

# 第四章

## 模拟信号的数字处理

王柯俨

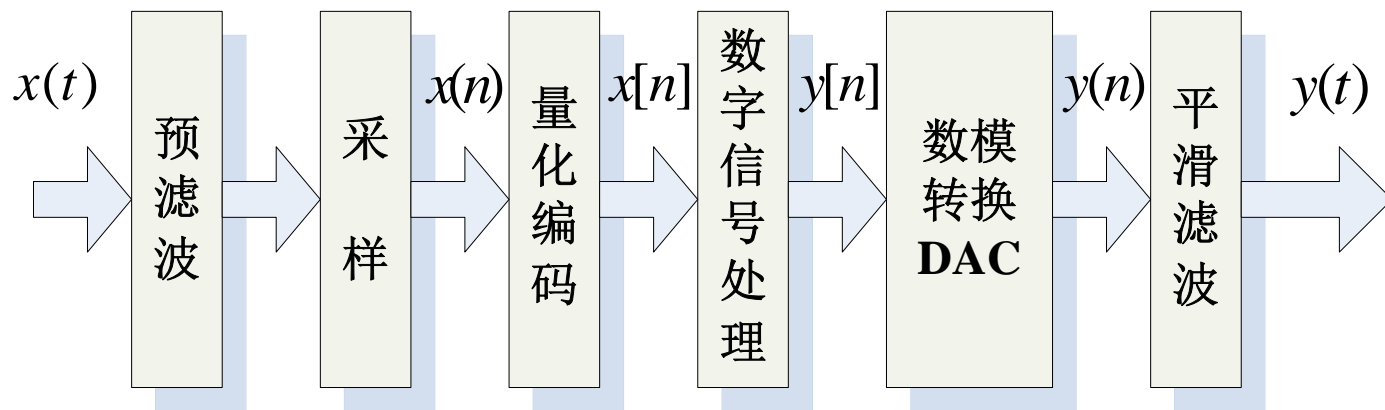
**[kywang@mail.xidian.edu.cn](mailto:kywang@mail.xidian.edu.cn)**

**<http://web.xidian.edu.cn/kywang/teach.html>**

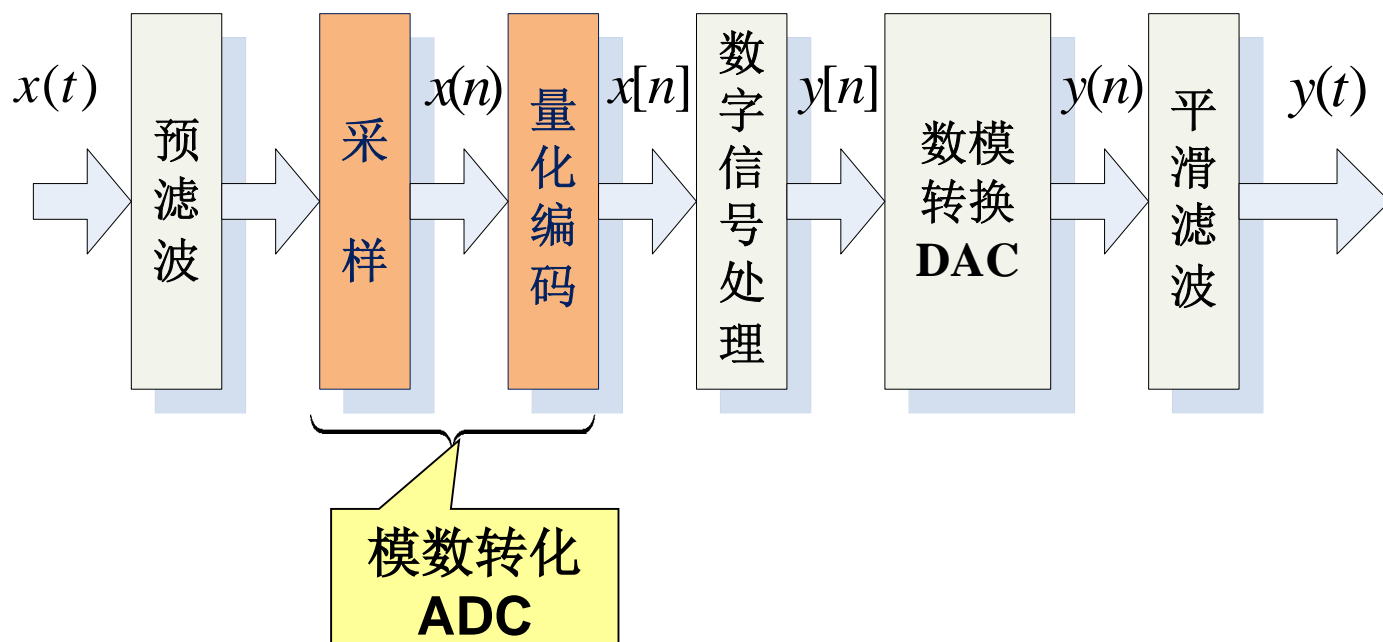
# 主要内容

- 模拟信号数字处理的原理框图
- 模拟信号与数字信号的相互转换
  - $A \rightarrow D$ （采样）：如何选择采样频率？（时域采样定理）
  - $D \rightarrow A$ （恢复）：采样序列如何插值？（时域内插）
- 模拟网络的数字模拟
- 模拟信号的频谱分析

## 4.1 模拟信号数字处理原理方框图

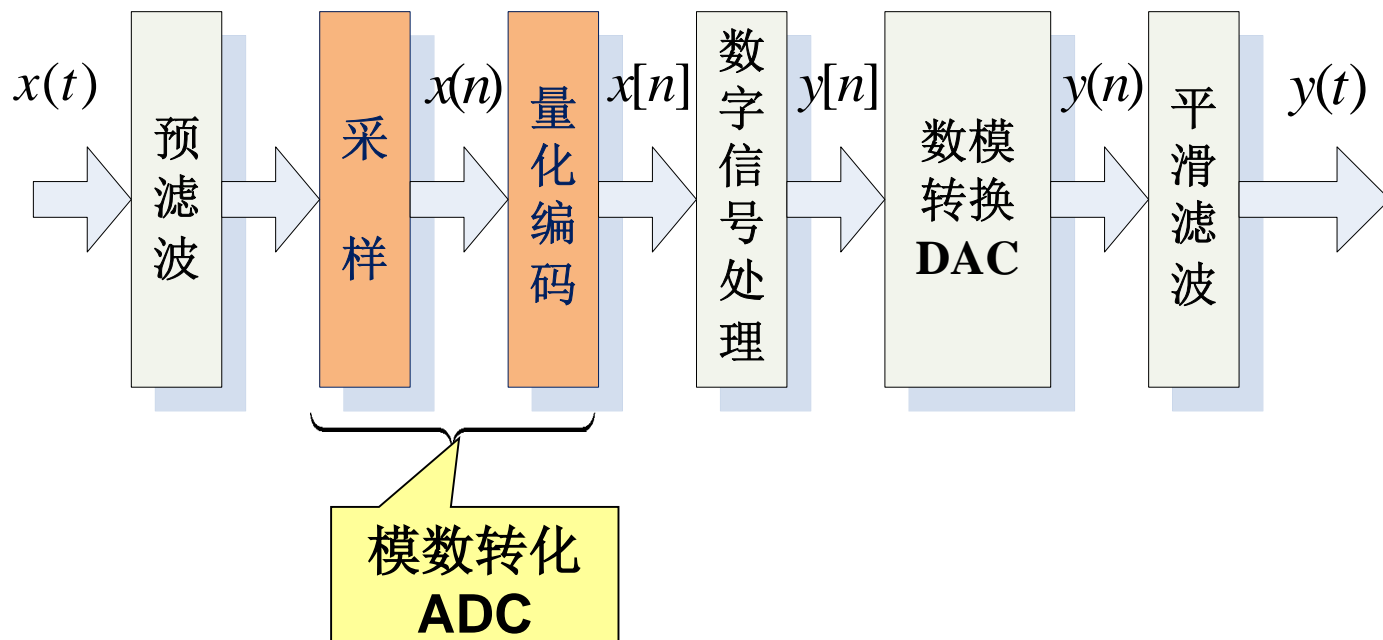


## 4.1 模拟信号数字处理原理方框图



- 作为数字信号处理的第一步，要将现实中许多连续时间信号变成数字信号。
- 信号的**采样理论**是连接离散信号和连续信号的桥梁，是进行离散信号处理和离散系统设计的基础。

## 4.1 模拟信号数字处理原理方框图



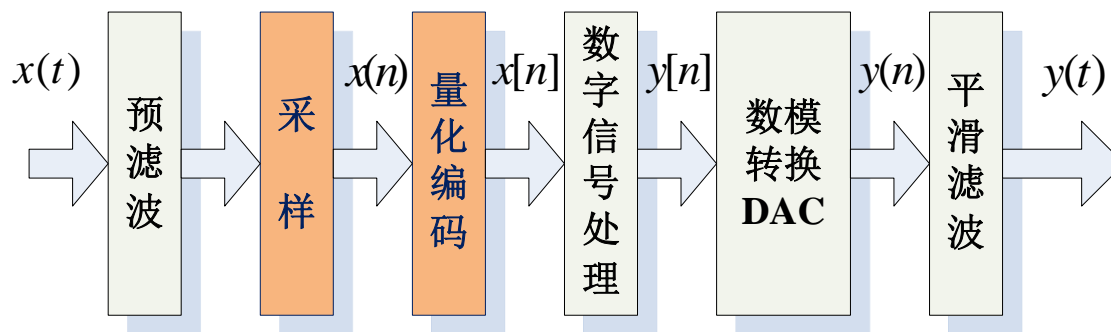
### ■ 问题：

- 采样信号是否包含原连续信号的全部信息？
- 采样信号的频谱与原信号的频谱有什么关系？
- 如何由采样信号恢复原信号？

如何做到  
无损变换？

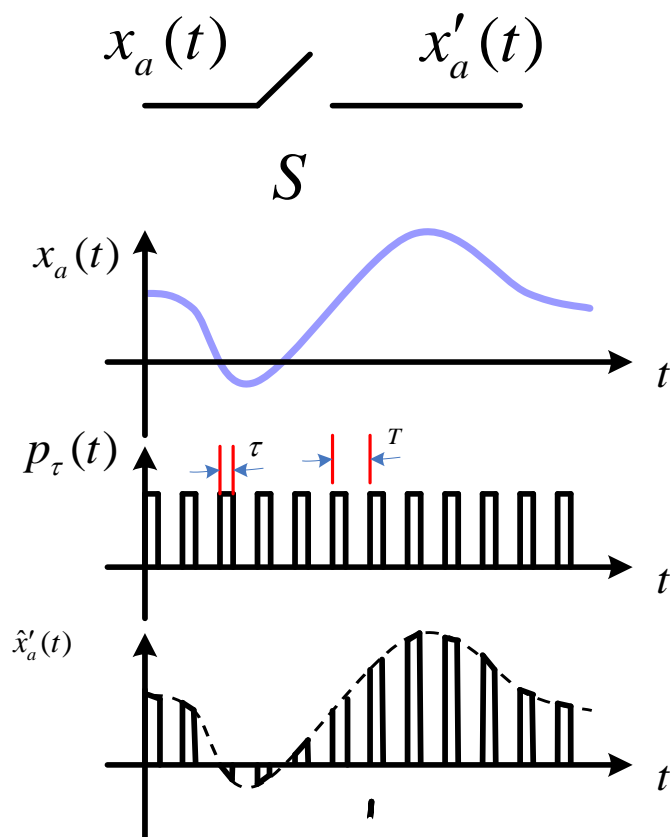
## 4.2 模拟信号与数字信号的相互转换

- 目标：无损变换
- **采样**：就是利用周期性采样脉冲序列 $p(t)$ ,从连续信号 $x_a(t)$ 中抽取一系列的离散值，得到采样信号（或称抽样信号），即离散时间信号，以  $\hat{x}_a(t)$  表示。
- **采样**是模拟信号数字化的第一环节，再经幅度**量化编码**后即得到数字信号 $x(n)$ 。

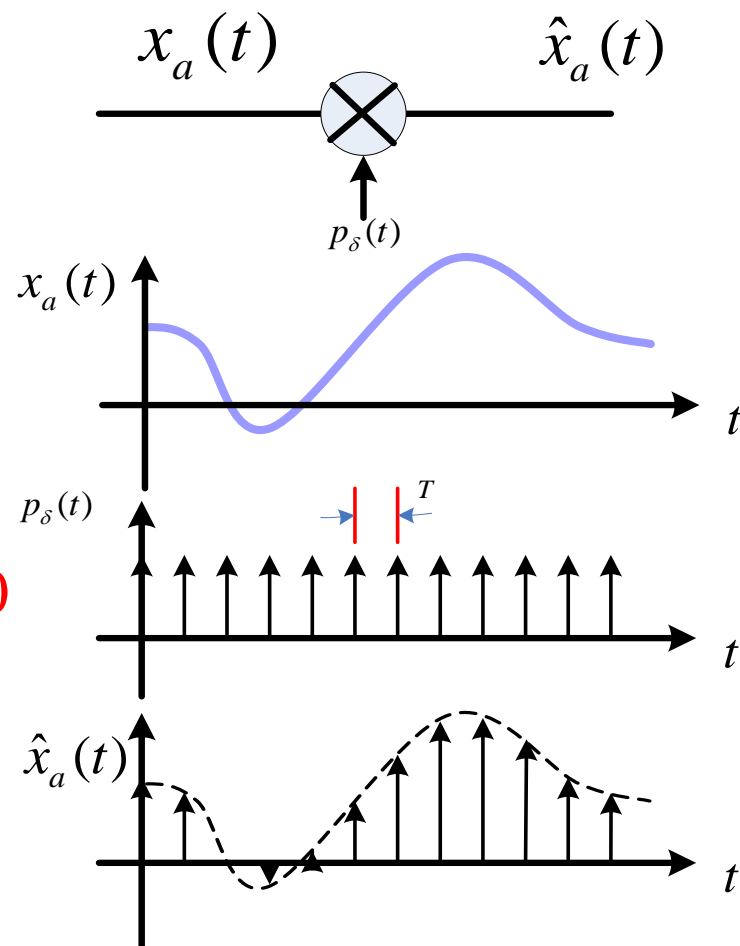


## 4.2.1 时域采样定理

### ■ 对模拟信号的采样

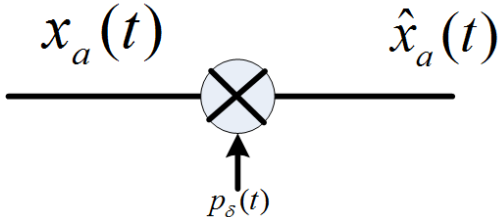


$\tau \rightarrow 0$



理想采样信号

# 理想采样信号与模拟信号频谱之间的关系

- 单位冲激串  $p_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$
  - 理想采样信号
- 

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t) \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t - nT)$$

- 傅里叶变换
  - 单位冲激串

$$P_\delta(j\Omega) = FT[p_\delta(t)] = \frac{2\pi}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - m\Omega_s)$$

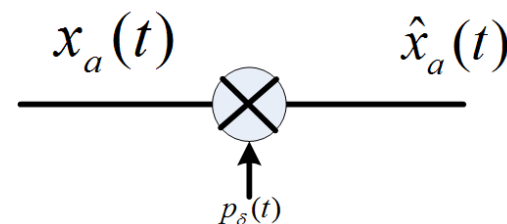
- 采样角频率

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} = 2\pi F_s$$



## ■ 傅里叶变换

### □ 理想采样信号



$$\begin{aligned}\hat{X}_a(j\Omega) &= FT[\hat{x}_a(t)] = \frac{1}{2\pi} X_a(j\Omega) * P_\delta(j\Omega) \\&= \frac{1}{2\pi} [X_a(j\Omega) * \frac{2\pi}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - m\Omega_s)] \\&= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\theta) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - m\Omega_s - \theta) d\theta \\&= \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\theta) \delta(\Omega - m\Omega_s - \theta) d\theta \\&= \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jm\Omega_s)\end{aligned}$$

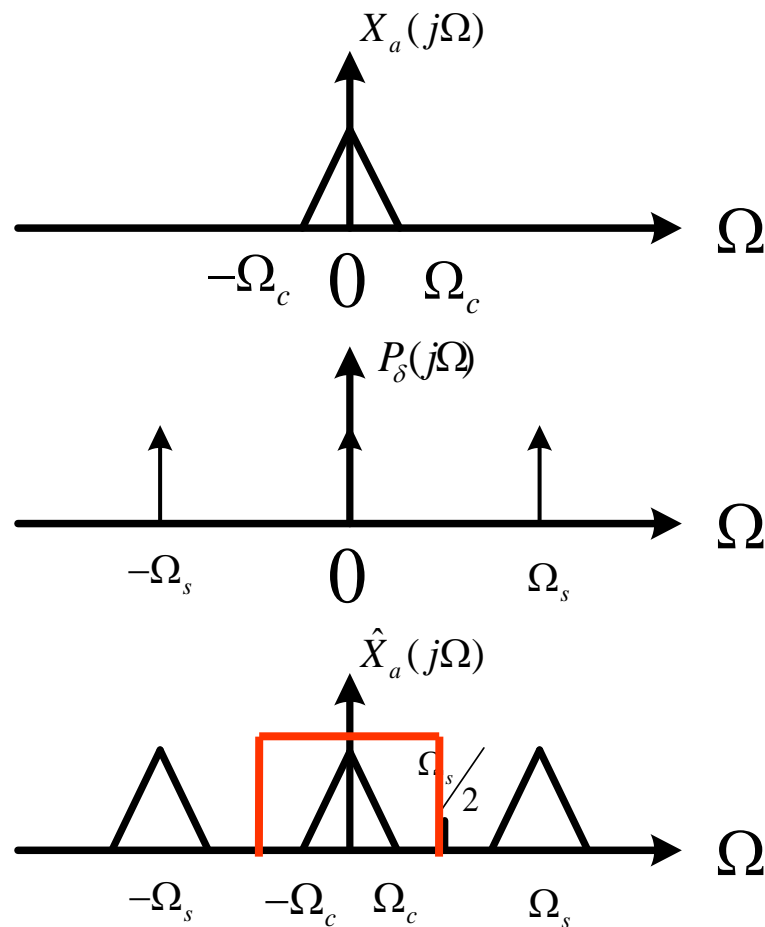
$$\hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_a(j\Omega) * P_\delta(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jm\Omega_s)$$

- 理想采样信号的频谱  $\hat{X}_a(j\Omega)$  是原模拟信号的频谱  $X_a(j\Omega)$  以  $\Omega_s$  为周期进行延拓并累加而得。

- 如何恢复原信号的频谱？

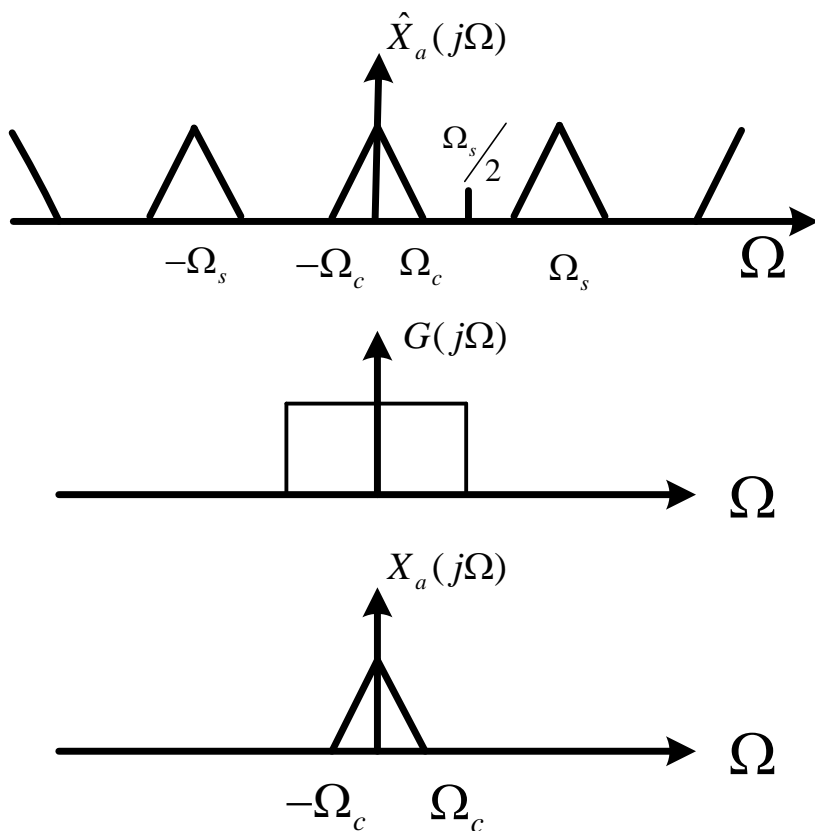
- 加低通滤波器，传输函数为

$$G(j\Omega) = \begin{cases} T & |\Omega| < \Omega_s/2 \\ 0 & |\Omega| \geq \Omega_s/2 \end{cases}$$

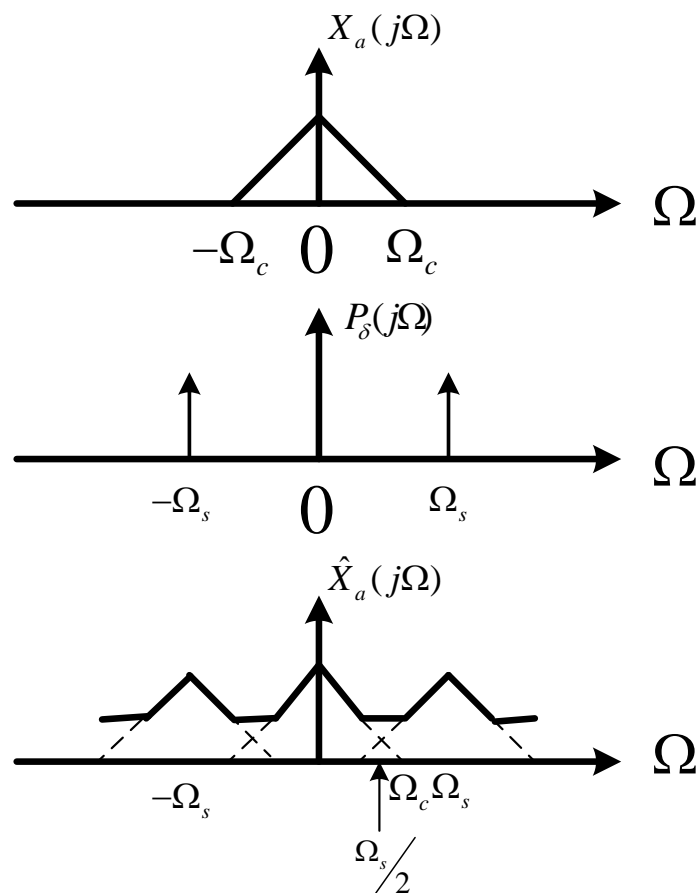


无失真恢复的条件？

## 理想采样的恢复



## 采样信号的频谱混叠

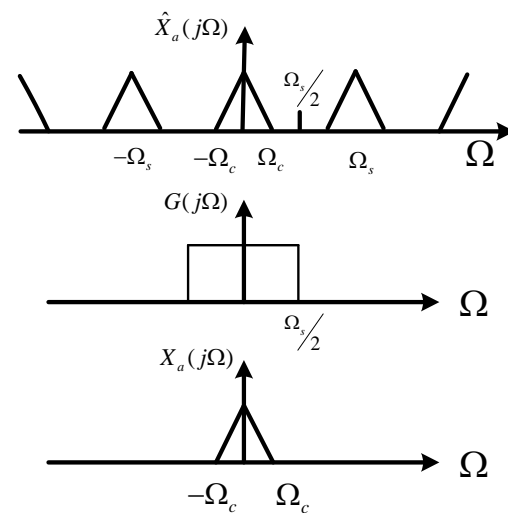


频谱混叠的原因:

$$\Omega_c > \Omega_s/2 \quad (\text{折叠角频率})$$

# 奈奎斯特采样定理

- 模拟信号  $x_a(t)$  为带限信号;
- 最高角频率为  $\Omega_c$
- 如采样频率满足  $\Omega_s \geq 2\Omega_c$
- 则理想采样信号  $\hat{x}_a(t)$  通过增益为T, 截止频率为  $\frac{\Omega_s}{2}$  的低通滤波器  $G(j\Omega)$ , 可唯一地恢复原模拟信号  $x_a(t)$
- 采样频率的确定:
  - 防止混叠并降低运算量为原则  $\Omega_s = (3 \sim 4)\Omega_c$
  - 加预滤波器 (抗混叠滤波器)



## 4.2.2 时域离散信号与理想采样信号之间的关系

### ■ 理想采样信号

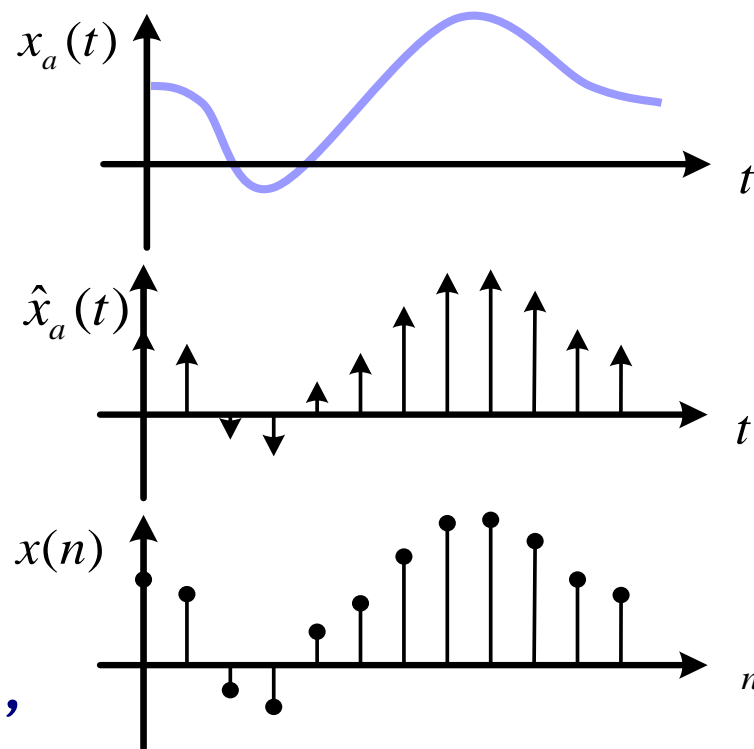
$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t - nT)$$

### ■ 采样序列

$$x(n) = x_a(t) \Big|_{t=nT} = x_a(nT)$$

注意：

$x_a(t)$  和  $\hat{x}_a(t)$  在整个时间轴  $t$  上有定义，  
而  $x(n)$  仅在  $n$  轴的整数点上有定义。



### ■ Q: 频谱之间的关系?

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t-nT)$$

$$x(n) = x_a(t)\big|_{t=nT} = x_a(nT)$$

## ■ 理想采样信号的频谱

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}_a(t)e^{-j\Omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t-nT)e^{-j\Omega t} dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)e^{-j\Omega t} dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)e^{-j\Omega nT}$$

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jm\Omega_s)$$

■ 理想采样信号的频谱  $\hat{X}_a(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)e^{-j\Omega nT}$

■ 时域离散信号  $x(n)$  的频谱  $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$

■ 由于  $x(n) = x_a(nT)$       令  $\omega = \Omega T$

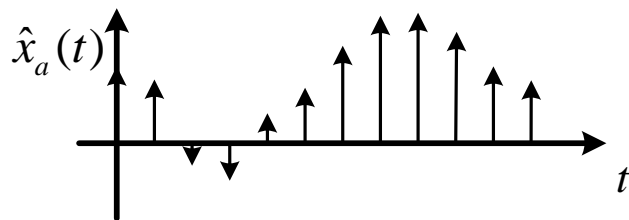
$$X(e^{j\Omega T}) = \hat{X}_a(j\Omega)$$

$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jk\Omega_s)$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\frac{\omega}{T} - jk\frac{2\pi}{T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\frac{\omega - 2k\pi}{T})$$

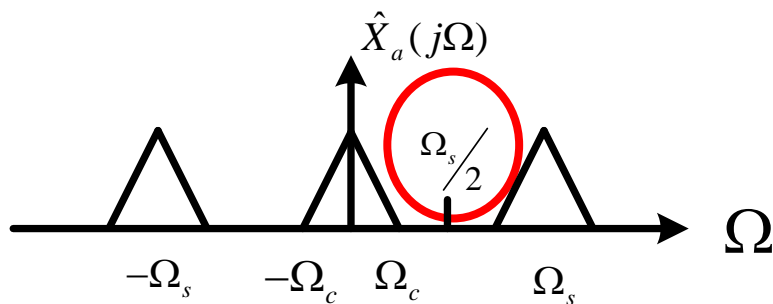
## ■ 理想采样信号

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t - nT)$$



## ■ 频谱

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jm\Omega_s)$$

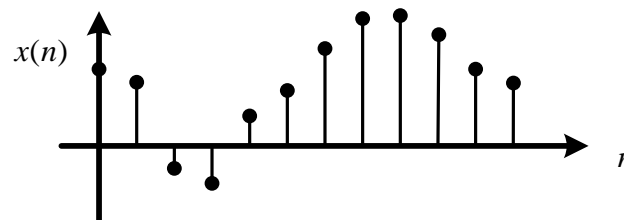


延拓周期

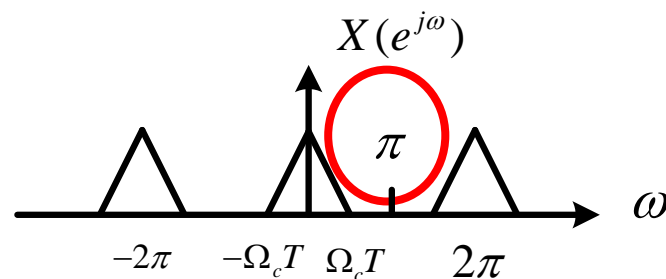
$\Omega_s$

## ■ 时域离散信号

$$x(n) = x_a(t) \Big|_{t=nT} = x_a(nT)$$



$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j \frac{\omega - 2k\pi}{T})$$

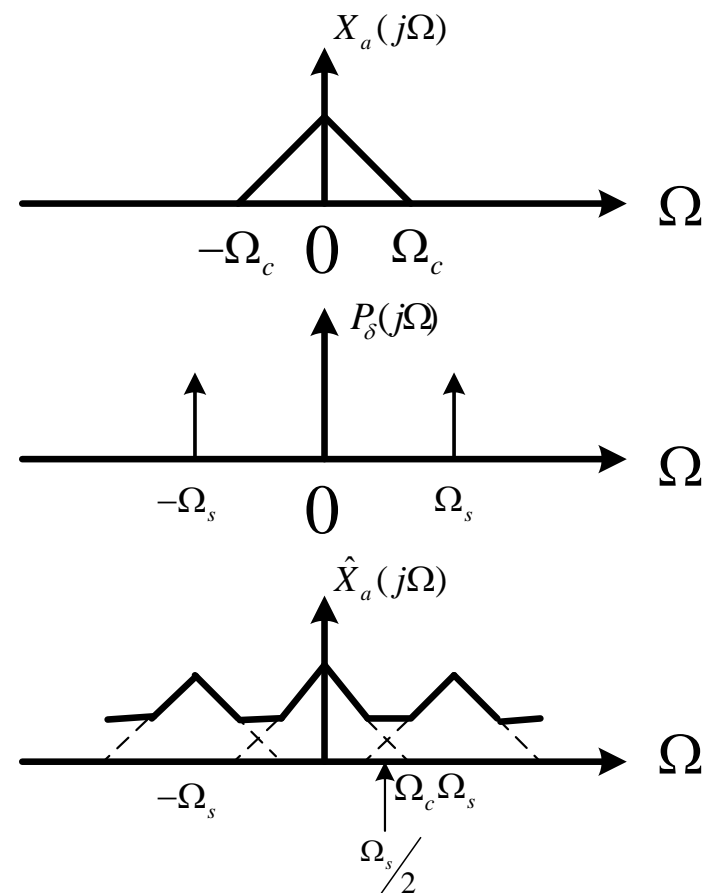


$$\omega = \Omega T \quad \omega_s = \Omega_s T = \frac{2\pi}{T} T = 2\pi$$



# 折叠角频率 $\frac{\Omega_s}{2}$

- 抽样角频率的一半。
- 意义：
  - 信号的最高频率不能超过该频率，否则超过部分会以  $\frac{\Omega_s}{2}$  为中心折叠回去，造成频谱混叠。
- 折叠角频率  $\frac{\Omega_s}{2}$  对应的数字频率为  $\pi$



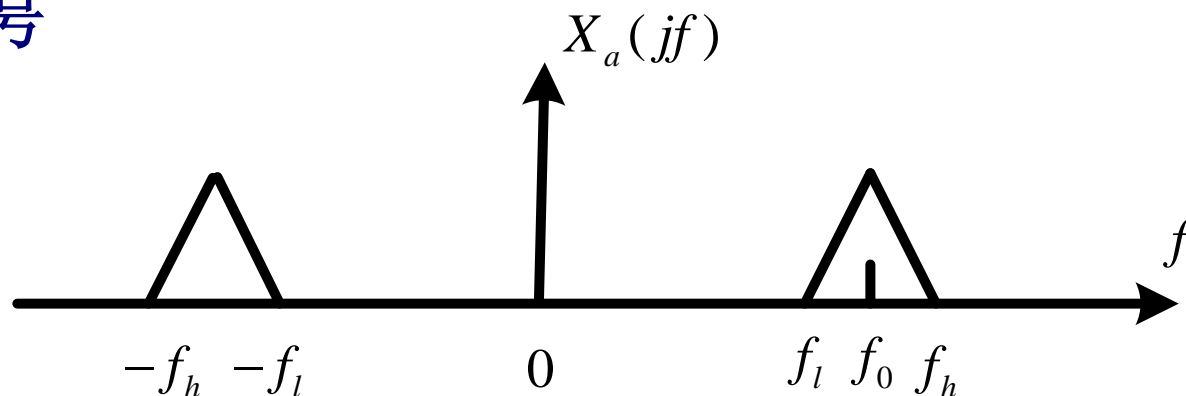
# 时域离散信号与时域采样定理

## ■ 结论:

对模拟信号采样得到的时域离散信号仍服从采样定理，即采样频率必须大于等于模拟信号最高频率的**2**倍以上，才能不丢失信息，否则会产生频谱混叠现象而丢失信息。

## 4.2.3 带通信号的采样

### ■ 带通信号

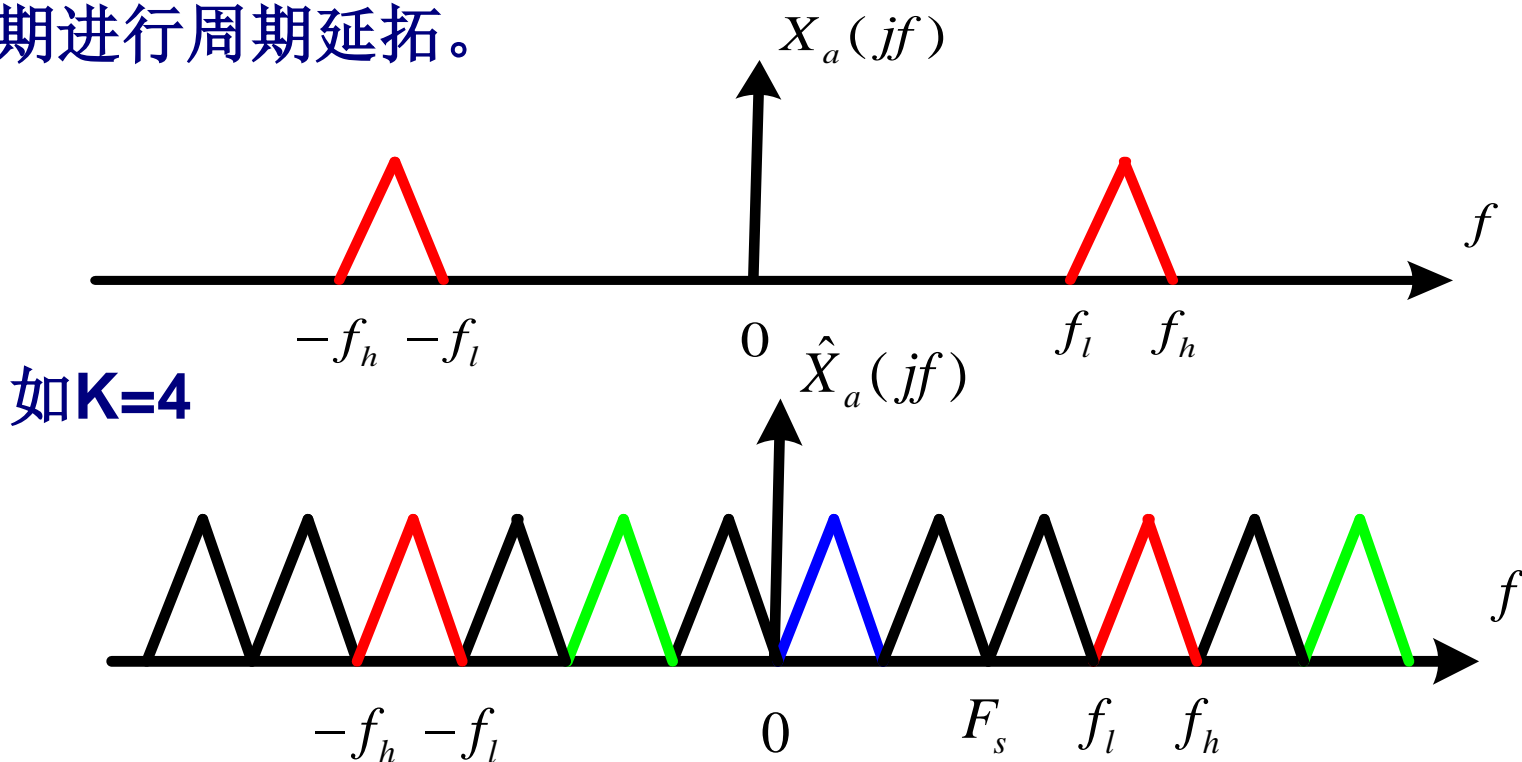


- 中心频率  $f_0$       最低频率  $f_l$       最高频率  $f_h$
- 带宽  $f_B = f_h - f_l$
- 特点：中心频率较高，带宽较窄。
- 采样频率？

- 如最高频率  $f_h$  是带宽的整数倍,  $f_h = Kf_B$
- 采样频率如下, 不会造成频谱混叠, 且大大降低采样频率

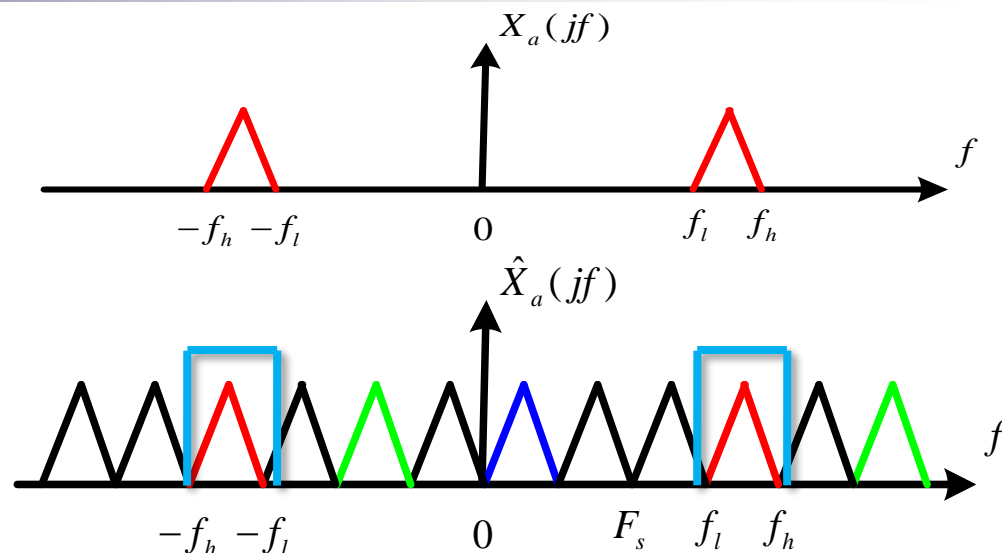
$$F_s = 2f_B$$

- 理想采样信号的频谱为原模拟信号的频谱以采样频率为周期进行周期延拓。



# 带通信号的恢复

- 理想采样信号通过一个理想带通滤波器



$$H_p(jf) = \begin{cases} T & f_l < |f| < f_h \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

- 问题:

$$f_h \neq Kf_B$$

$f_h \neq Kf_B$  即  $r = f_h / f_B$  不为整数

- 降低最低频率到  $f_l'$  , 带宽展宽为  $f_B' = f_h - f_l'$

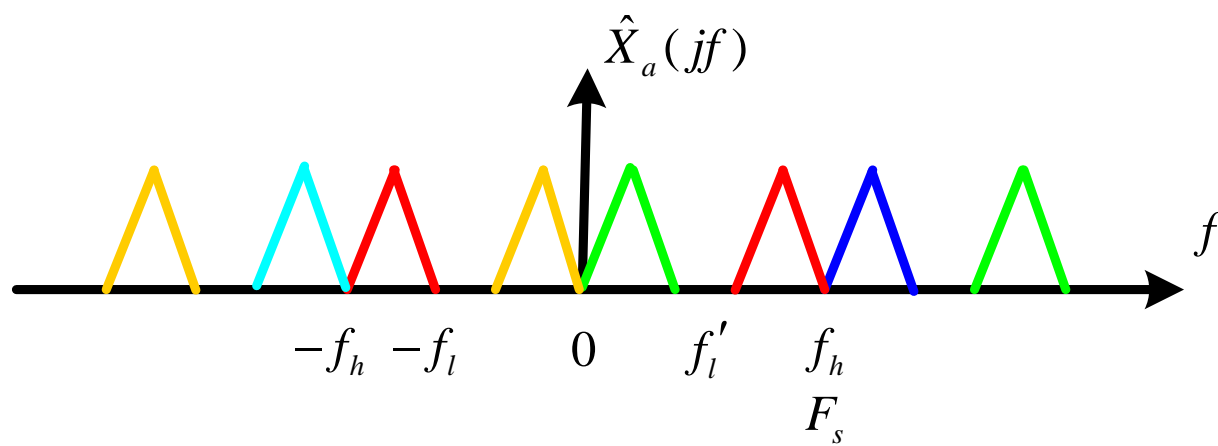
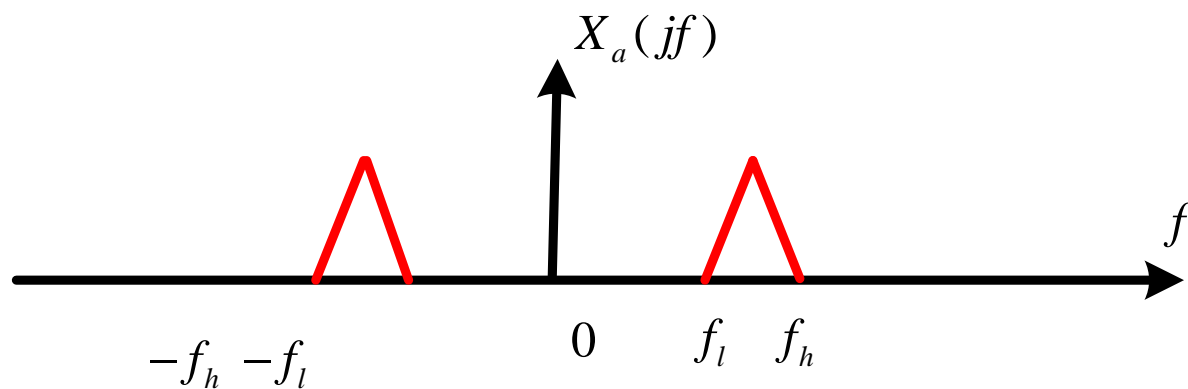
$$f_h = r'f_B'$$

$r'$  为小于  $r$  的最大整数

- 采样频率:  $F_s = 2f_B'$

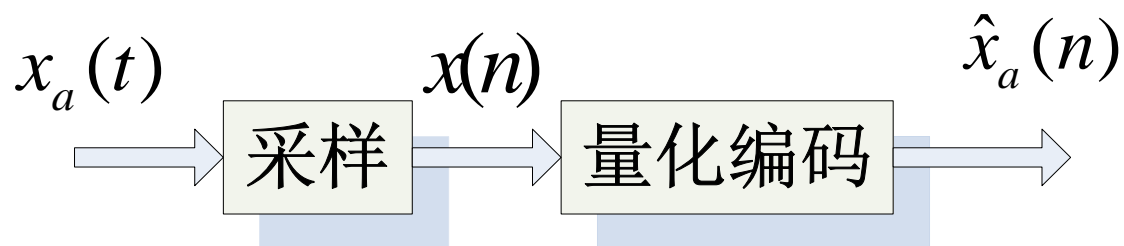
例:  $f_h = 4\text{kHz}$   $f_B = 3/2\text{kHz}$   $r = f_h / f_B = 8/3$

解:  $r' = 2$   $f_B' = f_h / r' = 2\text{kHz}$   $F_s = 2f_B' = 4\text{kHz}$



## 4.2.4 A/D变换器

- 功能：将模拟信号转换为数字信号



- 若A/D变换器有**b**位，则其输出就是**b**位二进制数字信号。



■ 模拟信号  $x_a(t) = \sin(2\pi ft + \pi/8)$   $f = 50 \text{ Hz}$

■ 采样频率  $F_s = 200 \text{ Hz}$ ，将  $t=nT=n/F_s$  代入上式得到：

$$x_a(nT) = \sin(1/2 \pi n + \pi/8)$$

■ 采样序列（保持小数点**6**位）

$$x(n) = \{\cdots, 0.382638, 0.923879, -0.382638, -0.923879, \cdots\}$$

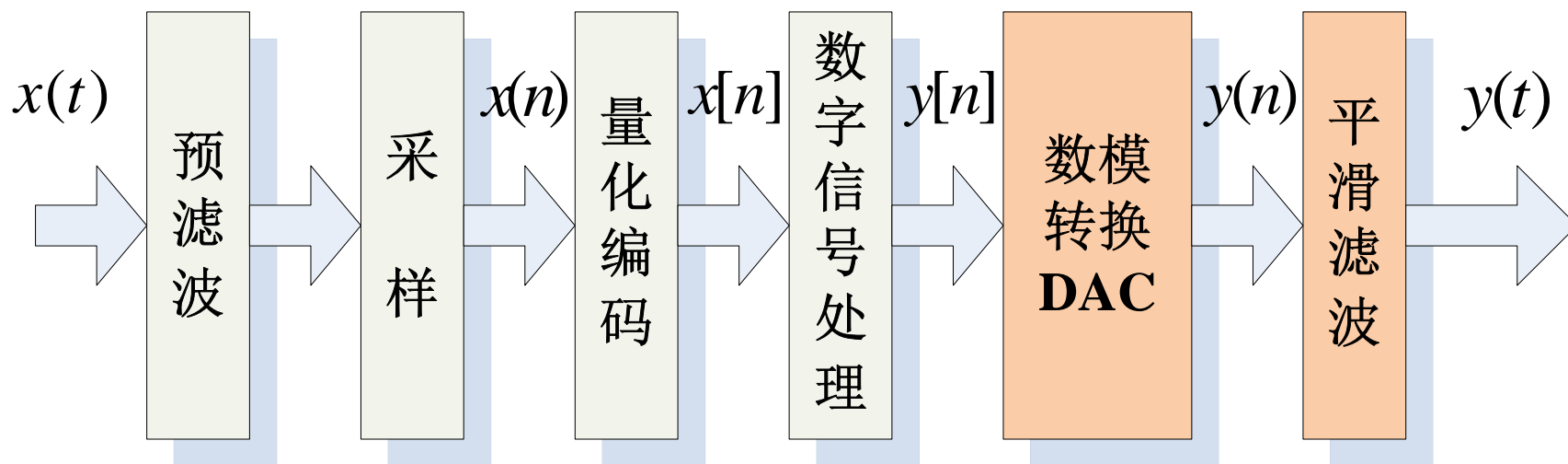
■ 数字信号（**6**位二进制编码）

$$\hat{x}(n) = \{\cdots, 0.01100, 0.11101, 1.01100, 1.11101, \cdots\}$$

■ 用十进制数表示

$$\hat{x}(n) = \{\cdots, 0.375, 0.90625, -0.375, -0.90625, \cdots\}$$

## 4.2.5 将数字信号转换为模拟信号

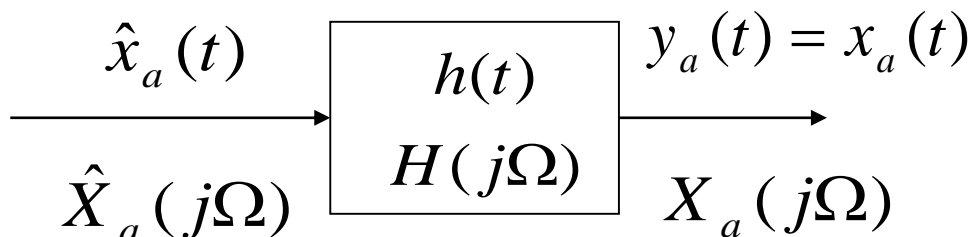
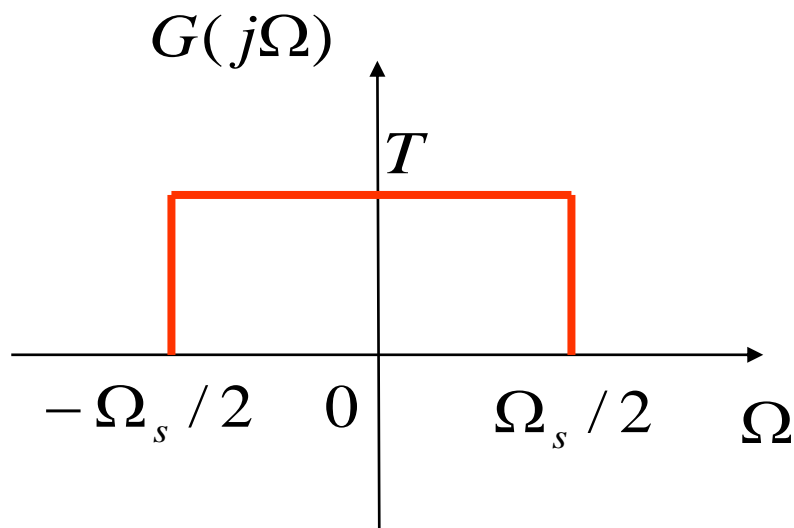


# 1. 理想恢复

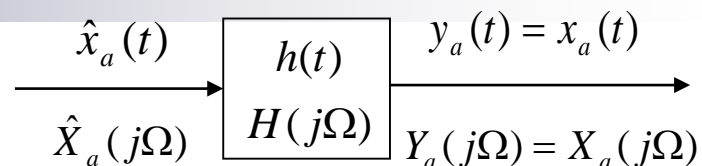
$$\hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jm\Omega_s)$$

- 理想采样信号的频谱为原模拟信号的频谱以采样频率为周期进行周期延拓
- 设满足采样定理，无频谱混叠，通过理想滤波器滤出基带谱

$$G(j\Omega) = \begin{cases} T & |\Omega| < \frac{\Omega_s}{2} \\ 0 & |\Omega| \geq \frac{\Omega_s}{2} \end{cases}$$



可得到原信号的频谱:



$$\begin{aligned} Y_a(j\Omega) &= \hat{X}_a(j\Omega)H(j\Omega) \\ &= \left[ \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jm\Omega_s) \right] \bullet G(j\Omega) \\ &= X_a(j\Omega) \end{aligned}$$

$$G(j\Omega) = \begin{cases} T & |\Omega| < \frac{\Omega_s}{2} \\ 0 & |\Omega| \geq \frac{\Omega_s}{2} \end{cases}$$

所以, 输出端即为原模拟信号:

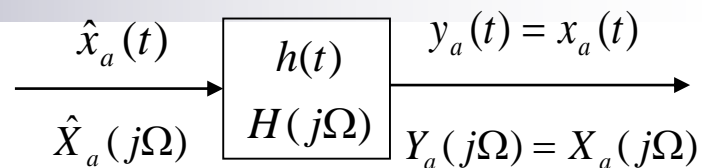
$$y_a(t) = x_a(t)$$

问题: 在时域上, 采样序列如何插值, 获取连续信号?

$$\hat{x}_a(t) \Rightarrow \hat{X}_a(j\Omega) \Rightarrow \hat{Y}_a(j\Omega) \Rightarrow y_a(t) = x_a(t)$$

A blue bracket with a red question mark underneath it spans the entire sequence of operations.

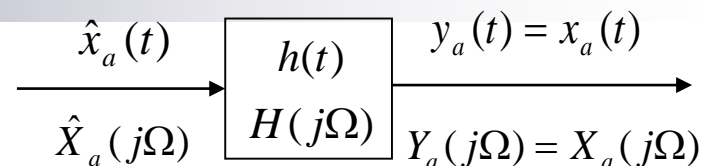
理想低通滤波器的冲激响应为：



$$G(j\Omega) = \begin{cases} T & |\Omega| < \frac{\Omega_s}{2} \\ 0 & |\Omega| \geq \frac{\Omega_s}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \\ &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\Omega_s/2}^{\Omega_s/2} e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{\sin(\Omega_s t/2)}{\Omega_s t/2} \\ &= \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \end{aligned}$$

理想低通滤波器的输出:



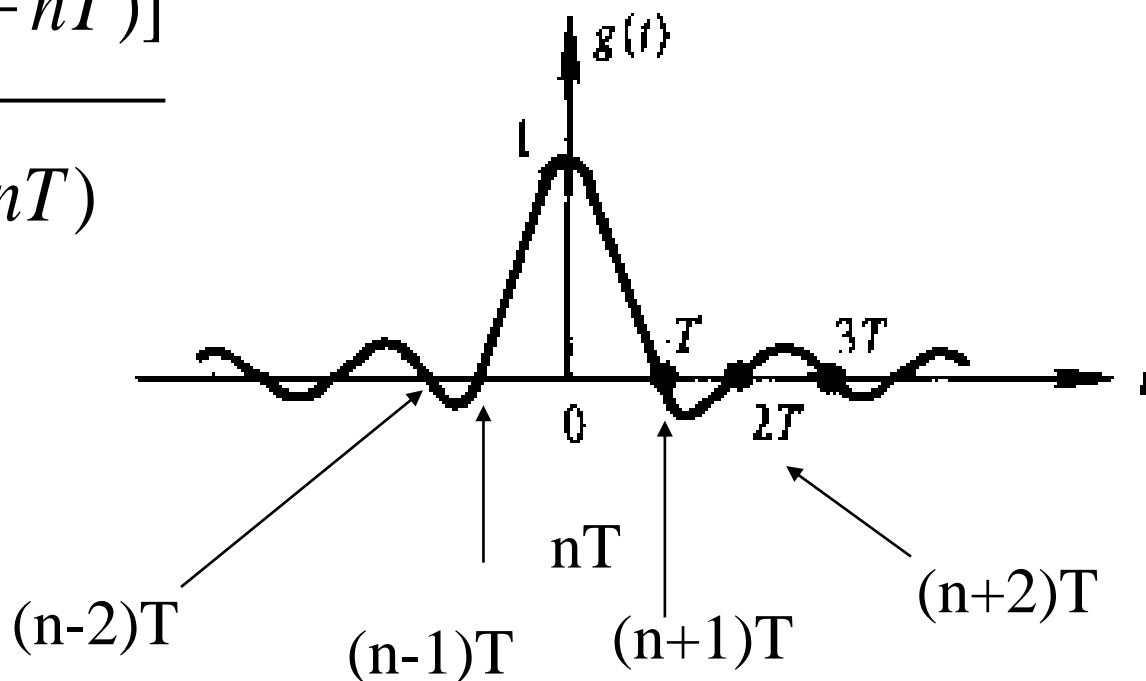
$$\begin{aligned} y_a(t) &= x_a(t) = \hat{x}_a(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}_a(\tau) g(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(\tau - nT) g(t - \tau) d\tau \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - nT) g(t - \tau) d\tau \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) g(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \frac{\sin\left[\frac{\pi}{T}(t - nT)\right]}{\frac{\pi}{T}(t - nT)} \\ &\quad \left( g(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \right) \end{aligned}$$

# 抽样内插公式

$$y_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \frac{\sin[\frac{\pi}{T}(t - nT)]}{\frac{\pi}{T}(t - nT)} = x_a(t)$$

# 内插函数

$$g(t - nT) = \frac{\sin\left[\frac{\pi}{T}(t - nT)\right]}{\frac{\pi}{T}(t - nT)}$$



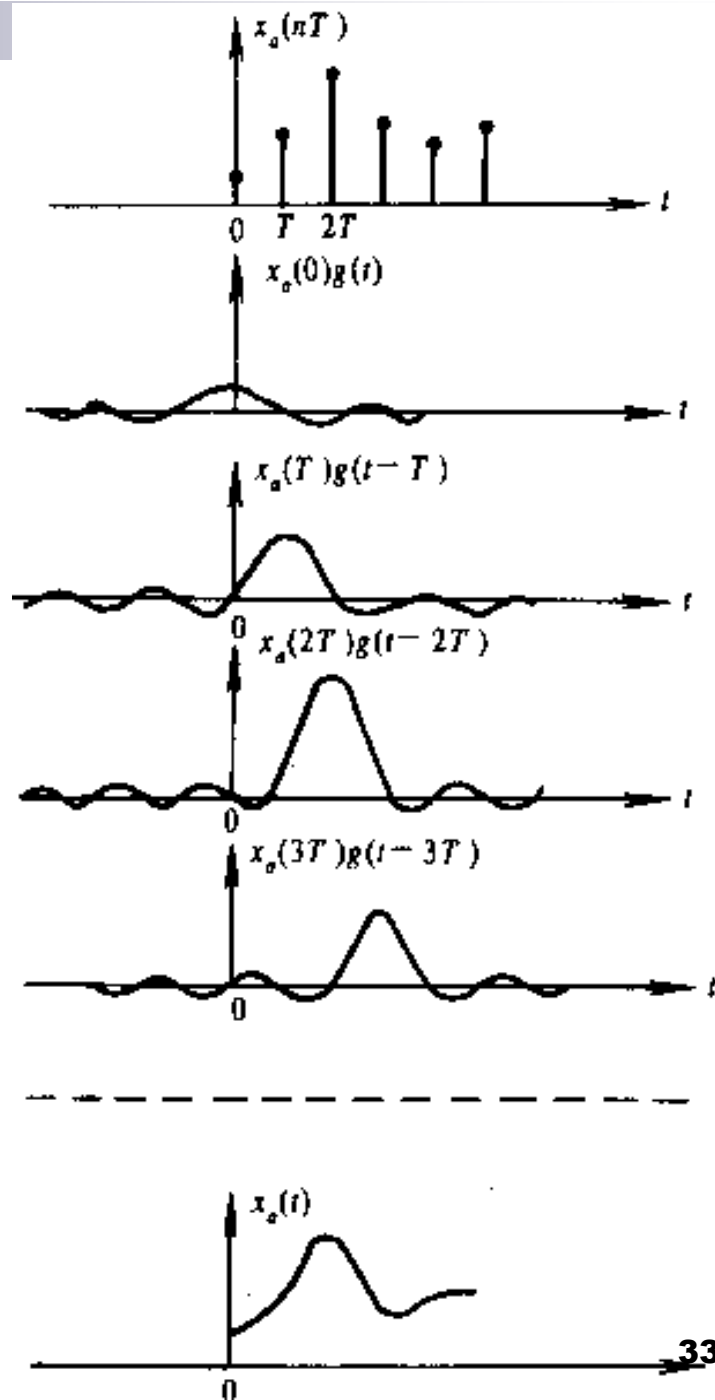
Q: 因果性?

理想低通滤波器的冲激响应 $g(t)$ 是**非因果不可实现**的，故称**理想恢复**，但恢复的信号没有失真。



$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \frac{\sin[\frac{\pi}{T}(t-nT)]}{\frac{\pi}{T}(t-nT)}$$

- $x_a(t)$  等于各  $x_a(nT)$  乘上对应的内插函数的总和
- 在各采样点上，恢复的  $x_a(t)$  等于原采样值
- 在采样点之间，则是各采样值乘以  $g(t-nT)$  的波形伸展叠加而成



# 抽样内插公式

$$y_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \frac{\sin\left[\frac{\pi}{T}(t-nT)\right]}{\frac{\pi}{T}(t-nT)} = x_a(t)$$

- ①  $x_a(t)$  等于各  $x_a(nT)$  乘上对应的内插函数的总和。
- ② 在抽样点  $nT$  上, 函数值为1, 其余抽样点上, 函数值为零。
- ③ 信号的采样点  $x_a(nT)$  之间用该公式插值而得到连续信号  $x_a(t)$ 。
- ④ 内插公式只限于使用在带限（频带有限）信号上。

## 2. D/A 变换器

### ■ 功能

□ 解码：将数字信号转变成时域离散信号

#### ■ M位二进制编码表示

$$x = (\textcolor{red}{x}_0 x_1 x_2 \cdots x_{M-1})_2 \quad \textcolor{red}{x}_0 \text{ 为符号位}$$

#### ■ 解码

$$x = (-1)^{\textcolor{red}{x}_0} \sum_{i=1}^{M-1} x_i 2^{-i}$$

□ 插值：将时域离散信号恢复成模拟信号

■ 常数内插 —— 零阶保持器

■ 一阶多项式和二阶多项式内插

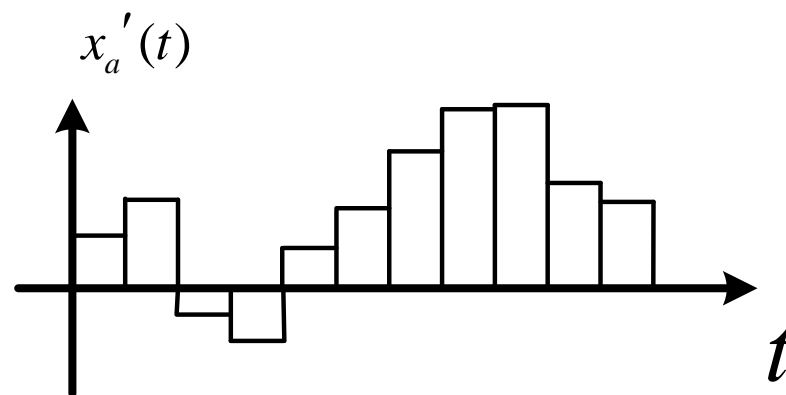
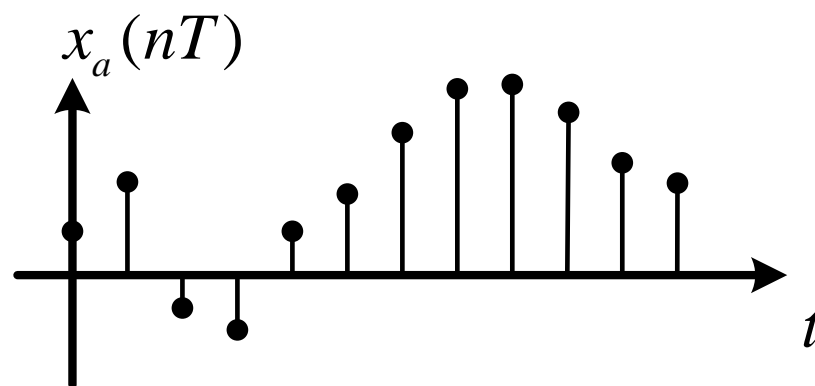
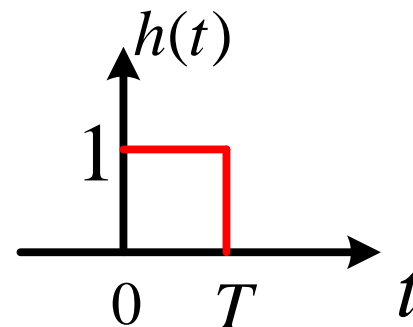
# 零阶保持器（常数内插）

## ■ 传输函数

$$H(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\Omega t} dt$$

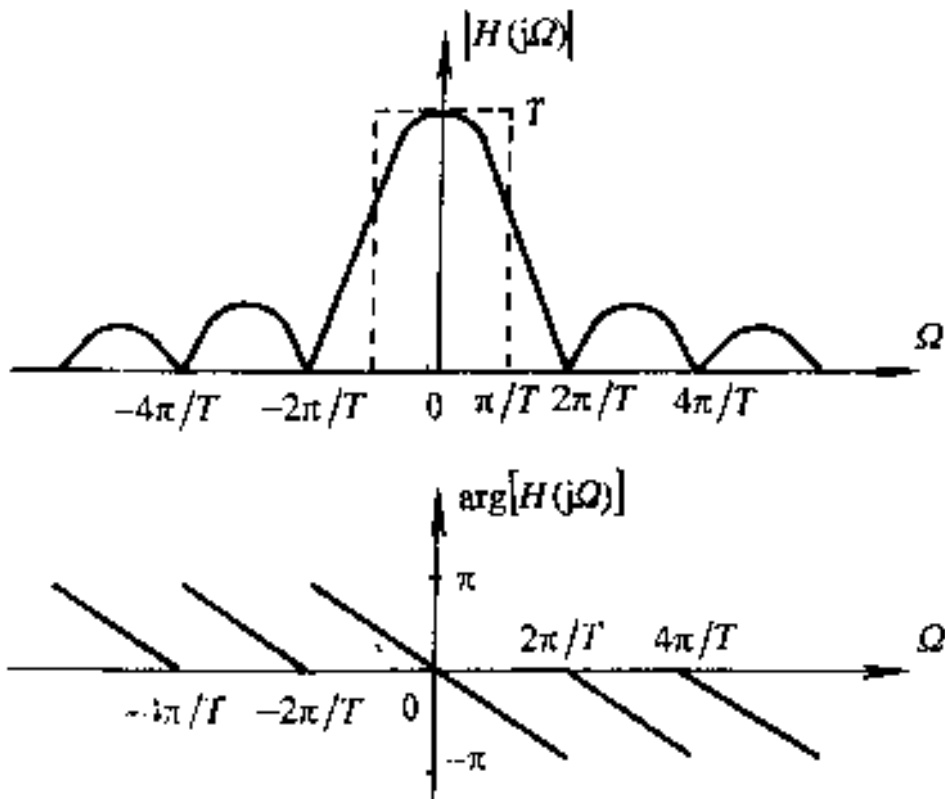
$$= \int_0^T e^{-j\Omega t} d\Omega$$

$$= T \frac{\sin(\Omega T/2)}{\Omega T/2} e^{-j\Omega T/2}$$

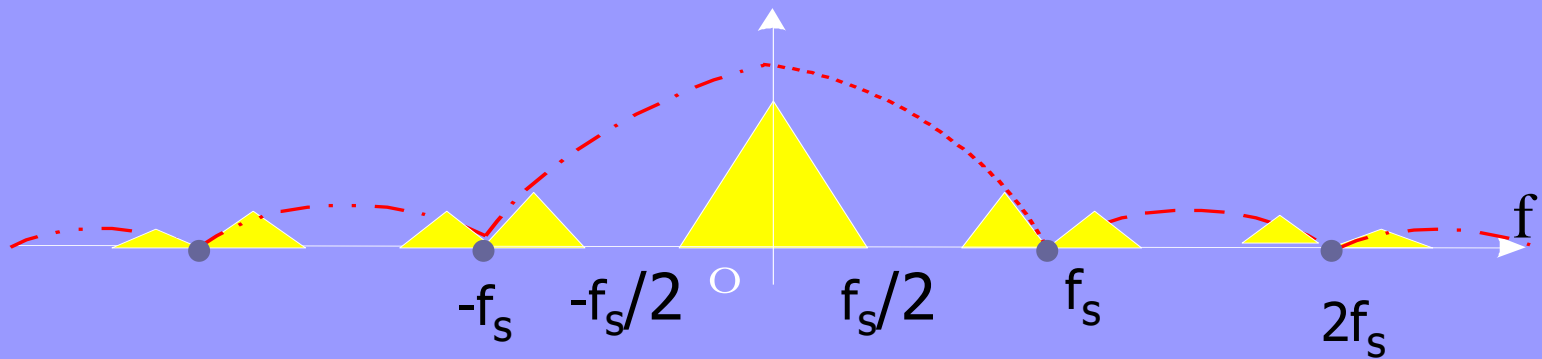
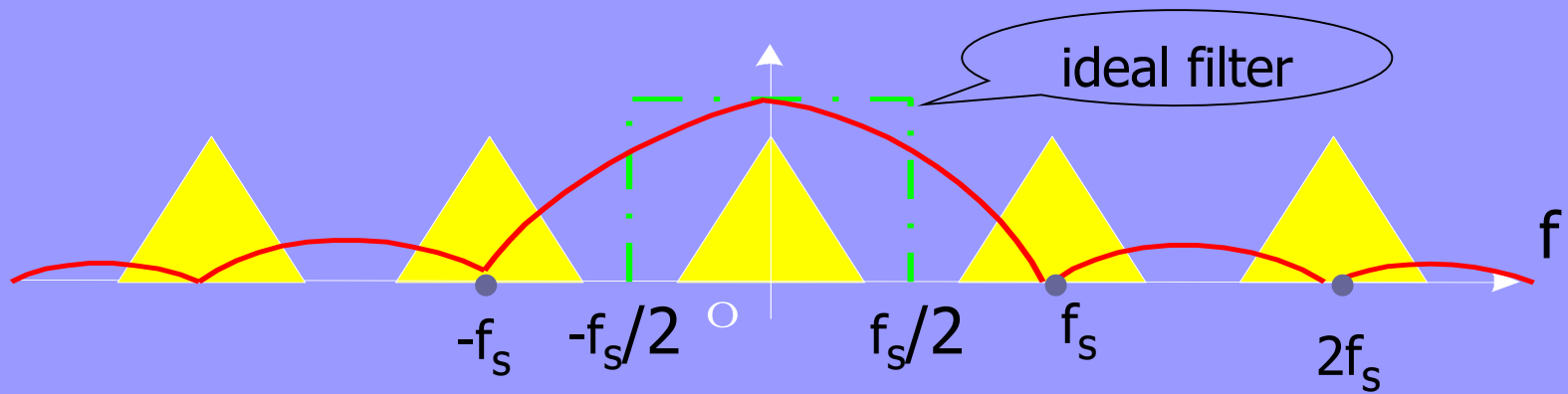


# 零阶保持器的频谱

- 零阶保持器是一个低通滤波器，可以用来恢复模拟信号。

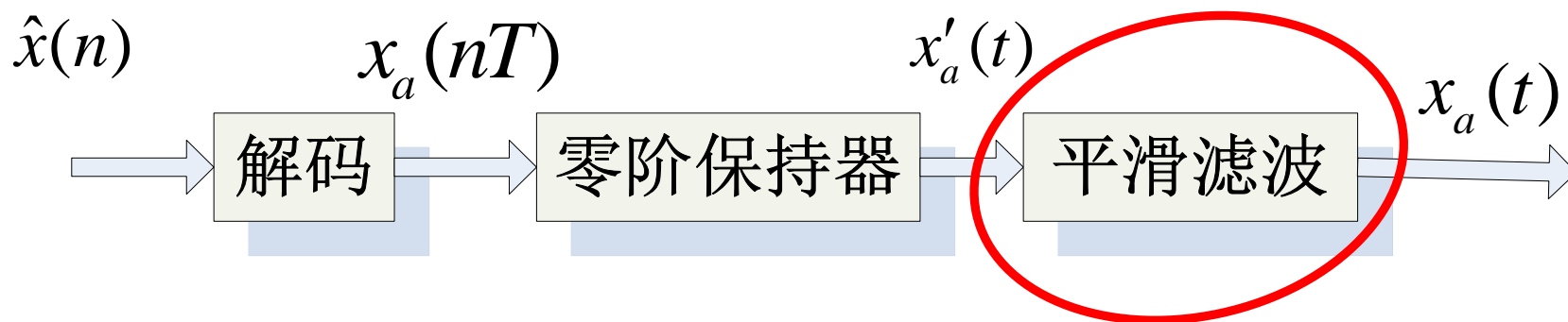


- 问题：
  - 在  $|\Omega| \leq \pi/T$ ，幅度不够平坦，造成信号失真，影响其在高保真系统中的应用。
  - 在  $|\Omega| > \pi/T$ ，引入了原模拟信号没有的高频分量，时域上表现为台阶。

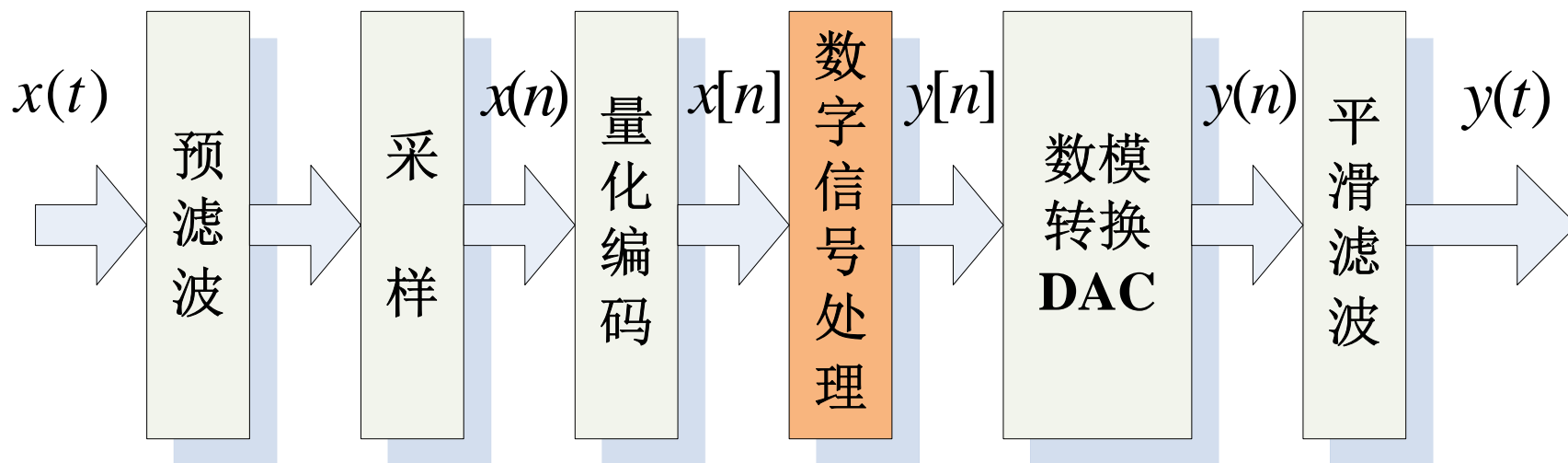


# 措施

- D/A之前，增加数字滤波器，幅度特性为  $S_a(x)$  的倒数。
- 在零阶保持器后，增加一个低通滤波器，滤除高频分量，对信号进行平滑，也称平滑滤波器。
- 采用一阶多项式或二节多项式进行插值。



## 4.3 对数字信号处理部分的设计考虑



- 模拟系统与数字系统：处理方法不同，但设计要求近似



## 4.3 对数字信号处理部分的设计考虑

### ■ 模拟域频率 $f$ 和数字域频率 $\omega$ 的对应关系

#### □ 满足采样定理

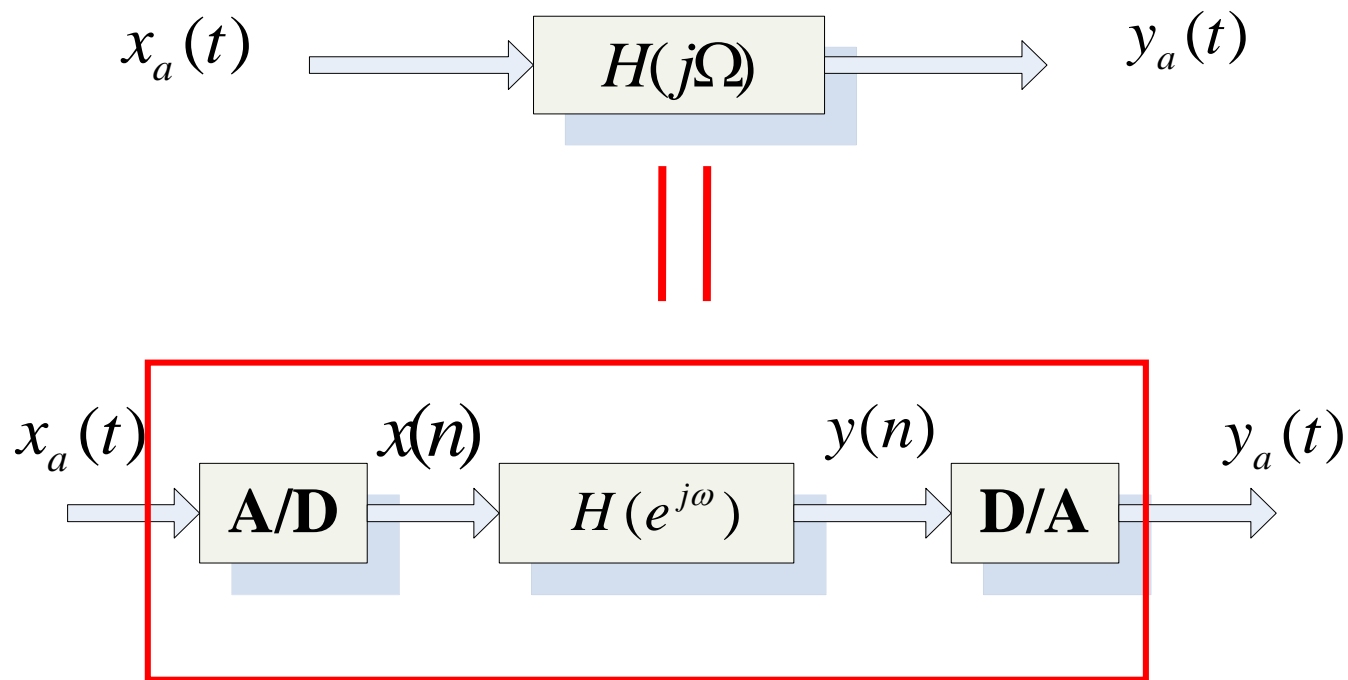
$$\omega = \Omega T = \frac{\Omega}{F_s}, \quad \omega_s = \Omega_s T = \frac{2\pi}{T} T = 2\pi$$

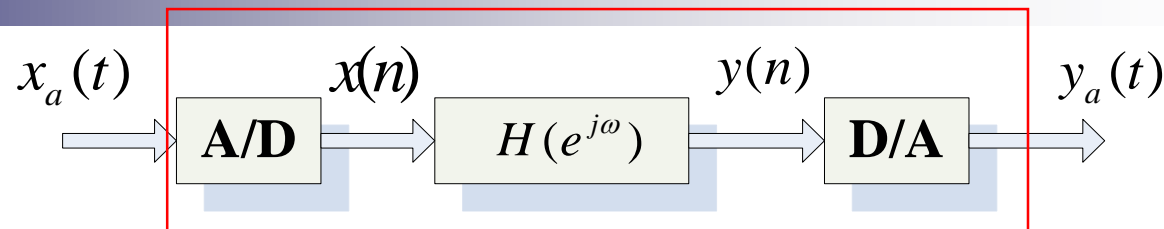
$$f' = \frac{f}{F_s}, \quad \Omega' = \frac{\Omega}{\Omega_s}, \quad \omega' = \frac{\omega}{2\pi}$$

#### □ 模拟信号的最高频率为 $\frac{F_s}{2}$

## 4.4 线性模拟系统的数字模拟

- 用数字系统模拟线性模拟系统的外部特性





- $x_a(t)$  是带限信号

- A/D 满足采样定理

$$x(n) = x_a(t) \Big|_{t=nT} = x_a(nT)$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j \frac{\omega - 2k\pi}{T})$$

- $y(n)$  的傅里叶变换

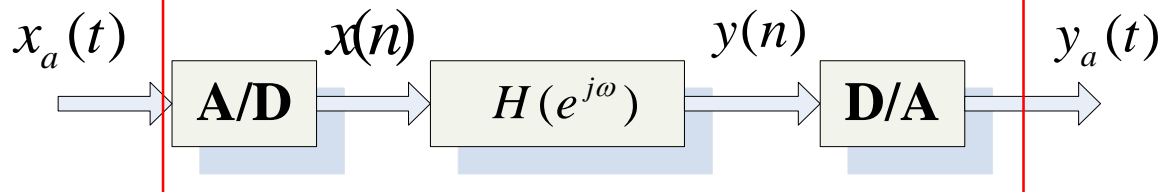
$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega})$$

- 理想采样信号  $\hat{x}_a(t), \hat{y}_a(t)$  的频谱  $\hat{X}_a(j\Omega), \hat{Y}_a(j\Omega)$

$$X(e^{j\omega}) = \hat{X}_a(j\Omega) \Big|_{\Omega=\omega/T} \quad Y(e^{j\omega}) = \hat{Y}_a(j\Omega) \Big|_{\Omega=\omega/T}$$

- 于是

$$Y(e^{j\Omega T}) = H(e^{j\Omega T}) X(e^{j\Omega T})$$



- **D/A**为理想恢复，相当于理想的低通滤波器， $y_a(t)$  的傅里叶变换为：

$$\begin{aligned} Y_a(j\Omega) &= Y(e^{j\Omega T})G(j\Omega) = H(e^{j\Omega T})X(e^{j\Omega T})G(j\Omega) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - r\Omega_s)H(e^{j\Omega T})G(j\Omega) \end{aligned}$$

- $G(j\Omega)$  的通带截止频率为  $\pi / T = \Omega_s / 2$

$$Y_a(j\Omega) = X_a(j\Omega)H(e^{j\Omega T}) \quad |\Omega| \leq \frac{\pi}{T}$$

- 等效模拟滤波器的传输函数

$$H_a(j\Omega) = \frac{Y_a(j\Omega)}{X_a(j\Omega)} = H(e^{j\Omega T}) \quad |\Omega| \leq \frac{\pi}{T}$$

- 数字系统传输函数与模拟系统传输函数之间的关系为

$$H(e^{j\omega}) = H_a(j\Omega) \Big|_{\Omega=\omega/T} \quad |\omega| \leq \pi$$

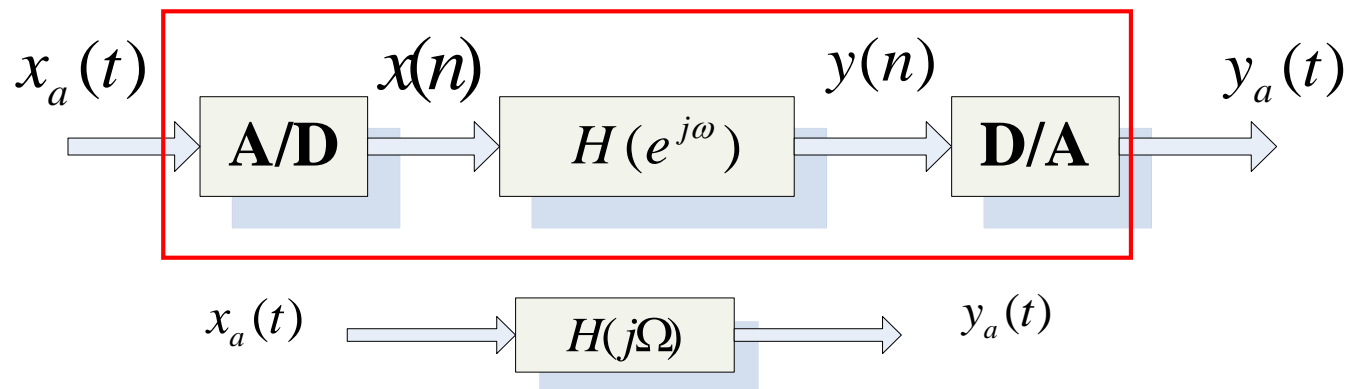
- 数字系统单位脉冲响应与模拟系统单位冲激响应之间的关系为

$$h(n) = h_a(t) \Big|_{t=nT} = h_a(nT)$$

- 结论:

- 采样频率满足采样定理
- **D/A**为理想恢复
- 信号与系统均为带限系统
- 可以用数字系统模拟线性模拟系统，进行分析与设计

- **Q:** 能否用数字滤波器模拟一个模拟高通滤波器?



## 4.5 模拟信号的频谱分析

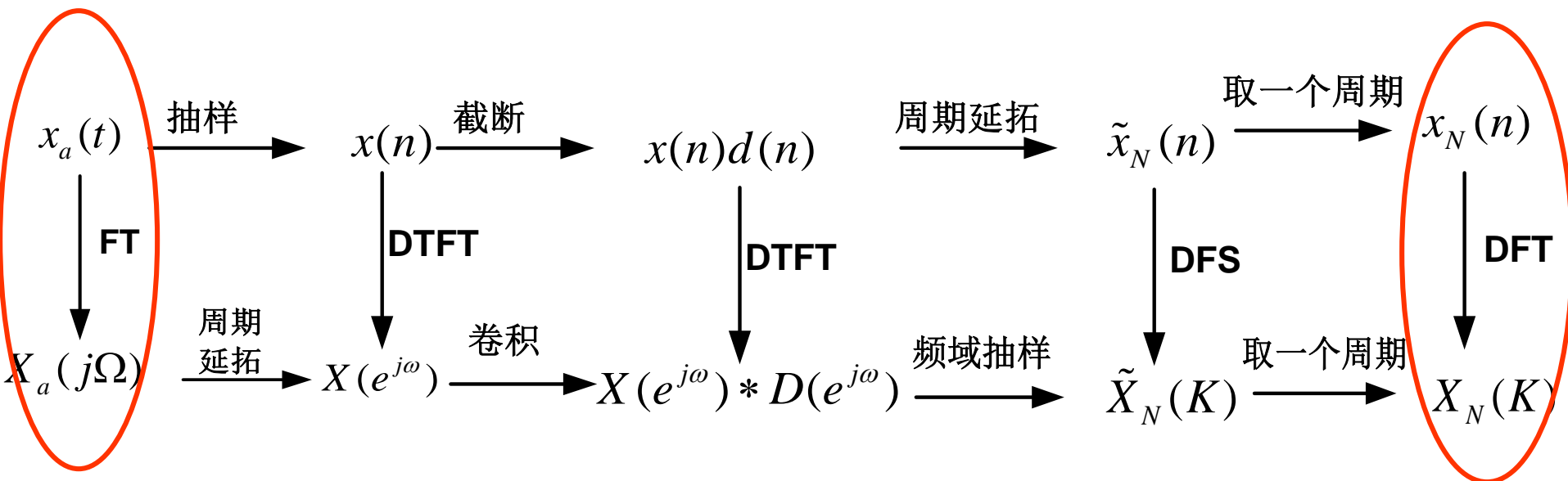
### ■ 问题:

- 模拟信号的频谱分析需要计算信号的傅里叶变换
- 模拟信号及其傅里叶变换不能用计算机进行数值计算
- 如何利用计算机实现对模拟信号的频谱分析?

### ■ 解决思路:

- 将模拟信号转换为时域离散信号，用**DFT（FFT）**进行频谱分析

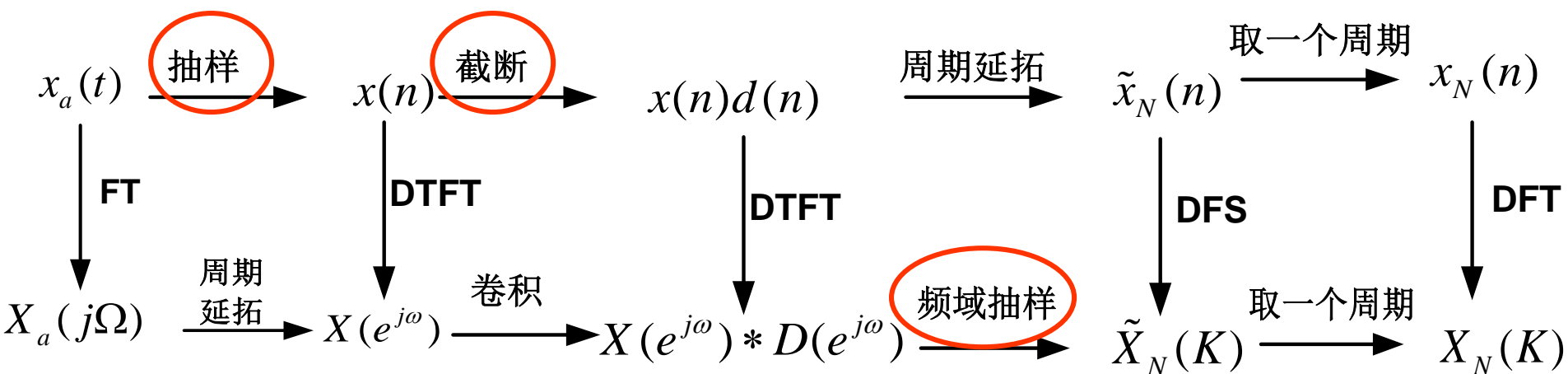
# 用DFT进行谱分析的基本思路



## ■ 核心问题:

- 频域:  $X_N(k)$  是否为  $X_a(j\Omega)$  的准确抽样? 是否包含了  $X_a(j\Omega)$  的全部信息?
- 时域:  $X_N(k)$  的反变换  $x_N(n)$  是否为  $x_a(t)$  的准确抽样? 是否包含了  $x_a(t)$  的全部信息?

# 用DFT进行谱分析的基本思路



## ■ 用DFT（FFT）进行模拟信号的频谱分析，误差如何？

- ☐ 时域抽样
- ☐ 时域截断
- ☐ 频域抽样



# 模拟信号谱分析推导过程

- 设模拟信号  $x_a(t)$  的持续时间为  $T_p$ ，最高频率为  $f_c$
- 模拟信号  $x_a(t)$  的傅里叶变换

$$X_a(jf) = FT[x_a(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

- 以  $F_s = 1/T \geq 2f_c$  对模拟信号采样，在  $T_p$  时间内共采样  $N$  点

- 令  $t = nT$ ， $dt = T$ ，得  $X_a(jf)$  的零阶近似：
$$N = \frac{T_p}{T} = T_p F_s$$

$$X_a(jf) = T \sum_{n=0}^{N-1} x_a(nT) e^{-j2\pi f nT}$$

- 频域等间隔采样，在  $[0, F_s]$  区间采样  $N$  点，则采样间隔

$$F = \frac{F_s}{N} = \frac{1}{NT} = \frac{1}{T_p}$$

# 模拟信号谱分析推导过程

$$X_a(jf) = T \sum_{n=0}^{N-1} x_a(nT) e^{-j2\pi f nT}$$

$$X_a(jkF) = T \sum_{n=0}^{N-1} x_a(nT) e^{-j2\pi kFnT} = T \sum_{n=0}^{N-1} x_a(nT) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

■ 令  $X(k) = X_a(jkF)$ ,  $x(n) = x_a(nT)$  , 则

$$X(k) = T \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = T \bullet DFT[x(n)] \quad 0 \leq k \leq N-1$$

■ 类似地

$$x(n) = \frac{1}{T} \bullet IDFT[X(k)] \quad 0 \leq n \leq N-1$$

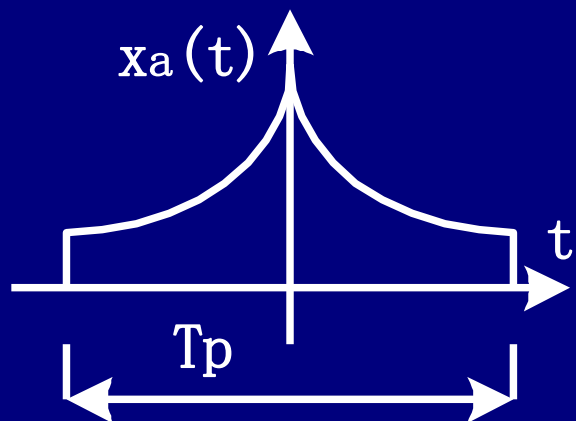
$$\omega_k = \frac{2\pi}{N} k \quad F_k = \frac{F_s}{N} k = Fk = \frac{1}{T_p} k \quad \Omega_k = 2\pi F_k$$

# 模拟信号谱分析公式

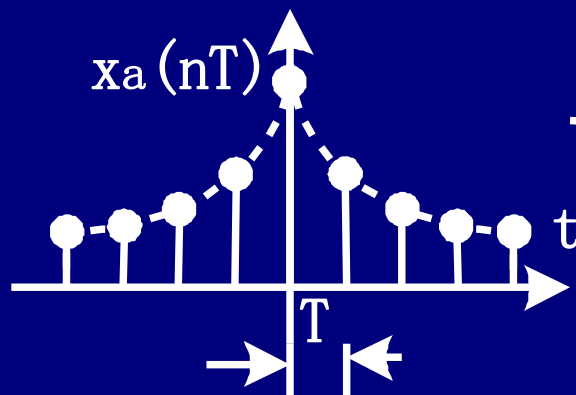
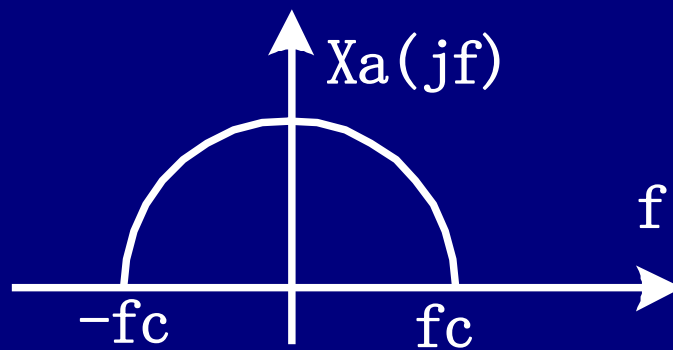
$$X_a(jkF) = X(k) = T \bullet DFT[x(n)] \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$x_a(nT) = x(n) = \frac{1}{T} \bullet IDFT[X(k)] \quad 0 \leq n \leq N-1$$

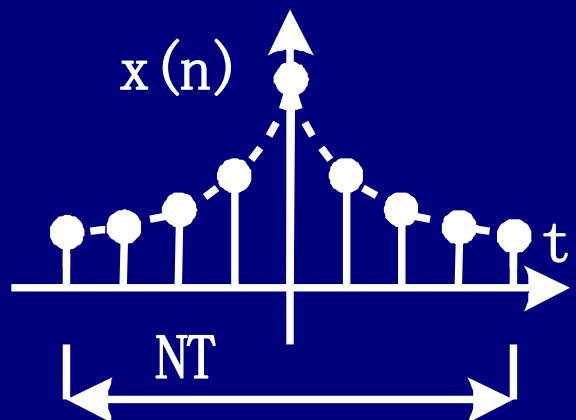
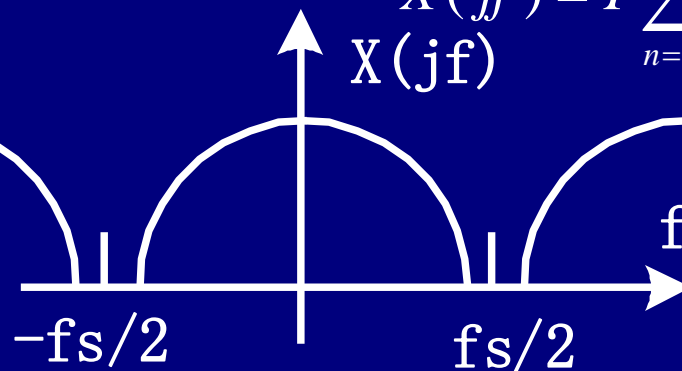
- 由模拟信号时域采样得到**N**点采样序列，经过**DFT**变换，所得结果再乘以**T**，就是模拟信号在频域采样值的近似。
- 由频域采样值**X(k)**经过**IDFT**，所得结果再除以**T**，就得到原采样序列。



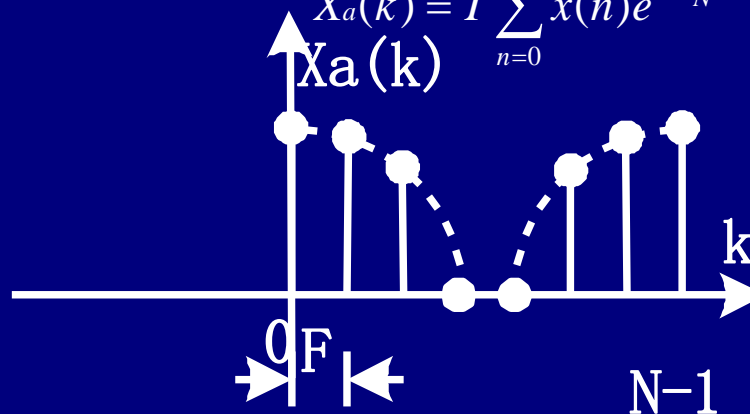
$$X_a(jf) = FT[x_a(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi ft} dt$$



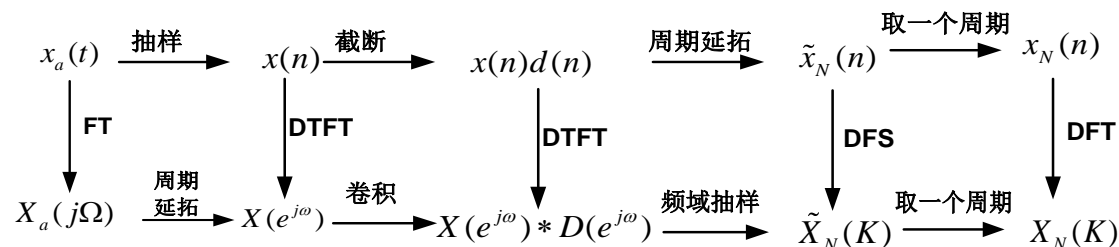
$$X(jf) = T \sum_{n=0}^{N-1} x_a(nT) e^{-j2\pi fnT}$$



$$X_a(k) = T \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N} kn} = T \cdot DFT[x(n)]$$



# DFT对FT的近似



## ■ 频域:

- 截断序列  $x_N(n)$  的DTFT  $X(e^{j\omega}) \neq X_a(j\Omega)$
- $X(e^{j\omega})$  的一个周期的抽样序列  $X_N(k)$  只是  $X_a(j\Omega)$  的近似

## ■ 时域:

- $x_N(n)$  也将是对  $x_a(t)$  的近似

## ■ 结论:

- 用DFT对模拟信号进行谱分析时, DFT只是FT的近似

# 重要参数的选择

## ■ 采样频率 $F_s$ 、频率分辨率 $F$ 、频谱分析范围、采样点数 $N$

### □ 采样频率 $F_s$

设模拟信号的最高截止频率为  $f_c$ ，则时域采样频率的选择应满足：

$$F_s \geq 2f_c \Rightarrow F_{s\min} = 2f_c$$

时域采样周期

$$T = \frac{1}{F_s}$$

# 重要参数的选择

- 采样频率**F<sub>s</sub>**、频率分辨率**F**、频谱分析范围、采样点数**N**

- 频率分辨率**F**

即为频率域的采样间隔，是用**DFT**分析频谱时，能够分辨的两个频率分量最小的间隔。显然**F**应根据频谱分析的要求确定。

$$F = \frac{F_s}{N} = \frac{1}{NT} = \frac{1}{T_p}$$

频率分辨率**F**与观测时间**T<sub>p</sub>**成反比

# 重要参数的选择

- 采样频率**F<sub>s</sub>**、频率分辨率**F**、频谱分析范围、采样点数**N**

- 频谱分析范围

模拟信号最高频率不超过 **F<sub>s</sub>/2**，故谱分析范围：

$$0 \sim F_s / 2$$

- 信号的采样点数**N**

$$N_{\min} = \frac{T_p}{T} = \frac{F_{s \min}}{F}$$



# 重要参数的选择

## ■ 采样频率**F<sub>s</sub>**、频率分辨率**F**、频谱分析范围、采样点数**N**

□ 采样频率**F<sub>s</sub>** :  $F_s \geq 2f_c$        $F_{s\min} = 2f_c$

□ 频率分辨率**F** :  $F = \frac{1}{T_p}$        $T_{p\min} = \frac{1}{F} = \frac{N_{\min}}{F_{s\min}}$

□ 频谱分析范围 :  $0 \sim F_s / 2$        $= N_{\min} \cdot T_{s\min}$

□ 信号的采样点数**N** :  $N_{\min} = \frac{F_{s\min}}{F}$

**例4.5.1** 对模拟信号进行频谱分析，要求谱分辨率  $F \leq 10\text{Hz}$ ，  
信号最高频率  $f_c = 2.5\text{kHz}$ ，计算：最小记录时间  $T_{p\min}$ 、  
最大采样间隔  $T_{\max}$ 、最少采样点数  $N_{\min}$  及谱分析范围；如果  
信号最高频率和采样频率不变，如何提高谱分辨率？

解：最小记录时间  $T_{p\min} = 1/F = 1/10 = 0.1\text{s}$

最大采样间隔  $T_{\max} = 1/F_{s\min} = 1/(2 \times 2500) = 0.2 \times 10^{-3}\text{s}$

最少采样点数  $N_{\min} = F_{s\min} / F = 2 \times 2500 / 10 = 500$

谱分析范围  **$0 \sim F_{s\min}/2$**

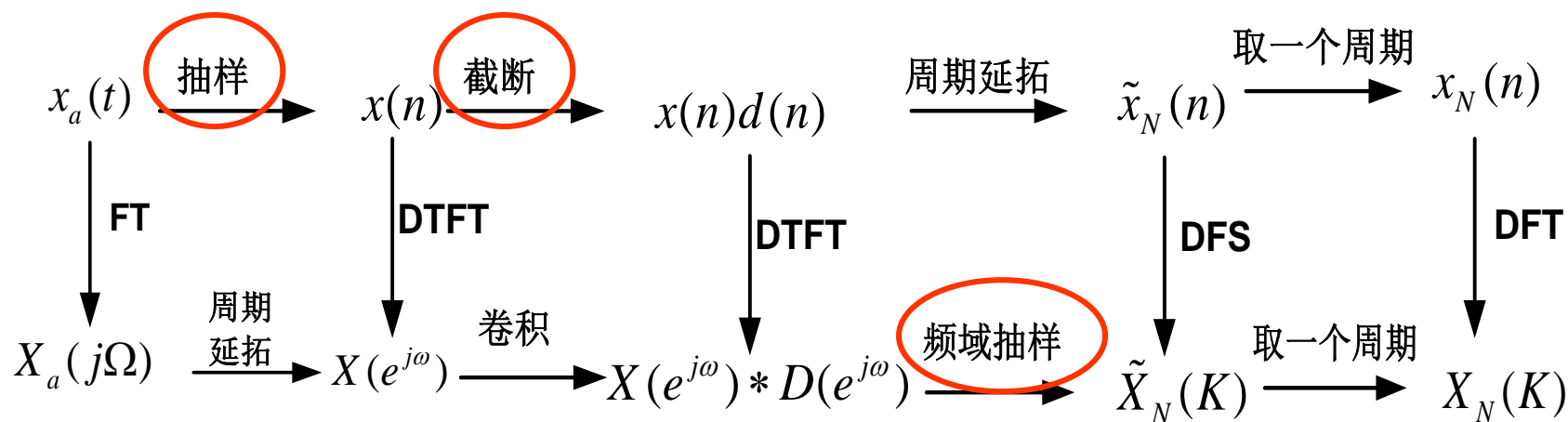
如何提高谱分辨率？  $F = 1/T_{p\min}$

$F$  ↓

$T_{p\min}$  ↑

$N_{\min}$  ↑

## 4.5.2 用DFT(FFT)对模拟信号进行谱分析的误差

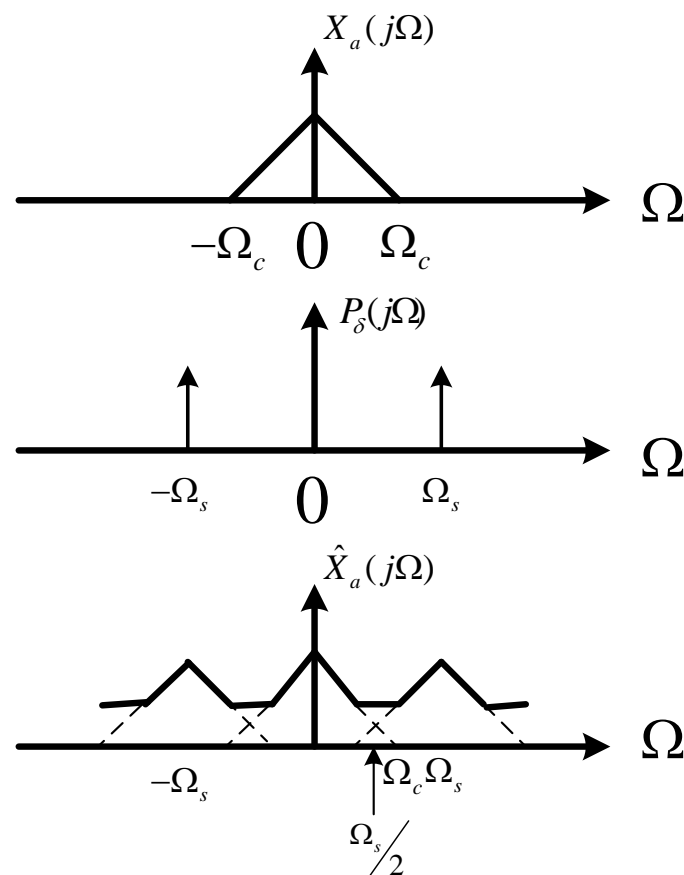


- 时域采样  $\Rightarrow$  频谱混叠
- 时域截断  $\Rightarrow$  截断效应
- 频域采样  $\Rightarrow$  栅栏效应

## 4.5.2 用DFT(FFT)对模拟信号进行谱分析的误差

### 1. 频谱混叠

- **带限信号**：采样频率过低，不满足时域采样定理，则导致频谱混叠
- **非带限信号**：若模拟信号有不连续点，其频谱函数不是锐截止，即使选择高采样频率，仍有频谱混叠。若模拟信号中含有干扰或噪声，也会引起频谱混叠
- 为避免频谱混叠，可进行预滤波（抗混叠低通滤波器）



## 2. 截断效应

- 如 $x(n)$ 为无限长序列，必须截断成有限长序列进行DFT，因截断引起的误差现象称为截断效应

$$x_N(n) = x(n)R_N(n)$$

- 矩形窗  $R_N(n)$

- 傅里叶变换

$$X_N(e^{j\omega}) = FT[x_N(n)] = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * R_{fN}(e^{j\omega})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) R_{fN}(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

$$X(e^{j\omega}) = FT[x(n)]$$

$$R_{fN}(e^{j\omega}) = FT[R_N(n)] = e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \frac{\sin(\omega N / 2)}{\sin(\omega / 2)} = R_{fN}(\omega) e^{j\phi(\omega)}$$

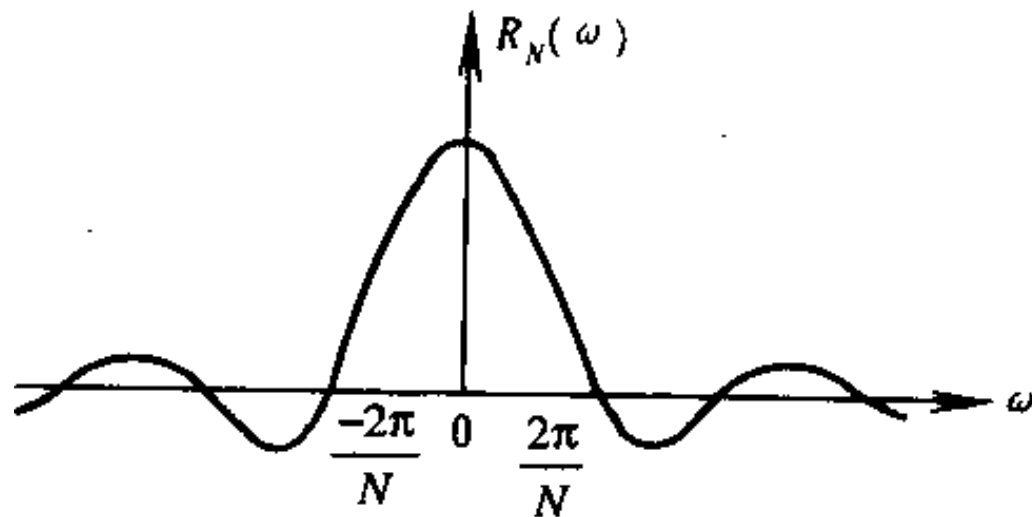
$$X_N(e^{j\omega}) = FT[x_N(n)] = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * R_{fN}(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = FT[x(n)]$$

$$R_{fN}(e^{j\omega}) = FT[R_N(n)] = e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \frac{\sin(\omega N / 2)}{\sin(\omega / 2)} = R_{fN}(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

矩形窗幅度谱  $R_{fN}(\omega) = \frac{\sin(\omega N / 2)}{\sin(\omega / 2)}$

- 一个主瓣，宽度为  $4\pi/N$
- 有许多旁瓣
- 信号的频谱与矩形窗的频谱函数进行卷积，使得截断后信号的频谱与原信号的频谱不同



例:  $x(n) = \cos(\omega_0 n) \quad \omega_0 = \frac{\pi}{4}$

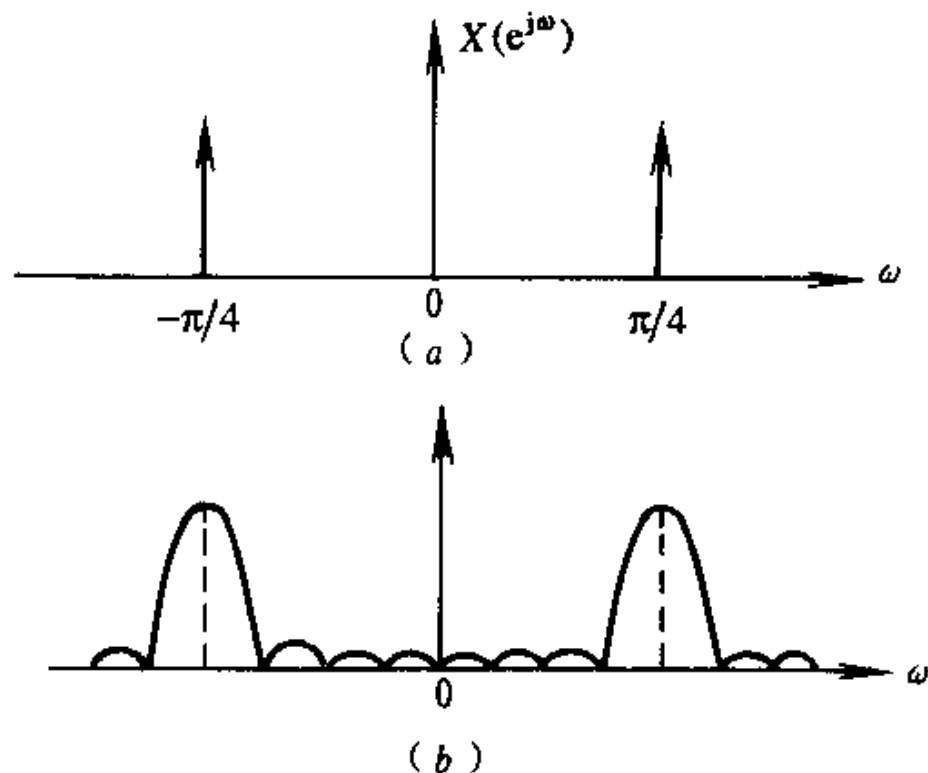
■ 矩形窗截断前后的频谱

■ 频谱泄漏

- 时域截断后,频域谱线展宽
- 矩形窗长度越短, 频域展宽的宽度越宽 ( $4\pi/N$ )
- 频谱模糊, 分辨率降低

■ 谱间干扰

- 旁瓣起着谱间干扰的作用
- 强信号的旁瓣掩盖了弱信号的主瓣
- 误将强信号的旁瓣当作弱信号的主瓣
- 降低频谱分辨率



■ 减轻截断效应:

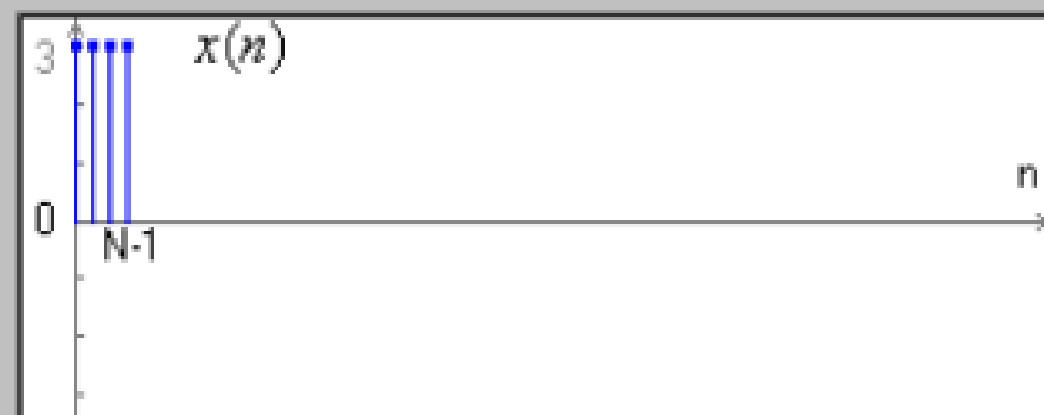
- 增加矩形窗的长度
- 改变窗函数的形状, 提高主瓣能量, 压低旁瓣幅度; 但增加主瓣的宽度, 分辨率降低

### 3. 栅栏效应

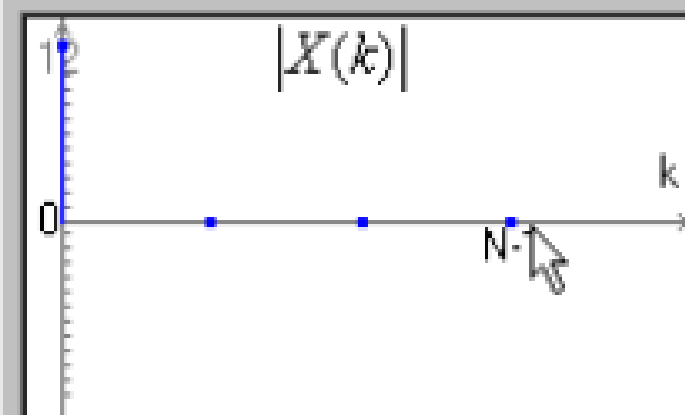
- 非周期模拟信号的频谱是连续的非周期频谱；而DFT只计算离散采样点（基频 $F$ 的整数倍处）的频谱，是离散频谱
- 两点之间的频谱像被栅栏遮住一样，是未知的
- 改善方法：
  - 增加频域采样点数 $N$ ，使谱线更密
  - 时域补零，增加DFT变换点数使得计算出的频谱的谱线变密，原来漏掉的某些频谱分量就可能被检测出来。



## 时域的实序列




## DFT取模(频域)



补零点



 请您按动滚动条对左图的时域序列补零点，右图将马上显示出对应的DFT。不难看出，随着所补零点的增多，频域序列间隔越来越密，包络逐渐逼近一个固定规律的曲线。这是为什么呢？我们可以用DFT与z变换的关系来解释它。请先按滚动条观察现象，然后按<简单原理>继续……

简单原理

概念

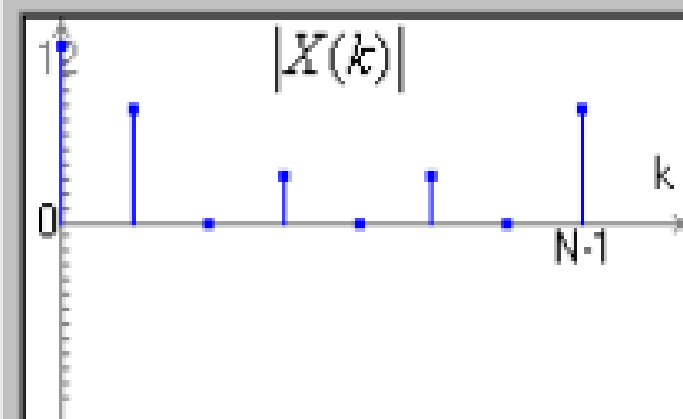
测验

结束

时域的实序列



DFT取模(频域)



补4个零点



请您按动滚动条对左图的时域序列补零点，右图将马上显示出对应的DFT。不难看出，随着所补零点的增多，频域序列间隔越来越密，包络逐渐逼近一个固定规律的曲线。这是为什么呢？

我们可以用DFT与Z变换的关系来解释它。

请先按滚动条观察现象，然后按<简单原理>继续……

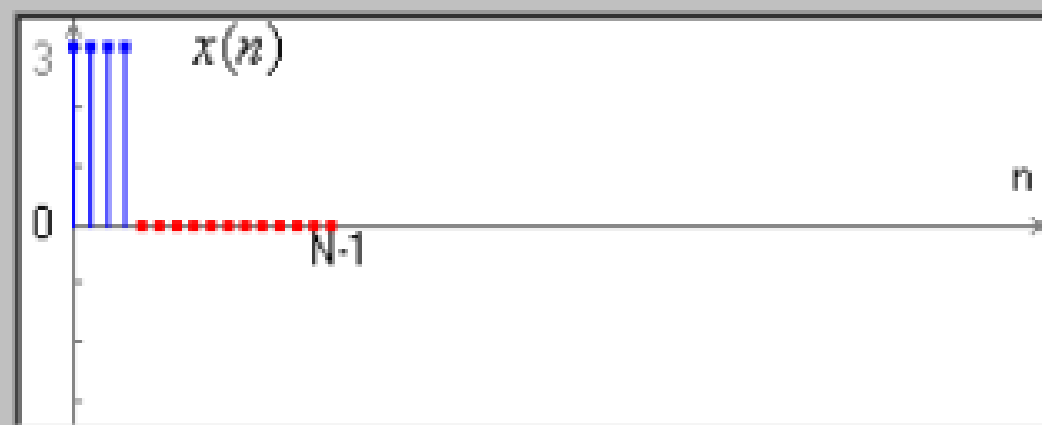
简单原理

概念

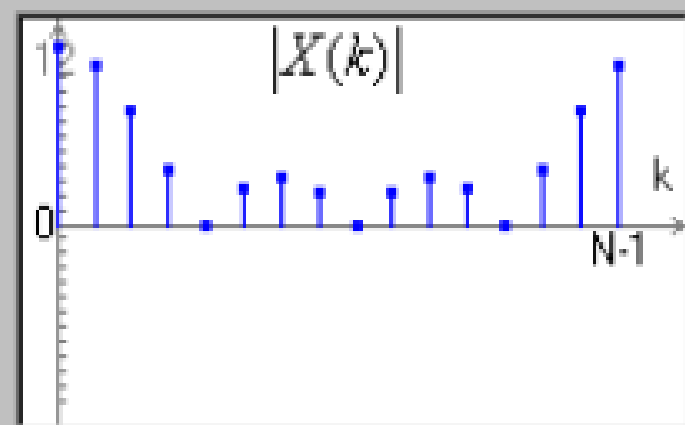
测验

结束

## 时域的实序列



## DFT取模(频域)



补12个零点



请您按动滚动条对左图的时域序列补零点，右图将马上显示出对应的DFT。不难看出，随着所补零点的增多，频域序列间隔越来越密，包络逐渐逼近一个固定规律的曲线。这是为什么呢？我们可以用DFT与Z变换的关系来解释它。请先按滚动条观察现象，然后按<简单原理>继续……

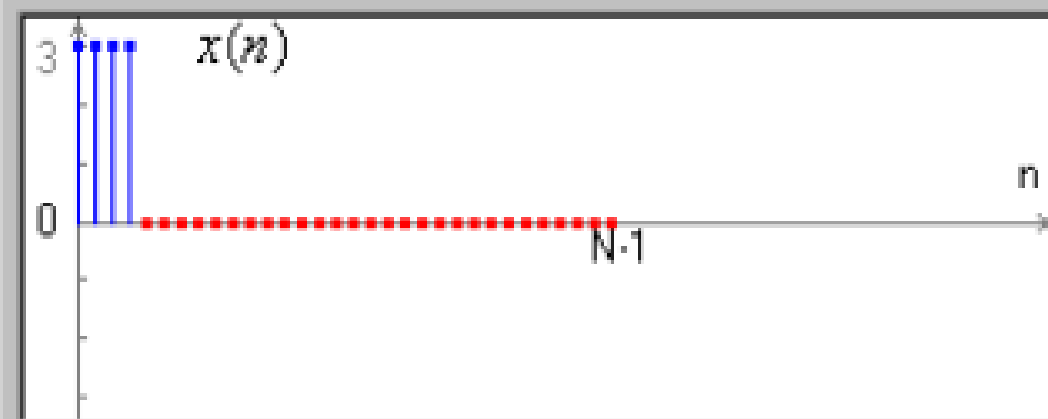
简单原理

概念

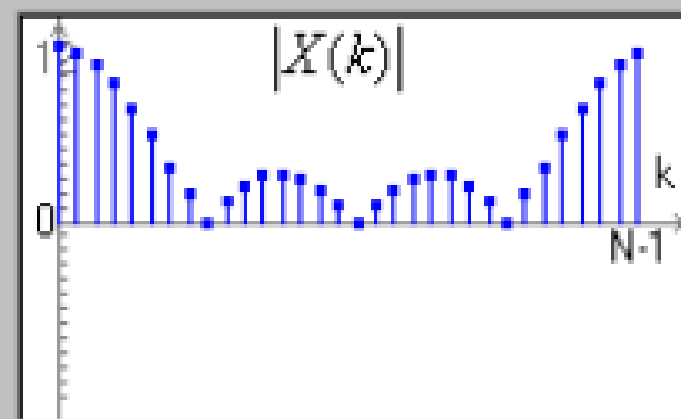
测验

结束

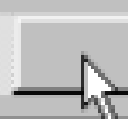
时域的实序列



DFT取模(频域)



补28个零点



请您按动滚动条对左图的时域序列补零点，右图将马上显示出对应的DFT。不难看出，随着所补零点的增多，频域序列间隔越来越密，包络逐渐逼近一个固定规律的曲线。这是为什么呢？

我们可以用DFT与Z变换的关系来解释它。

请先按滚动条观察现象，然后按<简单原理>继续……

简单原理

概念

测验

结束

### 3. 栅栏效应

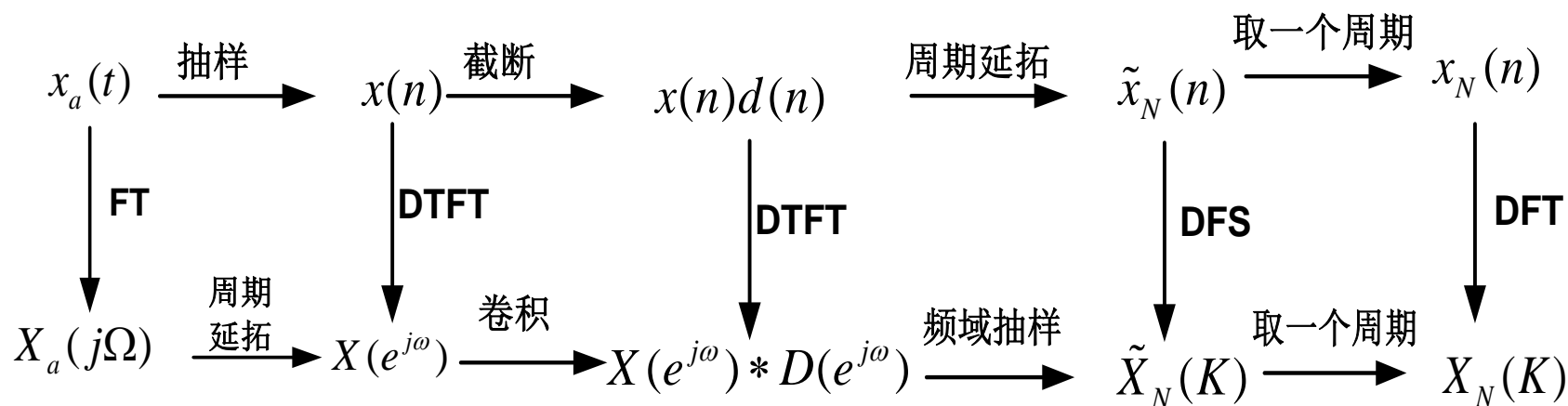
- 非周期模拟信号的频谱是连续的非周期频谱；而DFT只计算离散采样点（基频 $F$ 的整数倍处）的频谱，是离散频谱
- 两点之间的频谱像被栅栏遮住一样，是未知的
- 改善方法：
  - 增加频域采样点数 $N$ ，使谱线更密
  - 时域补零，增加DFT变换点数
- 拓展问题：
  - $T_p$ 一定，减小 $T$ 增加 $N$ ，可以提高频率分辨率吗？
  - 补零可以提高频率分辨率吗？

## 拓展问题

■ **问题1:**  $T_p$  一定, 减小T增加N, 可以提高频率分辨率吗?

■ **问题2:** 补零可以提高频率分辨率吗?

# 总结：DFT对FT的近似



## ■ 结论:

- 用**DFT**对模拟信号进行谱分析时，**DFT**只是**FT**的近似
- **Ts**足够小 → 减轻频谱混叠
- **N**足够大 → 减小截断效应，减轻时域混叠
- 两个条件均满足时，**DFT**可以很好地近似**FT**

例4.5.2 理想低通滤波器的频谱函数为：
$$H_a(jf) = \begin{cases} e^{j2\pi f\alpha} & |f| \leq 0.5\text{Hz} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

该滤波器的单位冲激响应为 
$$h_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H_a(jf) e^{j2\pi ft} df = \frac{\sin[\pi(t-\alpha)]}{\pi(t-\alpha)}$$

用DFT对  $h_a(t)$  进行频谱分析，并与原来的频谱曲线进行比较

解：1) 采样频率、采样间隔、信号观测时间为  $F_s = 4\text{Hz}, T = 0.25\text{s}, T_p = 8\text{s}$

于是，采样点数  $N = T_p / T = 32$ ，频率采样间隔  $F = 1 / NT = 0.125\text{Hz}$

采样序列：

$$h(n) = \frac{\sin[\pi(nT - \alpha)]}{\pi(nT - \alpha)} R_{32}(n)$$

32点DFT：

$$H(k) = T \bullet \text{DFT}[h(n)] = T \sum_{n=0}^{31} h(n) e^{-j\frac{2\pi}{32}kn}$$



### 4.5.3 用DFT（FFT）对周期信号进行频谱分析

#### ■ 问题:

- 如何用计算机处理——周期信号的傅里叶级数
- 如何用 **DFT** 对其进行逼近.

- 对连续周期信号进行采样—周期序列（周期为N）

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(nT) = \tilde{x}(t) \Big|_{t=nT}$$

- FT

$$X(e^{j\omega}) = FT[\tilde{x}(n)] = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}(k) \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k)$$

$$\tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)]$$

- 截取主值区间

$$x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n)$$

- DFT

$$X(k) = DFT[x(n)] = \tilde{X}(k)R_N(n)$$

- 如截取长度为  $M = mN$ ，即  $m$  个周期

$$x_M(n) = \tilde{x}(n)R_M(n)$$

- DFT

$$X_M(k) = DFT[x_M(n)]$$

- 能否得到  $\tilde{X}(k)$  ?

- DFT

$$\begin{aligned} X_M(k) &= DFT[x_M(n)] = \sum_{n=0}^{M-1} x_M(n) e^{-j\frac{2\pi}{M}kn} \\ &= \sum_{n=0}^{mN-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{mN}kn} \end{aligned}$$

$$X_M(k) = DFT[x_M(n)] = \sum_{n=0}^{mN-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{mN}kn} \quad k = 0, 1, 2, \dots, mN-1$$

■ 令  $n = n' + rN, \quad n' = 0, 1, \dots, N-1, \quad r = 0, 1, \dots, m-1$

$$\begin{aligned} X_M(k) &= \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{n'=0}^{N-1} \tilde{x}(n' + rN) e^{-j\frac{2\pi(n'+rN)}{mN}k} \\ &= \sum_{r=0}^{m-1} \left[ \sum_{n'=0}^{N-1} \tilde{x}(n') e^{-j\frac{2\pi}{N}n'\frac{k}{m}} \right] e^{-j\frac{2\pi rN}{mN}k} \\ &= \sum_{r=0}^{m-1} \left[ \sum_{n'=0}^{N-1} x(n') e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{k}{m}n'} \right] e^{-j2\pi\frac{k}{m}r} \\ &= X\left(\frac{k}{m}\right) \sum_{r=0}^{m-1} e^{-j2\pi\frac{k}{m}r} \end{aligned}$$

$$X_M(k) = DFT[x_M(n)] = X\left(\frac{k}{m}\right) \sum_{r=0}^{m-1} e^{-j2\pi \frac{k}{m} r}$$

$$\therefore \sum_{r=0}^{m-1} e^{-j2\pi \frac{k}{m} r} = \begin{cases} m & k/m \text{ 为整数} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$\therefore X_M(k) = \begin{cases} mX\left(\frac{k}{m}\right) & k/m \text{ 为整数} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

- 当  $k/m$  为整数, 设  $k/m = l$ , 即  $k = lm, l = 0, 1, \dots, N-1$

$X\left(\frac{k}{m}\right)$  为  $\tilde{x}(n)$  的主值区间序列的  $N$  点 DFT

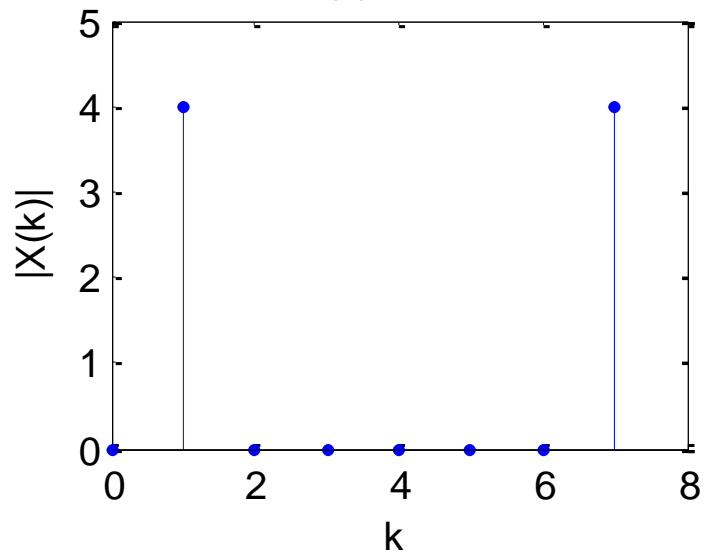
- 结论：对  $\tilde{x}(n)$  截取整数倍周期长度  $M=mN$ ，做M点DFT，得到的  $X_M(k)$  可以表示  $\tilde{x}(n)$  的频谱  $\tilde{X}(k)$ ，只是幅度增加了m倍。
- 对模拟周期信号用DFT（FFT）进行谱分析
  - 要求截取的长度是周期的整数倍
  - 采样频率要满足采样定理，满足每个周期中采样点数相等，以得到周期序列

# 用 DFT 逼近连续周期信号的傅里叶级数的 注意点

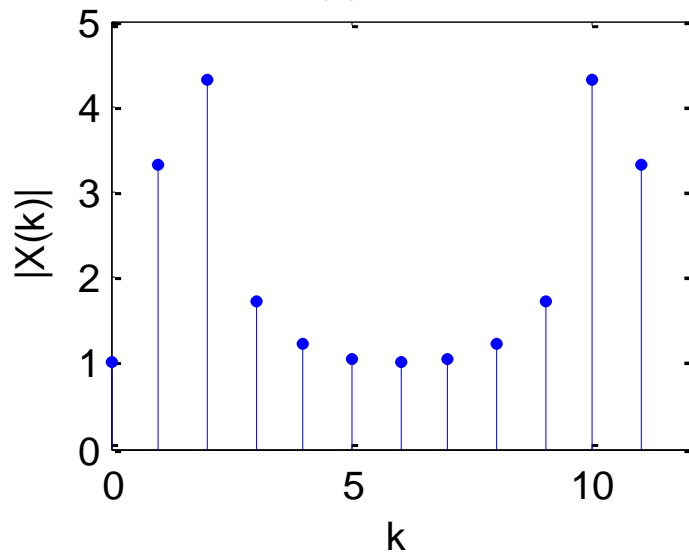
- 逼近值除了加权差别外，还有如下特别注意处：
- DFT逼近周期信号的DFS时，截断长度应为其周期的整数倍。
- 如果截断长度不等于周期的整数倍，则会造成离散和连续傅里叶变换之间出现显著差异，而不是只相差一个加权因子。
- 另外当长度不是周期的整数倍时，时域会表现为有间断点的周期函数，频域表现为频谱泄漏成分增大。
- 由于DFT逼近连续周期信号过程中用到抽样与截断，因此还会带来一些可能产生的问题 (如: 混叠效应、频谱泄漏、栅栏效应等)。

# 例4.5.3

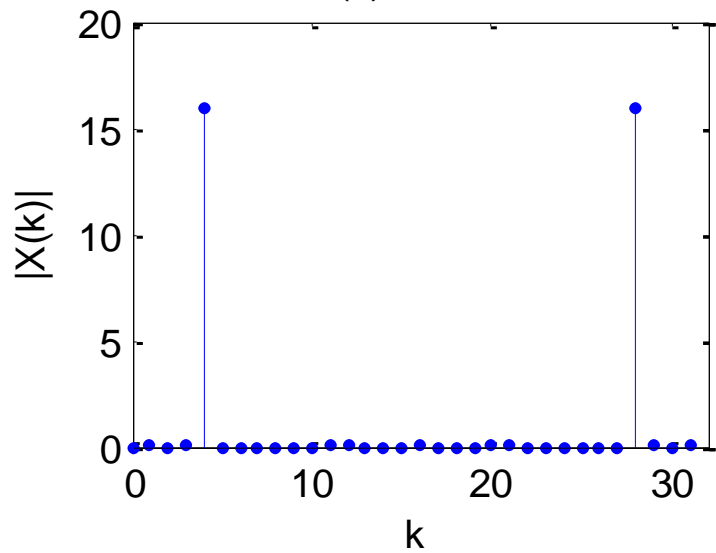
(a)  $N=8$



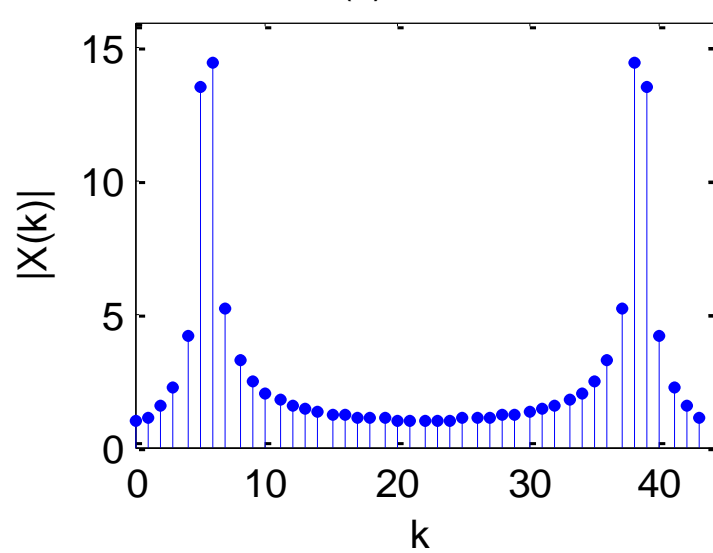
(b)  $N=12$



(c)  $N=32$



(c)  $N=44$





# 作业:

## ■ 习题:

### □ P118: 18

4.2 设模拟信号  $x_a(t) = \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) + \cos(2\pi f_2 t + \varphi_2)$ ，式中  $f_1 = 2 \text{ kHz}$ ， $f_2 = 3 \text{ kHz}$ ， $\varphi_1, \varphi_2$  是常数。

(1) 为将该模拟信号  $x_a(t)$  转换成时域离散信号  $x(n)$ ，最小采样频率  $F_{s\min}$  应取多少？

(2) 如果采样频率  $F_s = 10 \text{ kHz}$ ，求  $x(n)$  的最高频率是多少？

(3) 设采样频率  $F_s = 10 \text{ kHz}$ ，写出  $x(n)$  的表达式。

4.3 对  $x(t) = \cos 2\pi t + \cos 5\pi t$  进行理想采样，采样间隔  $T = 0.25 \text{ s}$ ，得到  $\hat{x}(t)$ ，再让  $\hat{x}(t)$  通过理想低通滤波器  $G(j\Omega)$ ，即

$$G(j\Omega) = \begin{cases} 0.25 & |\Omega| \leq 4\pi \\ 0 & |\Omega| > 4\pi \end{cases}$$

(1) 写出  $\hat{x}(t)$  的表达式；

(2) 求出理想低通滤波器的输出信号  $y(t)$ 。

4.4\* 设  $x_a(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$ ，式中， $x_1(t) = \cos 8\pi t$ ， $x_2(t) = \cos 16\pi t$ ， $x_3(t) = \cos 20\pi t$ 。

(1) 如用 FFT 对  $x_a(t)$  进行频谱分析，问采样频率  $F_s$  和采样点数  $N$  应如何选择，才能精确地求出  $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$  和  $x_3(t)$  的中心频率？为什么？