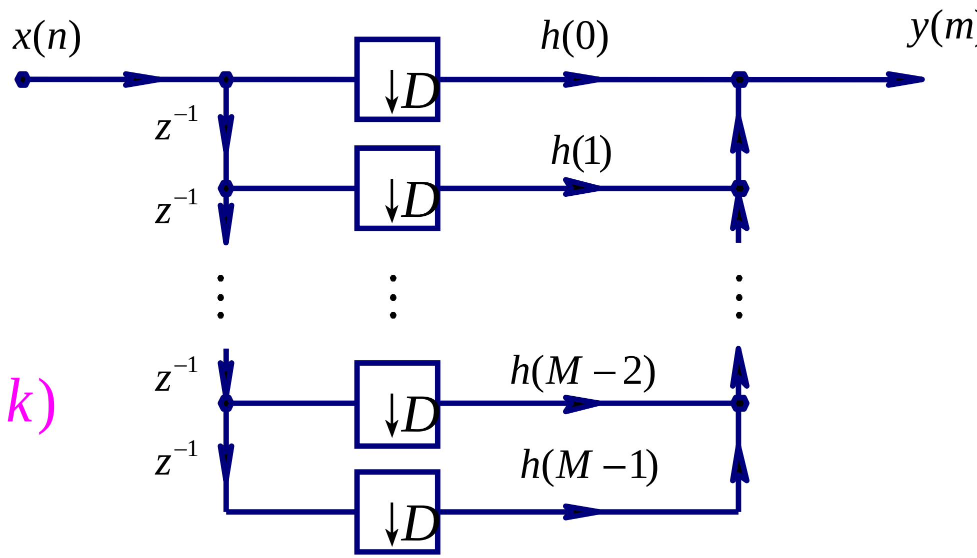
$$x(Dm),x(Dm-1),x(Dm-2),\cdots,x(Dm-M+1)$$

进行运算得到输出y(m)



$$y(m)=v(Dm)$$
$$=\sum_{k=0}^{M-1}h_D(k)v(Dm-k)$$

(a)



(b)

- 两种实现结构的功能完全等效
- **(b)**的运算量仅为**(a)** 的**1/D**，为高效实现结构
- 注意：**(b)**结构的滤波仍在抽取之前

线性相位FIR： $h(n)=h[N-1-n]$

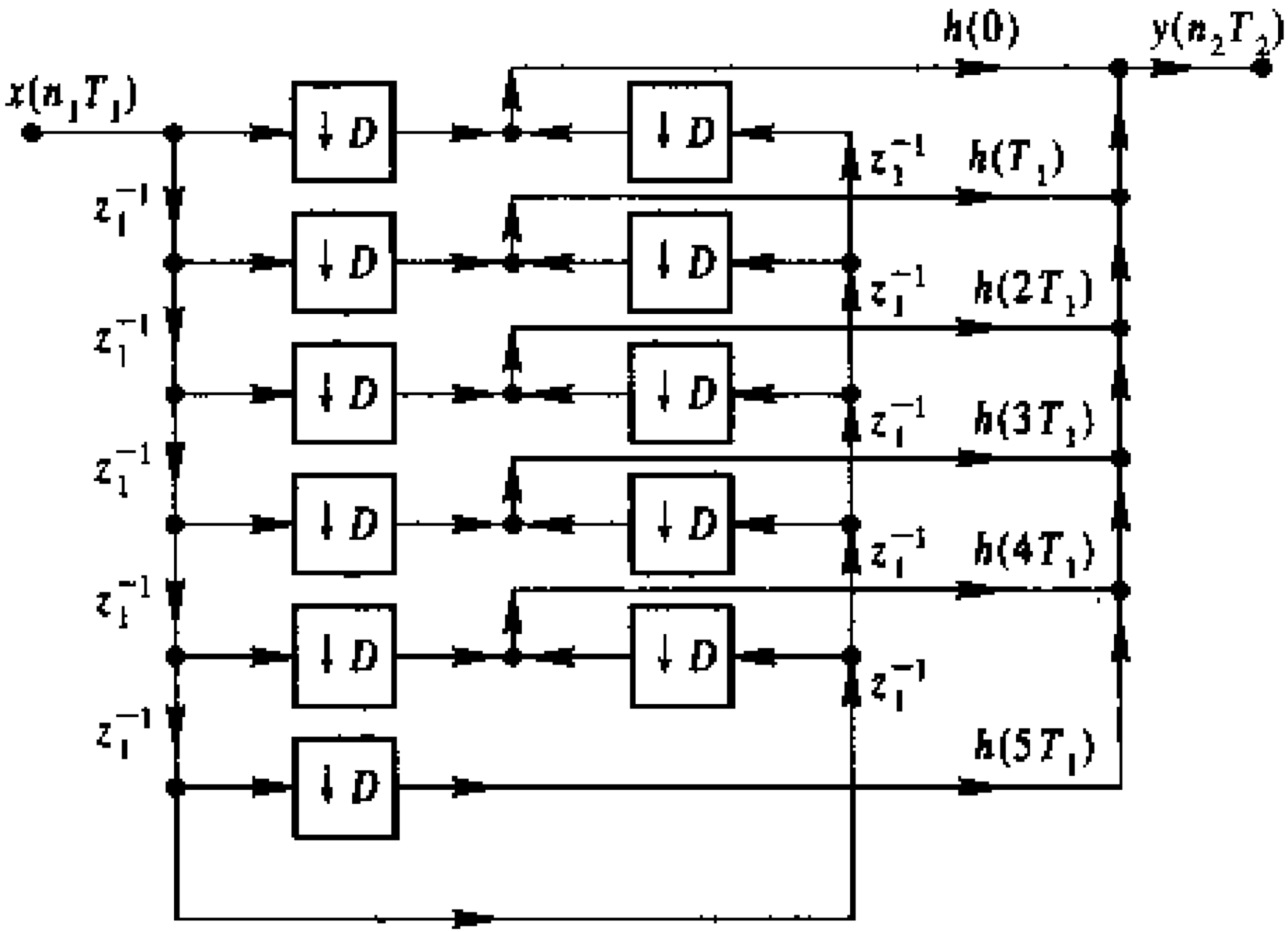
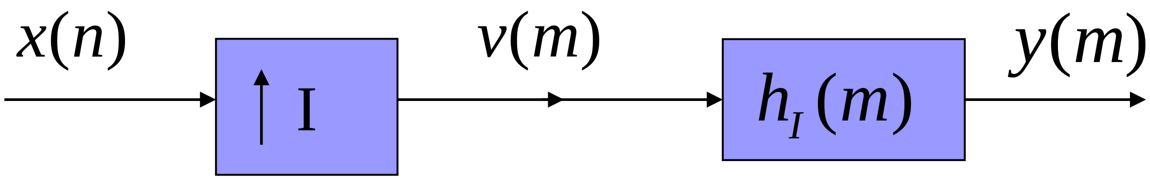


图 8.4.27 抽取器 FIR 结构的线性相位形式

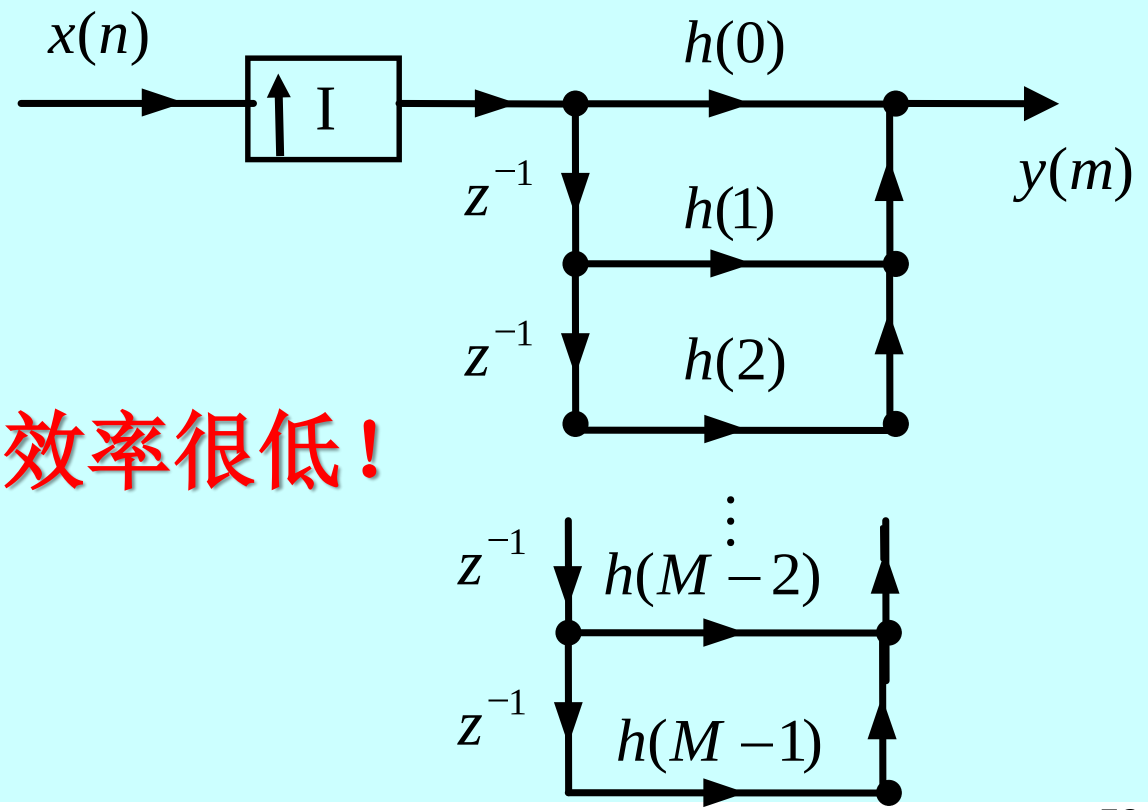
二、整数因子I内插系统的FIR结构：



$T_y = T_x / I$

问题：

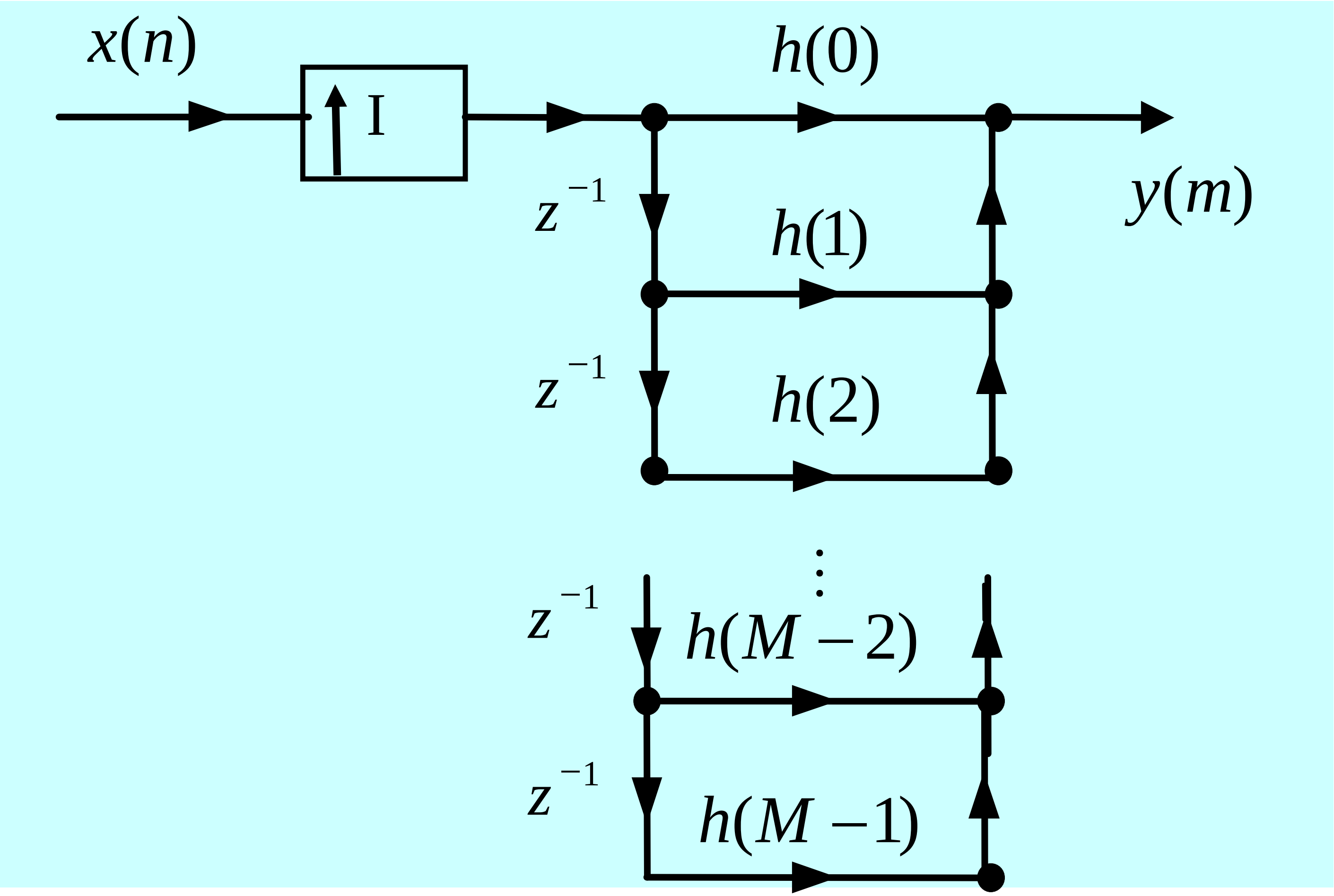
- 滤波器工作在高采样频率上；
- 滤波器输入的I 个样值中，仅一个非零



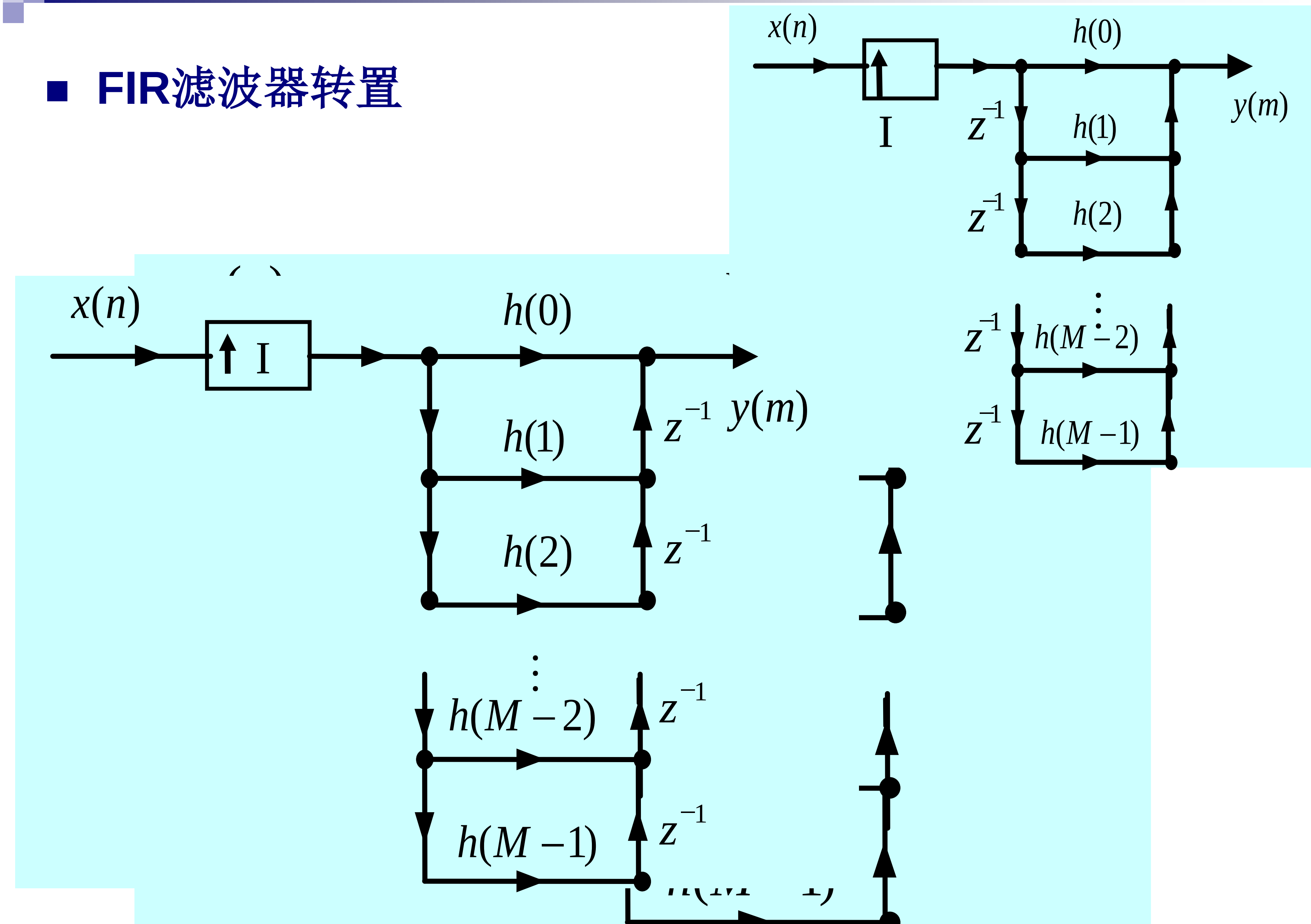
效率很低！

- 注意：不能直接将内插器移到滤波器中乘法器之后！

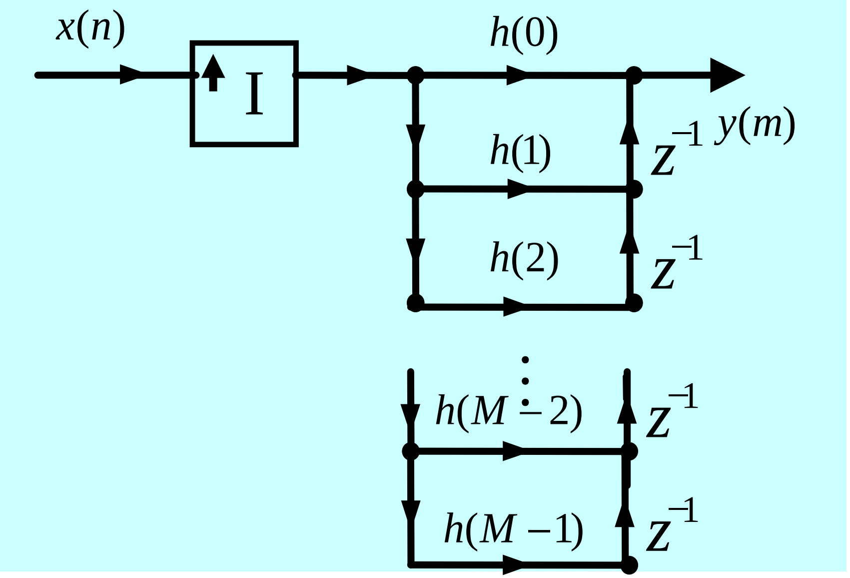
（ 整数因子I内插：零值内插 →滤波 ）

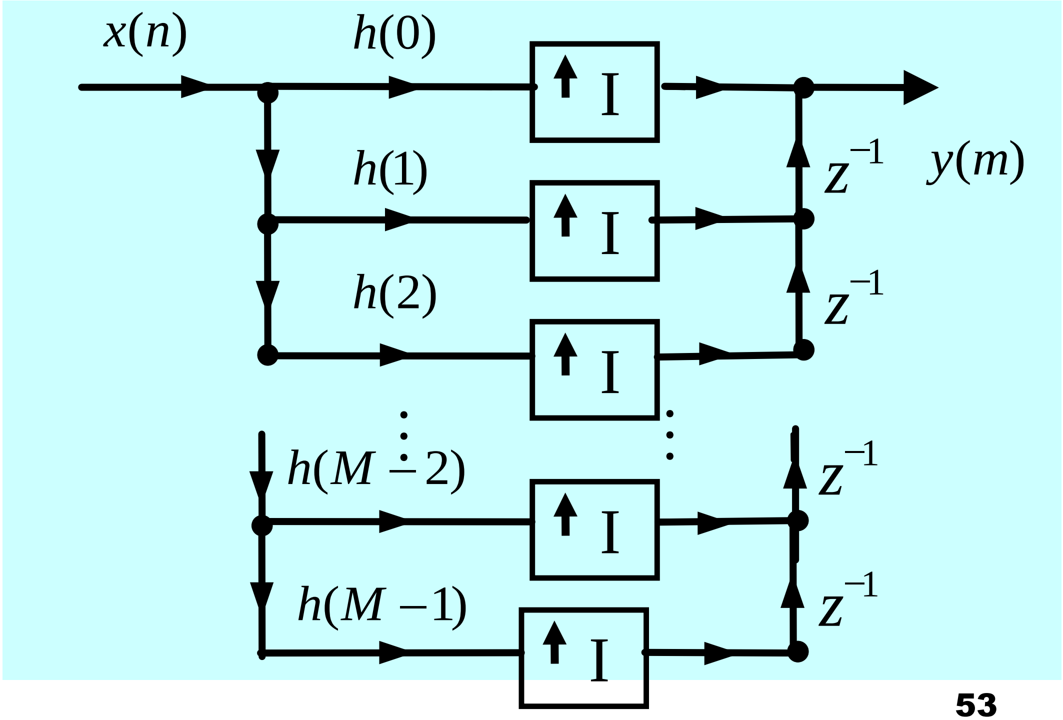


- **FIR滤波器转置**



- 将零值内插器移到滤波器中乘法器之后
- 加在延迟链上的信号完全一样
- 乘法运算在低采样率下实现
- 高效结构





线性相位FIR：$h(n_2T_2)=h[(N-1-n_2)T_2]$

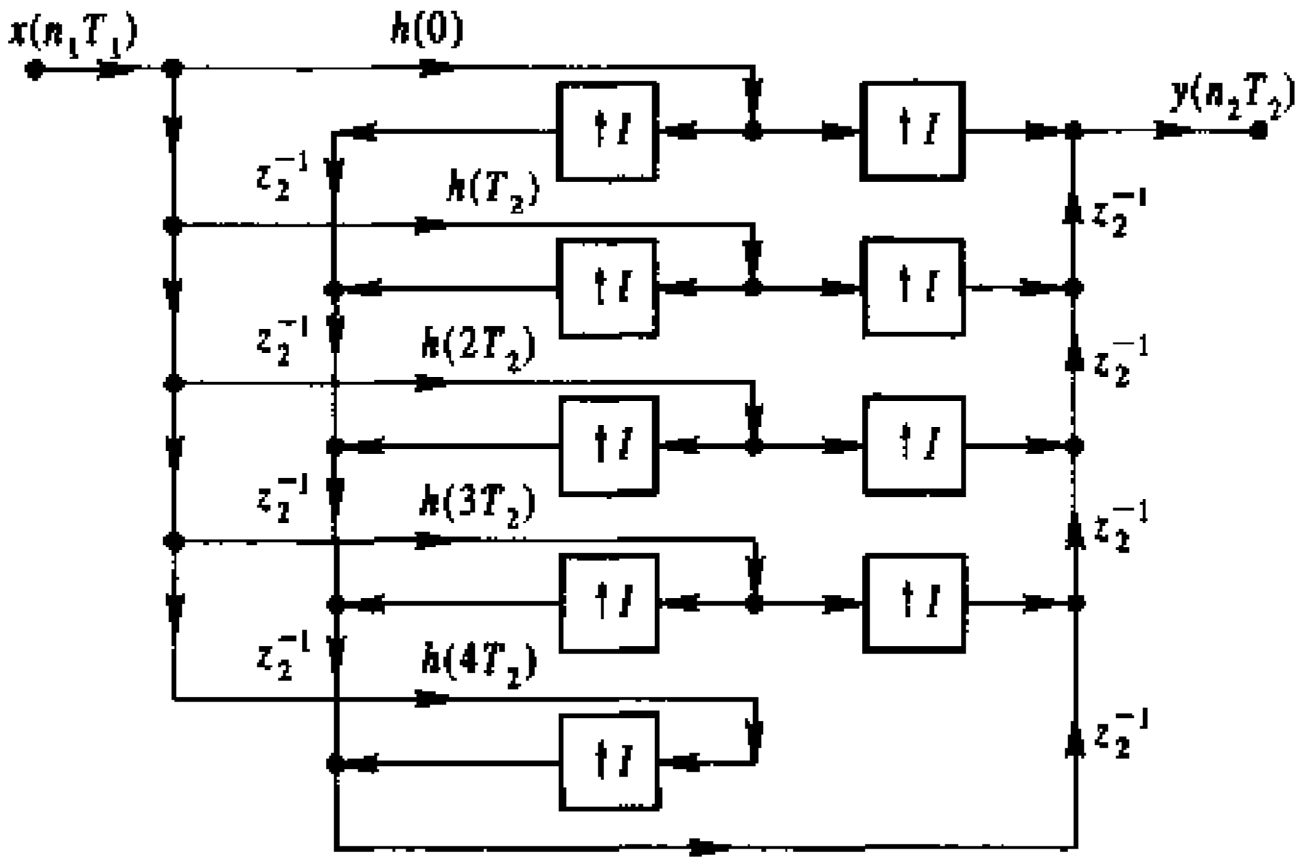


图 8.4.33　内插器的线性相位 FIR 直接实现