

UE Initiation à la recherche (page de garde à faire à la fin  
avec couleur logo etc.)

NOM  
NOM + rajouter Pr.REY Thomas

December 2024

# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Table des matières</b>   | <b>1</b>  |
| <b>1 Rappels théoriques des équations différentielles</b>                         | <b>3</b>  |
| 1.1 Introduction au concept d'équation différentielle . . . . .                   | 3         |
| 1.1.1 Les équations différentielles . . . . .                                     | 3         |
| 1.1.2 Solutions . . . . .   | 3         |
| 1.1.3 Prolongements de solution . . . . .   | 5         |
| 1.1.4 Les lemmes de Gronwall . . . . .  | 5         |
| 1.2 Exploration des différentes équations différentielles . . . . .               | 6         |
| 1.2.1 Équations différentielles linéaires . . . . .                               | 6         |
| 1.2.2 Équations différentielles d'ordre $n$ . . . . .                             | 10        |
| 1.2.3 Équations différentielles non linéaires . . . . .                           | 13        |
| <b>2 Introduction à l'approximation numérique</b>                                 | <b>16</b> |
| 2.1 Objectifs et limites des méthodes numériques . . . . .                        | 16        |
| 2.1.1 Limites des méthodes numériques . . . . .                                   | 16        |
| 2.2 Représentation des nombres et erreurs . . . . .                               | 17        |
| 2.2.1 Rappel sur les séries de Taylor . . . . .                                   | 17        |
| 2.2.2 Erreur absolue et relative . . . . .  | 17        |
| 2.3 Représentation des nombres en virgule flottante . . . . .                     | 18        |
| 2.4 Formulation du Problème de Cauchy . . . . .                                   | 18        |
| 2.5 Schéma Numérique à un Pas . . . . .   | 19        |
| 2.6 Consistance . . . . .   | 19        |
| 2.7 Stabilité . . . . .   | 19        |
| 2.8 Convergence . . . . .   | 19        |
| <b>3 Méthodes numériques</b>  | <b>20</b> |
| 3.1 Schémas numériques à pas constant . . . . .                                   | 20        |
| 3.2 Schémas d'Euler Explicite et Implicite . . . . .                              | 20        |
| 3.2.1 Schéma d'Euler Explicite . . . . .  | 20        |
| 3.2.2 Schéma d'Euler Implicite . . . . .  | 20        |
| 3.3 Comparaison des performances des méthodes . . . . .                           | 21        |
| 3.4 figure faite avec python inte proj FAUX : . . . . .                           | 25        |
| 3.5 figure faite avec python inte proj MAYBE ? : . . . . .                        | 25        |
| <b>4 Annexe</b>   | <b>27</b> |
| 4.0.1 Algèbre . . . . .   | 27        |
| 4.0.2 Analyse . . . . .   | 27        |
| 4.0.3 Topologie . . . . .   | 27        |
| 4.0.4 Méthode résolution ED ? Abaissement de l'ordre, DSE, Euler, Ricatti etc ? . | 27        |
| 4.0.5 test texte . . . . .  | 27        |

# Préface

Expliquer le but, ce qu'on a fait, ce qu'on a rapporter en plus

# Chapitre 1

## Rappels théoriques des équations différentielles

Les équations différentielles jouent un rôle fondamental dans de nombreux domaines scientifiques et techniques. Elles permettent de modéliser des phénomènes dynamiques où les variations d'une quantité dépendent de la quantité elle-même et de ses dérivées. Ce chapitre présente un rappel des concepts théoriques essentiels des équations différentielles, en se concentrant sur les équations linéaires, non linéaires, les méthodes de résolution explicite ainsi que les différents aspects théoriques liés à ces différents concepts.

### 1.1 Introduction au concept d'équation différentielle.

#### 1.1.1 Les équations différentielles

Afin d'introduire le cœur du sujet, nous devons expliciter les notions clés utilisées. Posons  $\mathbb{O}$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$  avec  $\mathbb{K}$  un corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $N \in \mathbb{N}^*$  et une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{O}$  et à valeur dans  $\mathbb{K}$ . Une équation différentielle est une équation qui relie une fonction inconnue à ses dérivées. Elle peut être d'ordre 1, 2, ou supérieur, selon le nombre de dérivées impliquées.

**Définition 1. Équation différentielle**

Soient  $\mathbb{O}$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{K}$ , et une fonction  $f : \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{K}$ . Alors l'équation suivante

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad \text{avec } (t, y) \in \mathbb{O}, t \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{K} \quad (1.1)$$

est dite équation différentielle en  $y$ , la variable d'état, relativement à la variable réelle dites variable de temps.

**Remarque 1.** Lorsque le membre de gauche représente la dérivé d'ordre 1 de la fonction  $y$  on dit que l'équation différentielle est d'ordre 1. Si le membre de gauche représente la dérivé d'ordre 2 de la fonction  $y$  on dit que l'équation différentielle est d'ordre 2.

De cette façon nous pouvons définir ce qu'est une équation différentielle d'ordre  $n$ , avec  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Définition 2. Équation différentielle d'ordre  $n$**

Soient  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{O}$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$ , et une fonction  $f : \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{K}$ . Alors l'équation suivante

$$\frac{dy^n}{dt^n} = f(t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{dy^2}{dt^2}, \dots, \frac{dy^{(n-1)}}{dt^{(n-1)}}) \quad \text{avec } (t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{dy^2}{dt^2}, \dots, \frac{dy^{(n-1)}}{dt^{(n-1)}}) \in \mathbb{O}, t \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{K}^N \quad (1.2)$$

est dite équation différentielle d'ordre  $n$  dans  $\mathbb{K}^N$  en  $y$ , la variable d'état, relativement à la variable réelle  $t$  dites variable de temps.

#### 1.1.2 Solutions

Le but est de trouver une solution à ces équations différentielles. Revenons à l'ordre 1, une solution est une fonction qui satisfait l'équation pour toutes les valeurs de la variable indépendante  $t$ . Prenons l'exemple le plus populaire pour illustrer nos propos, si nous avons l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dt} = y$$

une solution possible est  $y = e^t$ , car la dérivée de  $e^t$  par rapport à  $t$  est  $e^t$ , ce qui satisfait l'équation sur l'ouvert  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Ainsi une solution d'une équation différentielle d'ordre 1 est une fonction dérivable  $y$  définie sur un intervalle, non réduit à un point, telle que :

$$f(t, y, \frac{dy}{dt}) = 0$$

En généralisant à l'ordre  $n$  nous obtenons la définition suivante.

**Définition 3. Solutions d'une équation différentielle d'ordre  $n$**

Soient  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et une fonction  $y \in C^n$  définie sur  $I$  et à valeur dans  $\mathbb{K}^N$  telle que a)

$$\forall t \in I, (t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{dy^2}{dt^2}, \dots, \frac{dy^{(n-1)}}{dt^{(n-1)}}) \in \mathbb{O}$$

b)

$$\forall t \in I, \frac{dy^n}{dt^n} = f(t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{dy^2}{dt^2}, \dots, \frac{dy^{(n-1)}}{dt^{(n-1)}})$$

Nous appelons solution de l'équation différentielle d'ordre  $n$  le couple  $(I, y)$ .

Nous pouvons rajouter une précision sur la régularité des solutions des équations différentielles.

**Proposition 1. Régularité des solutions**

Soit  $\mathbb{O}$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$ . Si  $f : \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{K}^N$  est de classe  $C^k$  avec  $k \in \mathbb{N}$ , alors toute solution de l'équation différentielle

$$\frac{dY}{dt} = f(t, Y), \quad (t, Y) \in \mathbb{O}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad Y \in \mathbb{K}^N. \quad (1.3)$$

est de classe  $C^{k+1}$ .

D'ailleurs, nous pouvons donner des conditions pour la résolution d'une équation différentielle. En effet, pour résoudre une équation différentielle, il est souvent nécessaire de connaître certaines conditions dites "conditions initiales". Le problème de Cauchy est un exemple classique où l'on cherche à trouver une solution à une équation différentielle en connaissant la valeur de la solution à un instant donné, de ce fait nous pouvons utiliser cette information pour déterminer la solution sur un intervalle de temps. Cette condition initiale est cruciale pour garantir que la solution est unique et bien définie.

**Définition 4. Problème de Cauchy**

Soit  $(t_0, y_0) \in \mathbb{O}$ . Le problème de Cauchy avec donnée initiale  $(t_0, y_0)$  consiste à déterminer la ou les solutions  $y$  de l'équation différentielle sur un intervalle  $I$  tel que

$$\begin{cases} t_0 \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

La condition  $y(t_0) = y_0$  est appelée condition initiale ou condition de Cauchy.

Historiquement, le problème de Cauchy a été formulé pour étudier les solutions des équations différentielles ordinaires. Néanmoins, pour trouver les solutions à ces équations différentielles ordinaires Cauchy a introduit la formulation intégrale. Elle permet de reformuler le problème en termes d'intégrales. De ce fait, on peut utiliser des outils d'analyse, d'algèbre, de calcul numérique pour trouver la solution et étudier le comportement des solutions notamment prouver leur existence, l'unicité de la solution sur un intervalle.

**Proposition 2. Formulation intégrale du problème de Cauchy**

Soient  $\mathbb{O}$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$  et  $f : \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{K}^N$ ,  $f \in C^0$ . Soit  $(t_0, y_0) \in \mathbb{O}$ . Une fonction  $y : I \rightarrow \mathbb{K}^N$  est une solution de

$$\frac{dY}{dt} = f(t, Y), \quad (t, Y) \in \mathbb{O}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad Y \in \mathbb{K}^N. \quad (1.4)$$

telle que  $y(t_0) = y_0$  si et seulement si

- a)  $y$  est continue,
- b)  $\forall t \in I, (t, y(t)) \in \mathbb{O}$ ,

c)  $\forall t \in I$ ,

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds.$$

Cette formulation est particulièrement utile pour les méthodes numériques, telles que les méthodes de Euler implicite ou encore Runge-Kutta, qui sont utilisées pour approximer les solutions des équations différentielles (que nous verrons plus tard XXXXX).

### 1.1.3 Prolongements de solution

À présent nous connaissons certaines définitions et propositions sur les équations différentielles, particulièrement sur les solutions de ces dernières mais nous pouvons apporter quelques notions cruciales pour la suite. Parlons des différents types de prolongement des solutions.

Considérons l'équation différentielle  $\frac{dy}{dt} = y$  avec la solution générale  $y(t) = Ce^t$ . (S)

- Soit  $y_1(t) = e^t$  définie sur l'intervalle  $I_1 = [0, 1]$ .

- Soit  $y_2(t) = e^t$  définie sur l'intervalle  $I_2 = [0, 2]$ .

Introduisons le concept de prolongement d'une solution d'une équation différentielles.

#### Définition 5. Prolongement

Soient  $y_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{K}^N$  et  $y_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{K}^N$  deux solutions de (E). On dit que  $y_2$  est un prolongement de  $y_1$  si  $I_1 \subset I_2$  et si la restriction de  $y_2$  à  $I_1$  est  $y_1$ .

#### Définition 6. Prolongement strict

Soient  $y_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{K}^N$  et  $y_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{K}^N$  deux solutions de (E). On dit que  $y_2$  est un prolongement strict de  $y_1$  si  $y_2$  est un prolongement de  $y_1$  avec  $I_1 \neq I_2$ . c'est-à-dire pas d'autres prolongements qu'elle-même

À l'exemple de (S),  $y_2$  est un prolongement de  $y_1$  car  $I_1 \subset I_2$  et la restriction de  $y_2$  à  $I_1$  est  $y_1$ . De plus,  $y_2$  est un prolongement strict de  $y_1$  car  $I_1 \neq I_2$ . Ces prolongements de solutions ont des appellations spécifiques.

#### Définition 7. Solution maximale

Une solution est dite maximale si elle n'admet pas de prolongements stricts.

**Remarque 2.** En reprenant notre exemple (S), la solution  $y_1$  n'est pas une solution maximale de  $\frac{dy}{dt} = y$  car elle est strictement prolongeable par  $y_2$ .

En vue de qualifier une solution sur tout un intervalle  $I$ , la notion de solution globale existe.

#### Définition 8. Solution globale

Dans le cas où  $\mathbb{O} = I \times \mathbb{O}'$  où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{O}'$  un ouvert de  $\mathbb{K}^N$ , une solution globale est une solution définie sur  $I$  tout entier.

**Remarque 3.** Reconsidérons (S), et définissons notre exemple sur l'intervalle  $I = \mathbb{R}$ , cette solution est une solution globale car elle est définie sur tout l'intervalle  $I$ .

Avant de se précipiter dans la résolution de différentes équations différentielles et dans l'analyse des solutions de ces dernières, nous nous devons de rappeler plusieurs lemmes utiles à l'analyse. Ce sont les lemmes de Gronwall.

### 1.1.4 Les lemmes de Gronwall

#### Lemme 1. Lemme de Gronwall différentielle

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et un point  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Si nous avons l'inégalité suivante :  $\forall t \in I$ ,

$$\frac{dw}{dt} \leq v(t)w(t)$$

avec  $v \in C^1(I, \mathbb{R})$  et  $w \in C^0(I, \mathbb{R})$ , alors  $\forall t \in I$  :

$$w(t) \leq w(t_0) \exp \left( \int_{t_0}^t v(s) ds \right)$$

Pour prouver ce lemme, il suffit de jouer avec le terme :

$$\beta(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^t v(s) ds\right) w(t)$$

En calculant la dérivée de  $\beta(t)$  par rapport à  $t$  :

$$\frac{d\beta}{dt} = \exp\left(-\int_{t_0}^t v(s) ds\right) \left(\frac{dw}{dt} - v(t)w(t)\right)$$

Or nous avons :

$$\frac{dw}{dt} \leq v(t)w(t)$$

Donc,

$$\frac{dw}{dt} - v(t)w(t) \leq 0$$

Ainsi,

$$\frac{d\beta}{dt} \leq \exp\left(-\int_{t_0}^t v(s) ds\right) 0 = 0$$

Cela signifie que  $\beta$  est décroissante. En évaluant  $\beta$  en  $t = t_0$  :

$$\beta(t_0) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t_0} v(s) ds\right) w(t_0) = w(t_0)$$

Puisque  $\beta$  est décroissante et que  $\beta(t_0) = w(t_0)$ , alors pour tout  $t \in I$  :

$$\beta(t) \leq w(t_0)$$

En revenant à la définition de  $\beta(t)$ , nous obtenons :

$$\exp\left(-\int_{t_0}^t v(s) ds\right) w(t) \leq w(t_0)$$

Finalement,

$$w(t) \leq w(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t v(s) ds\right)$$

Un autre lemme de Gronwall que nous allons utiliser lorsque nous parlerons de consistance et de stabilité, c'est le lemme de Gronwall discret.

[TEXTE DIRE IMPORTANT POUR NUM POUR STABILITE ET COMPORTEMENT ASYMP DANS LES SYSTEMES MAJORATIONS INEGA INTEGRALE]

Étant donné nos connaissances actuelles sur les équations différentielles ordinaires, nous pouvons dès à présent les divers théorèmes, méthodes et propositions applicables à la résolution d'équations différentielles linéaires.

## 1.2 Exploration des différentes équations différentielles

### 1.2.1 Équations différentielles linéaires

Qu'entend-on par équation différentielle linéaire ?

**Définition 9. Équation différentielle linéaire**

On dit que l'équation  $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$  est une équation différentielle linéaire si  $f(t, y) = A(t)y + B(t)$  avec

$$\begin{cases} A \in \mathbb{M}_N(\mathbb{K}) \\ B \in \mathbb{K}^N \end{cases}$$

**Remarque 4.** Nous appelons la fonction  $B \in \mathbb{K}^N$  le second membre, mais dans certains cas, il se peut que la fonction  $B = 0$ . Alors, nous appelons  $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$  une équation différentielle linéaire homogène.

Il est pertinent de s'interroger sur la résolution de ce type d'équations. Quels outils et théorèmes permettent d'obtenir une solution à ce genre d'équation ? Posons un problème classique.

Soit :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = a(t)y & \text{avec } a \text{ une fonction, continue, de } I \text{ dans } \mathbb{K} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Quelles sont les solutions à cette équation différentielle ? Essayons de manipuler les membres de gauche et de droite afin de trouver une solution.

Considérons l'équation différentielle  $\frac{dy}{dt} = a(t)y$  avec la condition initiale  $y(t_0) = y_0$ . L'équation différentielle peut être réécrite sous forme intégrale. En intégrant les deux côtés de l'équation de  $t_0$  à  $t$ , nous obtenons :

$$\int_{t_0}^t \frac{dy}{y} = \int_{t_0}^t a(s) ds$$

L'intégrale de gauche est une intégrale de  $\frac{1}{y}$ , ce qui donne :

$$[\ln |y|]_{t_0}^t = \int_{t_0}^t a(s) ds$$

En évaluant cette intégrale, nous obtenons :

$$\ln |y(t)| - \ln |y(t_0)| = \int_{t_0}^t a(s) ds$$

En exponentiant les deux côtés de l'équation, nous obtenons :

$$|y(t)| = |y(t_0)| \exp \left( \int_{t_0}^t a(s) ds \right)$$

Comme  $y(t_0) = y_0$ , nous avons :

$$|y(t)| = |y_0| \exp \left( \int_{t_0}^t a(s) ds \right)$$

Puisque  $y(t)$  peut être positif ou négatif, nous pouvons écrire la solution générale comme :

$$y(t) = y_0 \exp \left( \int_{t_0}^t a(s) ds \right)$$

Ainsi, nous avons montré que la solution maximale (et définie sur  $I$  donc globale) de l'équation différentielle  $\frac{dy}{dt} = a(t)y$ , avec la condition initiale  $y(t_0) = y_0$ , est :

$$y(t) = y_0 \exp \left( \int_{t_0}^t a(s) ds \right)$$

### Proposition 3. Solution équation linéaire scalaire homogène d'ordre 1

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a$  une fonction continue de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ . Soient  $t_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbb{K}$ . La solution maximale (et définie sur  $I$  donc globale) de l'équation différentielle  $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ , avec la condition initiale  $y(t_0) = y_0$ , est

$$y(t) = y_0 \exp \left( \int_{t_0}^t a(s) ds \right).$$

Cependant, il nous reste à démontrer l'unicité de la solution maximale.

Soit  $w$  une solution maximale définie sur  $J \subset I$ ,  $t_0 \in J$  et  $w(t_0) = w_0$ . Nous pouvons dériver le terme suivant :

$$\frac{d}{dt} \left[ w(t) \exp \left( - \int_{t_0}^t a(s) ds \right) \right] = \left( \frac{dw}{dt} - a(t)w(t) \right) \exp \left( - \int_{t_0}^t a(s) ds \right) = \left( \frac{dw}{dt} - \frac{dw}{dt} \right) \exp \left( - \int_{t_0}^t a(s) ds \right) = 0$$



Comme la dérivée est nulle,  $t \mapsto [w(t) \exp(-\int_{t_0}^t a(s) ds)]$  est une constante sur  $J$ . Ainsi sur  $J$  :

$$w(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s) ds\right) = w(t_0) = w_0$$

Donc  $w$  et  $y$  coïncident sur  $J$ , de plus comme  $y$  est une solution maximale sur  $I$  cela implique :  $J = I$  et  $y = w$ . De cette manière nous avons prouvé l'unicité de la solution sur  $I \subset \mathbb{R}$ .

Toutefois les équations du type

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = a(t)y & \text{avec } a \text{ une fonction, continue, de } I \text{ dans } \mathbb{K} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ne sont pas les seuls qu'on rencontre. On peut complexifier cette dernière en lui rajoutant un second membre et nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = a(t)y + b(t) & \text{avec } a \text{ et } b \text{ des fonctions, continues, de } I \text{ dans } \mathbb{K} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Pour résoudre cette équation différentielle, Alembert a observé en 1762 que la solution générale est la somme de la solution générale de l'équation homogène et de la solution particulière de l'équation avec second membre. Pour trouver cette solution particulière nous faire la méthode de la variation de la constante introduite par Lagrange.

Cette méthode se résume à poser :

$$y(t) = C(t) \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right)$$

et trouver le terme  $C(t)$ . Pour ce faire, nous allons dériver notre expression et calculer  $C(t)$ .

$$\frac{dy}{dt} = \left[\frac{dC}{dt} + a(t)C(t)\right] \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) \iff \frac{dy}{dt} - a(t)y(t) = \frac{dC}{dt} \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right)$$

De ce fait  $y$  est solution de :

$$y(t) = C(t) \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right)$$

si et seulement si

$$\frac{dC}{dt} \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) = b(t) \iff C(t) = C_0 + \int_{t_0}^t b(s) \exp\left(-\int_{t_0}^s a(\rho) d\rho\right) ds$$

Ainsi :

$$y(t) = C_0 \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) + \int_{t_0}^t \exp\left(-\int_{t_0}^s a(\rho) d\rho + \int_{t_0}^t a(\rho) d\rho\right) b(s) ds$$

Comme la solution générale est la somme de la solution générale de l'équation homogène et de la solution particulière de l'équation avec second membre et  $t_0 = t$  implique  $C_0 = y_0$ , nous obtenons :

$$y(t) = y_0 \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) + \int_{t_0}^t \exp\left(\int_s^t a(\rho) d\rho\right) b(s) ds$$

Ce qui nous permet d'introduire la proposition suivante :

**Proposition 4. Solution équation linéaire scalaire d'ordre 1**

Soient  $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$  des fonctions continues avec  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Soient  $t_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbb{K}$ . La solution maximale (et définie sur  $I$  donc globale) de l'équation différentielle  $\frac{dy}{dt} = a(t)y + b(t)$ , avec la condition initiale  $y(t_0) = y_0$ , est

$$y(t) = y_0 \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) + \int_{t_0}^t b(s) \exp\left(\int_{t_0}^s a(\rho) d\rho\right) ds.$$

Nous avons vu une forme de solution d'équation linéaire homogène d'ordre 1, c'est-à-dire de la forme :  $\frac{dy}{dt} = a(t)y$  mais qu'en est-il des équations de la forme :

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + B(t), (t, y) \in I \times \mathbb{K}^N \quad (\mathcal{L})$$

et de la forme :

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y, (t, y) \in I \times \mathbb{K}^N \quad (\mathcal{L}_H)$$

avec une condition initiale? Et quelle théorème nous permet de trouver la structure de la solution d'une équation linéaire scalaire d'ordre 1 comme on l'a fait dans la preuve de la **Proposition 4**? Pour répondre à ces questions, il existe un théorème qui permet d'assurer l'existence et l'unicité de solutions globales avec une condition de Cauchy et qui a de nombreuses conséquences.

### **Théorème 1. Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire**

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $A \in C(I, M_N(\mathbb{K}))$ ,  $B \in C(I, \mathbb{K}^N)$ , et  $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^N$ . Alors il existe une unique solution globale de  $(\mathcal{L})$  telle que :

$$\begin{cases} y : I \rightarrow \mathbb{K}^N \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Nous connaissons l'existence d'une unique solution globale de  $(\mathcal{L})$  mais une question naturelle qui doit nous venir à l'esprit est : Quelle est la structure de cette solution globale? En effet, le précédent théorème donne la structure de l'espace des solutions de  $(\mathcal{L})$  et de  $(\mathcal{L}_H)$ . C'est l'une des conséquences du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire qui nous permet de trouver des solutions comme pour la **Proposition 4**.

### **Proposition 5. Structure de l'ensemble de $S_H$ des solutions globales de $\mathcal{L}_H$**

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $A \in C(I, M_N(\mathbb{K}))$ . Alors

- a) l'ensemble  $S_H$  des solutions maximales de  $\mathcal{L}_H$  est un sous-espace vectoriel de  $C(I, \mathbb{K}^N)$ ,
- b) pour tout  $t_0 \in I$ , l'application

$$\begin{aligned} \Phi_{t_0} : S_H &\rightarrow \mathbb{K}^N \\ y &\mapsto y(t_0) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels,

- c)  $S_H$  est de dimension  $N$ .

En utilisant ces résultats, nous pouvons maintenant examiner comment l'ensemble des solutions  $S$  de l'équation différentielle  $\mathcal{L}$  se structure en tant qu'espace affine de direction  $S_H$ .

### **Proposition 6. Structure de l'ensemble de $S$ des solutions globales de $\mathcal{L}$**

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $A \in C(I, M_N(\mathbb{K}))$  et  $B \in C(I, \mathbb{K}^N)$ . L'ensemble des solutions  $S$  de l'équation différentielle  $\mathcal{L}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace affine de direction  $S_H$ .

Avant de continuer la théorie sur les équations différentielles linéaires, nous devons poser quelques notions de vocabulaire utile à la compréhension de certaines propositions et théorèmes.

### **Définition 10. Système fondamental**

Un système fondamental de solutions de l'équation différentielle  $\mathcal{L}_H$  est une famille  $(y_1, \dots, y_N)$  de  $N$  solutions indépendantes de  $\mathcal{L}_H$

### **Définition 11. Matrice fondamentale**

La matrice  $\Phi(t) = (y_1(t) \cdots y_N(t))$ , constituée de ces  $N$  solutions écrites comme des vecteurs colonnes, est appelée une matrice fondamentale de  $\mathcal{L}_H$

### **Définition 12. Wronskien**

Le wronskien est le déterminant de  $\Phi(t)$ .

De ce fait, nous pouvons utiliser ces définitions pour introduire une nouvelle proposition sur les formes des solutions de  $(\mathcal{L}_H)$ .

### **Proposition 7. Forme des solutions de $\mathcal{L}_H$**

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $A \in C(I, M_N(\mathbb{K}))$ .

1. Soient  $y_1, \dots, y_N$  des solutions indépendantes de  $\mathcal{L}_H$ . Si  $y$  est une solution de (LH), alors il existe des constantes  $C_1, \dots, C_N \in \mathbb{K}$  telles que

$$y = C_1 y_1 + \dots + C_N y_N.$$

2. Soit  $\Phi(t)$  une matrice fondamentale du système  $\mathcal{L}_H$ . Alors les solutions s'écrivent

$$y(t) = \Phi(t)C, \quad t \in I,$$

où  $C$  est un vecteur quelconque constant de  $\mathbb{K}^N$ .

Si nous disposons d'un problème de Cauchy, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, il existe une unique solution globale de  $\mathcal{L}_H$  telle que  $y(t_0) = y_0$  et les solutions s'écrivent :

$$y(t) = \Phi(t)C, \quad t \in I, C \in \mathbb{K}^N$$

Si  $t = t_0$  alors  $y(t_0) = y_0 = \Phi(t_0)C$  et  $C = \Phi(t_0)^{-1}y_0$ . Par conséquent nous obtenons le corollaire suivant.

**Corollaire 1. Solutions de  $\mathcal{L}_H$  avec condition de Cauchy**

Considérons un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , un vecteur  $y_0 \in \mathbb{K}^N$  et une matrice  $A \in C(I, M_N(\mathbb{K}))$ . Supposons que  $\Phi(t)$  soit une matrice fondamentale du système  $\mathcal{L}_H$ . La solution de l'équation différentielle  $\mathcal{L}_H$  qui satisfait la condition initiale  $y(t_0) = y_0$  est donnée par :

$$y(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}y_0, \quad t \in I.$$

Actuellement nous disposons de toutes les ressources nécessaires pour traiter les équations différentielle linéaire d'ordre  $n$ .

### 1.2.2 Équations différentielles d'ordre $n$

À présent nous traiteront des équations différentielles de la forme :

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b(t), \quad \text{avec } (t, y) \in I \times \mathbb{K} \quad (\xi)$$

En ramenant à l'ordre 1 :

$$Y = \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{n-1} \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} \\ \vdots \\ \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} \\ \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} \end{pmatrix}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \dots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix},$$

Nous obtenons de cette manière l'équation différentielle avec second membre suivante :

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y + B(t) \quad \text{avec } (t, Y) \in I \times \mathbb{K}^N \quad (\mathcal{L})$$

Et si  $B = 0$ , nous avons une équation différentielle homogène :

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y \quad \text{avec } (t, Y) \in I \times \mathbb{K}^N \quad (\mathcal{L}_H)$$

En utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz pour les systèmes linéaires d'ordre  $n$ , nous pouvons établir un théorème qui s'applique aux systèmes d'équations différentielles linéaires d'ordre  $n$  avec des coefficients qui peuvent dépendre du temps  $t$

**Théorème 2. Cauchy-Lipschitz linéaire d'ordre  $n$**

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $A \in C(I, M_N(\mathbb{K}))$  et  $B \in C(I, \mathbb{K}^N)$ . Considérons le système d'équations différentielles d'ordre  $n$  suivant :

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y + B(t), \quad \text{avec } (t, Y) \in I \times \mathbb{K}^N$$

Alors, pour toute condition initiale  $Y(t_0) = Y_0 \in \mathbb{K}^N$ , il existe une unique solution globale de  $(\mathcal{L})$  telle que :

$$\begin{cases} Y : I \rightarrow \mathbb{K}^N \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

Nous sommes en mesure d'obtenir un théorème plus spécifique, un théorème qui s'applique aux équations différentielles linéaires d'ordre  $n$  avec des coefficients constants.

**Théorème 3. Théorème Cauchy-Lipschitz linéaire d'ordre  $n$  à coefficients constants**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et soient  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$  et  $b \in C(I, \mathbb{K})$ . Considérons  $t_0 \in I$  et  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{K}$ . Alors, il existe une unique solution  $y : I \rightarrow \mathbb{K}$  de l'équation différentielle  $(\mathcal{L}_H)$  telle que :

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ \frac{dy}{dt}(t_0) = y_1 \\ \frac{d^2y}{dt^2}(t_0) = y_2 \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Dans un premier temps, trouvons les solutions de :

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0, \quad \text{avec } (t, y) \in I \times \mathbb{K} \quad (\xi_H)$$

Pour se faire nous devons trouver le polynôme caractéristique de  $(\xi)$ .

**Définition 13. Polynôme caractéristique et équation caractéristique de  $(\xi)$**

Le polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle  $(\xi)$  est le polynôme :

$$P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0. \quad (\mathcal{P})$$

L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle  $(\xi_H)$  est l'équation  $P(X) = 0$ .

Pour trouver les solutions de  $(\xi_H)$ , nous devons trouver les racines complexes,  $r_1, \dots, r_p$  de  $(\mathcal{P})$  et leurs multiplicités algébriques  $m_1, \dots, m_p$ . Alors, les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène  $(\xi_H)$  sont de la forme :

$$y(t) = (\lambda_{1,1}t^{m_1-1} + \dots + \lambda_{1,m_1-1}t + \lambda_{1,m_1})e^{r_1 t} + \dots + (\lambda_{p,1}t^{m_p-1} + \dots + \lambda_{p,m_p-1}t + \lambda_{p,m_p})e^{r_p t}$$

où  $\lambda_{j,k} \in \mathbb{C}$  sont des constantes quelconques. En d'autres termes, une base de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle  $(\xi_H)$  est formée par les fonctions de la forme :

$$t \mapsto t^l e^{r_k t},$$

avec  $1 \leq k \leq p$  et  $0 \leq l \leq m_k - 1$

Dans un second temps, si l'équation différentielle est de la forme  $(\xi_H)$  avec un second membre telle que :

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b(t), \quad \text{avec } (t, y) \in I \times \mathbb{K} \quad (\xi)$$

Plusieurs choix s'offrent à nous, soit nous varions la constante, soit nous cherchons une solution particulière déjà connues en reconnaissant la forme du second membre. Nous verrons les différentes formes de second membre avec les solutions des formes particulières associés et la méthode de la variation de la constante dans (ANEXE???) en détail pour nous familiariser avec les manipulations de matrice fondamentale et ses propositions. Avant de clôturer cette section, nous nous devons d'énoncer une proposition fondamentale en théorie des équations linéaires. Cette proposition concerne les solutions de ces dernières. Introduisons le avec un exemple :

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b(t), \quad \text{avec } (t, y) \in I \times \mathbb{K} \quad (\xi)$$

Posons  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ ,  $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{C}$  et  $b_1, \dots, b_N \in C(I, \mathbb{C})$  avec  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , Si  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n$  est une solution de  $(\xi)$ . Montrons que la combinaison linéaire

$$y = \sum_{i=1}^N c_i y_i$$

est une solution de :

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = \sum_{i=1}^N c_i b_i(t)$$

La démonstration repose sur la réécriture de l'expression  $\sum_{i=1}^N c_i b_i(t)$ . Regroupons dans un premier temps tous les termes à l'ordre  $n$ , puis  $n-1$  ainsi de suite comme suit :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \frac{d^n}{dt^n} c_i y_i + a_{n-1} \sum_{i=1}^N \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} c_i y_i + \cdots + a_1 \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} c_i y_i + a_0 \sum_{i=1}^N c_i y_i \\ &= c_1 \left( \frac{d^n y_1}{dt^n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{d^k y_1}{dt^k} \right) + c_2 \left( \frac{d^n y_2}{dt^n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{d^k y_2}{dt^k} \right) + \cdots + c_N \left( \frac{d^n y_N}{dt^n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{d^k y_N}{dt^k} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N c_i b_i = \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y \end{aligned}$$

Ainsi nous pouvons introduire notre proposition.

**Proposition 8. Principe de superposition des solutions)**

Soient  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ ,  $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{C}$  et  $b_1, \dots, b_N \in C(I, \mathbb{C})$  avec  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Si pour  $l = 1, \dots, N$ ,  $y_l$  est une solution de

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_l(t),$$

alors  $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_N y_N$  est une solution de :

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = c_1 b_1(t) + c_2 b_2(t) + \cdots + c_N b_N(t).$$

Cette dernière stipule que lorsqu'on dispose de plusieurs solutions distinctes pour des équations différentielles linéaires non homogènes d'ordre  $n \geq 1$ , une combinaison linéaire de ces solutions constitue également une solution valide. Ce principe est particulièrement avantageux dans les domaines de la physique et de l'analyse numérique, où les systèmes peuvent souvent être divisés en sous-systèmes plus simples.

Pourtant, dans la vie quotidienne, les phénomènes physiques ou autres ne sont pas toujours représentés mathématiquement par des équations différentielles linéaires. Il existe une autre catégorie d'équations, à savoir les équations différentielles non linéaires de la forme  $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ , où  $y$  est une fonction vectorielle. L'inconvénient de ce type d'équations réside dans le fait qu'elles ne possèdent pas autant de propriétés que les équations différentielles linéaires scalaires.

### 1.2.3 Équations différentielles non linéaires

#### Définition 14. Équation différentielle non linéaire

On dit que l'équation  $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$  est une équation différentielle non linéaire si  $f(t, y)$  ne peut pas être exprimée sous la forme  $A(t)y + B(t)$ , où

$$\begin{cases} A \in \mathbb{M}_N(\mathbb{K}) \\ B \in \mathbb{K}^N \end{cases}$$

**Remarque 5.** Dans ce contexte,  $f(t, y)$  peut inclure des termes non linéaires en  $y$ , tels que des produits, des puissances ou d'autres fonctions non linéaires de  $y$ . Les équations différentielles non linéaires sont souvent plus complexes à analyser et à résoudre que leurs homologues linéaires.

Soient  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{O}$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$  et  $f : \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{K}^N$ . Pour la suite, prenons en compte l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), (t, y) \in \mathbb{O} \quad (\Psi)$$

L'une des principales notions à retenir est que :  $y$  s'appelle la variable d'état et  $t$  la variable réelle dites variable de temps. Nous pouvons nous demander, comment résoudre ce genre d'équation ? Quelles les caractères d'une solution de  $(\Psi)$  ? La continuité assure-t-elle l'existence et l'unicité de solutions globales ? Nous allons voir qu'on ne peut pas appliquer les mêmes propositions et théorèmes que pour les équations différentielles linéaires. Un concept crucial dans cette section est le caractère lipschitzien d'une fonction. Ce caractère peut être local ou global selon les fonctions, mais pour définir ce dernier il faut déterminer quelle variable décide de cet caractère, est-ce la variable d'état  $y$  ou la variable de temps  $t$  ? Avant d'y répondre, introduisons ce que signifie une "fonction lipschitzienne".

#### Définition 15. Fonction lipschitzienne

Soit  $I \subset \mathbb{K}^N$  un ensemble et  $f : X \rightarrow \mathbb{K}^N$ . La fonction  $f$  est dite lipschitzienne sur  $I$  s'il existe une constante  $k \in [0, +\infty[$  telle que :

$$\|f(y) - f(x)\| \leq k\|y - x\| \quad \text{pour tous } x, y \in I.$$

On dit alors que  $f$  est  $k$ -lipschitzienne. Si  $k \in [0, 1[$  alors  $f$  est  $k$ -contractante

**Remarque 6.** Une conséquence intéressante de la  $k$ -lipschitzienité d'une fonction est que cette fonction est continue.

Nous pouvons ainsi nous donner un cadre où il existe des solutions de  $(\Psi)$ . Ce dernier est constitué des fonctions localement lipschitziennes en la variable d'état ! On ne choisit pas la variable de temps  $t$  car elle est considérée comme variable indépendante, une variable qui évolue de manière autonome qui n'est pas affecté par les états du système, représenté par  $y$ . Pour imager nos propos, dans une équation différentielle décrivant le mouvement d'un objet, le temps avance indépendamment des positions et vitesses de l'objet. De ce fait les conditions et propriétés des fonctions localement lipschitziennes (comme les perturbations minimales n'entraînent pas de changement important dans la solution) sont considérées et appliquées à la variable d'état  $y$  pour garantir la stabilité des solutions mais aussi l'unicité. Dès lors nous pouvons énoncer ce qu'est une fonction localement lipschitzienne.

#### Définition 16. Fonction localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état $y$

Soit  $\mathbb{O}$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$ . Une fonction  $f : \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{K}^N$  est dite localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état  $y$  si pour tout  $(\tilde{t}, w) \in \mathbb{O}$ , il existe  $C_0 = [\tilde{t} - T, \tilde{t} + T] \times B(w, r) \subset \mathbb{O}$  avec  $T, r > 0$  et  $k \geq 0$  tels que pour tous  $(t, y_1), (t, y_2) \in C_0$ ,

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k\|y_1 - y_2\|$$

Après avoir introduit la notion de fonction localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état, il est essentiel de différencier cette propriété de celle de fonction globalement lipschitzienne. La différence principale réside dans la condition lipschitzienne : la condition locale est valable dans un voisinage restreint autour de chaque point, tandis que la condition globale s'applique sur l'ensemble du domaine de définition. Cette distinction est cruciale car elle affecte la stabilité et l'unicité des solutions des équations différentielles de la forme  $(\Psi)$ .

**Définition 17. Fonction globalement lipschitzienne par rapport à la variable d'état  $y$**   
 Soit  $\mathbb{O} = I \times X$  où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $X \subset \mathbb{K}^N$ . Une fonction  $f : \mathbb{O} \mapsto \mathbb{K}^N$  est dite globalement lipschitzienne par rapport à la variable d'état, uniformément par rapport à la variable de temps, si pour tout intervalle compact  $\mathcal{K} \subset I$ , il existe  $k > 0$  tel que pour tous  $(t, y_1), (t, y_2) \in \mathbb{K}^N \times X$ ,

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|$$

Cette condition garantit que les variations de  $f$  sont proportionnelles aux variations de la variable d'état, assurant ainsi une certaine régularité et stabilité des solutions de  $(\Psi)$ .

**Remarque 7.** Si une fonction  $f$  est de classe  $C^1$  sur un ensemble  $I \subset \mathbb{R}$ , alors  $f$  est localement lipschitzienne sur  $I$ .

En parlant de stabilité et régularité des solutions, il existe un théorème utilisé pour justifier l'existence d'une unique solution sur tout un intervalle :

**Théorème 4. Théorème de Cauchy-Lipschitz cas globalement lipschitzien**

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \times \mathbb{K}^N \mapsto \mathbb{K}^N$  continue (dans toutes les variables) et globalement lipschitzienne par rapport à la variable d'état uniformément par rapport à la variable de temps. Soit  $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^N$ . Alors il existe une unique solution globale de  $(\Psi)$  telle que :

$$\begin{cases} y : I \mapsto \mathbb{K}^N \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Comme pour la continuité, on peut définir le caractère lipschitzien localement en un point ou un intervalle avec des propriétés précises ou sur un ensemble comme dans le **Corollaire 2**. Pour assurer le caractère lipschitzien ainsi avoir un théorème local, nous devons définir ce qu'est "local" et qu'est-ce qui garantit la stabilité des solutions. Pour ce faire, nous avons besoin d'une notion essentielle qui est le cylindre de sécurité. Il permet de garantir la continuité et la régularité des solutions dans un espace (intervalle). De ce fait, en établissant un cylindre de sécurité on s'assure que les solutions restent dans une zone connue ce qui facilite l'étude de ces solutions. Ainsi nous obtenons la définition suivante.

**Définition 18. Cylindre de sécurité**

Soit  $\mathbb{O}$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$ ,  $f : \mathbb{O} \mapsto \mathbb{K}^N$  continue et  $y_0 \in \mathbb{K}^N$ . On dit que  $\mathcal{K} = [t_0 - \alpha_1, t_0 + \alpha_1] \times B(y_0, r_1) \subset \mathbb{O}$ , avec  $\alpha_1, r_1 > 0$ , est un cylindre de sécurité pour  $(\beta)$  si pour toute fonction  $y \in \tilde{X} = \mathcal{K}([t_0 - \alpha_1, t_0 + \alpha_1], B(y_0, r_1))$ , la fonction  $\Phi(y)$  à valeurs dans  $\mathbb{K}^N$  définie sur  $[t_0 - \alpha_1, t_0 + \alpha_1]$  par

$$\Phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

appartient à  $\tilde{X}$ .

Ce concept nous sert, et est cruciale, pour démontrer le théorème de Cauchy-Lipschitz surtout pour les points d'existence et d'unicité des solutions.

**Théorème 5. Théorème de Cauchy-Lipschitz cas localement lipschitzien**

Soit  $\mathbb{O}$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$  et  $f : \mathbb{O} \mapsto \mathbb{K}^N$  continue et localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état  $y$ . Soit  $(t_0, y_0) \in \mathbb{O}$ . Alors, il existe  $\alpha > 0$  tel que le problème de Cauchy  $y(t_0) = y_0$  pour  $(\Psi)$  ait une solution unique  $y$  définie sur  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ .

Après avoir établi le théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cadre localement lipschitzien et que nous savons qu'il y a existence et unicité des solutions si des conditions sont remplies, il est pertinent de se pencher sur le prolongement et le raccordement de ces dernières. Cela permet d'étendre des solutions locales sur des intervalles plus grands sous certaines conditions d'unicité et de continuité.

**Lemme 2. Raccordement de solutions si unicité**

Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz 2, supposons que  $y$  soit une solution de  $(\Psi)$  sur un intervalle  $]\alpha, \gamma[$  et que  $z$  soit une solution de  $(\Psi)$  sur un intervalle  $]b, d[$  avec  $a < b < c < d$ . Supposons que ces deux solutions coïncident en un point de  $]b, c[$ . Alors, en posant

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y(t) & \text{pour } t \in ]\alpha, e[, \\ z(t) & \text{pour } t \in ]e, d[, \end{cases}$$

où  $e$  est un point quelconque de  $]b, c[$

Après avoir étudié le lemme de raccordement des solutions et le cylindre de sécurité, ainsi que le théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cadre localement lipschitzien, nous sommes prêts à aborder une généralisation du théorème de Cauchy-Cauchy-Lipschitz qui est plus général. C'est le théorème Cauchy-Lipschitz pour les systèmes non linéaires, ce dernier nous permet de traiter des équations différentielles avec des fonctions non linéaires, en assurant l'existence et l'unicité des solutions sous des conditions adaptés.

### **Théorème 6. Théorème de Cauchy-Lipschitz non linéaire**

Soit  $\mathbb{O}$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$  et  $f : \mathbb{O} \mapsto \mathbb{K}^N$  continue dans toutes ses variables et localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état. Soit  $(t_0, y_0) \in \mathbb{O}$ . Alors, il existe une unique solution maximale de  $(\Psi)$  telle que :

$$\begin{cases} y : I \mapsto \mathbb{K}^N, I \text{ un ouvert} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Pour approfondir notre compréhension des dynamiques des systèmes différentiels, il est nécessaire d'examiner le comportement des solutions aux frontières de leurs intervalles de définition. Le théorème des extrémités nous aide à identifier les conditions dans lesquelles une solution maximale atteint une borne infinie.

### **Théorème 7. Théorème des bouts**

Soit  $\mathbb{O} = ]\alpha, \beta[ \times \mathbb{K}^N$  et  $f : \mathbb{O} \mapsto \mathbb{K}^N$  continue dans toutes ses variables et localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état. Soit  $y : ]\gamma, \delta[ \mapsto \mathbb{K}^N$  une solution maximale de  $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ . Si  $\delta < \beta$ , alors

$$\lim_{t \rightarrow \delta} \|y(t)\| = +\infty$$

Cela implique que si  $t \mapsto y(t)$  est bornée, alors  $\delta = \beta$ .

Imaginons que nous avons une fonction  $f$  qui dépend du temps  $t$  et d'une autre variable  $y$ . Cette fonction est définie dans une région spécifique de l'espace, que nous appelons  $\mathcal{E} = ]\alpha, \beta[ \times \mathbb{K}^N$ . Maintenant, considérons une solution  $y$  de l'équation différentielle  $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ , définie sur un intervalle  $]\gamma, \delta[$

Le théorème des extrémités nous dit que si  $\delta < \beta$  alors la norme de  $y(t)$  devient infinie lorsque  $t$  approche  $\delta$ . En d'autres termes,  $y(t)$  devient très grand à mesure que  $t$  s'approche de  $\delta$ . Cela signifie également que si  $y(t)$  reste bornée, alors l'intervalle  $]\gamma, \delta[ = ]\gamma, \beta[$

Après avoir exploré les concepts clés des équations différentielles et des théorèmes associés, il devient impératif de se tourner vers des méthodes pratiques pour les résoudre. Bien que les solutions analytiques soient précieuses comme les méthodes de variation de la constante, l'abaissement de l'ordre et bien sûr encore, elles ne sont pas toujours accessibles pour des systèmes complexes ou non linéaires. C'est là qu'intervient l'approximation numérique.



## Chapitre 2

# Introduction à l'approximation numérique

Dans de nombreux cas, les solutions explicites des équations différentielles, obtenues par des méthodes analytiques, ne peuvent pas être déterminées. Cela peut être dû à la complexité des équations, à la nature des conditions initiales ou aux limitations imposées par les domaines d'étude. Ces limitations constituent un défi majeur dans l'application pratique des équations différentielles, ces dernières jouant un rôle central dans la compréhension du monde qui nous entoure.

Une solution à ce problème est la résolution numérique, qui repose sur des principes d'approximation numérique. Cette approche consiste à approximer la solution par des méthodes algorithmiques, qui produisent une solution approchée au lieu d'une solution exacte. Ces approximations permettent d'obtenir des résultats exploitables dans des contextes où l'analyse classique échoue.

### 2.1 Objectifs et limites des méthodes numériques

L'objectif principal des méthodes numériques est de fournir des solutions approchées à des problèmes mathématiques, en utilisant des calculs algorithmiques. Ces méthodes permettent de transformer des problèmes continus (décrits par des équations différentielles, intégrales ou aux dérivées partielles) en des problèmes discrets, qui peuvent être résolus à l'aide d'ordinateurs. Par exemple, la résolution numérique d'une équation différentielle consiste à approximer la solution en un ensemble fini de points, plutôt que de chercher une expression analytique globale.

#### 2.1.1 Limites des méthodes numériques

Malgré leur capacité à fournir des solutions approchées pour des problèmes complexes, les méthodes numériques présentent certaines limitations qu'il est important de considérer dans notre étude.

- **Erreurs numériques** : Les solutions sont approximatives et peuvent être affectées par des erreurs d'arrondi, de troncature ou de discrétisation.
- **Coût computationnel** : Pour des problèmes de très grande taille, le temps de calcul peut devenir excessif.
- **Stabilité** : Certaines méthodes peuvent devenir instables, produisant des solutions divergentes ou non physiques.
- **Sensibilité aux conditions initiales** : Les solutions numériques peuvent être fortement influencées par des erreurs dans les données d'entrée, surtout pour les problèmes mal posés.

Pour tirer pleinement parti des méthodes numériques, il donc est essentiel de comprendre les concepts fondamentaux qui sous-tendent leur fonctionnement. Ces concepts incluent la représentation des nombres en machine, l'analyse des erreurs, ainsi que les propriétés de consistance, stabilité et convergence des schémas numériques

## 2.2 Représentation des nombres et erreurs

### 2.2.1 Rappel sur les séries de Taylor

Les **séries de Taylor** sont un outil fondamental en analyse mathématique pour approximer des fonctions par des polynômes. Voici un rappel succinct avec la formule et la définition.

#### Définition 1. Série de Taylor

La série de Taylor d'une fonction  $f(x)$  infiniment dérivable autour d'un point  $a$  est une série infinie qui représente  $f(x)$  sous forme de polynôme. Elle est donnée par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

où :

—  $f^{(n)}(a)$  est la dérivée  $n$ -ième de  $f$  évaluée au point  $a$ ,

#### Formule de Taylor avec reste

Soit  $f$ , une fonction possédant ses  $(n+1)$  premières dérivées continues sur un intervalle fermé  $[a, b]$ . Alors, pour chaque  $c, x \in [a, b]$ ,  $f$  peut s'écrire comme :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k + R_n(x),$$

où  $R_n(x)$  est le terme de reste, donné par :

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1},$$

avec  $\xi$  un point entre  $c$  et  $x$ .

On dit que le terme d'erreur est d'ordre  $n+1$ . Il est parfois utile d'écrire cela de manière plus compacte sous la forme  $R_n = O(h^{n+1})$ , où  $h$  représente  $x-c$ .

### Définition 2.2

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f = O(x^p)$  au voisinage de 0 s'il existe  $C \in \mathbb{R}^+$  et  $x_0 \in \mathbb{R}^+$  tels que

$$|f(x)| \leq C|x^p| \quad \text{pour tout } -x_0 \leq x \leq x_0.$$

### 2.2.2 Erreur absolue et relative

Lorsqu'un nombre est stocké dans l'ordinateur, il y a très souvent une erreur dont il faut tenir compte. Cette erreur peut provenir d'une approximation de l'algorithme, d'erreurs dans les données, ou enfin d'erreurs dues aux arrondis que la machine réalise pour correspondre à sa précision finie.

Il y a donc lieu de modéliser ces erreurs. Dans la définition de l'erreur sur un nombre, on distingue deux cas.

### Définition 2.2

Soit  $\tilde{a}$  la valeur approchée d'une quantité dont la valeur exacte est  $a$ . On appelle :

- (i) **l'erreur absolue** la quantité  $\tilde{a} - a$ ,
- (ii) **l'erreur relative** la quantité  $\frac{\tilde{a}-a}{a}$ .

De cette définition, on introduit la notion de **chiffre/nombre significatif**. Le nombre de chiffres significatifs est lié à l'erreur relative. Les chiffres corrects de  $\tilde{a}$ , à partir du premier chiffre ou de la première décimale non nulle, sont appelés **chiffres significatifs**.

## 2.3 Représentation des nombres en virgule flottante

### Représentation des nombres en virgule flottante : limitations et arrondis

La première étape pour maîtriser les méthodes numériques consiste à comprendre comment les nombres sont représentés et manipulés par les ordinateurs, car cette représentation influence directement la précision et la fiabilité des calculs.

Dans la plupart des ordinateurs, les nombres réels (mais pas les nombres définis comme entiers) sont représentés en virgule flottante. Un nombre  $a$  est ainsi défini par deux autres nombres  $m$  et  $q$  :

$$a = m \times 10^q, \quad \text{avec } 1 \leq |m| < 10 \quad \text{et} \quad q \in \mathbb{Z}.$$

La partie  $m$  est appelée la **mantisse**, tandis que  $q$  est appelé l'**exposant**. En réalité, la machine stocke la plupart des nombres en binaire, c'est-à-dire en base 2. Cependant, nous ferons l'approximation que tout se passe réellement en base 10.

#### Limitations de la mantisse et de l'exposant

La représentation en virgule flottante utilise une **mantisse**  $m$  et un **exposant**  $q$ , stockés sur un nombre fini de bits. Cela implique :

- Un nombre fini de nombres réels peut être représenté.
- L'exposant  $q$  est limité par le nombre de bits alloués. Par exemple, avec 8 bits,  $q \in [-127, 128]$ .
- Si  $q > 128$ , on parle d'**overflow** (erreur critique).
- Si  $q < -127$ , on parle d'**underflow** (souvent remplacé par 0, mais pouvant causer des erreurs critique en cas de division).

La mantisse est également stockée sur un nombre fini de bits, limitant la précision. Cela implique que la précision sur un nombre est limitée au nombre de décimales que la mantisse peut contenir. En particulier, si un nombre  $x$  ne peut pas être représenté en utilisant toutes les décimales, on choisit le nombre le plus proche pouvant être représenté comme valeur de  $x$ . C'est ce qu'on appelle l'**arrondi**.

Il est donc naturel d'introduire la notion d'**epsilon machine**. L'epsilon machine représente la différence entre deux mantisses consécutives, c'est-à-dire le plus petit nombre machine tel que  $1 + \epsilon > 1$  sur la machine.

#### Arrondi selon le standard IEEE

L'arrondi consiste à trouver le nombre représentable  $\tilde{x}$  le plus proche de  $x$  :

- En base 10 avec  $p$  décimales, la mantisse de  $\tilde{x}$  conserve les  $p - 1$  premiers chiffres de  $x$ .
- Le  $p$ -ème chiffre est incrémenté si le  $(p + 1)$ -ème chiffre est  $\geq 5$ .

## Schémas numériques pour les équations différentielles

### Schéma numérique

Un **schéma numérique** est une méthode discrète permettant d'approximer la solution  $y(t)$  du problème de Cauchy. On discrétise l'intervalle  $[t_0, T]$  en une suite de points  $\{t_n\}_{n=0}^N$  avec  $t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ . Le schéma numérique génère une suite  $\{y_n\}_{n=0}^N$  telle que  $y_n \approx y(t_n)$ , où les pas de temps  $h_n = t_{n+1} - t_n$  peuvent être variables.

## 2.4 Formulation du Problème de Cauchy

On considère le problème de Cauchy sous la forme suivante :

$$(C) \quad \begin{cases} x'(t) = f(t, x), & t \in [t_0, T], \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

où :

- $x : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  est la fonction inconnue à déterminer,
- $f : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  est une fonction donnée,
- $x_0 \in \mathbb{R}^d$  est la condition initiale.

L'objectif est d'obtenir une approximation numérique de la solution exacte  $x(t)$  sur un maillage discret  $\{t_n\}$  de l'intervalle  $[t_0, T]$ .

## 2.5 Schéma Numérique à un Pas

Un schéma numérique à un pas pour l'approximation de la solution de (C) est une relation de la forme :

$$(S) \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + h\Phi(t_n, x_n, h), & n = 0, \dots, N-1, \\ x_0 = x(t_0), \end{cases} \quad (2.2)$$

où  $\Phi$  est une fonction d'approximation qui dépend du schéma choisi. Par exemple, pour le schéma d'Euler explicite :

$$\Phi(t_n, x_n, h) = f(t_n, x_n). \quad (2.3)$$

## 2.6 Consistance

L'erreur de consistance d'un schéma numérique à un pas est définie par :

$$\tau_n(h) = x(t_{n+1}) - x(t_n) - h\Phi(t_n, x(t_n), h), \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (2.4)$$

Un schéma est dit consistant avec (C) si :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=1}^N |\tau_n(h)| = 0. \quad (2.5)$$

Si l'erreur de consistance vérifie  $\sum_{n=1}^N |\tau_n(h)| \leq Ch^p$ , alors le schéma est consistant d'ordre  $p$ .

## 2.7 Stabilité

On dit que le schéma explicite à un pas (S) donné par l'équation (4.16) est stable s'il existe un réel  $M \geq 0$  tel que, étant données les perturbations  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N$ , et en considérant le schéma explicite

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot f(t_n, x_n), \quad x_0 \text{ donné},$$

et une perturbation du schéma que l'on note

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n) + \varepsilon_{n+1}, \quad y_0 = x_0,$$

alors le schéma est stable si, pour toute perturbation, on a

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|y_n - x_n\| \leq M \sum_{n=1}^N |\varepsilon_n|.$$

Cela signifie que les erreurs d'approximation ne s'amplifient pas de manière incontrôlée. .

## 2.8 Convergence

Un schéma numérique est convergent si :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{1 \leq n \leq N} \|x(t_n) - x_n\| = 0. \quad (2.6)$$

Le théorème de Lax assure que si un schéma est stable et consistant, alors il est convergent.

Un schéma numérique efficace doit être consistant, stable et convergent. Dans les sections suivantes, nous analyserons ces concepts pour différents schémas numériques.

# Chapitre 3

## Méthodes numériques

### 3.1 Schémas numériques à pas constant

### 3.2 Schémas d'Euler Explicite et Implicite

#### 3.2.1 Schéma d'Euler Explicite

Le schéma d'Euler explicite pour l'approximation de la solution du problème de Cauchy ( $C$ ) est donné par la relation de récurrence suivante :

$$(S_E) \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n), & n = 0, \dots, N-1, \\ x_0 = x(t_0). \end{cases} \quad (3.1)$$

Implémentation Python :

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 def euler_explicit(f, t0, T, x0, N):
5     h = (T - t0) / N
6     t_values = np.linspace(t0, T, N+1)
7     x_values = np.zeros((N+1, len(x0)))
8     x_values[0] = x0
9
10    for n in range(N):
11        x_values[n+1] = x_values[n] + h * f(t_values[n], x_values[n])
12
13    return t_values, x_values
```

Listing 3.1 – Schéma d'Euler explicite

#### 3.2.2 Schéma d'Euler Implicite

Le schéma d'Euler implicite est défini par :

$$(S_I) \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1}), & n = 0, \dots, N-1, \\ x_0 = x(t_0). \end{cases} \quad (3.2)$$

Implémentation Python :

```
1 from scipy.optimize import fsolve
2
3 def euler_implicit(f, t0, T, x0, N):
4     h = (T - t0) / N
5     t_values = np.linspace(t0, T, N+1)
6     x_values = np.zeros((N+1, len(x0)))
7     x_values[0] = x0
8
9     for n in range(N):
10        g = lambda x_next: x_next - x_values[n] - h * f(t_values[n+1], x_next)
11        x_values[n+1] = fsolve(g, x_values[n])
12
13    return t_values, x_values
```

Listing 3.2 – Schéma d'Euler implicite

### 3.3 Comparaison des performances des méthodes

Il est naturel de se demander quelle méthode est la plus efficace, quelle est la moins coûteuse computationnellement. Comme ce sont des méthodes d'approximations, il existe une erreur, et c'est cette dernière qui nous aidera à déterminer les performances des méthodes étudiées.

L'importance de l'erreur dans les méthodes d'approximation des équations différentielles réside dans la précision et la stabilité des solutions obtenues. Une erreur plus faible indique une solution plus précise et une méthode plus fiable. Comparer les méthodes basées sur leurs erreurs permet de mieux comprendre leurs avantages et inconvénients, ainsi que leur adéquation à différents types de problèmes.

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$f(t, y) = -4y$$

Nous allons comparer les différentes solutions données par nos 3 méthodes d'approximation numériques. Pour calculer l'erreur, nous allons introduire la notion suivante :

#### Définition 19. Erreur

L'erreur est la différence entre la valeur exacte et la valeur approximative obtenue par une méthode numérique. Elle peut être exprimée de la manière suivante :

$$Erreur = |Valeur\ exacte - Valeur\ approximative|$$

Avec

- La valeur exacte est la solution théorique précise.
- La valeur approximative est la solution obtenue par une méthode d'approximation.

Ainsi nous pouvons coder la fonction suivante qui représente l'erreur :

```
1 import numpy as np
2 def calculer_erreurs(approx, exacte):
3     erreur_absolue = np.abs(approx - exacte)
4     erreur_relative = erreur_absolue / np.abs(exacte)
5     return erreur_absolue, erreur_relative
```

Listing 3.3 – Programme de calcul de l'erreur

Définissons nos paramètres :

```
itermax = 20
x0 = 1
T = 8
N = 20
epsabs = 10e-18
epsrel = math.sqrt(10e-18)
```

En utilisant nos trois codes des trois méthodes précédentes, comparons les résultats d'approximation de la solution de  $f(t, y) = -4y$

```
1 # On recupere les sorties de nos fonctions en fonction de nos parametres
2 (t, xEulerExplicite) = EulerExplicite(x0, f, T, N)
3 (t, xEulerImplicite) = EulerImplicite(x0, f, T, N)
4 (t, xPointMilieu) = PointMilieu(x0, f, T, N)
5 Exacte = x0 * np.exp(-4 * t)
6
7 # Calcul des erreurs
8 erreur_absolue_EulerExplicite, erreur_relative_EulerExplicite = calculer_erreurs(
9     xEulerExplicite, Exacte)
9 erreur_absolue_EulerImplicite, erreur_relative_EulerImplicite = calculer_erreurs(
10    xEulerImplicite, Exacte)
10 erreur_absolue_PointMilieu, erreur_relative_PointMilieu = calculer_erreurs(
    xPointMilieu, Exacte)
```

Listing 3.4 – Calcul de l'erreur

En mettant en forme les différents résultats obtenus (erreurs, stabilité et précisions) dans un tableau et dans des graphes, nous obtenons les représentations suivantes :

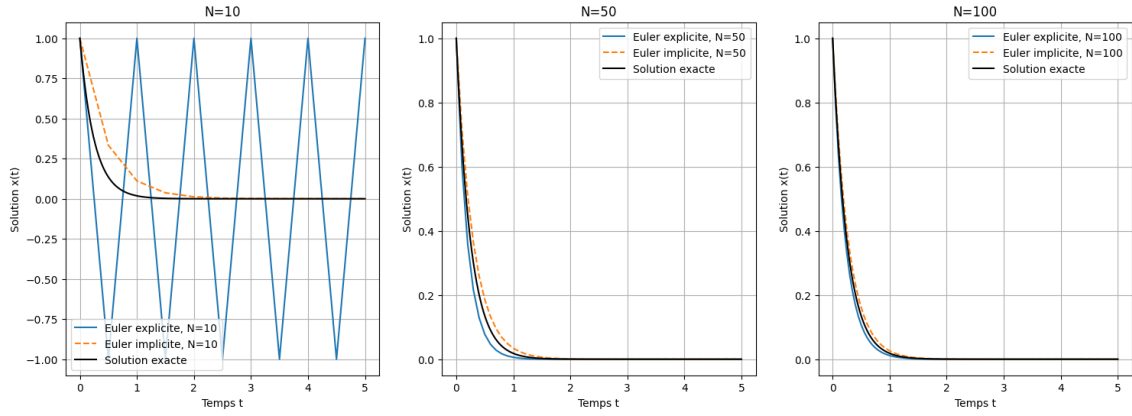


FIGURE 3.1 – Stabilité & précisions des solutions d'Euler Explicite & Implicite selon différents pas de temps

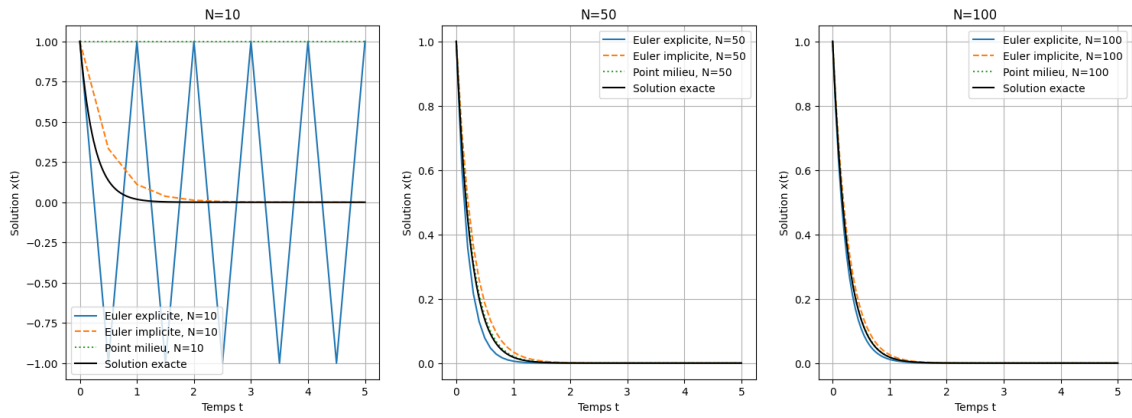


FIGURE 3.2 – Stabilité & précisions des solutions des 3 méthodes

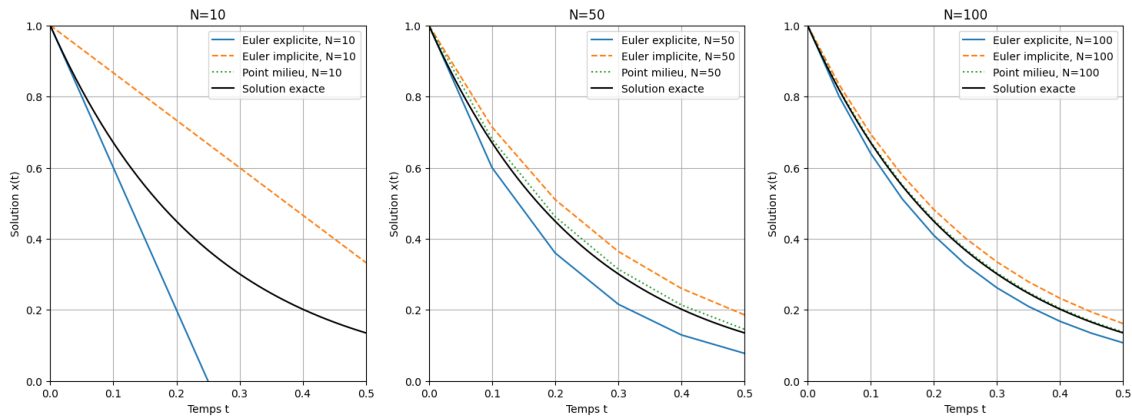


FIGURE 3.3 – Stabilité & précisions des solutions des 3 méthodes avec un zoom

TABLE 3.1 – Erreurs et rapports des méthodes d’Euler explicite, implicite, et point milieu.

| Méthode         | Ni  | Erreur Abs.           | Rapport | Rapport Base 2 |
|-----------------|-----|-----------------------|---------|----------------|
| Euler Explicite | 320 | $1.93 \times 10^{-2}$ |         |                |
| Euler Implicite | 320 | $1.77 \times 10^{-2}$ |         |                |
| Point Milieu    | 320 | $6.66 \times 10^{-4}$ |         |                |
| Euler Explicite | 319 | $1.93 \times 10^{-2}$ | 0.997   | -0.0046        |
| Euler Implicite | 319 | $1.78 \times 10^{-2}$ | 0.997   | -0.0044        |
| Point Milieu    | 319 | $6.70 \times 10^{-4}$ | 0.994   | -0.0094        |
| Euler Explicite | 318 | $1.94 \times 10^{-2}$ | 0.997   | -0.0046        |
| Euler Implicite | 318 | $1.78 \times 10^{-2}$ | 0.997   | -0.0044        |
| Point Milieu    | 318 | $6.75 \times 10^{-4}$ | 0.994   | -0.0094        |

En examinant les résultats obtenus des trois méthodes numériques : Euler explicite, Euler implicite et Point milieu, nous pouvons conclure plusieurs choses sur leurs efficacité, stabilité et leurs erreurs.

### A) Stabilité & précisions

La méthode d’Euler explicite est simple et peut être rapidement implémentée. Cependant, sa précision peut être limitée, surtout lorsqu’on utilise des pas de temps plus grands. Il peut être nécessaire de choisir des valeurs plus petites de  $N$  (nombre de points) pour obtenir des résultats satisfaisants, ce qui augmente le nombre de calculs, qui peut être lourd computationnellement.

En ce qui concerne la méthode d’Euler implicite, elle est plus stable et permet l’utilisation de pas de temps plus grands sans nuire à la précision. En effet, la valeur de la solution au prochain pas de temps est calculée en résolvant une équation impliquant la valeur de cette solution. En d’autres termes, la méthode d’Euler implicite prend en compte la dépendance de la solution future et assure ainsi une plus grande stabilité. En contrepartie, à chaque étape la méthode résout des équations non linéaires, ce qui amplifie le temps de calcul.

Enfin, la méthode du point milieu peut être vue comme un bon accord entre précision et stabilité. Elle est réputée pour la facilité d’implémentation, plus simple que Euler implicite, et plus précise qu’Euler explicite. Cependant, cette méthode perd sa stabilité et précision pour les équations différentielles raides ou pour des pas de temps trop grands. Son ordre minime comparé aux méthodes d’ordre supérieur comme la méthode Runge-Kutta lui fait aussi défaut pour sa précision. Cependant, nous n’allons pas nous attarder sur ces comparaisons qui ne sont pas sujet de notre mémoire.

### B) Erreurs

Pour les erreurs absolues obtenues avec les trois méthodes sont relativement faibles, ce qui indique une bonne précision globale. La méthode du Point milieu génère les erreurs absolues les plus faibles. Cela s’explique par le fait que cette méthode utilise une approximation plus précise de la solution en prenant en compte la pente au point intermédiaire, ce qui améliore la précision du résultat final.

Et en ce qui concerne les erreurs relatives, elles suivent la même tendance que l’erreur absolue. La méthode du Point milieu affiche les erreurs relatives les plus faibles. Cela confirme encore une fois sa meilleure précision car elle minimise les écarts proportionnels par rapport à la solution réelle. En prenant en compte la pente intermédiaire, cette méthode réduit les erreurs accumulées sur chaque pas de temps.

### C) Conclusion

En conclusion, la méthode du point milieu semble être la plus efficace en termes de précision (erreurs absolues et relatives moindres) et offre une bonne stabilité. L’Euler explicite, bien que simple et rapide, peut nécessiter des pas de temps plus petits pour garantir précision et stabilité. Enfin, l’Euler implicite, bien que plus stable pour des pas de temps plus grands, peut complexifier le calcul en raison de la résolution des équations non linéaires à chaque étape.



La comparaison de ces méthodes montre que chaque méthode a ses propres avantages et inconvénients selon le contexte d'utilisation. Par exemple, Euler explicite peut être privilégié pour des calculs rapides avec des pas de temps adaptés, tandis qu'Euler implicite peut être choisi pour des problèmes nécessitant une grande stabilité.

# Introduction théorique à l'intégration projective

[TEXTE A MODIFIER POUR RAJOUTER LA PARTIE NUMERIQUE ET LE LIEN ETC.]  
Les systèmes d'équations différentielles jouent un rôle essentiel dans les mathématiques appliquées et la physique. Ils permettent de représenter de nombreux phénomènes naturels et technologiques, que ce soit dans la dynamique des fluides, les circuits électriques ou encore les modèles économiques. Souvent, il n'existe pas de solution analytique pour ces systèmes, nécessitant ainsi l'utilisation de méthodes numériques pour obtenir des solutions approximatives. L'intégration projective est une méthode sophistiquée qui permet d'améliorer la stabilité et l'efficacité des approches numériques classiques.

## Concept de l'Intégration Projective ???

[MODIF ENCORE TEXTE + AJOUTER LES DEF BIEN TYPO] L'intégration projective est une méthode numérique développée pour résoudre des systèmes d'équations différentielles raides.

### Définition 20. Équation différentielle linéaire

Un système est dit raide lorsqu'il contient des échelles de temps très différentes, c'est-à-dire des termes qui évoluent beaucoup plus rapidement que d'autres

Cela pose des défis pour les méthodes numériques classiques, car des pas de temps très petits sont nécessaires pour obtenir des solutions stables et précises.

L'idée principale de l'intégration projective est de séparer les composants rapides et lents du système et de les traiter différemment. Cette méthode repose sur une projection des solutions

DONNER PLUS DE CONTEXTE + EXPLICATION + INSPIRER DESSIN MR REY

LU LIVRE EN DM DISCORD : sur les sous-espaces engendrés par les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice jacobienne du système. DEMANDER MR REY

AUSSI PARLER DE LORENZ POUR PRENDRE EXEMPLE BIEN : LU DANS LIVRE DISCORD JAI ESSAYE DE FAIRE CA POUR MONTRER QUIL Y A UN SOUCIS (NON LINEARITE, VP HEIN,

Considérons le système d'équations différentielles suivant :

**3.4 figure faite avec python inte proj FAUX :**

**3.5 figure faite avec python inte proj MAYBE ? :**

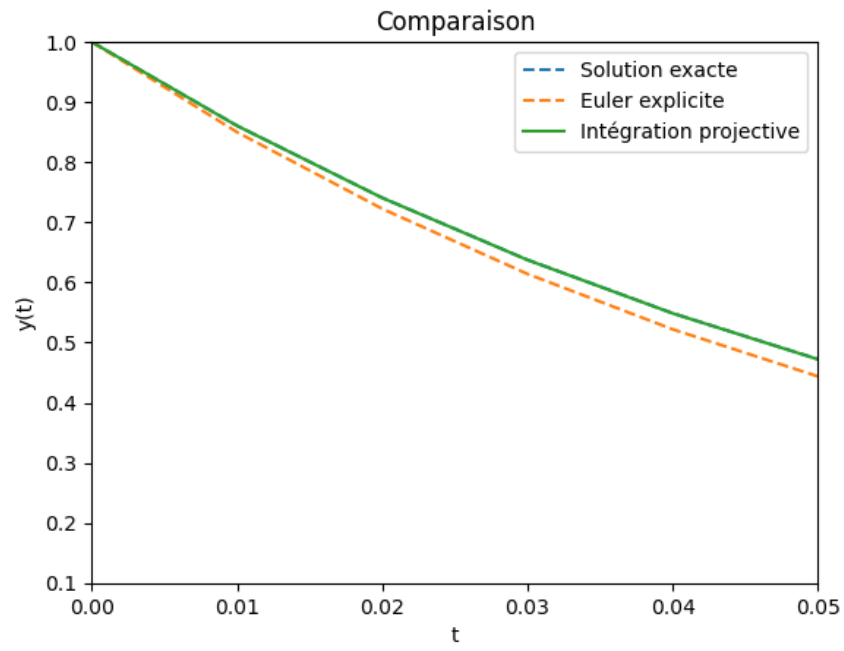


FIGURE 3.4 – Comparaison zoom ED SIMPLE

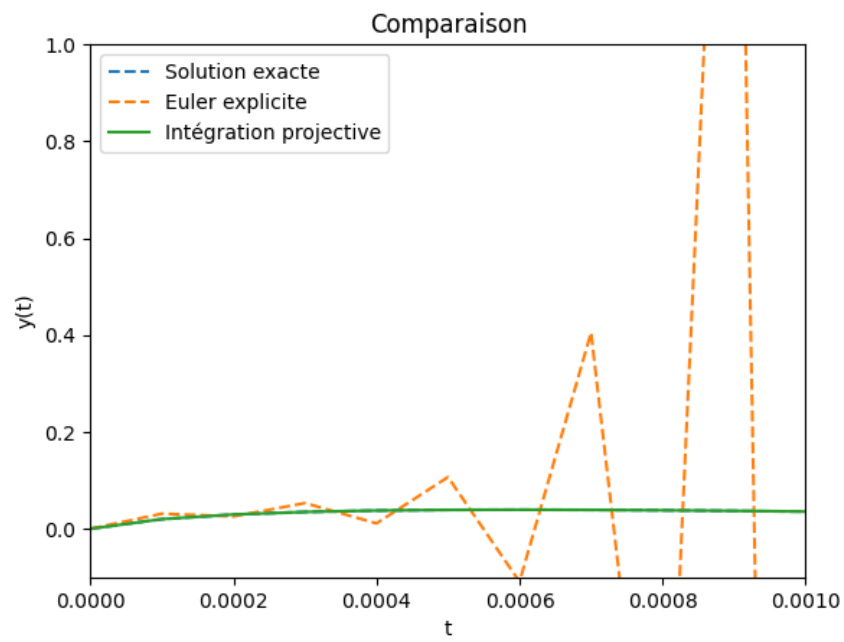


FIGURE 3.5 – Comparaison zoom ED RAIDE CHALEUR

# Chapitre 4

## Annexe

### 4.0.1 Algèbre

### 4.0.2 Analyse

Soit  $f$ , une fonction possédant ses  $(n + 1)$  premières dérivées continues sur un intervalle fermé  $[a, b]$ , alors pour chaque  $c, x \in [a, b]$ ,  $f$  peut s'écrire comme

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k + E_{n+1},$$

où le terme d'erreur  $E_{n+1}$  peut s'écrire sous la forme

$$E_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - c)^{n+1},$$

et  $\xi$  est un point situé entre  $c$  et  $x$ . annexe formule de Taylor

### 4.0.3 Topologie

### 4.0.4 Méthode résolution ED ? Abaissement de l'ordre, DSE, Euler, Riccati etc ?

On met tous les théorèmes, outils, etc. qu'on a utilisé

Variante Gronwall inté, diff

Exp de matrice

CVU

CVN

Normes Nous savons que les solutions de  $(\mathcal{L}_H)$  sont de la forme  $y(t) = \Phi(t)C$  avec  $t \mapsto \Phi$  la matrice fondamentale de  $\mathcal{L}_H$  et  $C$  un vecteur quelconque constant de  $\mathbb{K}^N$ .

### 4.0.5 test texte

[MODIFIER LES PHRASES SELON BESOINS]

Les méthodes numériques jouent un rôle essentiel dans la résolution des équations différentielles. Elles englobent une variété de techniques, telles que la méthode d'Euler, la méthode de Runge-Kutta, et les méthodes de différences finies. Ces méthodes permettent d'obtenir des solutions approximatives avec une précision contrôlée, en décomposant les problèmes en étapes plus simples et gérables.

Dans ce chapitre, nous allons introduire les principes fondamentaux de l'approximation numérique. Nous explorerons différents concepts fondamentaux des méthodes numériques pour résoudre des équations différentielles. Nous examinerons également les avantages et les inconvénients de chaque méthode, ainsi que les considérations pratiques pour leur mise en œuvre.

Avant de se précipiter dans la résolution de différentes équations différentielles et dans l'analyse des solutions de ces dernières, nous nous devons de rappeler plusieurs lemmes utiles à l'analyse. Ce sont les lemmes de Gronwall.

Soit  $\{u_n\}$  une suite de réels positifs satisfaisant l'inégalité :

$$u_n \leq a_n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k u_k \quad \text{pour } n \geq 0,$$

où  $\{a_n\}$  et  $\{b_k\}$  sont des suites de réels positifs.  
Alors,

$$u_n \leq a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \prod_{j=k+1}^{n-1} (1 + b_j) \quad \text{pour } n \geq 0.$$

IL FAUT LE METTRE AUSSI EN PREUVE ET L'INTEGRER CHAPITRE 1 ?

En examinant les résultats obtenus des trois méthodes numériques : Euler explicite, Euler implicite et Point milieu, nous pouvons conclure plusieurs choses sur leurs efficacité, stabilité et leurs erreurs :

### A) Stabilité & précisions

La méthode d'Euler explicite est simple et peut être rapidement implémentée. Cependant, sa précision peut être limitée, surtout lorsqu'on utilise des pas de temps plus grands. Il peut être nécessaire de choisir des valeurs plus petites de  $N$  (nombre de points) pour obtenir des résultats satisfaisants, ce qui augmente le nombre de calcul, qui peut être lourd computationnellement.

En ce qui concerne la méthode d'Euler implicite, elle est plus stable et permet l'utilisation de pas de temps plus grands sans nuire à la précisions. En effet, la valeur de la solution au prochain pas de temps est calculée en résolvant une équation impliquant la valeur de cette solution. En d'autres termes, la méthode d'Euler implicite prend compte la dépendance de la solution future et assure ainsi une plus grande stabilité. En contrepartie à chaque étape la méthode résouds des équations non linéaires ce qui amplifie le temps de calcul.

Enfin, la méthode du point milieu peut être vu comme un bon accord entre précision et stabilité. Elle est réputé pour la facilité d'implémentation, plus simple que Euler implicite, et plus précise qu'Euler explicite. Cependant, cette méthode perd sa stabilité et précision pour les équations différentielles raides ou pour des pas de temps trop grands. Son ordre minime comparé aux méthodes d'ordre supérieur comme la méthode Runge-Kutta lui fait aussi défaut pour sa précisions. Cependant, nous n'allons pas nous attarder sur ces comparaisons qui ne sont pas sujet de notre mémoire.

### B) Erreurs

**Erreur absolue** : Les erreurs absolues obtenues avec les trois méthodes sont relativement faibles, indiquant une bonne précision globale. Cependant, la méthode du Point milieu génère les erreurs absolues les plus faibles, ce qui suggère qu'elle est la plus précise.

**Erreur relative** : L'erreur relative suit la même tendance que l'erreur absolue. La méthode du Point milieu affiche les erreurs relatives les plus faibles, confirmant une fois de plus sa meilleure précision.

En conclusion, la méthode du Point milieu semble être la plus efficace en termes de précision (erreurs absolues et relatives moindres) et offre une bonne stabilité. L'Euler explicite, bien que simple et rapide, peut nécessiter des pas de temps plus petits pour garantir précision et stabilité. Enfin, l'Euler implicite, bien que plus stable pour des pas de temps plus grands, peut complexifier le calcul en raison de la résolution des équations non linéaires à chaque étape.

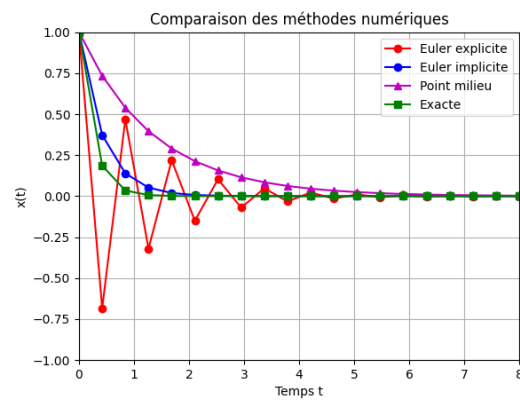


FIGURE 4.1 – Comparaison des méthodes d’approximation numériques sur un intervalle de temps plus grand