DIFERENCIJALNI RAČUN FUNKCIJA JEDNE PROMENLJIVE

23. decembar 2020

Definicija izvoda

Neka je funkcija $y = f(x)$ definisana na intervalu (a, b).

- Za $x \in (a, b)$ se broj $\Delta x \neq 0$ za koji je $x + \Delta x \in (a, b)$ naziva **priraštaj argumenta** funkcije $f(x)$ u tački $x \in (a, b)$
- Za dati priraštaj Δx se veličina $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ naziva **priraštaj funkcije** $f(x)$ u tački $x \in (a, b)$, $x + \Delta x \in (a, b)$

Definicija

Ako postoji granična vrednost

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

onda se ta granična vrednost zove **izvod funkcije** $f(x)$ *u tački* x *i označava se sa* $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ *ili* $\mathbf{y}'$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

Izvod i neprekidnost

Teorema

Ako funkcija ima izvod u nekoj tački x, ona je u toj tački i neprekidna.

Primer

Funkicja $f(x) = |x|$ je neprekidna u tački $x = 0$ ali nema izvod u $x = 0$ jer je

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \Delta x > 0 \\ -1, & \Delta x < 0 \end{cases}.$$

Ako funkcija $y = f(x)$ ima izvod u tački x tada važi

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$$

Primer

Koristeći definiciju izračunati izvode sledećih funkcija.

1. $f(x) = c$,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0.$$

2. $f(x) = x^n$,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} (\Delta x)^{k-1} = nx^{n-1}.$$

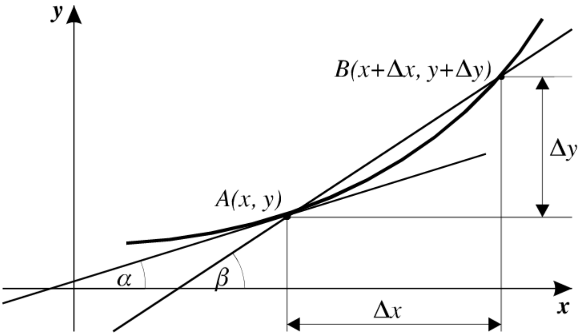
3. $f(x) = a^x$, $a > 0$,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

4. $f(x) = \sin x$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\Delta x} \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x + \Delta x}{2} \\ &= \cos x \end{aligned}$$

Geometrijska interpretacija izvoda



- $A(x, y)$, $B(x + \Delta x, y + \Delta y)$ su tačke grafika, prava AB je sečica
- ako $B \to A$ prava postaje tangenta krive u tački A
- koeficijent pravca tangente, ako je $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$,

$$\mathrm{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Geometrijska interpretacija izvoda

Ako je ugao koji tangenta gradi sa pozitivnim delom $x-$ose različit od $\frac{\pi}{2}$, jednačina tangente u tački sa grafika $M(x_0, y_0)$ je

$$t: \qquad y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Jednačina normale na grafik funkcije, tj. prave koja je tački M normalna na t, je

$$n: \quad y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

pod uslovom da je $f'(x_0) \neq 0$. Ako je $f'(x_0) = 0$ jednačina tangente je

$$y = f(x_0),$$

dok je prava

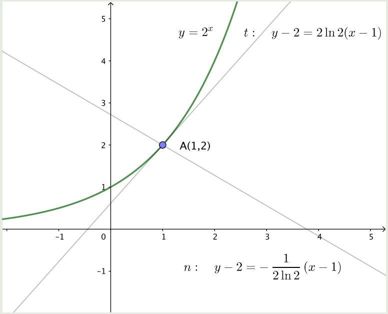
$$x = x_0$$

normala na grafik krive.

Geometrijska interpretacija izvoda

Primer

Napisati jednačinu tangente i normale na grafik funkcije $y = 2^x$ *u tački* $A(1, y_0)$.



Jednostrani izvodi

U nekim slučajevima potrebno je posmatrati postojanje izvoda sa leve i desne strane tačke x, takozvane *jednostrane izvode.*

- **Desni izvod** funkcije $f(x)$ nad $[x, x+\delta)$, $\delta > 0$ je

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad x + \Delta x \in [x, x+\delta)$$

- **Levi izvod** funkcije $f(x)$ nad $(x-\delta, x]$, $\delta > 0$ je

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad x + \Delta x \in (x-\delta, x]$$

$f(x)$ ima izvod u x akko postoje jednostrani izvodi i važi

$$f'_-(x) = f'_+(x) = f'(x).$$

Levi i desni izvod funkcije definišu položaj leve i desne tangente.

Jednostrani izvodi

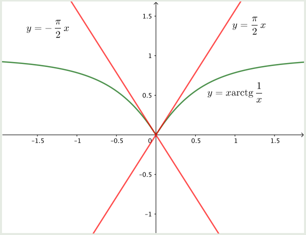
Primer

Izračunati izvod u tački $a = 0$, ako postoji, funkcije:

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

$$f'_{+}(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x \operatorname{arctg} \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\pi}{2}$$

$$f'_{-}(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta x \operatorname{arctg} \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = -\frac{\pi}{2}$$



$$t_1: \quad y - 0 = \frac{\pi}{2}(x - 0)$$

$$t_1: \quad y = \frac{\pi}{2}x$$

$$t_2: \quad y - 0 = -\frac{\pi}{2}(x - 0)$$

$$t_2: \quad y = -\frac{\pi}{2}x$$

Jednostrani izvodi

Primer

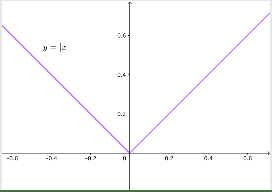
Izračunati izvod sledećih funkcija u tački $a = 0$, *ako postoje:*

$$g(x) = |x|, \quad h(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

$$g'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{g(0+\Delta x) - g(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$g'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

pa je leva polutangenta funkcije $g(x)$ *prava sa koeficijentom pravca* $\operatorname{tg} \alpha = -1$ *tj. prava* $y = -x$ *dok je desna polutangenta prava sa koeficijentom pravca* $\operatorname{tg} \alpha = 1$ *tj. prava* $y = x$.



$$\begin{aligned} t_1 &: \quad y - 0 = 1 \cdot (x - 0) \\ t_1 &: \quad y = x \\ t_2 &: \quad y - 0 = -1 \cdot (x - 0) \\ t_2 &: \quad y = -x \end{aligned}$$

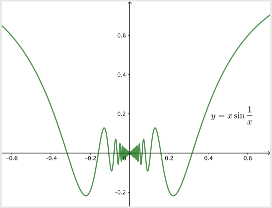
Izračunati izvod sledećih funkcija u tački $a = 0$, ako postoje:

$$h(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

$$h'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{h(0+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x \sin \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \sin \frac{1}{\Delta x}$$

$$h'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{h(0+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta x \sin \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \sin \frac{1}{\Delta x}$$

Prethodne granične vrednosti ne postoje pa ne postoji ni leva ni desna polutangenta.



Diferencijabilnost

Funkcija $f(x)$ je definisana nad (a, b) i $x \in (a, b)$.

Definicija

Za funkciju $f(x)$ se kaže da je diferencijabilna u tački x ako se Δy može napisati u obliku

$$\Delta y = D\Delta x + \alpha\Delta x,$$

pri čemu $\alpha \to 0$ kada $\Delta x \to 0$, dok D ne zavisi od Δx.

Teorema

Potreban i dovoljan uslov da funkcija $f(x)$ bude diferencijabilna u tački x je da ima izvod u toj tački.

Teorema

Ako je funkcija diferencijabilna u tački x onda je ona neprekidna u toj tački.

Tablica izvoda

$f(x)$	$f'(x)$	važi za	$f(x)$	$f'(x)$	važi za
x^n	nx^{n-1}	$x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert < 1$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$	$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert < 1$
a^x	$a^x \ln a$	$a > 0, a \neq 1, x > 0$	$\mathrm{arctg}\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, a \neq 1, x > 0$	$\mathrm{arcctg}\, x$	$\frac{-1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$	$\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{ch}\, x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$	$\mathrm{ch}\, x$	$\mathrm{sh}\, x$	$x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$\mathrm{th}\, x$	$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	$x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{ctg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$\mathrm{cth}\, x$	$-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$	$x \neq 0$

Osobine izvoda

Teorema

Ako funkcije $u = u(x)$, $v = v(x)$ *imaju izvod u tački* x, *tada i funkcije* $u(x) \pm v(x)$, $u(x) \cdot v(x)$, $\dfrac{u(x)}{v(x)}$, $(v(x) \neq 0)$ *i* $c \cdot u(x)$ *imaju izvod u toj tački i važi da je:*

1. $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$,
2. $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$,
3. $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$,
4. $[c\ u(x)]' = c\ u'(x)$.

Osobine izvoda

Primer

Koristeći pravila diferenciranja izračunati izvode sledećih funkcija:

$$f(x) = \operatorname{tg} x,\ g(x) = e^x \ln x,\ h(x) = x^4 \ln x + \frac{2x^3}{x+1}.$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x - (-\sin^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \\
g'(x) &= (e^x)' \cdot \ln x + e^x \cdot (\ln x)' \\
&= e^x \cdot \ln x + \frac{e^x}{x}, \\
h'(x) &= (x^4 \ln x)' + \left(\frac{2x^3}{x+1}\right)' \\
&= 4x^3 \cdot \ln x + x^4 \cdot \frac{1}{x} + \frac{6x^2(x+1) - 2x^3 \cdot 1}{(x+1)^2}
\end{aligned}$$

Izvod složene funkcije

Izvod složene funkcije

Neka je data složena funkcija $y = f(x),\ u = g(y)$. *Ako* $g(y)$ *ima izvod u tački* y *i* $f(x)$ *ima izvod u tački* x, *tada je*

$$(g \circ f)'(x) = (g(f(x)))' = g'(y)f'(x).$$

Primer

Naći y' *za* $y = \sin^3 \sqrt[3]{x},\ x \neq 0$.
U ovom slučaju je

$$v = \sqrt[3]{x}, v' = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}},$$

$$u = \sin v, u' = \cos v$$

$$y = u^3, y' = 3u^2,$$

pa je

$$y' = 3u^2 \cos v \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = 3\sin^2 \sqrt[3]{x^2} \cos \sqrt[3]{x} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Izvod inverzne funkcije

Izvod inverzne funkcije

Neka je $f(x)$ *neprekidna strogo monotona funkcija definisana na intervalu* (a, b) *i* $f^{-1}(x)$ *njena inverzna funkcija. Ako funkcija* f *ima izvod* $f'(x)$ *u tački* $x \in (a, b)$ *i* $f'(x) \neq 0$, *tada funkcija* $f^{-1}(x)$ *ima izvod u tački* $y = f(x)$ *i važi*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Primer

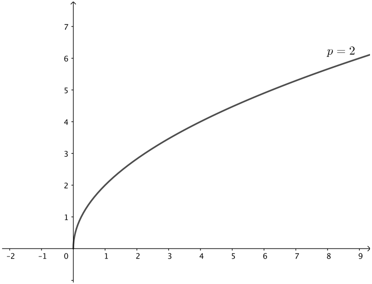
Naći y' *za* $y = \arcsin x$.

Kako je $f(x) = \arcsin x$ *važi da je* $f^{-1}(y) = g(y) = \sin y$, *pa je*

$$y' = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

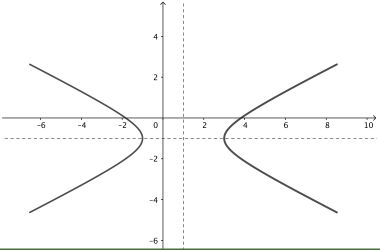
Izvod parametarski zadate funkcije

Parametarski zadate krive u ravni:



Parabola

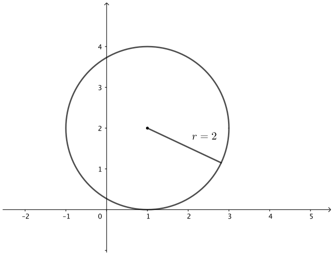
$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{2p}, \\ y(t) = t, \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}, p > 0.$$



Hiperbola

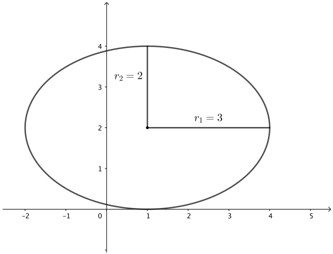
$$\begin{cases} x(t) = a\cosh t, \\ y(t) = b\sinh t, \end{cases}$$

Izvod parametarski zadate funkcije



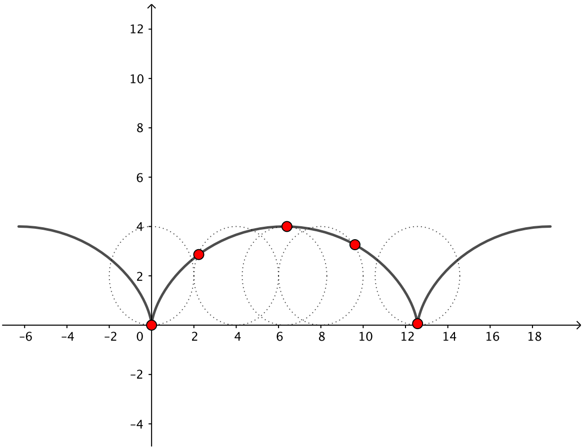
Kružnica $\mathcal{K}((a, b), r)$

$$\begin{cases} x(t) = a + r\cos t, \\ y(t) = b + r\sin t, \end{cases}$$



Elipsa

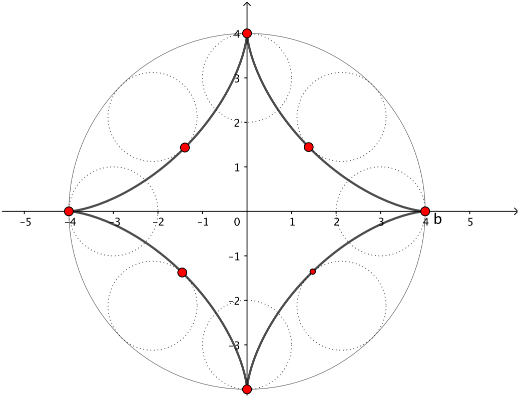
$$\begin{cases} x(t) = a + r_1\cos t, \\ y(t) = b + r_2\ \sin t, \end{cases}$$



Cikloida

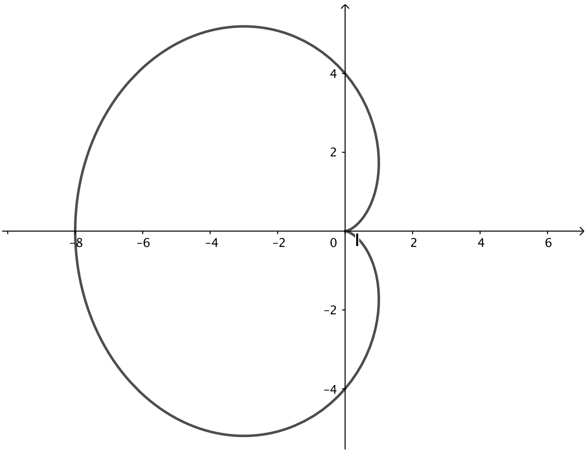
$$\begin{cases} x(t) = a(t - \sin t), \\ y(t) = a(1 - \cos t), \end{cases}$$

Izvod parametarski zadate funkcije



Astroida

$$\begin{cases} x(t) = a\cos^3 t, \\ y(t) = a\sin^3 t, \end{cases}$$



Kardioida

$$\begin{cases} x(t) = 2a(1-\cos t)\cos t, \\ y(t) = 2a(1-\cos t)\sin t, \end{cases}$$

Izvod parametarski zadate funkcije

Neka je nad $I \subset \mathbb{R}$ definisane funkcije jedančinama $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in I$. Neka važe sledeći uslovi

- postoji inverzna funkcija za $\varphi(t)$, $t = \varphi^{-1}(x)$
- $y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = f(x)$ je definisana nad skupom $\{\varphi(t) : t \in I\}$

Tada je jednačinama $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in I$ funkcija $f(x)$ zadata u parametarskom obliku i promenljivu t zovemo parametrom.

Izvod parametarski zadate funkcije

Neka je data funkcija $y = f(x)$ u parametarskom obliku $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in I$. Ako neprekidne funkcije $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ imaju izvode u tački $t \in (a, b)$ i ukoliko je $\varphi'(t) \neq 0$, tada funkcija $y = f(x)$ ima izvod u tački t i važi

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}.$$

Izvod parametarski zadate funkcije

Primer

Naći izvod $f'(x)$ funkcije zadate parametarski.

1. $\begin{cases} x(t) = a(\cos t + t\sin t), \\ y(t) = a(\sin t - t\cos t), \end{cases}$
   Iz $x'(t) = a(-\sin t + \sin t + t\cos t) = at\cos t$ *i*
   $y'(t) = a(\cos t - \cos t + t\sin t) = at\sin t$ *dobija se da je*
   $$f'(x) = \frac{at\ \sin t}{at\ \cos t} = \operatorname{tg} t.$$

2. $\begin{cases} x(t) = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y(t) = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$
   Iz $x'(t) = 2t\sin t + (t^2 - 2)\cos t + 2\cos t - 2t\sin t = t^2\cos t$ *i*
   $y'(t) = -2t\cos t - (2 - t^2)\sin t + 2\sin t + 2t\cos t = t^2\sin t$
   dobija se da je
   $$f'(x) = \frac{t^2\ \sin t}{t^2\ \cos t} = \operatorname{tg} t.$$

Osobine izvoda

Logaritamski izvod: *Neka je* $y = (f(x))^{g(x)}$, $f(x) > 0$. *Tada je*

$$y' = (f(x))^{g(x)} \left[g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right].$$

Primer

Za funkciju $f(x) = x^x$ *je* $u(x) = v(x) = x$ *pa je*

$$f'(x) = x^x \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^x(\ln x + 1).$$

Za $g(x) = (x^4 + 2) \sin^3 x \ln^2 x \operatorname{arctg} x$ *je*

$$\begin{aligned} \ln g(x) &= \ln((x^4 + 2) \sin^3 x \ln^2 x \operatorname{arctg} x) \\ &= \ln(x^4 + 2) + \ln(\sin^3 x) + \ln(\ln^2 x) + \ln(\operatorname{arctg} x) \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} g'(x) &= g(x) \left(\frac{1}{x^4 + 2} \cdot (4x^3) + \frac{1}{\sin^3 x} 3 \sin^2 x \cos x + \frac{1}{\ln^2 x} (2(\ln x) \frac{1}{x}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \frac{1}{1 + x^2} \right) \end{aligned}$$

Primer

Ispitati postojanje izvoda u tački $a = 0$ sledećih funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x > 0, \\ \sin x, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f'(0)^- &= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\sin \Delta x - \sin 0}{\Delta x} = 1 \\ f'(0)^+ &= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta^2 x + \Delta x - \sin 0}{\Delta x} = 1 \end{aligned}$$

pa je $f'(0) = 1$.

$$g(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0, \\ e^{-x}, & x \leq 0 \end{cases},$$

$$\begin{aligned} g'(0)^- &= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{g(0+\Delta x) - g(0)}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{e^{-\Delta x} - 1}{-\Delta x} = -\ln e = -1 \\ g'(0)^+ &= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{g(0+\Delta x) - g(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln e = 1 \end{aligned}$$

pa $g'(0)$ ne postoji.

Tablica izvoda

Primer

Ispitati postojanje izvoda u tački $a = 0$ *sledećih funkcija*

$$h(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

$$h'(0)^- = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{h(0+\Delta x) - h(0)}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta x^2 \sin \frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = 0$$

$$h'(0)^+ = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{h(0+\Delta x) - (0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x^2 \sin \frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = 0$$

pa je $h'(0) = 0$.

Primer

Izračunati izvod za $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ *i* $g(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1+x}{1-x}$.

$$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$g'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

Diferencijal funkcije

Ako je funkcija $f(x)$ diferencijabilna u tački $x \in (a, b)$ tada je

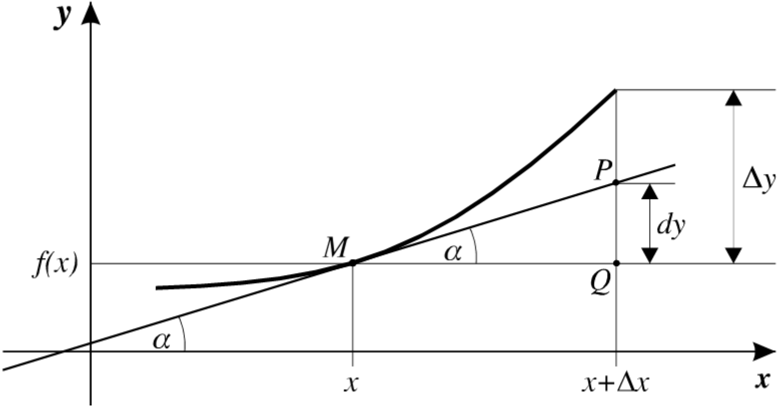
$$\Delta y = D\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

gde je $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0.$

- linearni deo priraštaja $f'(x)\Delta x = df(x) = dy$ naziva se diferencijal funkcije u tački x
- Lajbnicova oznaka za izvod $\quad dy = f'(x)dx \Rightarrow f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$
- Invarijantnost oblika: $y = f(u),\ u = g(x)$

$$dy = d(f(g(x))) = (f \circ g)'(x)dx = f'(u)g'(x)dx = f'(u)du$$

- Geometrijska interpretacija:



- priraštaj ordinate tangente na krivu $y = f(x)$ u tački $M(x, y)$ koji odgovara priraštaju Δx

Osobine diferencijala

Koristeći definiciju diferencijala i osobine izvoda funkcije može se pokazati sledeća teorema.

Osobine diferencijala

Ako su funkcije $u = u(x)$ i $v = v(x)$ diferencijabilne u tački x tada važi

1. $d(u(x) \pm v(x)) = du(x) \pm dv(x)$,
2. $d(u(x)v(x)) = v(x)du(x) + u(x)dv(x)$,
3. $d\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \frac{v(x)du(x) - u(x)dv(x)}{v^2(x)}, \; v(x) \neq 0$
4. $d(c\, u(x)) = c\, du(x)$.

Aproksimacija funkcija

Koristeći definiciju diferencijala

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

pri čemu $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$, može se u okolini tačke x, za male vrednosti Δx, aproksimirati vrednost funkcije $f(x + \Delta x)$ koristeći vrednost funkcije i njen izvod u tački x. Kako je

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x,$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x,$$

važi da je

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Aproksimacione formule

Za male vrednosti Δx važi

$$\begin{aligned}
\ln(1+x+\Delta x) &\approx \ln(1+x) + \frac{1}{1+x}\Delta x \\
\sin(x+\Delta x) &\approx \sin x + \Delta x \cos x \\
\cos(x+\Delta x) &\approx \cos x + \Delta x \sin x \\
e^{x+\Delta x} &\approx e^x(1+\Delta x)
\end{aligned}$$

dok u okolini nule, za $x = 0$ i $\Delta x = \alpha$ važi

$$\ln(1+\alpha) \approx \alpha, \quad \sin(\alpha) \approx \alpha, \quad e^\alpha \approx 1+\alpha.$$

Primer

Približno izračunati $\sqrt[3]{8.01}$.

U ovom slučaju se posmatra funkcija $f(x) = \sqrt[3]{x}$ *u okolini tačke* $x = 8$ *za* $\Delta x = 0.01$.

Kako je $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, *tj.* $f'(8) = \dfrac{1}{12}$, *približna vrednost funkcije je*

$$\sqrt[3]{8.01} = f(8.01) \approx f(8) + f'(8)\Delta x = 2 + \frac{0.01}{12} = 2.00083.$$

- Izvodi višeg reda
  - $y = f(x)$ je diferencijabilna nad (a, b),
  - $f'(x)$ je diferencijabilna u nekoj tački $x \in (a, b)$

$$f''(x) = \big(f'(x)\big)' \text{ je } \textit{drugi izvod} \text{ funkcije } f(x).$$

Slično se definišu viši izvodi funkcije $y = f(x)$, tj. važi

- $y = f^0(x),\ y' = f'(x),\ y'' = (f'(x))',\ \ldots, y^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$

Koristeći matematičku indukciju može se pokazati da je

- $(C\,u(x))^{(n)} = Cu^{(n)}(x), \quad (u(x) \pm v(x))^{(n)} = u^{(n)}(x) \pm v^{(n)}(x)$

Lajbnicova formula:

$$(u(x)v(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x).$$

Ukoliko funkcija ima n izvoda u tački x kaže se da je ona $n-$puta neprekidno diferencijabilna u tački x. Skup svih neprekidno diferencijabilnih funkcija na intervalu (a, b), u svakoj tački intervala (a, b), označava se sa $C^{(n)}(a, b)$.

Viši izvodi i diferencijali

Primer

Izračunati izvode reda n za sledeće funkcije:

$$f(x) = \ln(1+x), \quad g(x) = \sin x, \quad h(x) = \cos x.$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x},\ f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2},\ f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

$$g^{(4k)}(x) = \sin x,\ g^{(4k+1)}(x) = \cos x,$$
$$g^{(4k+2)}(x) = -\sin x,\ g^{(4k+3)}(x) = -\cos x.$$

$$h^{(4k)}(x) = \cos x,\ h^{(4k+1)}(x) = -\sin x,$$
$$h^{(4k+2)}(x) = -\cos x,\ h^{(4k+3)}(x) = \sin x.$$

Viši izvodi i diferencijali

- Za parametarski zadatu funkciju $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in(a,b)$
$$y''(x)=\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)'(t)\ t'(x)=\frac{y''(t)x'(t)-x''(t)y'(t)}{(x'(t))^2}\cdot\frac{1}{x'(t)}$$
- Za inverznu funkciju $x=f^{-1}(y)$, je
$$x''(y)=\left(\frac{1}{y'(x)}\right)'(y)=\left(\frac{1}{y'(x)}\right)'(y)\ x'(y)=\frac{-y''(x)}{(y'(x))^2}\frac{1}{y'(x)}$$

Primer

Izračunati drugi izvod sledeće funkcije: $\begin{cases} x(t)=a\cos^3 t\\ y(t)=a\sin^3 t\end{cases}$

$$\begin{aligned}
x'(t) &= -3a\cos^2 t\sin t,\\
x''(t) &= 3a\cos t(2\sin^2 t-\cos^2 t),\\
y'(t) &= 3a\sin^2 t\cos t\\
y''(t) &= 3a\sin t(2\cos^2 t-\sin^2 t)\\
f''(x) &= \frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}.
\end{aligned}$$

Viši izvodi i diferencijali

- Diferencijali višeg reda
  $f \in C^2[(a,b)]$ - diferncijal funkcije $dy = f'(x)dx$, označava se sa d^2y je drugi diferencijal.
  - $dy = f'(x)dx$ - diferencijal prvog reda
  - $d^2y = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'\,dx = f''(x)dx^2$ - diferencijal drugog reda
  - ako je $f^{(n-1)}(x)$ diferencijabilna, $n \geq 2$ tada je $d^ny = f^{(n)}(x)dx^n$, diferencijal $n-$tog reda
- $y = f(x)$
  $$d^2y = f''(x)\,dx^2$$
- $y = f(u),\ u = u(x)$ su dva puta diferencijabilne
  $$\begin{aligned} d^2y = d(f'(u)du) &= d(f'(u))du + f'(u)d(du) \\ &= f''(u)du^2 + f'(u)d^2u \end{aligned}$$

Osnovne teoreme diferencijalnog računa

Definicija

Neka je funkcija f definisana na $U(x_0)$.

- *Ako je* $(\forall x = x_0 + \Delta x \in U) \quad f(x) \leq f(x_0)$ *tada je* x_0 *je lokalni maksimum funkcije. Priraštaj funkcije u* x_0 *je tada* $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) \leq 0.$
- *Ako je* $(\forall x = x_0 + \Delta x \in U) \quad f(x) \geq f(x_0)$ *tada je* x_0 *je lokalni minimum funkcije. Priraštaj funkcije u* x_0 *je tada* $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) \geq 0.$
- x_0 *je tada lokalna ekstremna vrednost*

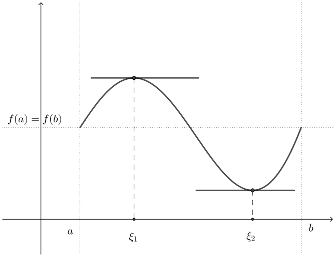
Ako je x_0 lokalna ekstremna vrednost tada je na $U(x_0)$ priraštaj $\Delta f(x_0)$ stalnog znaka.

Fermaova teorema

Ako funkcija ima u tački c lokalni ekstrem i ako je u toj tački diferencijabilna (ima izvod), tada je $f'(c) = 0.$

Rolova teorema

Ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna nad zatvorenim intervalom* $[a, b]$, *ima izvod nad otvorenim intervalom* (a, b) *i ako je* $f(a) = f(b)$, *tada postoji bar jedna tačka* $\xi \in (a, b)$ *takva da je* $f'(\xi) = 0$.



Geometrijski smisao: Postoji bar jedna tačka $\xi \in (a, b)$ takva da je tangenta krive $y = f(x)$ u tački $A(\xi, f(\xi))$ paralelna sa $x-$osom.

Mehanička interpretacija: Tačka se kreće po pravoj, u trenutku t se nalazi u $x(t)$. Neka je $x = x(t)$ neprekidna nad $[\alpha, \beta]$ i diferencijabilna nad (α, β). Ako je $x(\alpha) = x(\beta)$ tada postoji bar jedna tačka $\xi \in (a, b)$ u kojoj je brzina jednaka nuli.

Primer

Jednačina $\cos 10x + \cos 20x + \cos 30x = 0$ *ima bar jedno rešenje nad intervalom* $(0, \pi)$.
Za funkciju

$$f(x) = \frac{1}{10}\sin 10x + \frac{1}{20}\sin 20x + \frac{1}{30}\sin 30x$$

važi da je neprekidna i ima izvod u svakoj tački intervala $[0, \pi]$.
Takođe važi $f(0) = f(\pi) = 0$ *te su zadovoljeni uslovi Rolove teoreme. Prema tome postoji bar jedna tačka* $\xi \in (0, \pi)$ *takva da je* $f'(\xi) = 0$. *Kako je*

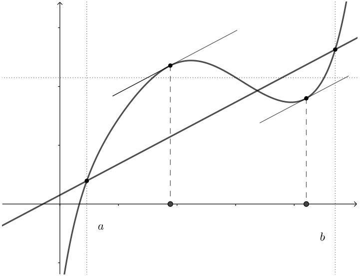
$$f'(x) = \cos 10x + \cos 20x + \cos 30x,$$

tačka ξ *je traženo rešenje jednačine* $\cos 10x + \cos 20x + \cos 30x = 0$.

Lagranžova teorema - teorema o srednjoj vrednosti

Ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna nad zatvorenim intervalom* $[a, b]$, *ima izvod nad otvorenim intervalom* (a, b), *tada postoji bar jedna tačka* $\xi \in (a, b)$ *takva da je*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$



Geometrijski smisao: Postoji tačka $\xi \in (a, b)$ takva da je tangenta u $C(\xi, f(\xi))$ paralelna pravoj kroz $A(a, f(a))$ i $B(b, f(b))$.

Mehanička interpretacija: Postoji tačka u kojoj je trenutna brzina jednaka srednjoj brzini u pomenutom intervalu.

Primer

Dokazati da za svako $0 < a < b$ *važi:* $\dfrac{b-a}{b} < \ln\dfrac{b}{a} < \dfrac{b-a}{a}$.

Za funkciju $f(x) = \ln x$ *važi da je neprekidna i ima iznod nad intervalom* $[a, b]$, $0 < a < b$, *pa su zadovoljeni uslovi Lagranžove teoreme. Prema tome, postoji tačka* $\xi \in (a, b)$ *takva da je*

$$\frac{\ln(b) - \ln(a)}{b-a} = \frac{1}{\xi},$$

tj.

$$\ln(b) - \ln(a) = \frac{1}{\xi}(b-a).$$

Zbog $a < \xi < b$ *važi da je*

$$\begin{aligned} \frac{1}{b}(b-a) \leq \quad & \tfrac{1}{\xi}(b-a) & \leq \frac{1}{a}(b-a) \\ \frac{b-a}{b} \leq \quad & \ln\frac{b}{a} & \leq \frac{b-a}{a}. \end{aligned}$$

Osnovne teoreme diferencijalnog računa

Primer

Primenom Lagranžove teoreme na funkciju $f(x) = \sin x$ *na proizvoljnom odsečku* $[a, b]$ *je*

$$\sin(b) - \sin(a) = \cos x_0(b - a),$$

odakle se dobija nejednakost $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$.

Košijeva teorema

Ako su funkcije $f(x), g(x)$ *neprekidne nad zatvorenim intervalom* $[a, b]$, *imaju izvode nad* (a, b) *i za svako* $x \in (a, b)$ *je* $g'(x) \neq 0$, *tada postoji bar jedna tačka* $\xi \in (a, b)$, *takva da je*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Osnovne teoreme diferencijalnog računa

Posledica

Rolov metod za razdvajanje korena funkcije *Ako za funkciju* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *važi:*

a) $f(x)$ *je neprekidna nad zatvorenim intervalom* $[a, b]$,

b) $f(x)$ *je diferencijabilna nad intervalom* (a, b) *i pri tome je* $f'(x) \neq 0$ *za* $x \in (a, b)$,

c) $f(a) \cdot f(b) < 0$

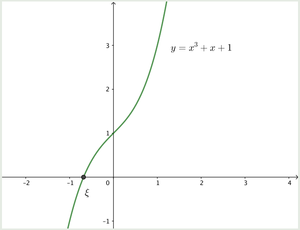
tada postoji samo jedna nula funkcije nad intervalom (a, b).

Posledica

Ako funkcije $f(x)$ *i* $g(x)$ *imaju jednake izvode:* $f'(x) = g'(x)$, $x \in I$, *tada se one razlikuju za konstantu nad intervalom* I.

Primer

Prethodna teorema se može primeniti prilikom određivanja nule funkcije $f(x) = x^3 + x + 1$.
Kako je funkcija $f(x)$ *neprekidna nad intervalom* $[-1, 0]$, *ima izvod* $f'(x) = 3x^2 + 1$ *nad* $(-1, 0)$ *pri čemu je* $f'(x) \neq 0$ *za svako* $x \in (-1, 0)$ *i važi da je* $f(0) = 1$ *i* $f(-1) = -1$ *prethodna teorema garantuje postojanje nule na intervalu* $[-1, 0]$.



Interval u kojem se nalazi nula se može smanjiti. Kako je $f(-\frac{1}{2}) > 0$, *nula se nalazi u intervalu* $[-1, -\frac{1}{2}]$. *Polovljenjem intervala na čijim krajevima funkcija ima različit znak dobija se aproksimacija rešenja sa željenom tačnošću.*

Ovo je jedan od numeričkih postupaka - postupak polovljenja.

Osnovne teoreme diferencijalnog računa

Posledica

Neka je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna nad* $[a, b]$ *i diferencijabilna nad* (a, b). *Ako postoji*

$$\lim_{x \to a^+} f'(x) \; (\lim_{x \to b^-} f'(x)),$$

tada postoji i $f'_+(a)$ $(f'_-(b))$ *i važi jednakost*

$$\lim_{x \to a^+} f'(x) = f'_+(a) \; (\lim_{x \to b^-} f'(x) = f'_-(b)).$$

Posledica

Ako funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ *ima izvod nad intervalom* I, *tada izvod* $f'(x)$ *ne može imati prekide prve vrste nad tim intervalom.*

Lopitalova teorema

Neka su funkcije $f,\ g: I \to \mathbb{R}$ *diferencijabilne nad* $U^o(a)$, $a \in I$, *neka je* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, $g'(x) \neq 0,\ x \in U^o(a)$ *i postoji* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. *Tada je*
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Slična teorema može se formulisati u slučaju da $x \to +\infty$ ili $x \to -\infty$.

Primer

1.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1.$$

2.
$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}.$$

Lopitalova teorema

Neka su funkcije $f,\ g : I \to \mathbb{R}$ *diferencijabilne nad* $U^o(a)$ *i neka je* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty,\ g'(x) \neq 0,\ x \in U^o(a)$ *i postoji* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Tada je
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Primer

1.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}} = -\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = -\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x = 0.$$

2.
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \operatorname{arctg} x}{x^3 + x^2 + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{1+x^2}}{3x^2 + 2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2}{(x^2+1)(3x^2+2x)} = 0.$$

Neodređenosti oblika $0 \cdot \infty,\ \infty - \infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$ se algebarskim operacijama svode na $\dfrac{0}{0}$ i $\dfrac{\infty}{\infty}$

Primer

$$1)\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0,$$

$$2)\quad \lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty,$$

$$3)\quad \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0,$$

$$4)\quad \lim_{x\to 0^+}x^2\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{2}=0,$$

$$5)\quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+(x-1)\frac{1}{x}}+$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+1-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}$$

Primer

$$6)\quad \lim_{x\to 0^+} x^{x^2}$$

Neka je $\lim_{x\to 0^+} x^{x^2} = A$. *Tada je*

$$\ln A = \lim_{x\to 0^+} \ln x^{x^2} = \lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x = 0,$$

iz zadatka 4). *Prema tome,* $\ln A = 0$, *pa je* $A = 1$, *tj.* $\lim_{x\to 0^+} x^{x^2} = 1$.

Uslovi u Lopitalovoj teoremi su samo dovoljni tako da se ne mogu primeniti u narednom zadatku.

Primer

$$7)\quad \lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x+\cos x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(1+\frac{\sin x}{x})}{x(1+\frac{\cos x}{x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}} = 1.$$

Tejlorova i Maklorenova teorema daju uslove za aproksimaciju funkcije polinomima koji se koriste za izračunavanje približne vrednosti funkcije u okolini neke tačke koristeći vrednosti funkcije i njenih izvoda u toj tački.
Pored toga, funkcije koje su definisane komplikovanim analitičkim izrazima mogu se zameniti polinomima.
Ako se za aproksimaciju funkcije $f(x)$ u okolini tačke a koristi polinomom $n-$tog stepena

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n$$

i greška aproksimacije je $R_n(x)$, tada je

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x).$$

Uslovi koji je potrebno da budu zadovoljeni je da se aproksimacija i funkcija slažu u tački a, tj. da važi da je
$P_n(a) = f(a)$, $P_n'(a) = f'(a)$, $\dots$, $P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$,

Osnovne teoreme diferencijalnog računa

Za funkciju f koja ima n izvoda u okolini $U(a)$ i $n+1-$vi izvod u tački a Tejlorov polinom stepena n je

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{(n)!}f^{(n)}(a) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \end{aligned}$$

Grešku aproksimacije $R_n(x)$ nazivamo ostatak.

- Lagranžov oblik ostatka: Funkcija f ima izvod reda $n+1$ u okolini tačke a. Tada postoji tačka α između tačaka a i x takva da je
$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\alpha).$$
- Peanov oblik ostatka: Funkcija f ima izvod reda $n-1$ u okolini tačke a i ima izvod reda n u tački a, tada je
$$R_n(x) = o((x-a)^n).$$

Specijalni slučaj Tejlorovog polinoma je u okolini tačke $a = 0$ i naziva se Maklorenov polinom

$$M_n(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + R_n(x).$$

Greška aproksimacije je tada

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x),\ 0 < \theta < 1.$$

Povećanjem stepena polinoma dobija se šira oblast u kojoj polinom dobro aproksimira funkciju.

Primer

Izračunati grešku nastalu aproksimacijom funkcije $f(x) = e^x$ na intervalu $x \in [0, 3]$ polinomom $n = 12$ stepena.

$$|R_{12}| \leq \frac{3^{13} \cdot e^3}{13!} < \frac{1}{1000} = 10^{-3}.$$

Maklorenov polinom za funkciju $f(x)$ i ostatak $R_n(x)$

1. $f(x) = e^x$
   Kako je za svako $n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(x) = e^x$, *to je*
   $$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1, \quad f^{(n+1)}(\alpha) = e^\alpha,$$
   pa je
   $$M_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \qquad R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^\alpha.$$

2. $f(x) = \sin x$
   Iz $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x$, $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x$ *se dobija da je*
   $$f^{(2n)}(0) = 0, \quad f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n,$$
   odakle je
   $$M_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$
   $$R_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos\alpha.$$

1. $f(x) = \cos x$
   Iz $f^{(2n-1)}(x) = (-1)^{n-1} \sin x$, $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x$ *se dobija da je*
   $$f^{(2n-1)}(0) = 0, \quad f^{(2n)}(0) = (-1)^n,$$
   odakle je $$M_{2n}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
   $$R_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cos \alpha.$$

2. $f(x) = \ln(1+x)$
   Iz $f'(x) = (1+x)^{-1}$, $f''(x) = -(1+x)^{-2}$, $f'''(x) = 2!(1+x)^{-3}$, $\ldots$, $f^{(n)}(x) = (-1)^n (n-2)!(1+x)^{1-n}$ *dobija se da je* $f^{(n-1)}(0) = (-1)^n (n-1)!$ *odakle je*
   $$M_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$
   $$R_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{1}{(1+\alpha)^{n+1}}$$

1. $f(x) = (1+x)^p,\ p \in \mathbb{R}$
   Iz $f'(x) = p(1+x)^{p-1},\ f''(x) = p(p-1)(1+x)^{p-2}, \ldots,$
   $f^{(n)}(x) = p(p-1)(p-n+1)(1+x)^{p-n}$ *dobija se da je*
   $f^{(n)}(0) = p(p-1)(p-n+1)$ *odakle je*
   $$M_n(x) = 1 + px + \binom{p}{2}x^2 + \cdots + \binom{p}{n}x^n,$$
   pri čemu je $\binom{p}{k} = \dfrac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}$. *Specijalno je za*
   $$p = -1, \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + R_n(x),$$
   $$R_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{(1+\alpha)^{n+1}}.$$

Primer

Konstruisati Tejlorov polinom drugog stepena u tački $a = 1$ za sledeće funkcije.

1) $f(x) = e^x$

Kako je $f(1) = f'(1) = f''(1) = e$ *dobija se da je*

$$T_2(x) = e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2.$$

2) $f(x) = \ln x$

Kako je $f(1) = 0,\ f'(1) = 1,\ f''(1) = -1$ *dobija se da je*

$$T_2(x) = 0 + 1(x-1) + \frac{-1}{2!}(x-1)^2.$$

3) $f(x) = x^2 e^{-2x}$

Kako je $f'(x) = 2e^{-2x}(x - x^2),\ f''(x) = e^{-2x}(2 - 8x + 4x^2)$ *i* $f(1) = e^{-2},\ f'(1) = 0,\ f''(1) = -2e^{-2}$ *dobija se da je*

$$T_2(x) = e^{-2} + 0 + \frac{-2e^{-2}}{2!}(x-1)^2.$$

Ispitivanje funkcija (monotonost)

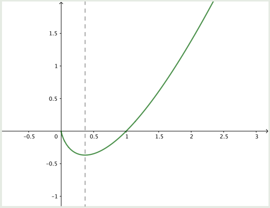
Neka funkcija $f(x)$ ima izvod nad intervalom I.

- *Ako je* $f'(x) > 0$ *tada je funkcija* $f(x)$ *monotono rastuća nad intervalom* I. *Ako je* $f'(x) \geq 0$ *tada je funkcija* $f(x)$ *monotono neopadajuća nad intervalom* I.
- *Ako je* $f'(x) < 0$ *tada je funkcija* $f(x)$ *monotono opadajuća nad intervalom* I. *Ako je* $f'(x) \leq 0$ *tada je funkcija* $f(x)$ *monotono nerastuća nad intervalom* I.

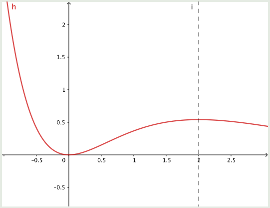
- *Ako je* $f(x)$ *monotono neopadajuća funkcija nad intervalom* I *tada je* $f'(x) \geq 0$, *za* $x \in I$.
- *Ako je* $f(x)$ *monotono nerastuća funkcija nad intervalom* I *tada je* $f'(x) \leq 0$, *za* $x \in I$.

Primer

Ispitati monotonost funkcija $f(x) = x \ln x$, $g(x) = x^2 e^{-x}$.



Kako je $f'(x) = \ln x + 1$ *funkcija je za* $x > e^{-1}$ *monotono rastuća dok je za* $0 < x < e^{-1}$ *monotono opadajuća.*



Kako je $f'(x) = e^{-x}(2x - x^2)$ *funkcija je za* $x \in (0, 2)$ *monotono rastuća dok je za* $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ *monotono opadajuća.*

Ispitivanje funkcija (Ekstremne vrednosti funkcija)

Teorema

Ako je funkcija u tački a neprekidna i postoji $\delta > 0$ takvo da

- *za* $x \in (a-\delta, a)$ *je* $f'(x) > 0,\ (f'(x) < 0)$,
- *dok za* $x \in (a, a+\delta)$ *je* $f'(x) < 0\ (f'(x) > 0)$

onda funkcija u tački a ima ekstremnu vrednost i to maksimum (minimum). PRVI IZVOD MENJA ZNAK

- stacionarne tačke - tačke u kojima je $f'(x) = 0$

Kandiati za ekstremnu vrednost funkcije kritične tačke:

- stacionarne tačke (nule prvog izvoda), tj. prvi izvod menja znak
- tačke u kojima funkcija nije diferencijabilna (prvi izvod ne postoji)

Ispitivanje funkcija (Ekstremne vrednosti funkcija)

Teorema

Neka je a stacionarna tačka funkcije f koja ima prvi izvod u okolini tačke a i drugi izvod u tački a.

- *Ako je $f''(a) > 0$ tada funkcija f ima strogi lokalni minimum.*
- *Ako je $f''(a) < 0$ tada funkcija f ima strogi lokalni maksimum.*

Primer

Za funkciju $f(x) = |x|$ je $x = 0$ strogi minimum.

Teorema

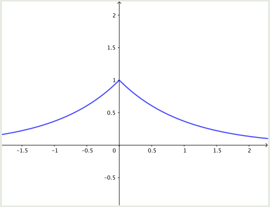
Neka je $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ i $f^{(n)}(a) \neq 0, n \geq 2$. Ako je n paran broj, funkcija $f(x)$ ima u tački a ekstremnu vrednost i to:

- *maksimum ako je $f^{(n)}(a) < 0$ odnosno,*
- *minimum ako je $f^{(n)}(a) > 0$.*

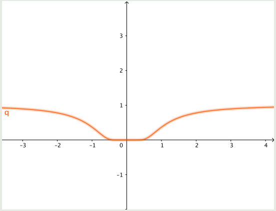
Ako je n neparan broj $f(x)$ nema ekstremnu vrednost u tački a.

Ispitivanje funkcija (Monotonost)

Primer



Za funkciju $f(x) = e^{-|x|}$ *je* $f'_-(x) = e^x$ *i* $f'_+(x) = -e^{-x}$ *dok je* $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$ *i* $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$. *Funkcija u* $x = 0$ *nema izvod ali ima u tački* $x = 0$ *strogi lokalni maksimum.*



Funkcija $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ *za* $x \neq 0$ *i* $f(0) = 0$, *ima lokalni minimum u* $x = 0$.

Ispitivanje funkcija (Konveksnost, konkavnost)

Ako postoji izvod funkcije $f(x)$ nad intervalom I tada je

- $f(x)$ je konveksna nad I ako za svako $a \in I,\ x \in I \setminus \{a\}$

  $$f(x) \geq y_t(x), \quad y_t = f(a) + f'(a)(x-a).$$

  tj. grafik funkcije se nalazi iznad tangente povučene u proizvoljnoj tački intervala I. Ako je $f(x) > y_t(x)$ tada je funkcija srogo konveksna.

- $f(x)$ je konkavna nad I ako za svako $a \in I,\ x \in I \setminus \{a\}$

  $$f(x) \leq y_t(x), \quad y_t = f(a) + f'(a)(x-a).$$

  tj. grafik funkcije se nalazi ispod tangente povučene u proizvoljnoj tački intervala I. Ako je $f(x) < y_t(x)$ tada je funkcija srogo konkavna.

Ispitivanje funkcija (Prevojne tačke)

Teorema

Neka je f dva puta diferencijabilna na (a, b).

- *Ako je $f''(x) > 0$ nad intervalom (a, b), tada je funkcija $f(x)$ strogo konveksna nad intervalom (a, b).*
- *Ako je $f''(x) \geq 0$ nad intervalom (a, b), tada je funkcija $f(x)$ konveksna nad intervalom (a, b).*
- *Ako je $f'(x)$ rastuća funkcija na (a, b) tada je f konveksna funkcija nad (a, b).*
- *Ako je $f''(c) > 0$ i f'' neprekidna funkcija u tački c, tada postoji okolina tačke c u kojoj je funkcija strogo konveksna.*

Analogna tvrđenja važe za konkavne funkcije.

Ispitivanje funkcija (Prevojne tačke)

Definicija

Za tačku $P(a, f(a))$ se kaže da je prevojna tačka funkcije $f(x)$ ako postoji okolina $(a-\delta, a+\delta)$ tačke a, takva da je funkcija $f(x)$ nad intervalom $(a-\delta, a)$ konkavna, a nad intervalom $(a, a+\delta)$ konveksna ili obrnuto.

Teorema

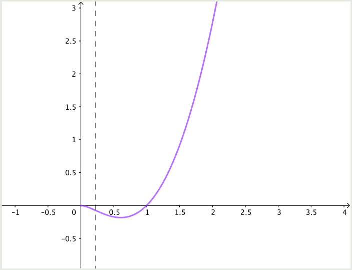
Ako je $P(a, f(a))$ prevojna tačka funkcije $f(x)$ i ako postoji $f''(a)$, tada je $f''(a) = 0$.

Kandiati za prevojne tačke funkcije:

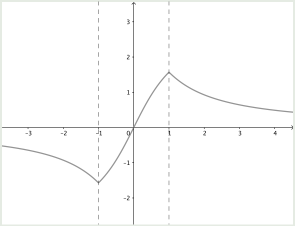
- nule drugog izvoda, tj. drugi izvod menja znak
- tačke u kojima drugi izvod ne postoji

Ispitivanje funkcija (Prevojne tačke)

Primer



Za funkciju $f(x) = x^2 \ln x$ *je* $f'(x) = x(2\ln x + 1)$ *i* $f''(x) = 2\ln x + 3$ *pa je za* $x = e^{-\frac{3}{2}}$ *tačka prevoja* $T(e^{-\frac{3}{2}} - 3e^{-\frac{3}{2}})$.



Funkcija $f(x) = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ *ima izvod* $f'(x) = \dfrac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)}$ *i* $f''(x) = \pm\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, *prevojna tačka je* $T_1(0,0)$ *i tačke u kojima ne postoji drugi izvod* $T_2(1, \frac{\pi}{2})$ *i* $T_3(-1, -\frac{\pi}{2})$.

Definicija

Za $f(x)$ definisanu nad intervalom (a, ∞), $a \in \mathbb{R}$, funkcija $\phi(x)$ je asimptota funkcije $f(x)$, kada $x \to \infty$, ako je

$$\lim_{x \to \infty} \left[f(x) - \phi(x)\right] = 0.$$

Slično, za $f(x)$ definisanu nad $(-\infty, a)$ funkcija $\phi(x)$ je asimptota funkcije $f(x)$ kada $x \to -\infty$, ako je

$$\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - \phi(x)\right] = 0.$$

- Geometrijski smisao: postoji $b \in \mathbb{R}$ takav da je razlika ordinata krivih $y = f(x)$ i $y = \phi(x)$ proizvoljno mala za $x > b$, $(x < b)$.

Prava $\phi(x) = mx + n$ je asimptota funkcije $y = f(x)$, tada

- za $m \neq 0$ je $\phi(x) = mx + n$ kosa asimptota
- za $m = 0$ je $\phi(x) = n$ horizontalna asimptota.

Za $x \to \infty$ je

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx].$$

Definicija

Funkcija $y = f(x)$ ima vertikalnu asimptotu u tački nagomilavanja $x = a$ definicionog skupa, ako funkcija bar sa jedne strane tačke a teži ∞ odnosno $-\infty$.

Primer

Ispitati postojanje asimptota za sledeće funkcije.

1. $f(x) = x^2$ *nema asimptota.*
2. $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ *ima asimptotu* $y = e$ *za* $x \to \pm\infty$.
3. $f(x) = x^2 e^{-x}$ *ima asimptotu* $y = 0$ *kada* $x \to +\infty$ *ali nema asimptotu kada* $x \to -\infty$.
4. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$ *ima asimptotu* $y = x$ *kada* $x \to +\infty$ *i pravu* $y = -x$ *kada* $x \to -\infty$.
5. *Za funkciju* $f(x) = \frac{1}{x-1}$ *je* $x = 1$ *vertikalna asimptota.*
6. *Za funkciju* $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ *je* $x = 0$ *vertikalna asimptota.*

Ispitivanje toka funkcije

- Obavezna grupa zahteva
  - određivanje oblasti definisanosti
  - određivanje nula funkcije
  - određivanje intervala monotonosti i ekstremnih vrednosti
  - određivanje intervala konveksnosti, konkavnosti i prevojnih tačaka
  - određivanje asimptota funkcije i ispitivanje položaja grafika u odnosu na asimptote
  - tangente funkcije u tačkama gde ne postoji $f'(x)$ i njegovo ponašanje u tim tačkama
  - skiciranje grafika funkcije
- Neobavezna grupa zahteva
  - znak funkcije
  - parnost i neparnost funkcije
  - periodičnost funkcije