Tipuri de ecuații

1. ec cu variabile separabile : $y' = f(x) \cdot g(y)$
2. ec omogene in sens Euler : $y' = f(x, y)$ $\left(z = \frac{x}{y} \right)$
3. ec liniare de ordinul 1 : $y' \cdot P(x) \cdot y = Q(x)$
4. ec dif de ordinul 2 rezolvabile :
   - 4.1. $y'' = f(x)$
   - 4.2 $y'' = f(x, y')$
   - 4.3 $y'' = f(x, y', y)$ sau $y'' + a(x) y' + b(x) y = f(x)$
     $a, b, f \sim$ fct const
5. sist de ec. liniare cu coef constanți

1. ec cu variabile separabile ~ EVS

$y' = f(x, y)$

$$\boxed{y' = f(x) \cdot g(y(x))}$$

$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y(x))$

$\frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx$

integrăm

$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$

$G(y) = F(x) + C.$

- dacă $\exists\, y_0$ a.î. $g(y_0) = 0 \Rightarrow y_0 \sim$ sol. singulară

$y' = y'(x) = \frac{\partial y(x)}{\partial x} = \frac{dy}{dx}$

exemplu:

$y' = 2x \cdot (1+y^2)$

$\frac{dy}{dx} = (2x)(1+y^2)$

$\frac{dy}{1+y^2} = 2x\, dx$

$\int \frac{1}{1+y^2} dy = \int 2x\, dx$

$\text{arctg}\, y = x^2 + C.$

$y = tg(x^2 + C)$

$y(x) = tg(x^2 + C)$

2. ec omogene în sens Euler

$$\boxed{y'(x) = g(x, y)}$$

$y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right)$

notăm $z(x) = \frac{y(x)}{x}$

$y(x) = x \cdot z(x) \;\; |'$

$\begin{cases} y' = z' \cdot x + z \\ y' = f(\underbrace{\tfrac{y}{x}}_{z}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z' \cdot x + z = f(z) \\ z' = \frac{f(z) - z}{x} \end{cases}$

$z' = \left(\frac{1}{x}\right)\left(f(z) - z\right)$ EVS exemplu:

$$2x^2 \cdot y' = x^2 + y^2$$

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2x^2} \qquad x \neq 0$$

$$y' = \frac{x^2}{2x^2} + \frac{y^2}{2x^2}$$

$$y' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

substituim $z(x) = \frac{y}{x}$

$$y = x \cdot z(x) \,\Big|\, '$$

$$\left.\begin{array}{l} y' = z + z' \cdot x \\ y' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 \\ y' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} z^2 \end{array}\right\} \Rightarrow z + z' x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} z^2$$

$$z' = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} z^2 - z}{x}$$

$$z' = \frac{z^2 - 2z + 1}{2x}$$

$$z' = \frac{(z-1)^2}{2x} \qquad \text{EVS}$$

$$z' = \left(\frac{1}{2x}\right)\left(z-1\right)^2$$

$$\frac{dz}{dx} = \left(\frac{1}{2x}\right)(z-1)^2$$

$$\frac{dz}{(z-1)^2} = \frac{dx}{2x}$$

$$\int \frac{1}{(z-1)^2} dz = \int \frac{1}{2x} dx$$

$$-\frac{1}{z-1} = \frac{1}{2} \cdot \ln|x| + \ln C$$

$$-\frac{1}{z-1} = \ln\left(\sqrt{|x|} \cdot C\right)$$

$$z = 1 \pm \frac{1}{\ln\left(\sqrt{|x|} \cdot C\right)}$$

3 ec lin de ordinul 1

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Pasul 1:

rezolvam ec lin omogenă

$$y' + P(x)y = 0$$

sol y_0

Pasul 2:

det o sol part y_p a ec neom folosind metoda variatiei const

Pasul 3:

$$y = y_0 + y_p.$$

exemplu:

$$y' + y \cdot tg(x) = \frac{1}{\cos x}$$

Pasul 1.

$$y' + y \cdot tg(x) = 0$$

$$y' = -y \cdot tg\, x \quad \text{EVS}$$

$$\frac{dy}{dx} = -y \cdot tg\, x$$

$$\frac{dy}{-y} = tg\, x \cdot dx$$

$$-\int \frac{1}{y} dy = \int tg\, x \cdot dx$$

$$-\ln|y| = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$-\ln y = \int \frac{1}{\cos x} \cdot (-\cos' x)\, dx$$

$$-\ln y = -\ln(\cos x) + \ln C$$

$$\ln y = \ln(-C \cdot \cos x)$$

$$y_0 = -C \cdot \cos x$$

Pasul (2)

$$y_p(x) = -C(x) \cdot \cos x$$

$$y_p' + y_p \cdot tg(x) = \frac{1}{\cos x}$$

$$(-C(x) \cdot \cos x)' + (C(x) \cdot \cos x \cdot tg\, x) = \frac{1}{\cos x}$$

$$-C'(x) \cdot \cos x - \cancel{C(x) \cdot \sin x} + \cancel{C(x) \sin(x)} = \frac{1}{\cos x}$$

$$-C'(x) \cos x = \frac{1}{\cos x}$$

$$C'(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$C(x) = -\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$C(x) = -tg\, x$$

$$y_p = tg\, x \cdot \cos x = \sin x \Rightarrow y = y_p + y_0 = \boxed{\sin x - C \cos x}$$

4 ec dif de ord 2 rezolvabile:

4.1 $y'' = f(x)$

$$(y')' = f(x)$$

$$y' = \underbrace{\int f(x)\,dx}_{F(x)} + C_1$$

$$y = \int (F(x) + C_1)\,dx + C_2.$$

- prin dublă integrare

exemplu:

$$y'' = x + \cos x + \sin x \quad \Big| \int$$

$$y' = \frac{x^2}{2} + \sin x - \cos x + C_1 \quad \Big| \int$$

$$y = \frac{x^3}{6} - \cos x - \sin x + C_1 x + C_2$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

4.2 $y'' = f(x, y')$

- facem subst $y' = z$.

$$z' = f(x, z)$$

exemplu:

$$x \cdot y'' + y' + x = 0.$$

1. subst $y' = z$

$$x \cdot z' + z + x = 0$$

$$z' = \frac{-z - x}{x}$$

$z' = -\frac{z}{x} - 1$ ec om în sens Euler

$z' + z \cdot \frac{1}{x} = -1$ ec lin

2. rezolvăm ec omogen

$$z' + \frac{1}{x} \cdot z = 0.$$

$z' = -z \cdot \frac{1}{x}$ $\quad z \neq 0.$

$z_0 = 0$ sol singulară

$$\frac{z'}{z} = -\frac{1}{x}$$

$$\frac{dz}{dx} \cdot \frac{1}{z} = -\frac{1}{x}$$

$$\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x} \quad \Big| \int$$

$$\ln|z| = -\ln|x| + \ln C = -\ln\frac{|C|}{x}$$

$$z_0 = \frac{C}{x}$$

3. sol part (met var const)

$$z_p = \frac{C(x)}{x} \quad \Big|'$$

$$z_p' = \frac{C'(x) \cdot x - C(x)}{x^2}$$

înlocuim z_p și z_p' în ec lin

$$\frac{C'(x) \cdot x - C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x} \cdot \frac{1}{x} = -1.$$

$$\frac{C'(x)}{x} = -1$$

$$C'(x) = -x$$

$$C(x) = -\frac{x^2}{2}$$

$$z_p = -\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{x}{2}.$$

$$z = z_p + z_0 = -\frac{x}{2} + \frac{C}{x} = \frac{-x^2 + C}{2x}$$

$$\left.\begin{array}{l} z(x) = -\frac{x}{2} + \frac{c}{x} \\ z(x) = y'(x) \end{array}\right\} \Rightarrow y'(x) = -\frac{x}{2} + \frac{c}{x}$$

$$y(x) = \int -\frac{x}{2}\,dx + \int \frac{c}{x}\,dx$$

$$y(x) = -\frac{x^2}{4} + C_1 \ln|x| + C_2$$

4.3.

$$y'' + ay' + by = f(x).$$

Pasul 1:

rezolvam ec omogenă

- $y'' + ay + by = \boxed{0}$

construim ec caracteristică

$$\boxed{r^2 + ar + b = 0}$$

Pasul 2: aflam r_1 și r_2. și le atașăm lui $y_1(x)$ și $y_2(x)$.

în funcție de r_1 și r_2 avem 3 CAZURI.

Pasul 3:

1: $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ $\quad \Delta > 0$.

$$y_1(x) = e^{r_1 x} \qquad y_2(x) = e^{r_2 x}$$

2: $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ $\quad r_1 = r_2$ $\quad \Delta = 0$.

$$y_1(x) = e^{r_1 x} \qquad y_2(x) = x\, e^{r_2 x}$$

3: $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ $\quad \Delta < 0$

- $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x \qquad y_2(x) = e^{\alpha x} \cdot \cancel{\cos \beta x}\ \sin \beta x$$

Pasul 4

$y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2$

Pasul 5

calculăm soluția particulară y_p

ec: $y'' + ay' + by = f(x)$

Pasul 6.

distingem 3 cazuri

Cazul 1: $f(x)$ = polinom (ex: $x^2 - 6x + 8$)

$\boxed{1.a}$ dacă $b \neq 0$ atunci y_p = un polinom de același grad. ($Q(x)$)

$\boxed{1.b}$ dacă $b = 0 \Rightarrow y_p = x\,Q(x)$

Cazul 2: $f(x)$ = polinom · exponențială

$f(x) = e^{rx} P(x)$ (ex: $y'' + 2y' + 4y = \underbrace{e^{6x}}_{e^{rx}} \underbrace{(x^2+1)}_{P(x)}$)

$\boxed{2.a}$ r nu e sol a ec caracteristice

(ec car de la rezolvarea ec omogene (Pasul 1)

$y_p = e^{rx} \cdot Q(x)$

$\boxed{2.b}$ r este răd a ec caracteristice

$y_p = x^{\mu} \cdot e^{rx} \cdot Q(x)$

μ = nr de ori când r este radacină

(de ex r este radacină dublă $\Rightarrow y_p = x^2 \cdot e^{rx} \cdot Q(x)$)

Cazul 3: $f(x)$ = polinom · exponențială · fct trigonometrică

$f(x) = e^{\alpha x} \cdot P(x) \cdot \cos \beta x / \sin \beta x$

3.a $\alpha + \beta i$ nu e rădăcină a ec caracteristă

$y_p = e^{\alpha x}[Q_1(x) \cdot \cos \beta x + Q_2(x) \cdot \sin \beta x]$

Q_1 și Q_2 = 2 polinoame de același grad ca $P(x)$

3.b $\alpha + \beta i$ ~~e~~ e rădăcină

$y_p = x \cdot e^{\alpha x}[Q_1(x) \cdot \cos \beta x + Q(x) \cdot \sin \beta x]$

Pasul 7: $y = y_0 + y_p$.

exemplu:

$y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2$

$a = -5$

$b = 6$

$f(x) = 6x^2 - 10x + 2$ ~ polinom de gradul 2.

rezolvăm ec omogenă:

$y'' - 5y' + 6y = 0$

atașăm ec caracteristică

$r^2 - 5r + 6 = 0$

$\Delta = 25 - 24 = 1$

$r_1 = \frac{5+1}{2} = 3$ $\quad r_2 = \frac{5-1}{2} = 2$

$r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ și $r_1 \neq r_2 \Rightarrow$ Cazul 1

$y_1(x) = e^{3x}$ $\quad y_2(x) = e^{2x}$

$y_0 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$

rezolvam ec neomogenă - det o sol particulară

$y_p'' - 5y_p' + 6y_p = f(x)$

$f(x)$ = pol de gr 2 $\Rightarrow$ Cazul 1 $\Rightarrow y_p = Q(x)$

$y_p = ax^2 + bx + c$

aflam y_p' și y_p'' și înlocuim în ec inițială

$y_p' = 2ax + b.$

$y_p'' = 2a.$

$2a - 5(2ax + b) + 6(ax^2 + bx + c) = 6x^2 - 10x + 2$

$6ax^2 + (-10a + 6b)x + (2a + 6c) = 6x^2 - 10x + 2.$

$\Rightarrow \begin{cases} 6a = 6 \\ -10a + 6b = -10 \\ 2a + 6c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0. \end{cases} \Rightarrow Q(x) = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0.$

$= x^2.$

$\Rightarrow y_p = x^2.$

soluția generală

$y = y_0 + y_p$

$= C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} + x^2.$

5. Sisteme de ec liniare cu coef const

(lucram cu sist de ec lin de gr 2) = are 2 ec si 2 necunoscute $y_1(x)$ si $y_2(x)$

$$\begin{cases} y_1' = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 \\ y_2' = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 \end{cases} \quad \left(\text{ex: } \begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = -4y_1 + 3y_2 \end{cases} \right)$$

- Metoda reducerii la o ec.

Pasul 1: alegem o ec si o derivam

$$y_1' = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 \quad \Big|\,'$$

$$y_1'' = a_{11} y_1' + a_{12} \cdot y_2'$$

Pasul 2: înlocuim y_1' si y_2' cu ec inițiale din sistem

$$y_1'' = a_{11}(a_{11} y_1 + a_{12} y_2) + a_{12}(a_{21} y_1 + a_{22} y_2)$$

$$y_1' = a_{11} y_1 + a_{12} y_2$$

Pasul 3: îl scoatem pe y_2 din a 2-a ec și înlocuim în prima

$$y_2 = \frac{y_1' - a_{11} y_1}{a_{12}}$$

$$y_1'' = a_{11}(a_{11} y_1 + a_{12} \cdot (\quad)) + a_{12}(a_{21} y_1 + a_{22} \cdot (\quad))$$

Pasul 4: rezolvam ec liniara de gradul 2 rezultată

Pasul 5: aflam si y_2 înlocuind înapoi în ec în functie de y_1 si y_1'

exemplu:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 5y_2 \\ y_2' = 2y_1 - y_2 \end{cases}$$

derivăm a prima ec (putem să o derivăm pe oricare)

$$y_1' = y_1 - 5y_2 \quad \Big|'$$

$$y_1'' = y_1' - 5y_2'$$

înlocuim y_1' și y_2'

$$y_1'' = (y_1 - 5y_2) - 5(2y_1 - y_2)$$

$$\begin{cases} y_1'' = -9y_1 + 5y_2 \\ y_1' = y_1 - 5y_2 \Rightarrow y_2 = -\frac{1}{5}(y_1' - y_1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_1'' = -9y_1 + 5 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot (y_1' - y_1)$$

$$y_1'' = -9y_1 - y_1' + y_1$$

$$y_1'' = -9y_1' - 8y_1$$

rezolvăm ec omogenă

$$y_1'' + 9y_1' + 8y_1 = 0$$

atașăm ec car:

$$r^2 + 9r + 8 = 0$$

$$\Delta = 81 - 32 = 49$$

$$r_1 = \frac{-9+7}{2} = -1 \qquad r_2 = \frac{-9-7}{2} = -8$$

$r_1 \neq r_2 \Rightarrow$ Cazul 1 $\Rightarrow y_{11}(x) = e^{-x} \quad y_{12}(x) = e^{-8x}$

$$\Rightarrow y_1(x) = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-8x}$$

ne întoarcem la $y_2 = -\frac{1}{5}(y_1' - y_1)$

$y_1(x) = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-8x}$

$y_1'(x) = -C_1 e^{-x} - 8C_2 e^{-8x}$

$\Rightarrow y_2 = -\frac{1}{5}\left(C_1 e^{-x} + C_2 e^{-8x} + C_1 e^{-x} + 8C_2 e^{-8x}\right)$

$= -\frac{1}{5}\left(2C_1 e^{-x} + 9 e^{-8x}\right)$

soluția problemei = $\begin{cases} y_1 = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 e^{-8x} \\ y_2 = -\frac{1}{5}\left(2C_1 e^{-x} + 9 e^{-8x}\right) \end{cases}$

INTEGRALE

- $\int 1\,dx = x + C$
- $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$
- $\int \frac{1}{x} = \ln|x| + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
- $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x\, dx = \sin x + C$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tg\, x + C$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctg\, x + C$
- $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
- $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$

~ · ~ · ~ · ~ · ~

- $\int u'(x)\, dx = u(x) + C$
- $\int u(x) \cdot u'(x) dx = \frac{u^2(x)}{2} + C$
- $\int u^m(x) \cdot u'(x) dx = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C$
- $\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln|u(x)| + C$
- $\int e^{u(x)} u'(x)\, dx = e^{u(x)} + C$
- $\int e^{-u(x)} u'(x) dx = -e^{-u(x)} + C$
- $\int a^{u(x)} u'(x)\, dx = \frac{a^{u(x)}}{\ln a} + C$
- $\int \sin u(x) \cdot u'(x)\, dx = -\cos u(x) + C$
- $\int \cos u(x) \cdot u'(x) dx = \sin u(x) + C$

Derivate :

1. $c' = 0$
2. $x' = 1$
3. $(x^n)' = n x^{n-1}$
4. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
6. $(e^x)' = e^x$; $(e^{-x})' = -e^{-x}$
7. $(a^x)' = a^x \ln a$
8. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
9. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
10. $(\text{arctg}\, x)' = \frac{1}{x^2+1}$
11. $(\text{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{x^2+1}$; $(\text{arc}\cancel{c}\text{tg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$
12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\sin x)' = \cos x$
15. $(\cos x)' = -\sin x$
16. $(\text{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
17. $(\text{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
18. $(\sqrt{x^2-a^2})' = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$
19. $(\sqrt{x^2+a^2})' = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$
20. $(\sqrt{a^2-x^2})' = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$(\text{tg}\, x)' = 1 + \text{tg}^2 x$

$(\text{ctg}\, x)' = -(1 + \text{ctg}^2 x)$

$(f \pm g)' = f' \pm g'$

$(f g)' = f' g + f g'$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' g - f g'}{g^2}$

$(\alpha f)' = \alpha \cdot f'$