Chapitre 5 Autour de la méthode d'Euler

1 Introduction

L'étude théorique des équations différentielles a été traitée dans la première de l'Unité d'Enseignement *Équations Différentielles*. Notre cadre d'étude s'intéressera aux équations résolues d'ordre ℓ, élément de $\mathbb{N}\backslash\{0\}$, définie sur une partie $\mathscr{D}$ sous la forme $\mathscr{D} = \mathrm{I} \times U$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et U est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ avec d dans $\mathbb{N}\backslash\{0\}$. Rappelons qu'une équation différentielle résolue d'ordre ℓ est une équation du type

$$x^{(\ell)}(t) = f\left(t, x(t), x'(t), \cdots, x^{(\ell-1)}(t)\right), \tag{1}$$

où l'inconnue $x : \mathrm{I} \to U,\ t \mapsto x(t)$ est une fonction,

$$f : \mathrm{I} \times U^\ell \to \mathbb{R}^d,\ (t, x) \mapsto f\left(t, x(t), x'(t), \cdots, x^{(\ell-1)}(t)\right)$$

est une fonction continue, dite **terme source**. L'ouvert U de $\mathbb{R}^d$ est appelé **espace de configuration**.

On montre que que l'on peut toujours, du point de vue théorique, se ramener à l'étude d'une équation du premier ordre. Aussi, limiterons-nous aux équations résolues du premier ordre, c'est-à-dire $\ell = 1$, ou encore

$$x'(t) = f(t, x(t)). \tag{2}$$

Dans toute la suite de ce chapitre, **équation différentielle** sera sous-entendue **équation résolue du premier ordre**. Notre attention portera particulièrement sur le **problème de Cauchy,** dont nous rappelons la définition dans l'immédiat.

Définition 1.1. *(***Problème de Cauchy***).* Le problème de Cauchy consiste à rechercher la solution $x : t \in \mathrm{I} \mapsto x(t)$ qui prend la valeur x_0 en $t = t_0$, c'est-à-dire,

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & \text{pour } t \text{ dans } \mathring{\mathrm{I}}, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Par changement de variable, on se ramène souvent au cas où $\mathrm{I} = [0, T]$ et $t_0 = 0$, c'est-à-dire,

$$x'(t) = f(t, x(t)), \ \text{ pour } t \text{ dans } \mathring{\mathrm{I}} =]0, T[\ \text{ et } \ x(0) = x_0.$$

Le *théorème de Cauchy-Lipschitz*, résultat fondamental qui a été vu dans la partie théorique de cette UE, assure l'existence et l'unicité de la solution des solutions au voisinage d'un point dans sa version *locale*. Une autre version de ce théorème, *globale*, permet de passer des solutions locales aux solutions globales.

Un cas particulier important d'équations différentielles, est celui des équations différentielles linéaires, qui correspond à des termes sources f affines pour t fixé,

$$f(t, x(t)) = A(t)\, x(t) + b(t), \tag{3}$$

où $A : [0, T] \to \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ et $b : [0, T] \to \mathbb{R}^d$ sont des fonctions continues.

L'étude du cas : $d = 1$, est pertinent. Pour $A(t) = a$ et $b(t) = 0$ quel que soit t dans $[0, T]$, le problème de Cauchy

$$x'(t) = a\, x(t),\ t \in]0, T[, \ \ x(0) = x_0,$$

admet une unique solution sur $[0, T]$ donnée par $x : t \in [0, T] \mapsto x(t) = x_0 \, e^{a\,t}$.
Pour $A(t) = a(t)$ et $b(t)$ plus générales mais continues, la solution unique du problème de Cauchy est la fonction $x : t \in [0, T] \mapsto x(t)$ où

$$x(t) = x_0 \, e^{\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s} + \int_0^t b(s) \, e^{\int_s^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau} \, \mathrm{d}s.$$

Lorsque : $d > 1$, et pour $A(t)$ et $b(t)$ plus générales mais continues, la solution unique du problème de Cauchy est $x : t \in [0, T] \mapsto x(t)$ où

$$x(t) = e^{\int_0^t A(s)\,\mathrm{d}s} \, x_0 + \int_0^t e^{\int_s^t A(\tau)\,\mathrm{d}\tau} \, b(s) \, \mathrm{d}s.$$

Il est utile de rappeler que pour une matrice A de $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$, l'exponentielle de A, notée e^A, est la somme de la série entière de rayon de convergence infini $\displaystyle\sum_{\ell \in \mathbb{N}} \frac{A^\ell}{\ell!}$:

$$e^A = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{A^\ell}{\ell!}.$$

Dans la pratique, la modélisation des phénomènes conduisent à des équations différentielles pour lesquelles l'expression de la solution n'est pas connue explicitement. La résolution des équations différentielles par quadrature c'est-à-dire à l'aide des opérations élémentaires et de la primitivation, n'est réalisable que dans un nombre de situations très restreintes. La recherche de solutions sous forme de séries entières, par exemple, impose une condition d'analycité de la fonction source f, ce qui n'est pas toujours satisfaite dans les problèmes réels. Il devient alors crucial de rechercher des méthodes numériques pour approcher les solutions du problème de Cauchy,

$$x'(t) = f(t, x(t)), \; t \in]0, T[, \;\; x(0) = x_0.$$

La méthode des **différences finies** est l'une de ces méthodes numériques.

2 Méthode des différences finies

L'idée de base de la méthode des différences finies est d'approcher les opérateurs de dérivation par des opérateurs de quotients finis. Plus précisément, la méthode des différences finies est fondée sur l'idée que, pour une fonction dérivable $x : t \mapsto x(t)$, le quotient

$$\Delta_h x(t) = \frac{x(t+h) - x(t)}{h},$$

approche la valeur $x'(t)$ dès que $h > 0$ est suffisamment petit. Ce quotient est dit **différence finie** de pas h de x au point t et l'application linéaire $\Delta_h : g \mapsto \Delta_h g$ est appelé **opérateur de différence finie** de pas h. La tradition veut qu'on précise qu'il s'agit de la **différence finie avant**, par opposition à la **différence finie arrière** qui est donnée pour $h > 0$ par

$$\Delta_{-h} x(t) = \frac{x(t) - x(t-h)}{h},$$

qui est également une approximation de $x'(t)$ quand $h > 0$ est suffisamment petit. En se donnant un $h > 0$ appelé **pas de temps**, et en posant $t_k = kh$, pour k dans $\{0, 1, 2, 3, \cdots, \}$ on remarque que l'on a

$$\Delta_h x(t) = \frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{h} \approx f(t_k, x(t_k)),$$

soit

$$x(t_{k+1}) \approx x(t_k) + h\, f(t_k, x(t_k)).$$

Si cette formule était exacte, on pourrait calculer de proche en proche les quantités $x(t_k)$ puisque l'on connaît $x(t_0) = x_0$. Comme elle n'est qu'une approximation, on introduit la quantité x^k ayant pour objectif d'approcher la valeur $x(t_k)$ et que l'on calcule de proche en proche par $x^0 = x_0$ et

$$x^{k+1} = x^k + h\, f(t_k, x^k), \quad \text{pour } k \geq 0.$$

Cette formule est dite **schéma d'Euler explicite à un pas**. Dans le cas de l'équation : $x' = Ax$, ce schéma prend la forme simple :

$$x^{k+1} = (\mathrm{I} + hA)\, x^k.$$

Cette méthode permet ainsi de calculer les valeurs approchées de x sur la grille $(t_k)_{k\geq 0}$. On peut en déduire une approximation x^h de la fonction x en tout $t \geq 0$ en interpolant ces valeurs, par exemple par une fonction affine par morceaux, on pose

$$x^h(t) = x^k + \frac{x^{k+1} - x^k}{h}\,(t - t_k), \quad \text{si : } \; t \in [t_k,\, t_{k+1}] \;\text{ pour }\; k \geq 0.$$

Il existe d'autres schémas aux différences finies autres que celui d'Euler explicite. En particulier, en prenant $\dfrac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{h}$ pour différence finie arrière $\Delta_{-h} x(t_{k+1})$ et puis comme une approximation de $x'(t_{k+1})$, c'est-à-dire,

$$x(t_{k+1}) - x(t_k) \approx h\, f(t_{k+1}, x(t_{k+1})),$$

on trouve un schéma différent en posant $x^0 = x_0$ et

$$x^{k+1} - h\, f(t_{k+1}, x^{k+1}) = x^k, \quad \text{pour } k \geq 0.$$

C'est le **schéma d'Euler implicite**, ainsi appelé car la valeur de x^{k+1} n'est pas donnée explicitement en fonction de x^k mais comme la solution d'une équation, qu'il faudra résoudre soit de manière exacte, soit de façon approchée comme par exemple par des méthodes de type point fixe. Dans le cas de l'équation : $x' = Ax$, ce schéma prend la forme simple :

$$(\mathrm{I} - hA)\, x^{k+1} = x^k,$$

et on voit que la solution est définie lorsque $\mathrm{I} - hA$ est inversible, ce qui est toujours vrai pour h suffisamment petit. On a alors

$$x^{k+1} = (\mathrm{I} - hA)^{-1}\, x^k.$$

Un autre exemple de schéma part de la remarque que $\dfrac{x\left(t_{k+1}\right) - x\left(t_k\right)}{h}$ est une approximation de $x'\left(t_{k+\frac{1}{2}}\right)$, en posant : $t_{k+\frac{1}{2}} = \left(k + \dfrac{1}{2}\right) h = \dfrac{t_k + t_{k+1}}{2}$. On a ainsi :

$$x\left(t_{k+1}\right) \approx x\left(t_k\right) + hf\left(t_{k+\frac{1}{2}}, x\left(t_{k+\frac{1}{2}}\right)\right) \approx x\left(t_k\right) + hf\left(t_{k+\frac{1}{2}}, x\left(t_k\right) + \frac{h}{2} f\left(t_k, x\left(t_k\right)\right)\right),$$

ce qui mène à un schéma explicite dit du **point milieu** :

$$x^{k+1} = x^k + hf\left(t_{k+\frac{1}{2}}, x^k + \frac{h}{2} f\left(t_k, x^k\right)\right).$$

Dans le cas de l'équation : $x' = Ax$, ce schéma prend la forme simple :

$$x^{k+1} = \left(\mathrm{I} + hA + \frac{1}{2} h^2 A^2\right) x^k.$$

Nous avons présenté les trois schémas les plus simples, mais il existe de nombreux autres schémas aux différences finies.

Pour finir ce paragraphe, on remarque que l'on aurait pu choisir des **pas de temps non constants**, c'est-à-dire $h_k = t_{k+1} - t_k$ la longueur entre deux temps consécutifs t_k et t_{k+1} dépendrait de $k \geq 0$. Il y aurait juste à changer h par h_k dans les formules ci-dessus, et dans ce cas, on a l'habitude d'introduire la quantité h dite **la finesse de la grille** donnée par $h = \max_{k \geq 0} h_k$.

3 Conception des schémas d'approximation numérique par utilisation des formules de calcul approché d'intégrales

Le résultat suivant est immédiat.

Théorème 3.1. *(***Formulation intégrale du problème de Cauchy***)*. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soient σ_0 dans I et y_0 dans U. Soit $f : \mathrm{I} \times U \to U$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$ une fonction continue. Les propositions suivantes sont équivalentes.

i). La fonction $\varphi : \mathrm{I} \to U$, $t \mapsto \varphi(t)$ est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & \text{pour } t \text{ dans } \mathring{\mathrm{I}}, \\ x(\sigma_0) = y_0. \end{cases}$$

ii). La fonction $\varphi : \mathrm{I} \to U$, $t \mapsto \varphi(t)$ vérifie l'équation suivante :

$$\varphi(t) = y_0 + \int_{\sigma_0}^{t} f(s, \varphi(s))\,\mathrm{d}s.$$

Soit T dans $\mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$. Soit une grille $(t_k)_{k \in [\![0,N]\!]}$ de temps, $t_k = kh$, avec $h = \frac{T}{N}$ la finesse du maillage,

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T,$$

sur laquelle on souhaite approcher $x : \mathrm{I} = [0, T] \to U,\ t \mapsto x(t)$ solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & \text{pour } t \text{ dans } \mathring{\mathrm{I}}, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{4}$$

Soit k dans $[\![0, N]\!]$. La formulation intégrale de problème de Cauchy $x'(t) = f(t, x(t))$ pour t dans $[t_k, t_{k+1}]$ de condition initiale $(t_k, x(t_k))$ en $t = t_{k+1}$ s'écrit :

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s.$$

La connaissance de l'intégrale $\displaystyle\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s$ permet de calculer $x(t_{k+1})$ à partir de $x(t_k)$, ainsi de proche en proche de déterminer tous les $x(t_k)$ car $x_0 = x(t_0)$. Les choix simples d'intégrations numériques les plus couramment employés sont :

1. la formule des rectangles à gauche : $\displaystyle\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s \approx (t_{k+1} - t_k) f(t_k, x(t_k))$;
2. la quadrature des rectangles à droite : $\displaystyle\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s \approx (t_{k+1} - t_k) f(t_{k+1}, x(t_{k+1}))$;
3. la formule du point milieu : $\displaystyle\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s \approx (t_{k+1} - t_k) f\left(t_{k+\frac{1}{2}}, x(t_{k+\frac{1}{2}})\right)$ avec $t_{k+\frac{1}{2}} = \frac{t_k + t_{k+1}}{2}$;

4. la quadrature des trapèzes : $\displaystyle\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s,x(s))\,\mathrm{d}s \approx (t_{k+1}-t_k)\frac{f(t_k,x(t_k))+f(t_{k+1},x(t_{k+1}))}{2}$.

On désignant par x^k une valeur approchée de $x(t_k)$. Les formules de quadratures ci-dessous, grâce à $x^0 = x_0$, conduisent aux méthodes suivantes, de calcul de proche en proche de x^k :

1. **schéma d'Euler explicite** :
$$x^{k+1} = x^k + h\,f(t_k, x^k), \quad \text{pour } k \geq 0\,;$$
2. **schéma d'Euler implicite** :
$$x^{k+1} = x^k + h\,f(t_{k+1}, x^{k+1}), \quad \text{pour } k \geq 0\,;$$
3. **schéma du point milieu** :
$$x^{k+1} = x^k + hf\left(t_{k+\frac{1}{2}}, x^k + \frac{h}{2} f\left(t_k, x^k\right)\right), \quad \text{pour } k \geq 0\,;$$
4. **schéma de Crank-Nicolson** :
$$x^{k+1} = x^k + \frac{h}{2}\,f(t_k, x^k) + \frac{h}{2}\,f(t_{k+1}, x^{k+1}) \ \text{ pour } k \geq 0.$$

Dans le schéma du point milieu, l'approximation suivante a été utilisée :
$$x\left(t_{k+\frac{1}{2}}\right) = x\left(t_k\right) + \int_{t_k}^{t_{k+\frac{1}{2}}} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s \approx x\left(t_k\right) + \left(t_{k+\frac{1}{2}} - t_k\right) f\left(t_k, x\left(t_k\right)\right).$$

Nous reviendrons sur cette construction de méthodes d'approximation grâce aux formules de quadrature pour établir les schémas de Runge-Kutta. Evidemment, on aurait pu choisir des **pas de temps non constants**, c'est-à-dire $h_k = t_{k+1} - t_k$ la longueur entre deux temps consécutifs t_k et t_{k+1} dépendrait de $k \geq 0$. Il suffirait juste de changer h par h_k dans les formules ci-dessus, et dans ce cas, de désigner par $h = \max\limits_{k\geq 0} h_k$ la finesse de la grille, en vue d'indexer l'approximation correspondante par exemple.

4 Étude de convergence

L'étude de convergence d'un schéma aux différences finies consiste à explorer la proximité entre x^k et $x(t_k)$ lorsque le pas de temps h tend vers 0. Comme on s'est placé sur un intervalle $[0, T]$, on ne considère que les valeurs de k telles que : $0 \leq t_k \leq T$, c'est-à-dire : $0 \leq k \leq \frac{T}{h}$.

Définition 4.1. *(***Convergence***.) Le schéma est* **convergent** *si on a :*
$$\lim_{h\to 0} \max_{0\leq k\leq \frac{T}{h}} \|x(t_k) - x^k\| = 0,$$
où $\|\cdot\|$ désigne une norme sur $\mathbb{R}^d$.

Notons que le choix de la norme n'importe pas dans cette définition puisque toutes les normes sur $\mathbb{R}^d$ sont équivalentes. On étudie pour commencer la convergence du schéma d'Euler explicite pour un problème de Cauchy
$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in]0, T[, \quad x(t_0) = x_0,$$
dont on suppose que la solution $t \mapsto x(t)$ existe sur $[0, T]$. On introduit **l'erreur** du schéma :
$$e^k = x(t_k) - x^k.$$

Remarquons que l'on a : $e^0 = 0$.

Dans un premier temps, on s'intéresse à la précision de l'approximation de la dérivée $g'(t)$ d'une fonction $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ par la différence finie $\Delta_h g(t)$. Si g est de classe $\mathscr{C}^2$, la formule de Taylor-Lagrange permet d'écrire

$$\Delta_h g(t) = \frac{g(t) + hg'(t) + \frac{h^2}{2}g''(s) - g(t)}{h} = g'(t) + \frac{h}{2}g''(s),$$

avec s dans $]t, t+h[$. Par conséquent, si : $[t, t+h] \subset [0,T]$, on a l'estimation :

$$|g'(t) - \Delta_h g(t)| \leq \frac{h}{2}\,|g''(s)| \leq \frac{M_2}{2}h,$$

avec : $M_2 = \|g''\|_\infty = \max\limits_{s \in [0,T]} |g''(s)|$, qui montre que la précision de l'approximation de $g'(t)$ par $\Delta_h g(t)$ est d'ordre h.
Si on applique cette remarque à chacune des n composantes x_i de la solution x en supposant que celle-ci soit de classe $\mathscr{C}^2$, c'est-à-dire que toutes les composantes le soient, on obtient :

$$\|x'(t) - \Delta_h x(t)\|_\infty \leq \frac{M_2}{2}h,$$

avec : $M_2 = \|x''\|_\infty = \max\limits_{i \in [\![0,n]\!]} |x_i''|$. Notons que la régularité $\mathscr{C}^2$ de la solution $t \mapsto x(t)$ est assurée dans le cas des équations autonomes $x' = Ax + b$.

On introduit à présent une quantité qui mesure de combien la solution exacte $x(t)$ **ne vérifie pas** l'équation définissant le schéma explicite, en posant :

$$c_k = \frac{x\left(t_{k+1}\right) - x\left(t_k\right)}{h} - f\left(t_k, x\left(t_k\right)\right).$$

Cette quantité est appelée la **l'erreur de consistance du schéma**. D'après ce qu'on vient de voir, on peut écrire

$$\|c_k\|_\infty = \|\Delta_h x(t_k) - x'(t_k)\|_\infty \leq \frac{M_2}{2}h.$$

Le schéma est dit **consistant à l'ordre 1** car h apparaît à la puissance 1 à droite de cette inégalité.
En faisant la soustraction entre la définition de l'erreur de consistance et l'identité

$$0 = \frac{x^{k+1} - x^k}{h} - f\left(t_k, x^k\right),$$

qui définit le schéma, on obtient une relation entre e^k et e^{k+1} :

$$e^{k+1} = e^k + h\left(f\left(t_k, x\left(t_k\right)\right) - f\left(t_k, x^k\right)\right) + hc_k.$$

Afin d'aller loin, on fait une hypothèse sur f donnée par la définition suivante.

Définition 4.2. *La fonction f est* **lipschitzienne** *en x uniformément en t si, et seulement s'il existe une constante L telle que pour tous t de $[0,T]$ et $(x, \tilde{x})$ de $\mathbb{R}^d$, on ait :*

$$\|f(t,x) - f(t,\tilde{x})\| \leq L\,\|x - \tilde{x}\|,$$

où $\|\cdot\|$ désigne une norme sur $\mathbb{R}^d$.

Notons que le choix de la norme n'importe pas dans cette définition, à une modification près de la constante L, puisque toutes les normes sur $\mathbb{R}^d$ sont équivalentes. Remarquons également que cette hypothèse est toujours vérifiée dans le cas des équations différentielles linéaires autonomes, $x' = Ax + b$, avec la constante : $L = \|A\|$.
Sous l'hypothèse que f soit lipschitzienne en x uniformément en t, et en utilisant la norme $\|\cdot\|_\infty$, la relation entre e^k et e^{k+1} entraîne

$$\left\|e^{k+1}\right\|_\infty \leq (1 + hL)\left\|e^k\right\|_\infty + h\left\|c_k\right\|_\infty,$$

et par conséquent, d'après l'estimation établie pour $\|c_k\|_\infty$,

$$\left\|e^{k+1}\right\|_\infty \leq (1 + hL)\left\|e^k\right\|_\infty + \frac{M_2}{2}h^2.$$

Par itération ou par récurrence et en utilisant $e^0 = 0$, on obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
\left\|e^k\right\|_\infty &\leq (1 + hL)\left\|e^{k-1}\right\|_\infty + \frac{M_2}{2}h^2 \\
&\leq (1 + hL)^2\left\|e^{k-2}\right\|_\infty + (1 + (1 + hL))\frac{M_2}{2}h^2 \\
&\leq \cdots \leq \left(1 + (1 + hL) + \cdots + (1 + hL)^{k-1}\right)\frac{M_2}{2}h^2 \\
&\leq \frac{(1 + hL)^k - 1}{L}\frac{M_2}{2}h.
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que : $hk \leq T$, l'inégalité : $1 + \alpha \leq \mathrm{e}^\alpha$ pour $\alpha > 0$, on obtient ainsi pour tout k tel que t_k soit dans $[0, T]$ l'estimation :

$$\left\|e^k\right\|_\infty \leq Ch, \quad C = \frac{\left(\mathrm{e}^{LT} - 1\right)M_2}{2L}.$$

On a ainsi démontré le résultat suivant.

Théorème 4.3. *Si la solution x de l'équation différentielle existe et est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0, T]$ et si f est lipschitzienne en x uniformément en t, alors le schéma explicite est convergent et vérifie de plus l'estimation d'erreur*

$$\left\|e^k\right\|_\infty \leq Ch,$$

où la constante C dépend de T, de la constante de Lipschitz L et des normes sup des dérivées des composantes de x sur $[0, T]$. On dit que ce schéma est **d'ordre 1** *ou encore* **converge à l'ordre 1**.

Remarque 4.4. *L'hypothèse que f soit* ***lipschitzienne en x uniformément en t****, joue un rôle central dans la théorie qui établit l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy, et que nous ne présentons pas ici, et a été l'objet de la première partie l'Unité d'Enseignement Équations Différentielles.*

Il est possible de mettre en œuvre une analyse similaire pour le **schéma implicite**, en partant de la remarque que la différence finie arrière $\Delta_{-h}x(t)$ soit également une approximation de $x'(t)$ dont l'erreur en norme ℓ^∞ est contrôlée par $\frac{M_2}{2}h$. L'erreur de consistance, qui est ici définie par

$$c_k = \frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{h} - f(t_{k+1}, x(t_{k+1})),$$

est à nouveau majorée par

$$\|c_k\|_\infty \leq \frac{M_2}{2}h.$$

Une étude approfondie permet de prouver que si f est lipschitzienne en x uniformément en t, alors le schéma implicite est bien défini pour tout k lorsque $h > 0$ est suffisamment petit, et que l'on aboutit à une estimation d'erreur du **premier ordre** similaire à celle du théorème 1.

L'analyse de convergence pour le schéma du point milieu fait appel à l'étude de la **différence finie centrée**

$$\delta_h g(t) = \frac{g\left(t+\frac{h}{2}\right) - g\left(t-\frac{h}{2}\right)}{h},$$

qui est aussi une approximation de $g'(t)$. Si on utilise la formule de Taylor-Lagrange au point t à l'ordre 3, en supposant que g soit de classe $\mathscr{C}^3$, on constate que les termes d'ordre deux s'annulent par symétrie et que l'on ait ainsi

$$\delta_h g(t) = g'(t) + \frac{\frac{1}{6}\left(\frac{h}{2}\right)^3\left(g^{(3)}(s) + g^{(3)}(u)\right)}{h},$$

avec : $s \in \left]t, t+\frac{h}{2}\right[$, et, $u \in \left]t-\frac{h}{2}, t\right[$. Grâce au théorème des valeurs intermédiaires, il existe r dans $\left]t-\frac{h}{2}, t+\frac{h}{2}\right[$ tel que : $g^{(3)}(r) = \frac{1}{2}\left(g^{(3)}(s) + g^{(3)}(u)\right)$, et :

$$\delta_h g(t) = g'(t) + \frac{h^2}{24} g^{(3)}(r).$$

On aboutit ainsi à l'estimation :

$$\left|g'(t) - \delta_h g(t)\right| \leq \frac{M_3}{24} h^2,$$

avec : $M_3 = \left\|g^{(3)}\right\|_\infty = \max\limits_{s\in[0,T]} \left|g^{(3)}(s)\right|$, qui montre que la différence finie centrée est une approximation plus précise de la dérivée que les différences finies arrière et avant. On obtient de même pour la fonction vectorielle x solution de l'équation différentielle

$$\left\|x'(t) - \delta_h x(t)\right\|_\infty \leq \frac{M_3}{24} h^2,$$

avec : $M_3 = \max\limits_{i\in[\![0,n]\!]} \left\|x_i^{(3)}\right\|_\infty$.
L'erreur de consistance est ici définie par

$$c_k = \frac{x\left(t_{k+1}\right) - x\left(t_k\right)}{h} - f\left(t_{k+\frac{1}{2}}, x\left(t_k\right) + \frac{h}{2} f\left(t_k, x\left(t_k\right)\right)\right).$$

En faisant l'hypothèse que x soit de classe $\mathscr{C}^3$ et que f soit lipschitzienne en x uniformément en t, on peut la majorer en écrivant :

$$\begin{aligned}
\left\|c_k\right\|_\infty &\leq \left\|\frac{x\left(t_{k+1}\right) - x\left(t_k\right)}{h} - x'\left(t_{k+\frac{1}{2}}\right)\right\|_\infty + \left\|x'\left(t_{k+\frac{1}{2}}\right) - f\left(t_{k+\frac{1}{2}}, x\left(t_k\right) + \frac{h}{2} f\left(t_k, x\left(t_k\right)\right)\right)\right\|_\infty \\
&\leq \left\|\delta_h x\left(t_{k+\frac{1}{2}}\right) - x'\left(t_{k+\frac{1}{2}}\right)\right\|_\infty + \left\|f\left(t_{k+\frac{1}{2}}, x\left(t_{k+\frac{1}{2}}\right)\right) - f\left(t_{k+\frac{1}{2}}, x\left(t_k\right) + \frac{h}{2} f\left(t_k, x\left(t_k\right)\right)\right)\right\|_\infty \\
&\leq \frac{M_3}{24} h^2 + L\left\|x\left(t_{k+\frac{1}{2}}\right) - x\left(t_k\right) - \frac{h}{2} f\left(t_k, x\left(t_k\right)\right)\right\|_\infty \\
&\leq \frac{M_3}{24} h^2 + L\frac{h}{2}\left\|\Delta_{\frac{h}{2}} x\left(t_k\right) - x'\left(t_k\right)\right\|_\infty \\
&\leq \left(\frac{M_3}{24} + L\frac{M_2}{8}\right) h^2.
\end{aligned}$$

En faisant la soustraction entre la définition de l'erreur de consistance et l'identité

$$0 = \frac{x^{k+1} - x^k}{h} - f\left(t_{k+\frac{1}{2}}, x^k + \frac{h}{2} f\left(t_{k+\frac{1}{2}}, x^k\right)\right),$$

qui définit le schéma, on obtient une relation entre e^k et e^{k+1} :

$$e^{k+1} = e^k + h\left(f\left(t_{k+\frac{1}{2}}, x(t_k) + \frac{h}{2} f(t_k, x(t_k))\right) - f\left(t_{k+\frac{1}{2}}, x^k + \frac{h}{2} f\left(t_k, x^k\right)\right)\right) + hc_k.$$

En utilisant l'hypothèse que f soit lipschitzienne en x uniformément en t, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left\|e^{k+1}\right\|_\infty &\leq \left\|e^k\right\|_\infty + hL\left\|x(t_k) + \frac{h}{2} f(t_k, x(t_k)) - x^k - \frac{h}{2} f\left(t_k, x^k\right)\right\|_\infty + \|hc_k\|_\infty \\
&\leq (1 + hL)\left\|e^k\right\|_\infty + hL\left\|\frac{h}{2} f(t_k, x(t_k)) - \frac{h}{2} f\left(t_k, x^k\right)\right\|_\infty + \|hc_k\|_\infty \\
&\leq \left(1 + hL + \frac{1}{2}(hL)^2\right)\left\|e^k\right\|_\infty + \left(\frac{M_3}{24} + L\frac{M_2}{8}\right) h^3.
\end{aligned}$$

En terminant les calculs comme pour le schéma d'Euler explicite, on obtient finalement le résultat suivant.

Théorème 4.5. *Si la solution x de l'équation différentielle existe et est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $[0, T]$ et si f est lipschitzienne en x uniformément en t, alors le* ***schéma du point milieu*** *est convergent, et vérifie de plus l'estimation d'erreur*

$$\max_{0 \leq k \leq \frac{T}{h}} \left\|x(t_k) - x^k\right\|_\infty \leq Ch^2,$$

où la constante C dépend de T, de la constante de Lipschitz L et des normes sup des dérivées secondes et troisièmes des composantes de x sur $[0, T]$. On dit que ce schéma est ***d'ordre 2*** *ou encore* ***converge à l'ordre 2.***

De manière similaire, on montre que le **schéma de Crank-Nicolson** **converge à l'ordre 2**.

Théorème 4.6. *Si la solution x de l'équation différentielle existe et est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $[0, T]$ et si f est lipschitzienne en x uniformément en t, alors le* ***schéma de Crank-Nicolson*** *est convergent, et vérifie de plus l'estimation d'erreur*

$$\max_{0 \leq k \leq \frac{T}{h}} \left\|x(t_k) - x^k\right\|_\infty \leq Ch^2,$$

où la constante C dépend de T, de la constante de Lipschitz L et des normes sup des dérivées secondes et troisièmes des composantes de x sur $[0, T]$. Le schéma de Crank-Nicolson est ainsi ***d'ordre 2*** *ou encore* ***converge à l'ordre 2.***

L'analyse de convergence a conduit à l'établissement d'une estimation de l'erreur $\left\|e^{k+1}\right\|_\infty$ en fonction de deux termes :

(i). une erreur de consistance c_k,

(ii). un terme qui est le produit deux facteurs dont l'un est $\left\|e^k\right\|_\infty$, le second facteur donne une idée de « l'amplification » de l'erreur après une itération d'utilisation de la méthode considérée.

Nous l'appliquons aux schémas de type

$$x^{k+1} = x^k + h\,\Phi(t_k, h, x^k) \;\text{ pour } k \geq 0 \qquad (**)$$

qui sont dits à **un pas**. La fonction Φ est dite **incrément**. La fonction Φ pour les exemples déjà rencontrés s'écrivent comme suit :

1. schéma d'Euler explicite :
$$\Phi(t_k, h, x^k) = f(t_k, x^k), \text{ pour } k \geq 0 \text{ ;}$$
2. schéma d'Euler implicite :
$$\Phi(t_k, h, x^k) = f(t_k + h, \varphi(t_k, h, x^k)), \text{ pour } k \geq 0 \text{ ;}$$
où $\varphi(t_k, h, x^k)$ est solution de l'équation d'inconnue z : $z = x^k + hf(t_k + h, z)$;
3. schéma du point milieu :
$$\Phi(t_k, h, x^k) = f\left(t_k + \frac{h}{2}, x^k + \frac{h}{2} f\left(t_k, x^k\right)\right), \text{ pour } k \geq 0 \text{ ;}$$
4. schéma de Crank-Nicolson :
$$\Phi(t_k, h, x^k) = \frac{1}{2}\left(f(t_k, x^k) + f(t_k + h, \varphi(t_k, h, x^k))\right), \text{ pour } k \geq 0,$$
où $\varphi(t_k, h, x^k)$ est solution de l'équation d'inconnue z : $z = x^k + \frac{h}{2}\left(f(t_k, x^k) + f(t_k + h, z)\right)$.

Définition 4.7. *(***Erreur locale de consistance ou erreur locale de troncature***.) On appelle* ***erreur locale de consistance ou erreur locale de troncature du schéma (∗∗)****, la quantité :*
$$c_k = \frac{x\left(t_{k+1}\right) - x\left(t_k\right)}{h} - \Phi(t_k, h, x(t_k)).$$

C'est exactement l'erreur de consistance que nous avons définie lorsque nous nous sommes intéressés au schéma d'Euler au début de ce paragraphe. Elle est distincte de l'erreur globale de consistance ou erreur globale de troncature du schéma définie comme suit.

Définition 4.8. *(***Consistance, erreur globale de consistance ou erreur globale de troncature***.) On appelle* ***erreur globale de consistance ou erreur globale de troncature du schéma (∗∗)****, la quantité :*
$$h \sum_{0}^{N-1} \|c_k\|$$
où c_k est l'erreur locale de consistante.
On dit que le schéma $(**)$ est ***consistant*** *si*
$$\lim_{h \to 0}\left(h \sum_{k=0}^{N-1} \|c_k\|\right) = 0.$$
On dit que le schéma $(**)$ est ***consistant d'ordre p*** *ou d'****ordre p*** *s'il existe $C > 0$, indépendant de h, tel que*
$$h \sum_{k=0}^{N-1} \|c_k\| \leq Ch^p.$$

Remarque 4.9. *Introduisons la fonction constante par morceaux :*
$$c_{\Delta,h} : t \in [0, T] \mapsto \sum_{k=0}^{N-1} c_k \mathbf{1}_{[kh,\,(k+1)h]}(t).$$
Alors la quantité $h \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|$ s'interprète comme la norme L^1 de cette fonction :
$$h \sum_{k=0}^{N-1} |c_k| = \int_{t=0}^{T} |c_{\Delta,h}(t)| \,\mathrm{d}t.$$